Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2014. Том 55, № 5

УДК 514.132+512.817

О ЧИСЛАХ ЙОРГЕНСЕНА И ИХ АНАЛОГАХ ДЛЯ ГРУПП ОРБИФОЛДОВ ВОСЬМЕРКИ

А. Ю. Веснин, А. В. Маслей

Аннотация. Для произвольной двупорожденной подгруппы группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ определены числа Йоргенсена, Геринга — Мартина — Тана и Тана. Эти числа возникают в необходимых условиях дискретности двупорожденных групп. Известно, что для группы узла восьмерка число Йоргенсена равно 1. Для этой группы и групп гиперболических орбифолдов с сингулярностями вдоль узла восьмерка вычисляются точные значения указанных чисел или даются двусторонние оценки.

Ключевые слова: гиперболическое пространство, дискретные группы преобразований, узел, орбифолд.

Академику Юрию Григорьевичу Решетняку
к его восьмидесятипятилетию

1. Введение

Одной из ключевых проблем в теории трехмерных гиперболических многообразий и орбифолдов является вопрос о дискретности заданной подгруппы группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Напомним, что эта группа изоморфна группе всех сохраняющих ориентацию изометрий трехмерного гиперболического пространства. В 1977 г. Йоргенсен [1] показал, что вопрос о дискретности произвольных групп сводится к вопросу о дискретности двупорожденных групп.

В [2] Йоргенсен установил необходимое условие дискретности двупорожденной группы (см. также [3]). Оно представлено формулой (1) и имеет вид нестрогого неравенства, связывающего след одного из двух порождающих и след коммутатора порождающих. Еще два необходимых условия дискретности аналогичного вида (см. формулы (2) и (3)) позднее получили Тан [4] и независимо Геринг и Мартин [5]. Приведем упомянутые результаты в виде следующего утверждения.

Теорема 1.1. *Пусть элементы $f,g\in\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ порождают дискретную группу. Тогда имеют место следующие свойства.*

Если группа $\langle f,g\rangle$ неэлементарна, то

$$|\operatorname{tr}^2(f)-4|+|\operatorname{tr}[f,g]-2|\geq 1. \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13–01–00513), Лаборатории квантовой топологии Челябинского гос. университета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020), а также Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–1015.2014.1).

Если $\mathrm{tr}[f,g] \neq 1$, *то*

$$|\,\mathrm{tr}^2(f) - 2| + |\,\mathrm{tr}[f,g] - 1| \geq 1. \tag{2}$$

Если $\mathrm{tr}^2(f) \neq 1$, *то*

$$|\,\mathrm{tr}^2(f) - 1| + |\,\mathrm{tr}[f,g]| \geq 1. \tag{3}$$

Неравенство (1) известно как *неравенство Йоргенсена.* Неэлементарные дискретные двупорожденные группы, имеющие такую пару порождающих, на которой в неравенстве Йоргенсена достигается равенство, называют *группами Йоргенсена.*

Изучению свойств групп Йоргенсена посвящены достаточно интенсивные исследования. Полностью описан класс фуксовых групп Йоргенсена — треугольные группы с сигнатурами $(2,3,n)$, где $n \geq 7$ или $n = \infty$. В [6] установлено, что если для пары порождающих (f,g) группы Йоргенсена неравенство Йоргенсена превращается в равенство, то либо f — эллиптический элемент и $\mathrm{tr}(fgfg^{-1}) = 1$, либо f — параболический элемент. Учитывая эту альтернативу, принято говорить о группах Йоргенсена *эллиптического* и *параболического* типов. Класс групп Йоргенсена параболического типа исследовался в серии работ Ли, Оичи и Сато [7–9]. Они высказали гипотезу о том, что любая группа Йоргенсена параболического типа сопряжена одной из описанных ими групп. Эта гипотеза опровергнута Каллаханом в [10]. Проблема классификации групп Йоргенсена по-прежнему остается открытой.

Двупорожденные дискретные группы, имеющие такую пару порождающих, что след их коммутатора не равен единице, на которой достигается равенство в (2), будем называть *группами Геринга — Мартина — Тана* или кратко GMT-*группами.* Двупорожденные дискретные группы, имеющие такую пару порождающих, что квадрат следа первого порождающего не равен единице, на которой достигается равенство в (3), будем называть *группами Тана.* Проблемы классификации GMT-групп и групп Тана весьма далеки от решения.

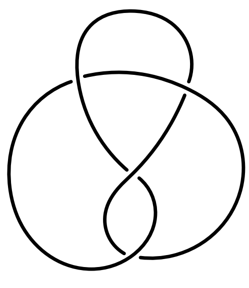

Рис. 1.

Как заметил Сато [11], группа узла восьмерка $\pi_1(S^3 \setminus F)$ является группой Йоргенсена. В разд. 5 показано, что группа орбифолда восьмерки $\pi^{\mathrm{orb}}(F(4))$ (рис. 1) является GMT-группой (следствие 5.1).

Очевидно, не для всех двупорожденных дискретных групп достигаются равенства в неравенствах (1), (2) или (3). Тем не менее, как будет показано ниже, вычисление величин, стоящих в левых частях этих неравенств, представляет самостоятельный интерес.

Точная нижняя грань выражения из левой части (1), взятая по всем парам порождающих группы, называется *числом Йоргенсена* группы. Аналогично точная нижняя грань выражения из левой части (2), взятая по всем допустимым парам порождающих группы, называется *числом Геринга — Мартина — Тана* или кратко GMT-*числом* группы, а точная нижняя грань выражения из левой части (3) называется *числом Тана* группы.

В разд. 4 показано, что числа Йоргенсена групп орбифолдов восьмерки $\pi^{\mathrm{orb}}(F(n))$, $n \geq 4$, стремятся к числу Йоргенсена группы узла восьмерка $\pi_1(S^3 \setminus F)$ при $n \to \infty$ (теорема 4.1).

В разд. 5 показано, что GMT-число группы узла восьмерка $\pi_1(S^3 \setminus F)$ равно 3 (теорема 5.1) и, значит, она не является GMT-группой, и приведены оценки на GMT-числа групп орбифолдов восьмерки $\pi^{\text{orb}}(F(n))$.

В разд. 6 даны двусторонние оценки на числа Тана групп $\pi_1(S^3 \setminus F)$ и $\pi^{\text{orb}}(F(n))$ (теоремы 6.1 и 6.2). В частности, из нижней оценки следует, что $\pi_1(S^3 \setminus F)$ не является группой Тана.

2. Терминология и определения

Обозначим через $\mathbb{H}^3$ трехмерное гиперболическое пространство, представленное моделью Пуанкаре в верхнем полупространстве. При этом $\partial\mathbb{H}^3 = \overline{\mathbb{C}}$. Известно, что группа всех сохраняющих ориентацию изометрий $\mathbb{H}^3$ изоморфна $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\{\pm\mathrm{Id}\}$. В дальнейшем не будем различать матрицу $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ и класс эквивалентности $\{\pm M\} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Действие элемента $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ на $\mathbb{H}^3 = \{(z,t) \mid z \in \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R}_+\}$ определяется по правилу

$$g(z,t) = \left(\frac{(az+b)\overline{(cz+d)} + a\overline{c}t^2}{|cz+d|^2 + |c|^2t^2}, \frac{t}{|cz+d|^2 + |c|^2t^2} \right).$$

Напомним, что матрица $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \setminus \{\pm\mathrm{Id}\}$ называется *эллиптической*, если $\mathrm{tr}^2(M) \in [0,4)$, *параболической*, если $\mathrm{tr}^2(M) = 4$, *локсодромической*, если $\mathrm{tr}^2(M) \in \mathbb{C} \setminus [0,4]$. Элемент группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ будем называть *эллиптическим*, *параболическим* или *локсодромическим*, если таким является его представитель в $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

Отметим, что условия $\mathrm{tr}[f,g] \neq 1$ и $\mathrm{tr}^2(f) \neq 1$ в формулировке теоремы 1.1 означают, что элементы $[f,g]$ и f не являются эллиптическими порядка три.

Говорят, что группа $G < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *дискретна*, если она является дискретным множеством в матричной фактор-топологии. Группа $G < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ называется *элементарной*, если существует конечная G-орбита в $\mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$, и *неэлементарной* в противном случае. Неэлементарная группа $G < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ дискретна тогда и только тогда, когда для любых элементов $f, g \in G$ порожденная ими группа дискретна [1, 3].

Пусть $f, g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, $[f,g] = fgf^{-1}g^{-1}$ и $\langle f, g\rangle$ — группа, порожденная f и g. Тогда величины

$$\gamma(f,g) = \mathrm{tr}[f,g] - 2, \quad \beta(f) = \mathrm{tr}^2(f) - 4, \quad \beta(g) = \mathrm{tr}^2(g) - 4$$

корректно определены для f и g. Упорядоченную тройку $(\gamma(f,g), \beta(f), \beta(g))$ будем называть *параметрами* группы $\langle f, g\rangle$ и обозначать через $\mathrm{par}\langle f, g\rangle$. Очевидно, что параметры группы зависят от выбора ее порождающих. Как показали Геринг и Мартин [12], для любых $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ существует группа $\langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, причем единственная с точностью до сопряжения, такая, что $\mathrm{par}\langle f, g\rangle = (\gamma, \beta_1, \beta_2)$.

3. Узел восьмерка и орбифолды восьмерки

Обозначим через F узел восьмерка. В литературе по теории узлов этот узел имеет обозначение 4_1, а также обозначение $5/2$, когда речь идет о двухмостовых узлах. Узел восьмерка является одним из наиболее изученных гиперболических узлов, и $\mathrm{vol}(S^3 \setminus F) = 2{,}029\ldots$, где $S^3 \setminus F$ — его дополнение в трехмерной сфере.

Известно, что фундаментальная группа дополнения $S^3 \setminus F$ имеет следующее копредставление:

$$\pi_1(S^3 \setminus F) = \langle f, g \mid [f^{-1}, g]f = g[f^{-1}, g] \rangle. \tag{4}$$

Как показал Райли [13], эта группа имеет точное представление в $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, при котором можем полагать, что

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $\omega = (-1 + \sqrt{-3})/2$. Отметим, что $f, g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ — параболические элементы. Далее мы не будем различать группу $\pi_1(S^3 \setminus F)$ и ее образ при указанном точном представлении. Порождающие (5) будем называть *каноническими*. Группа $\pi_1(S^3 \setminus F)$ неэлементарна и дискретна (см., например, [13]). Более того, узел восьмерка является единственным арифметическим узлом [14], причем $\pi_1(S^3 \setminus F)$ является подгруппой группы $\mathrm{PSL}(2, \mathscr{O}_3)$, где $\mathscr{O}_3$ — кольцо целых мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Следовательно, матрицы, представляющие элементы группы $\pi_1(S^3 \setminus F)$, состоят из элементов вида $a + b\omega$, где $a, b \in \mathbb{Z}$.

Обозначим через $F(n)$ орбифолд, носителем которого является трехмерная сфера S^3, а сингулярным множеством — узел F с группой изотропии $\mathbb{Z}_n$. Далее орбифолд $F(n)$ будем кратко называть *орбифолдом восьмерки.* Группа орбифолда $F(n)$ имеет следующее копредставление:

$$\pi^{\mathrm{orb}}(F(n)) = \big\langle f_n, g_n \mid f_n^n = g_n^n = 1,\ [g_n, f_n]g_n^{-1} = f_n[g_n, f_n] \big\rangle.$$

Известно, что орбифолд $F(n)$ сферический при $n = 2$, евклидов при $n = 3$ и гиперболический при $n \geq 4$.

Пусть $n \geq 4$. Как показали А. Д. Медных и А. А. Рассказов [15], группа $\pi^{\mathrm{orb}}(F(n))$ имеет точное представление в $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, при котором можем считать, что

$$f_n = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{n} & ie^{\rho_n/2}\sin\frac{\pi}{n} \\ ie^{-\rho_n/2}\sin\frac{\pi}{n} & \cos\frac{\pi}{n} \end{pmatrix}, \quad g_n = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{n} & ie^{-\rho_n/2}\sin\frac{\pi}{n} \\ ie^{\rho_n/2}\sin\frac{\pi}{n} & \cos\frac{\pi}{n} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где

$$\operatorname{ch}\rho_n = \frac{1}{4}\big(1 + \operatorname{ctg}^2(\pi/n) - i\sqrt{3\operatorname{ctg}^4(\pi/n) + 14\operatorname{ctg}^2(\pi/n) - 5}\big). \tag{7}$$

Отметим, что $f_n, g_n \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ – эллиптические элементы. Параметр ρ_n выражает комплексное расстояние между осями элементов f_n и g_n, т. е. вещественная часть ρ_n равна гиперболическому расстоянию, а мнимая часть ρ_n — углу между этими осями. Далее мы не будем различать группу $\pi^{\mathrm{orb}}(F(n))$ и ее образ при указанном точном представлении. Таким образом, $F(n) = \mathbb{H}^3/\pi^{\mathrm{orb}}(F(n))$. Порождающие f_n и g_n, задаваемые (6), будем называть *каноническими.* Группы $\pi^{\mathrm{orb}}(F(n))$ неэлементарны и дискретны (см., например, [15]). Вопрос об арифметичности этих групп решен в [16]. Формулы объемов для орбифолдов $F(n)$ найдены в [17]. Циклические накрытия орбифолдов $F(n)$ известны как *многообразия Фибоначчи*, поскольку их фундаментальные группы изоморфны *группам Фибоначчи* с копредставлением

$$F(2, 2n) = \langle x_1, x_2, \dots, x_{2n} \mid x_i x_{i+1} = x_{i+2},\ i = 1, 2, \dots, 2n \rangle,$$

где индексы берутся по модулю $2n$. Объемы, изометрии и сложность многообразий Фибоначчи исследованы в [18–21].

Установим вспомогательную формулу, которая будет использоваться в следующих разделах.

Лемма 3.1. *Пусть* f_n *и* g_n, $n \ge 4$, — *элементы группы* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, *заданные формулами* (6) *и* (7). *Тогда для любого* $\lambda \in \mathbb{R}$ *имеет место равенство*

$$|\operatorname{tr}[f_n, g_n] - \lambda| = \sqrt{(\lambda^2 - 3\lambda + 3) + 4(\lambda - 1)\sin^2(\pi/n)}.$$

Доказательство. Обозначим $\nu = \pi/n$. Из (6) и (7) следует, что

$$\operatorname{tr}^2(f_n) = \operatorname{tr}^2(g_n) = 4\cos^2\nu,$$

$$\operatorname{sh}^2\rho_n = -\frac{5 + \operatorname{ctg}^2\nu + i\sqrt{3\operatorname{ctg}^4\nu + 14\operatorname{ctg}^2\nu - 5}}{8\sin^2\nu}.$$

По лемме 4.2 из [22]

$$\operatorname{tr}[f_n, g_n] - 2 = \frac{1}{4}(\operatorname{tr}^2(f_n) - 4)(\operatorname{tr}^2(g_n) - 4)\operatorname{sh}^2\rho_n,$$

откуда

$$\begin{aligned}|\operatorname{tr}[f_n, g_n] - \lambda| &= |4\sin^4\nu\operatorname{sh}^2\rho_n + 2 - \lambda| \\ &= \frac{1}{2}|(5 + \operatorname{ctg}^2\nu + i\sqrt{3\operatorname{ctg}^4\nu + 14\operatorname{ctg}^2\nu - 5})\sin^2\nu + (2\lambda - 4)|.\end{aligned}$$

Принимая во внимание тот факт, что

$$\begin{aligned}&(5 + \operatorname{ctg}^2\nu + i\sqrt{3\operatorname{ctg}^4\nu + 14\operatorname{ctg}^2\nu - 5})\sin^2\nu \\ &\quad= 5\sin^2\nu + \cos^2\nu + i\sqrt{3\cos^4\nu + 14\cos^2\nu\sin^2\nu - 5\sin^4\nu} \\ &\quad\quad= 4\sin^2\nu + 1 + i\sqrt{-16\sin^4\nu + 8\sin^2\nu + 3},\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}|\operatorname{tr}[f_n, g_n] - \lambda| &= \frac{1}{2}|4\sin^2\nu + (2\lambda - 3) + i\sqrt{-16\sin^4\nu + 8\sin^2\nu + 3}| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{16\sin^4\nu + 8(2\lambda - 3)\sin^2\nu + (2\lambda - 3)^2 - 16\sin^4\nu + 8\sin^2\nu + 3} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(4\lambda^2 - 12\lambda + 12) + 8(2\lambda - 2)\sin^2\nu} = \sqrt{(\lambda^2 - 3\lambda + 3) + 4(\lambda - 1)\sin^2\nu}.\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

4. Числа Йоргенсена

Для произвольных элементов $f, g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ обозначим

$$\mathscr{J}(f, g) = |\operatorname{tr}^2(f) - 4| + |\operatorname{tr}[f, g] - 2|.$$

Пусть $G < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ — двупорожденная неэлементарная группа. Величина

$$\mathscr{J}(G) = \inf_{\langle f,g\rangle = G}\mathscr{J}(f, g),$$

где инфимум берется по всем упорядоченным парам (f, g) порождающих группы G, называется *числом Йоргенсена* группы G. В силу теоремы 1.1 если G — дискретная группа, то $\mathscr{J}(G) \ge 1$.

Как показали Оичи и Сато [23], для любого $n \in \mathbb{N}$ существует неэлементарная дискретная группа G такая, что $\mathscr{J}(G) = n$. Более того, для любого вещественного числа $r > 4$ существует классическая группа Шоттки такая, что $\mathscr{J}(G) = r$. Точные значения чисел Йоргенсена для групп некоторых двухмостовых узлов и зацеплений вычислены в [10, 24]. Например, число Йоргенсена группы зацепления Уайтхеда равно двум.

Двупорожденная неэлементарная дискретная группа $G < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ называется *группой Йоргенсена*, если она может быть порождена такими элементами f и g, что $\mathscr{J}(f,g) = 1$. Следовательно, если G — группа Йоргенсена, то $\mathscr{J}(G) = 1$.

Понятие группы Йоргенсена введено в [6]. В этой работе показано, что

(1) каждая группа Йоргенсена имеет в качестве подгрупп группы Йоргенсена специального вида;

(2) если $G = \langle f, g\rangle$ — группа Йоргенсена и $\mathscr{J}(f,g) = 1$, то либо f — эллиптический элемент порядка не меньше семи и $\mathrm{tr}(fgfg^{-1}) = 1$, либо f — параболический элемент;

(3) единственными фуксовыми группами Йоргенсена являются треугольные группы с сигнатурами $(2,3,n)$, где $n \geq 7$ или $n = \infty$.

Бесконечные семейства неизоморфных клейновых групп Йоргенсена построены в [25], а в [7–9] описан широкий класс групп Йоргенсена параболического типа. В [10] классифицированы все четырнадцать некокомпактных арифметических групп Йоргенсена.

Группа узла восьмерка $\pi_1(S^3 \setminus F)$ является группой Йоргенсена [11]. Действительно, для канонических порождающих (5) этой группы выполнено равенство $[f,g] = \begin{pmatrix} 1-\omega+\omega^2 & \omega \\ \omega^2 & 1+\omega \end{pmatrix}$, откуда $\mathrm{tr}[f,g] = 2+\omega^2$ и $\mathscr{J}(f,g) = |4-4| + |2+\omega^2-2| = 1$. Более того, Каллахан в [10] показал, что $\pi_1(S^3 \setminus F)$ является единственной группой Йоргенсена, не имеющей элементов конечного порядка.

Оценим числа Йоргенсена групп гиперболических орбифолдов восьмерки $F(n)$.

Теорема 4.1. *Пусть $n \geq 4$. Для числа Йоргенсена группы $\pi^{\mathrm{orb}}(F(n))$ имеет место двойное неравенство*

$$1 \leq \mathscr{J}(\pi^{\mathrm{orb}}(F(n))) \leq 4\sin^2(\pi/n) + \sqrt{1 + 4\sin^2(\pi/n)}.$$

Доказательство. Левое неравенство выполнено, так как $\pi^{\mathrm{orb}}(F(n))$ — неэлементарная дискретная группа. Установим правое неравенство, выбрав канонические порождающие f_n и g_n, заданные формулами (6) и (7). Из леммы 3.1 для $\lambda = 2$ следует, что

$$\mathscr{J}(f_n, g_n) = |(2\cos(\pi/n))^2 - 4| + |\,\mathrm{tr}[f_n, g_n] - 2| = 4\sin^2(\pi/n) + \sqrt{1 + 4\sin^2(\pi/n)}.$$

Поскольку $\mathscr{J}(G) \leq \mathscr{J}(f_n, g_n)$, теорема доказана. □

Из этой теоремы вытекает, что числа Йоргенсена групп орбифолдов восьмерки стремятся к числу Йоргенсена группы узла восьмерка.

Следствие 4.1. *Имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{J}(\pi^{\mathrm{orb}}(F(n))) = \mathscr{J}(\pi_1(S^3 \setminus F)).$$

5. Числа Геринга — Мартина — Тана

Для $f, g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ таких, что $\mathrm{tr}[f,g] \neq 1$, обозначим

$$\mathscr{G}(f,g) = |\operatorname{tr}^2(f) - 2| + |\operatorname{tr}[f,g] - 1|.$$

Если пара (f,g) такова, что $\mathrm{tr}[f,g] = 1$, то для нее величина $\mathscr{G}(f,g)$ не определяется. Пусть $G < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ — двупорожденная группа. Величину

$$\mathscr{G}(G) = \inf_{\langle f,g\rangle = G} \mathscr{G}(f,g)$$

будем называть *числом Геринга — Мартина — Тана* или кратко GMT-*числом* группы G. По теореме 1.1 если G — дискретная группа, то $\mathscr{G}(G) \geq 1$.

Двупорожденная дискретная группа $G < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ называется GMT-*группой*, если она может быть порождена такими элементами f и g, что $\mathscr{G}(f,g) = 1$. Следовательно, если G — GMT-группа, то $\mathscr{G}(G) = 1$.

Среди примеров GMT-групп имеются как элементарные (диэдральная группа порядка восемь), так и неэлементарные группы (см. [4, 26]). Неэлементарными GMT-группами являются группы из бесконечного семейства групп, построенного Маскитом в [27]. Это семейство состоит из групп $\langle f,g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, обладающих следующим свойством: f — эллиптический элемент порядка 4 с неподвижными точками $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ и $g(z_1) = z_2$.

Следующее утверждение показывает, что группа узла восьмерка не является GMT-группой.

Теорема 5.1. *Для числа Геринга — Мартина — Тана группы $\pi_1(S^3 \setminus F)$ имеет место равенство $\mathscr{G}(\pi_1(S^3 \setminus F)) = 3$.*

Доказательство. Поскольку $\pi_1(S^3 \setminus F) < \mathrm{PSL}(2,\mathscr{O}_3)$, для любого $h \in \pi_1(S^3 \setminus F)$ представляющая его матрица состоит из элементов вида $a + b\omega$, где $a, b \in \mathbb{Z}$.

Покажем, что $|\operatorname{tr}^2(h) - 2| \geq 2$ для любого $h \in \pi_1(S^3 \setminus F)$. Предположим, что $|\operatorname{tr}^2(h) - 2| < 2$. Полагая $\mathrm{tr}(h) = k + \ell\omega$, где $k, \ell \in \mathbb{Z}$, перепишем неравенство в виде

$$(k^2 - \ell^2/2 - k\ell - 2)^2 + 3(k\ell - \ell^2/2)^2 < 4.$$

Нетрудно проверить, что это неравенство имеет только следующие целые решения: $(k,\ell) = (\pm 1, 0)$. Следовательно, $\operatorname{tr}^2(h) = 1$, и, значит, h — эллиптический элемент порядка три. Однако как фундаментальная группа трехмерного гиперболического многообразия $\pi_1(S^3 \setminus F)$ не содержит кручений; противоречие.

Далее покажем, что для любых $h_1, h_2 \in \pi_1(S^3 \setminus F)$ выполнено неравенство $|\operatorname{tr}[h_1,h_2] - 1| \geq 1$. Предположим, что $|\operatorname{tr}[h_1,h_2] - 1| < 1$. Полагая $\mathrm{tr}[h_1,h_2] = m + n\omega$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, перепишем это неравенство в виде

$$|m + n\omega - 1| = \sqrt{(m - n/2 - 1)^2 + 3n^2/4} = \sqrt{m^2 + n^2 + 1 - mn - 2m + n} < 1.$$

Поскольку подкоренное выражение является целым числом, неравенство имеет единственное целое решение $(m,n) = (1,0)$. Поэтому $\mathrm{tr}[h_1,h_2] = 1$, следовательно, $[h_1,h_2]$ — эллиптический элемент порядка три; противоречие.

Таким образом, для любых элементов $h_1, h_2 \in \pi_1(S^3 \setminus F)$ выполнено неравенство

$$\mathscr{G}(h_1,h_2) = |\operatorname{tr}^2(h_1) - 2| + |\operatorname{tr}[h_1,h_2] - 1| \geq 2 + 1 = 3.$$

Нетрудно видеть, что равенство достигается для канонических порождающих f и g. В самом деле, $\operatorname{tr}^2(f) = 4$, $\mathrm{tr}[f,g] = 2 + w^2$ и $\mathscr{G}(f,g) = |4-2| + |2+\omega^2-1| = 2 + |1+\omega^2| = 3$. $\square$

Оценим числа Геринга — Мартина — Тана групп гиперболических орбифолдов восьмерки $F(n)$.

Теорема 5.2. *Пусть $n \geq 4$. Для числа Геринга — Мартина — Тана группы $\pi^{\mathrm{orb}}(F(n))$ имеет место двойное неравенство*

$$1 \leq \mathscr{G}(\pi^{\mathrm{orb}}(F(n))) \leq 3 - 4\sin^2(\pi/n).$$

Доказательство. Левое неравенство выполнено, поскольку для любого $n \geq 4$ группа $\pi^{\mathrm{orb}}(F(n))$ дискретна. Покажем, что имеет место правое неравенство. Выберем канонические порождающие f_n и g_n, заданные формулами (6) и (7). Из леммы 3.1 для $\lambda = 1$ следует, что $|\operatorname{tr}[f_n, g_n] - 1| = 1$. Значит,

$$\mathscr{G}(f_n, g_n) = |\operatorname{tr}^2(f_n) - 2| + |\operatorname{tr}[f_n, g_n] - 1| = |4\cos^2(\pi/n) - 2| + 1 = 3 - 4\sin^2(\pi/n).$$

Поскольку $\mathscr{G}(\pi^{\mathrm{orb}}(F(n))) \leq \mathscr{G}(f_n, g_n)$, теорема доказана. □

Эта теорема позволяет привести, по-видимому, первый пример группы компактного гиперболического орбифолда циклического типа, являющейся GMT-группой.

Следствие 5.1. *Группа орбифолда восьмерки $\pi^{\mathrm{orb}}(F(4))$ является* GMT-*группой.*

6. Числа Тана

Для $f, g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ таких, что $\operatorname{tr}^2(f) \neq 1$, обозначим

$$\mathscr{T}(f, g) = |\operatorname{tr}^2(f) - 1| + |\operatorname{tr}[f, g]|.$$

Если пара (f, g) такова, что $\operatorname{tr}^2(f) = 1$, то для нее величина $\mathscr{T}(f, g)$ не определяется. Пусть $G < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ — двупорожденная группа. Величину

$$\mathscr{T}(G) = \inf_{\langle f, g\rangle = G} \mathscr{T}(f, g)$$

будем называть *числом Тана* группы G. По теореме 1.1 если G — дискретная группа, то $\mathscr{T}(G) \geq 1$.

Двупорожденная дискретная группа $G < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ называется *группой Тана*, если она может быть порождена такими элементами f и g, что $\mathscr{T}(f, g) = 1$. Следовательно, если G — группа Тана, то $\mathscr{T}(G) = 1$.

Примерами элементарных групп Тана служат диэдральная группа порядка 8 и группа вращений тетраэдра $\mathbb{A}_4$ (см. [4, 26]). Отметим, что упоминавшиеся в разд. 5 группы, построенные Маскитом в [27], являются не только GMT-группами, но и неэлементарными группами Тана.

Рассмотрим группу узла восьмерка $\pi_1(S^3 \setminus F)$ с каноническими порождающими f и g. Прямые вычисления показывают, что $\mathscr{T}(f, g) = |4 - 1| + |2 + \omega^2| = 3 + \sqrt{3}$. Таким образом, имеет место неравенство $\mathscr{T}(\pi_1(S^3 \setminus F)) \leq 3 + \sqrt{3}$.

Следующее утверждение показывает, что эту верхнюю оценку можно улучшить, а также указать нижнюю оценку. Из приведенной нижней оценки следует, что группа узла восьмерка $\pi_1(S^3 \setminus F)$ не является группой Тана.

Теорема 6.1. *Для числа Тана группы $\pi_1(S^3 \setminus F)$ имеет место двойное неравенство*

$$1 + \sqrt{3} \leq \mathscr{T}(\pi_1(S^3 \setminus F)) \leq \sqrt{7} + \sqrt{3}.$$

Доказательство. Установим каждое неравенство отдельно.

Лемма 6.1. *Имеет место неравенство* $1+\sqrt{3} \le \mathscr{T}(\pi_1(S^3 \setminus F))$.

Доказательство. Поскольку $\pi_1(S^3 \setminus F) < \mathrm{PSL}(2, \mathscr{O}_3)$, для любого $h \in \pi_1(S^3 \setminus F)$ представляющая его матрица состоит из элементов вида $a + b\omega$, где $a, b \in \mathbb{Z}$.

Покажем, что $|\operatorname{tr}^2(h) - 1| \ge \sqrt{3}$ для любого $h \in \pi_1(S^3 \setminus F)$. Предположим, что $|\operatorname{tr}^2(h) - 1| < \sqrt{3}$. Полагая $\operatorname{tr}(h) = k + \ell\omega$, где $k, \ell \in \mathbb{Z}$, перепишем неравенство в виде

$$(k^2 - \ell^2/2 - k\ell - 1)^2 + 3(k\ell - \ell^2/2)^2 < 3.$$

Нетрудно проверить, что это неравенство имеет только следующие целые решения: $(k, \ell) = (\pm 1, 0)$. Стало быть, $\operatorname{tr}^2(h) = 1$, и, значит, h — эллиптический элемент порядка три. Однако как фундаментальная группа трехмерного гиперболического многообразия $\pi_1(S^3 \setminus F)$ не содержит кручений; противоречие.

Далее покажем, что для любых $h_1, h_2 \in \pi_1(S^3 \setminus F)$ выполнено неравенство $|\operatorname{tr}[h_1, h_2]| \ge 1$. Предположим, что $|\operatorname{tr}[h_1, h_2]| < 1$. Полагая $\operatorname{tr}[h_1, h_2] = m + n\omega$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, перепишем это неравенство в виде

$$|m + n\omega| = \sqrt{(m - n/2)^2 + 3n^2/4} = \sqrt{m^2 - mn + n^2} < 1.$$

Поскольку подкоренное выражение является целым числом, неравенство имеет единственное целое решение: $(m, n) = (0, 0)$. Поэтому $\operatorname{tr}[h_1, h_2] = 0$, следовательно, $[h_1, h_2]$ — эллиптический элемент порядка два; противоречие.

Таким образом, для любых элементов $h_1, h_2 \in \pi_1(S^3 \setminus F)$ выполнено неравенство

$$\mathscr{T}(h_1, h_2) = |\operatorname{tr}^2(h_1) - 1| + |\operatorname{tr}[h_1, h_2]| \ge \sqrt{3} + 1.$$

В частности, для любой пары (f_*, g_*) порождающих группы $\pi_1(S^3 \setminus F)$ справедлива оценка снизу $\sqrt{3} + 1 \le \mathscr{T}(f_*, g_*)$. Лемма доказана. □

Лемма 6.2. *Имеет место неравенство* $\mathscr{T}(\pi_1(S^3 \setminus F)) \le \sqrt{7} + \sqrt{3}$.

Доказательство. Обозначим $h = [f^{-1}, g]$. Из соотношений в группе $\pi_1(S^3 \setminus F)$ следует, что $g = hfh^{-1}$, поэтому $\pi_1(S^3 \setminus F) = \langle h, f \rangle$. Прямые вычисления показывают, что

$$h = [f^{-1}, g] = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ 1+\omega & 1-\omega \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad [h, f] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\omega & 1+\omega \end{pmatrix},$$

откуда $\operatorname{tr}^2(h) = (1-\omega)^2$ и $\operatorname{tr}[h, f] = 2 + \omega$. Значит,

$$\mathscr{T}(h, f) = |(1-\omega)^2 - 1| + |2 + \omega| = \sqrt{7} + \sqrt{3}.$$

Поскольку $\mathscr{T}(\pi_1(S^3 \setminus F)) \le \mathscr{T}(h, f)$, лемма доказана. □

Теорема 6.1 следует из лемм 6.1 и 6.2. □

Оценим числа Тана групп гиперболических орбифолдов восьмерки $F(n)$.

Теорема 6.2. *Пусть* $n \ge 4$. *Для числа Тана группы* $\pi^{\mathrm{orb}}(F(n))$ *имеет место двойное неравенство*

$$1 \le \mathscr{T}(\pi^{\mathrm{orb}}(F(n))) \le \begin{cases} 3 - 4\sin^2(\pi/n) + \sqrt{3 - 4\sin^2(\pi/n)}, & n \le 7, \\ 1 + \sqrt{2} + \sqrt{1 + \sqrt{2}}, & n = 8, \\ \sqrt{7 - 8\sin^2(\pi/n)} + \sqrt{3 - 4\sin^2(\pi/n)}, & n \ge 9. \end{cases}$$

Доказательство. Нижняя оценка, очевидно, верна. Для доказательства верхней оценки начнем с выбора канонических порождающих f_n и g_n, заданных формулами (6) и (7).

Лемма 6.3. *Имеет место формула*

$$\mathscr{T}(f_n, g_n) = 3 - 4\sin^2(\pi/n) + \sqrt{3 - 4\sin^2(\pi/n)}.$$

Доказательство. Из (6) следует, что

$$|\operatorname{tr}^2(f_n) - 1| = |4\cos^2(\pi/n) - 1| = |3 - 4\sin^2(\pi/n)| = 3 - 4\sin^2(\pi/n).$$

По лемме 3.1 для $\lambda = 0$ имеем $|\operatorname{tr}[f_n, g_n]| = \sqrt{3 - 4\sin^2(\pi/n)}$. Значит,

$$\mathscr{T}(f_n, g_n) = |\operatorname{tr}^2(f_n) - 1| + |\operatorname{tr}[f_n, g_n]| = 3 - 4\sin^2(\pi/n) + \sqrt{3 - 4\sin^2(\pi/n)}.$$

Поскольку $\mathscr{T}(\pi^{\mathrm{orb}}(F(n))) \le \mathscr{T}(f_n, g_n)$, лемма доказана. $\square$

Выберем другую пару порождающих. А именно, обозначим $h_n = [g_n, f_n]$ и $k_n = g_n^{-1}$. Из соотношений в группе $\pi^{\mathrm{orb}}(F(n))$ следует, что

$$f_n = [g_n, f_n] g_n^{-1} [g_n, f_n]^{-1} = h_n k_n h_n^{-1},$$

значит, $\pi^{\mathrm{orb}}(F(n)) = \langle h_n, k_n \rangle$.

Лемма 6.4. *Имеет место формула*

$$\mathscr{T}(h_n, k_n) = \sqrt{7 - 8\sin^2(\pi/n)} + \sqrt{3 - 4\sin^2(\pi/n)}.$$

Доказательство. Обозначим $\nu = \pi/n$. Покажем, что

$$|\operatorname{tr}^2(h_n) - 1| = \sqrt{7 - 8\sin^2\nu}. \tag{8}$$

Действительно, можем записать

$$|\operatorname{tr}^2(h_n) - 1| = |\operatorname{tr}^2[g_n, f_n] - 1| = |\operatorname{tr}[g_n, f_n] - 1|\,|\operatorname{tr}[g_n, f_n] + 1|. \tag{9}$$

Из леммы 3.1 для $\lambda = 1$ и $\lambda = -1$ следует, что

$$|\operatorname{tr}[g_n, f_n] - 1| = 1 \quad \text{и} \quad |\operatorname{tr}[g_n, f_n] + 1| = \sqrt{7 - 8\sin^2\nu}.$$

Подставляя эти выражения в (9), получим (8).

Покажем, что

$$|\operatorname{tr}[h_n, k_n]| = \sqrt{3 - 4\sin^2\nu}. \tag{10}$$

В самом деле,

$$\begin{aligned}
[h_n, k_n] &= \big[[g_n, f_n], g_n^{-1}\big] = [g_n, f_n] g_n^{-1} [g_n, f_n]^{-1} g_n \\
&= f_n\, g_n = \begin{pmatrix} \cos\nu & ie^{\rho_n/2}\sin\nu \\ ie^{-\rho_n/2}\sin\nu & \cos\nu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\nu & ie^{-\rho_n/2}\sin\nu \\ ie^{\rho_n/2}\sin\nu & \cos\nu \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\nu - e^{\rho_n}\sin^2\nu & * \\ * & \cos^2\nu - e^{-\rho_n}\sin^2\nu \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

откуда

$$|\operatorname{tr}[h_k, k_n]| = |2\cos^2\nu - (e^{\rho_n} + e^{-\rho_n})\sin^2\nu| = |2(\cos^2\nu - \operatorname{ch}\rho_n \sin^2\nu)|. \tag{11}$$

Напомним, что комплексное расстояние ρ_n удовлетворяет условию (7) вида

$$\operatorname{ch}\rho_n = \frac{1}{4}(1 + \operatorname{ctg}^2\nu - i\sqrt{3\operatorname{ctg}^4\nu + 14\operatorname{ctg}^2\nu - 5}).$$

Значит,

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}\rho_n \sin^2(\pi/n) &= \frac{1}{4}\big(1+\operatorname{ctg}^2\nu - i\sqrt{3\operatorname{ctg}^4\nu + 14\operatorname{ctg}^2\nu - 5}\big)\sin^2\nu \\ &= \frac{1}{4}\big(\sin^2\nu + \cos^2\nu - i\sqrt{3\cos^4\nu + 14\cos^2\nu\sin^2\nu - 5\sin^4\nu}\big) \\ &= \frac{1}{4}\big(1 - i\sqrt{-16\sin^4\nu + 8\sin^2\nu + 3}\big).\end{aligned}$$

Подставляя найденное выражение в (11), приходим к (10):

$$\begin{aligned}|\operatorname{tr}[h_n,k_n]| &= 2|\cos^2\nu - \operatorname{ch}\rho_n\sin^2\nu| \\ &= \frac{1}{2}\big|4\cos^2\nu - 1 + i\sqrt{-16\sin^4\nu + 8\sin^2\nu + 3}\big| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(3-4\sin^2\nu)^2 - 16\sin^4\nu + 8\sin^2\nu + 3} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{12 - 16\sin^2\nu} = \sqrt{3 - 4\sin^2\nu}.\end{aligned}$$

Таким образом, с учетом (8) и (10) имеем

$$\mathscr{T}(h_n,k_n) = |\operatorname{tr}^2(h_n) - 1| + |\operatorname{tr}[h_k,k_n]| = \sqrt{7 - 8\sin^2(\pi/n)} + \sqrt{3 - 4\sin^2(\pi/n)}.$$

Лемма доказана. □

Поскольку $\mathscr{T}(\pi^{\mathrm{orb}}(F(n))) \le \mathscr{T}(f_n,g_n)$ и $\mathscr{T}(\pi^{\mathrm{orb}}(F(n))) \le \mathscr{T}(h_n,k_n)$, для завершения доказательства теоремы 6.2 осталось сравнить оценки из лемм 6.3 и 6.4. Нетрудно видеть, что неравенство $\mathscr{T}(f_n,g_n) \le \mathscr{T}(h_n,k_n)$ выполнено тогда и только тогда, когда $4 \le n \le 8$. При этом оно обращается в равенство только при $n = 8$:

$$\mathscr{T}(f_8,g_8) = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{1+\sqrt{2}} = \mathscr{T}(h_8,k_8).$$

Таким образом, верхние оценки из формулировки теоремы установлены. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jørgensen T.* A note on subgroups of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1977. V. 28, N 110. P. 209–211.
2. *Jørgensen T.* On discrete groups of Mobius transformations // Amer. J. Math. 1976. V. 98. P. 739–749.
3. *Бердон А. Ф.* Геометрия дискретных групп. M.: Наука, 1986.
4. *Tan D.* On two-generator discrete groups of Mobius transformations // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V. 106, N 3. P. 763–770.
5. *Gehring F. W., Martin G. J.* Iteration theory and inequalities for kleinian groups // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) 1989. V. 21, N 1. P. 57–63.
6. *Jørgensen T., Kiikka M.* Some extreme discrete groups // Ann. Acad. Sci. Fenn. 1975. V. 1. P. 245–248.
7. *Li C., Oichi M., Sato H.* Jørgensen groups of parabolic type I (finite case) // Comput. Methods Funct. Theory. 2005. V. 5, N 2. P. 409–430.
8. *Li C., Oichi M., Sato H.* Jørgensen groups of parabolic type II (countably infinite case) // Osaka J. Math. 2004. V. 41. P. 491–506.
9. *Li C., Oichi M., Sato H.* Jørgensen groups of parabolic type III (uncountably infinite case) // Kodai Math. J. 2005. V. 28. P. 248–264.
10. *Callahan J.* Jørgensen number and arithmeticity // Conform. Geom. Dyn. 2009. V. 13. P. 160–186.
11. *Sato H.* One-parameter families of extreme discrete groups for Jørgensen inequality // Contemp. Math. (The First Alfors-Bers Colloquium). 2000. V. 256. P. 271–287.

12. *Gehring F. W., Martin G. J.* Stability and extremality in Jørgensen's inequality // Complex Variables Theory Appl. 1989. V. 12, N 1–4. P. 277–282.

13. *Riley R.* A quadratic parabolic group // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1975. V. 77. P. 281–288.

14. *Reid A. W.* Arithmeticity of knot complements // J. London Math. Soc. 1991. V. 43, N 2. P. 171–184.

15. *Mednykh A., Rasskazov A.* On the structure of the canonical fundamental set for the 2-bridge link orbifolds. Univ. Bielefeld, 1998. (Preprint 98-062, available online www.mathematik.uni-bielefeld.de/sfb343).

16. *Hilden H. M., Lozano M. T., Montesinos-Amilibia J. M.* The arithmeticity of the figure eight knot orbifolds // Topology'90, Columbus, 1990. Berlin: de Gruyter, 1992. P. 169–183. (Ohio State Univ. Res. Inst. Publ.).

17. *Веснин А. Ю., Медных А. Д.* Гиперболические объемы многообразий Фибоначчи // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 2. С. 266–277.

18. *Веснин А. Ю., Медных А. Д.* О предельных порядковых числах в теореме Терстона-Ергенсена об объемах трехмерных гиперболических многообразий // Докл. АН. 1994. Т. 336, № 1. С. 7–10.

19. *Веснин А. Ю., Медных А. Д.* Многообразия Фибоначчи как двулистные накрытия над трехмерной сферой и гипотеза Мейергофа — Ноймана // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 3. С. 534–542.

20. *Веснин А. Ю., Рассказов А. А.* Изометрии гиперболических многообразий Фибоначчи // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 1. С. 14–29.

21. *Matveev S., Petronio C., Vesnin A.* Two-sided asymptotic bounds for the complexity of some closed hyperbolic three-manifolds // J. Austral. Math. Soc. 2009. V. 86, N 2. P. 205–219.

22. *Gehring F. W., Martin G. J.* Commutators, collars and the geometry of Mobius groups // J. Anal. Math. 1994. V. 63. P. 175–219.

23. *Oichi M., Sato H.* Jørgensen numbers of discrete groups // Complex analysis and geometry of hyperbolic spaces. 2006. V. 1518. P. 105–118.

24. *Sato H.* The Jørgensen number of the Whitehead link group // Bol. Soc. Mat. Mexicana. 2004. V. 10, N 3. P. 495–502.

25. *Jørgensen T., Lascurain A., Pignataro T.* Translation extentions of the classical modular group // Complex Variable. 1992. V. 19. P. 205–209.

26. *Веснин А. Ю., Маслей А. В.* Двупорожденные подгруппы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, экстремальные для неравенства Йоргенсена и его аналогов // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике. МГУ, 2014. Т. 30.

27. *Maskit B.* Some special 2-generator Kleinian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V. 106. P. 175–186.

Статья поступила 24 февраля 2014 г.

Веснин Андрей Юрьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Омский гос. технический университет,
пр. Мира, 11, Омск 644050
vesnin@math.nsc.ru

Маслей Александр Викторович
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090;
Челябинский гос. университет, лаборатория квантовой топологии,
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454001
masley.alexander@gmail.com