*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2014. Том 55, № 6*

*УДК 517.442*

# ПОЛНОТА СИСТЕМЫ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СТЕПЕНЕЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ $A(D)$

**Г. И. Андриянов**

**Аннотация.** Рассматривается метод установления полноты некоторых систем аналитических функций в пространстве $A(D)$ при значении некоторого параметра, равном 3, ранее исследованный автором при значении этого параметра, равном 2. Указаны приложения полученных результатов в задаче Абеля — Гончарова, Гельфонда — Ибрагимова и в других случаях.

**Ключевые слова:** система функций, полнота, краевая задача.

## 1. Введение

Пусть $D$ — односвязная ограниченная область с односвязным дополнением $\overline{\mathbf{C}}_z \setminus D$ до всей расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}_z$; $A(D)$ — пространство функций $f(z)$, аналитических в области $D$ с топологией равномерной сходимости на компактах из $D$. Через $A_0(\overline{\mathbf{C}}_z \setminus D)$ обозначаем пространство функций $g(z)$, $g(\infty) = 0$, аналитических на $\overline{\mathbf{C}}_z \setminus D$ с топологией, индуцированной топологией сопряженного пространства, которое может быть реализовано в виде пространства $A(D)$.

Определение 1. Система функций $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, аналитических в области $D$, называется *полной* в пространстве $A(D)$, если замыкание линейной оболочки данной системы в топологии пространства $A(D)$ совпадает со всем $A(D)$.

Во многих задачах теории функций, связанных с интерполяцией и решением конечно-разностных уравнений, возникает вопрос о полноте системы функций вида

$$\bigcup_{j=0}^{p-1} \{[W_j(z)]^{np+l_j} A_j(z)\}_{n=0}^{\infty}, \quad p \geq 2,\ p \in \mathbf{N},\ l_j \in \mathbf{N} \cup \{0\},\ 0 \leq l_j \leq p-1, \tag{1}$$

где $W_j(z)$ — однолистные аналитические в области $D$ функции, $A_j(z)$ — также аналитические функции, не имеющие нулей в области $D$ (см. [1–5]).

В [6] найден критерий полноты системы функций вида (1) в пространстве $A(D)$.

**Теорема 1.** *Система функций* (1) *полна в пространстве* $A(D)$ *тогда и только тогда, когда не существует ни одной совокупности* $p$ *функций* $\{f_j(w)\}_{j=0}^{p-1}$, *обладающих свойствами:*

1) $f_j(w) \in A_0(\overline{\mathbf{C}}_w \setminus G_j)$, $G_j \equiv W_j(D)$, $f_j(w) \not\equiv 0$, $j = 0, 1, \dots, p-1$;
2) *лорановские части функций* $f_j(w)$ *не имеют степеней* $\frac{1}{w^{np+l_j+1}}$;
3) *совокупность функций* $\{f_j(w)\}_{j=0}^{p-1}$ *удовлетворяет условию*

$$f_0(W_0(z))W_0'(z)A_j(z) - f_j(W_j(z))W_j'(z)A_0(z) \in A(D), \quad j = 1, \dots, p-1.$$

Ранее мы рассмотрели, как может применяться теорема 1 (при $p = 2$) к вопросам полноты некоторых систем аналитических функций в пространстве $A(D)$ и к интерполяционной задаче Абеля — Гончарова (см. [7]). Заметим, что на первый взгляд основной недостаток теоремы 1 в том, что она малоконструктивна. На самом деле это не соответствует истинному положению дел. Применение сравнительно элементарных сведений из теории краевой задачи Римана — Гильберта позволяет значительно прояснить содержание теоремы 1. Наша основная цель в данной работе — указать более конструктивный критерий полноты системы функций (1) (при некоторых ограничениях на функцию $W(z)$ и при $p = 3$). По сути, мы продолжаем изучать полноту системы функций (1) методом, примененным в работе [7], но при $p > 2$. Заметим, что между системами функций (1) при $p = 2$ и $p = 3$ есть существенные технические различия: так, при $p = 2$ имели систему из двух краевых задач (условий) (см. [7]). В случае $p = 3$ получается система из девяти краевых задач, а в случае $p = 4$ число краевых задач возрастает до шестнадцати. Эти (и некоторые другие) моменты доставляют основные хлопоты при получении критериев полноты систем функций (1) при $p > 2$.

Отметим, что изучению полноты системы функций (1) в пространстве $A(D)$ (при $p > 2$) посвящено сравнительно небольшое число работ (см. [1, 3–5, 8]), а приложений к интерполяции и того меньше (см. [1]). Поэтому изучение полноты системы (1) в пространстве $A(D)$ достаточно актуально.

## 2. Полнота системы аналитических функций в пространстве $A(D)$ (общий результат)

Пусть $D$ — односвязная ограниченная область, о которой говорилось во введении, и $W(z)$ — однолистная аналитическая функция, отображающая область $D$ на область $G$: $G \equiv W(D)$. Кроме того, будем считать, что область $G$ обладает следующим характерным свойством:

$$G \equiv \delta G, \tag{2}$$

где $\delta = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\right)$, $p \in \mathbf{N}$, $p \geq 3$ и $\delta G \equiv \left\{w : w \exp\left(-\frac{2\pi i}{p}\right) \in G\right\}$.

Другими словами, область $G$ инвариантна относительно поворотов на угол $\frac{2\pi}{p}$ вокруг начала координат в $\mathbf{C}_w$.

Рассмотрим некоторую аналитическую функцию $\zeta = f(w)$, и пусть известно, что эта функция имеет лишь простые нули, расположенные в точках пересечения лучей, исходящих из начала координат в $\mathbf{C}_w$ и делящих плоскость $\mathbf{C}_w$ на равные углы раствора $\frac{2\pi}{p}$, с некоторым семейством концентрических окружностей вида

$$|w| = \rho_n, \quad 0 < \rho_0, \ \rho_n \leq \rho_{n+1}, \ n = 0, 1, \dots, k, \ k \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

В таком случае нулями функции $\zeta = f(w)$ могут быть точки вида

$$w_0, w_0\delta, w_0\delta^2, \dots, w_0\delta^{p-1}, \quad |w_0| \neq 0.$$

Подобные совокупности точек будем называть *полным набором нулей функции* $f(w)$ одного ранга (см. [9,10]). Ясно, что функция $f(w)$ может иметь полные наборы нулей разных рангов, например

$$\{w_0, w_0\delta, w_0\delta^2, \dots, w_0\delta^{p-1}\},\ \{w_1, w_1\delta, w_1\delta^2, \dots, w_1\delta^{p-1}\}, \\ \dots, \{w_k, w_k\delta, w_k\delta^2, \dots, w_k\delta^{p-1}\},$$

где полагается $|w_0| \le |w_1| \le |w_2| \le \dots \le |w_k|$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Рассмотрим следующую систему функций:

$$\bigcup_{j=0}^{2} \{[W(z)]^{3n+l_j} A_j(z)\}_{n=0}^{\infty}, \quad \text{где } l_j \in \mathbf{N} \cup \{0\},\ 0 \le l_j \le 2,\ j = 0, 1, 2. \tag{3}$$

Заметим, что (3) — это система функций (1) при $p = 3$ и $W_0(z) \equiv W_1(z) \equiv W_2(z) \equiv W(z)$, где $W(z)$ — однолистная аналитическая функция в области $D$. Условие (2) (для случая $p = 3$) считается выполненным с $\delta = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$ (заметим, что всюду ниже в данной работе $\delta$ имеет именно такой вид). Пусть $z = Z(w)$ — обращение функции $w = W(z)$. Основным результатом данной работы является

**Теорема 2.** *Система функций* (3) *полна в пространстве* $A(D)$ *тогда и только тогда, когда функция* $\Delta_3(w)$ *вида*

$$\Delta_3(w) \equiv \begin{vmatrix} A_0(Z(w)) & \delta^{l_0} A_0(Z(w\delta)) & \delta^{2l_0} A_0(Z(w\delta^2)) \\ A_1(Z(w)) & \delta^{l_1} A_1(Z(w\delta)) & \delta^{2l_1} A_1(Z(w\delta^2)) \\ A_2(Z(w)) & \delta^{l_2} A_2(Z(w\delta)) & \delta^{2l_2} A_2(Z(w\delta^2)) \end{vmatrix} \tag{4}$$

*не имеет ни одного полного набора нулей одного ранга в области* $G \equiv W(D)$.

Доказательство. Достаточность. Покажем следующее: если функция $\Delta_3(w)$ не имеет ни одного полного набора нулей одного ранга в области $G$, то система функций (3) полна в пространстве $A(D)$.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что функция $\Delta_3(w)$ не имеет ни одного полного набора нулей одного ранга в области $G$, но, тем не менее система функций (3) не полна в пространстве $A(D)$. Покажем, что такое предположение приводит к противоречию. Действительно, в силу неполноты системы функций (3) из теоремы 1 заключаем, что существуют функции $\Phi_j^-(w)$, $j = 0, 1, 2$, обладающие свойствами:

$$\Phi_j^-(w) \in A_0(\overline{\mathbf{C}}_w \setminus G),\ \Phi_j^-(w) \not\equiv 0,\ j = 0, 1, 2; \tag{5.1}$$

лорановские части функций $\Phi_j^-(w)$ не имеют степеней вида $\dfrac{1}{w^{3n+l_j+1}}$; (5.2)

совокупность функций $\Phi_j^-(w)$, $j = 0, 1, 2$, удовлетворяет условию

$$\Phi_0^-(W(z))W'(z)A_j(z) - \Phi_j^-(W(z))W'(z)A_0(z) \in A(D), \quad j = 1, 2. \tag{5.3}$$

Очевидно, что (5.1)–(5.3) можно переписать в виде условий для некоторой системы краевых задач: существуют $\Phi_j^-(w)$, $j = 0, 1, 2$, и $\Phi_k^+(w)$, $k = 0, 1$ (вид $\Phi_k^+(w)$ нас не интересует), удовлетворяющие условиям (5.1), (5.2) и связанные системой краевых условий (задач) на некотором контуре $\Gamma_z$ ($\Gamma_z \subset D$, $\Gamma_z$ — гладкий жорданов контур, $\Gamma_z$ достаточно близок к границе $\partial D$ области $D$. Так что все функции $\Phi_j^-(w)$, $j = 0, 1, 2$, регулярны на $\overline{\mathbf{C}}_w \setminus \{\operatorname{int}\Gamma_w\}$, $\Gamma_w \equiv W(\Gamma_z)$):

$$\Phi_0^-(W(z))A_1(z) - \Phi_1^-(W(z))A_0(z) = \Phi_0^+(z),$$
$$\Phi_0^-(W(z))A_2(z) - \Phi_2^-(W(z))A_0(z) = \Phi_1^+(z),$$

где $\Phi_k^+(z) \in A(\Gamma_z \cup \operatorname{int}\Gamma_z)$ (ниже $\Phi_k^+ \in A(\overline{\Gamma_z})$, $k = 0, 1$).

В свою очередь, эту систему краевых задач можно переписать эквивалентным образом для контура $\Gamma_w$ ($\Gamma_w = W(\Gamma_z)$, $\Gamma_z$ описан выше), причем можно считать, что контур $\Gamma_w$ инвариантен относительно поворотов на угол $\frac{2\pi}{3}$ в $\mathbf{C}_w$:

$$\Phi_0^-(w)A_1(Z(w)) - \Phi_1^-(w)A_0(Z(w)) = \Phi_0^+(w),$$
$$\Phi_0^-(w)A_2(Z(w)) - \Phi_2^-(w)A_0(Z(w)) = \Phi_1^+(w).$$

Учитывая тот факт, что $\Gamma_w$ инвариантен относительно поворотов на угол $\frac{2\pi}{3}$ в $\mathbf{C}_w$, для $k = 0, 1, 2$ имеем

$$\begin{cases} \Phi_0^-(w\delta^k)A_1(Z(w\delta^k)) - \Phi_1^-(w\delta^k)A_0(Z(w\delta^k)) = \Phi_0^+(w\delta^k), \\ \Phi_0^-(w\delta^k)A_2(Z(w\delta^k)) - \Phi_2^-(w\delta^k)A_0(Z(w\delta^k)) = \Phi_1^+(w\delta^k). \end{cases}$$

Добавим новую совокупность краевых задач (условий), связывающих функции $\Phi_j^-(w)$, $j = 0, 1, 2$, которые следуют из (5.2). В результате для $k = 0, 1, 2$, $j = 0, 1, 2$ получим систему краевых задач (условий) на контуре $\Gamma_w$:

$$\begin{cases} \Phi_0^-(w\delta^k)A_1(Z(w\delta^k)) - \Phi_1^-(w\delta^k)A_0(Z(w\delta^k)) = \Phi_0^+(w\delta^k), \\ \Phi_0^-(w\delta^k)A_2(Z(w\delta^k)) - \Phi_2^-(w\delta^k)A_0(Z(w\delta^k)) = \Phi_1^+(w\delta^k), \\ \Phi_j^-(w) + \delta^{l_j+1}\Phi_j^-(w\delta) + \delta^{2(l_j+1)}\Phi_j^-(w\delta^2) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Всего в системе имеем девять краевых задач (условий). Первые три краевые задачи соответствуют первой строке системы (6) при $k = 0, 1, 2$, краевые задачи с четвертой по шестую — второй строке системы (6) при $k = 0, 1, 2$, краевые задачи с седьмой по девятую — третьей строке системы (6). По построению в системе имеем девять «неизвестных» — функций вида $\{\Phi_j^-(w\delta^k)\}_{j,k=0}^{2,2}$. Матрица этой системы, обозначим ее через $B(w)$, имеет вид

$$B(w) \equiv \begin{pmatrix} B_{11}(w) & B_{12}(w) & B_{13}(w) \\ B_{21}(w) & B_{22}(w) & B_{23}(w) \\ B_{31}(w) & B_{32}(w) & B_{33}(w) \end{pmatrix},$$

где $B_{m,n}(w)$, $m, n = 1, 2, 3,$ — матрицы-клетки (размера $3 \times 3$) следующего вида: матрицы-клетки первых двух строк имеют диагональный вид. Так, $B_{11}(w)$ имеет на главной диагонали элементы $A_1(Z(w))$, $A_1(Z(w\delta))$, $A_1(Z(w\delta^2))$. Матрица $B_{12}(w)$ имеет на главной диагонали элементы $-A_0(Z(w))$, $-A_0(Z(w\delta))$, $-A_0(Z(w\delta^2))$. Матрица $B_{13}(w)$ — нуль-матрица. Матрица $B_{21}(w)$ имеет на главной диагонали элементы $A_2(Z(w))$, $A_2(Z(w\delta))$, $A_2(Z(w\delta^2))$.

Кроме того, справедливо $B_{22}(w) = B_{13}(w)$, $B_{23}(w) = B_{12}(w)$.

Матрицы-клетки третьей строки имеют другую структуру: $B_{31}$ имеет в первой строке элементы 1, $\delta^{l_0+1}$, $\delta^{2(l_0+1)}$, остальные ее строки нулевые; $B_{32}$ имеет во второй строке элементы 1, $\delta^{l_1+1}$, $\delta^{2(l_1+1)}$, остальные ее строки нулевые; аналогично $B_{33}$ имеет в третьей строке элементы 1, $\delta^{l_2+1}$, $\delta^{2(l_2+1)}$, остальные ее строки нулевые.

Используя разложение $\det(B(w))$ по строкам (с первой по шестую), получим

$$\det(B(w)) = \Delta_3(w)A_0(Z(w))A_0(Z(w\delta))A_0(Z(w\delta^2)). \tag{7}$$

Согласно условиям функции $A_0(Z(w))$, $A_0(Z(w\delta))$, $A_0(Z(w\delta^2))$ не имеют нулей в $\operatorname{int}\Gamma_w$. В таком случае заключаем, что нули функций $\det(B(w))$ и $\Delta_3(w)$

в $\operatorname{int}\Gamma_w$ совпадают. Из определения функции $\Delta_3(w)$ следует справедливость соотношений

$$\Delta_3(w\delta) = \frac{1}{\delta^{l_0+l_1+l_2}}\Delta_3(w), \quad \Delta_3(w\delta^2) = \frac{1}{\delta^{2(l_0+l_1+l_2)}}\Delta_3(w), \tag{8}$$

которые проверяются непосредственной подстановкой $\delta$ и $\delta^2$ в $\Delta_3(w)$. Из (8) вытекает, что нули функции $\Delta_3(w)$ расположены инвариантно относительно поворотов на угол $\frac{2\pi}{3}$. В таком случае заключаем, что функция $\Delta_3(w)$ имеет в $\operatorname{int}\Gamma_w$ (если таковые есть) только полные наборы нулей, возможно, различных рангов.

Заметим, что система краевых задач (6) эквивалентна следующей системе краевых задач на контуре $\Gamma_w$:

$$\Phi_j^-(w\delta^k)\det(B(w)) = \Psi_{jk}^+(w), \tag{9}$$

здесь $\Psi_{jk}^+(w) \in A(\overline{\Gamma_w})$, $j = 0, 1, 2$, $k = 0, 1, 2$.

Рассмотрим первую строку в этой системе (при $j = 0$, $k = 0$):

$$\Phi_0^-(w)\det(B(w)) = \Psi_{00}^+(w). \tag{10}$$

Согласно условиям (7), (8) $\det(B(w))$ не имеет ни нулей, ни полюсов на $\overline{\Gamma_w}$, следовательно, индекс $\chi$ задачи (10) равен $\operatorname{ind}_{\Gamma_w}\det(B(w)) = 0$ (см. [11]). В таком случае краевая задача (10) неразрешима, т. е. $\Phi_0^-(w) \equiv 0$ в $\overline{\Gamma_w}$ (см. [11]); противоречие, ибо согласно (5.1) $\Phi_0^-(w) \not\equiv 0$ в $G$.

Необходимость. Пусть система функций (3) полна в пространстве $A(D)$, покажем, что в этом случае функция $\Delta_3(w)$ не имеет ни одного полного набора нулей одного ранга в области $G$. Снова будем рассуждать от противного. Пусть система функций (3) полна в пространстве $A(D)$, но тем не менее $\Delta_3(w)$ имеет хотя бы один полный набор нулей одного ранга в области $G$ (считаем, что $\Delta_3(w) \not\equiv 0$ в $G$). Приведем это предположение к противоречию. Не теряя общности, можем считать, что функция $\Delta_3(w)$ имеет только один полный набор нулей одного ранга в области $G$, например точки $w_0$, $w_0\delta$, $w_0\delta^2$, так что $\Delta_3(w_0) = \Delta_3(w_0\delta) = \Delta_3(w_0\delta^2) = 0$.

Учитывая условие (2), заключаем, что точки $\{w_0, w_0\delta, w_0\delta^2\}$ лежат внутри контура $\Gamma_w$, о котором говорилось выше. Согласно (7) можем считать эти точки нулями функции $\det(B(w))$, т. е.

$$\det(B(w)) = \left(w^3 - w_0^3\right)X^+(w),$$

здесь $X^+(w) \in A(\overline{\Gamma_w})$, $X^+(w) \neq 0$, $w \in \overline{\Gamma_w}$.

Рассмотрим краевую задачу (10). Будем искать решение этой краевой задачи (нас интересуют $\Phi_0^-(w)$): $\Phi_0^-(w) \not\equiv 0$, $\Phi_0^-(w) \in A_0(\overline{\mathbf{C}}_w \setminus \{\operatorname{int}\Gamma_w\})$ в классе функций, не имеющих степеней

$$\frac{1}{w^{3n+l_0+1}}, \quad l_0 \in \{0, 1, 2\}, \tag{11}$$

в своем лорановском разложении в окрестности бесконечно удаленной точки.

Возможны следующие положения.

1. Пусть $l_0 = 0$ в (11), в таком случае нетрудно заметить, что решение $\Phi_0^-(w)$ задачи (10) имеет вид

$$\Phi_0^-(w) = \frac{a_0 w + a_1}{w^3 - w_0^3},$$

где $a_0, a_1$ — произвольные постоянные ($a_0 \neq 0$). Выбирая здесь $a_0 = 1$, $a_1 = -w_0$, видим, что

$$\Phi_0(w) \equiv \frac{1}{(w - w_0\delta)(w - w_0\delta^2)},$$

указанная функция $\Phi_0(w)$ заведомо удовлетворяет краевому условию (10) и условию (11) (при $l_0 = 0$).

2. Пусть $l_0 = 1$ в (11). В таком случае функция $\Phi_0^-(w)$ не должна иметь степеней $\frac{1}{w^{3n+2}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Возвращаясь к краевой задаче (10), заключаем, что $\Phi_0^-(w)$ имеет вид

$$\Phi_0^-(w) = \frac{a_0 w^2 + a_1 w + a_2}{w^3 - w_0^3},$$

где $a_0, a_1, a_2$ — произвольные постоянные, $a_0 \neq 0$. Выбирая $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, получим функцию

$$\Phi_0^-(w) \equiv \frac{w^2 + 1}{w^3 - w_0^3},$$

удовлетворяющую условиям (10) и (11) (при $l_0 = 1$).

3. Пусть $l_0 = 2$ в (11). Повторяя рассуждения, проведенные выше, заключаем, что $\Phi_0^-(w)$ не будет иметь степеней $\frac{1}{w^{3n+3}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. В таком случае получим

$$\Phi_0^-(w) = \frac{a_0 w^2 + a_1 w + a_2}{w^3 - w_0^3}.$$

Выбирая $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, видим, что функция

$$\Phi_0^-(w) \equiv \frac{w^2 + w}{w^3 - w_0^3}$$

будет удовлетворять условиям (10) и (11) (при $l_0 = 2$).

Таким образом, для всех $l_0 \in \{0, 1, 2\}$ существует $\Phi_0^-(w)$, удовлетворяющая краевому условию (10) и условиям (5.1), (5.2).

Нужно проверить, будут ли указанные выше функции $\Phi_0^-(w)$ (при различных $l_0 \in \{0, 1, 2\}$) удовлетворять второму и третьему краевым условиям в системе (9), т. е. при $j = 0$, $k = 1, 2$ в указанной системе. Но эти условия будут выполнятся автоматически, поскольку функция $\Phi_0^-(w)$ удовлетворяет первому краевому условию в (10) и контур $\Gamma_w$ инвариантен относительно поворотов на угол $\frac{2\pi}{3}$. Следовательно, при всяких $l_0 \in \{0, 1, 2\}$ функция $\Phi_0^-(w)$, удовлетворяющая всем условиям в (9), строится.

Рассмотрим четвертую краевую задачу в системе условий (9). Имеем

$$\Phi_1^-(w) \det(B(w)) = \Psi_{11}^+(w).$$

Нас интересуют функции $\Phi_1^-(w) \not\equiv 0$, $\Phi_1^-(w) \in A_0(\overline{\mathbf{C}}_w \setminus \{\operatorname{int} \Gamma_w\})$ — решения этой краевой задачи, не имеющие степеней $\frac{1}{w^{3n+l_1+1}}$, $l_1 \in \{0, 1, 2\}$, в своем лорановском разложении в окрестности точки $w = \infty$. Но решение этой задачи ничем не отличается от решения задачи по поиску функции $\Phi_0^-(w)$, которую рассмотрели выше. Таким образом, повторяя (почти дословно) рассуждения, проводившиеся для $\Phi_0^-(w)$, найдем функцию $\Phi_1^-(w) \not\equiv 0$, $\Phi_1^-(w) \in A_0(\overline{\mathbf{C}}_w \setminus \{\operatorname{int} \Gamma_w\})$, которая удовлетворяет четвертому, пятому и шестому краевым условиям в системе (9) и условиям (5.1), (5.2). Все сказанное выше справедливо и для функции $\Phi_2^-(w) \not\equiv 0$ в седьмом, восьмом и девятом краевых условиях системы (9).

Учитывая эквивалентность систем (6) и (9), можем заключить, что найдена совокупность функций $\{\Phi_j^-(w)\not\equiv 0\}_{j=0}^2$, удовлетворяющая всем условиям в (6). В таком случае все условия(5.1)–(5.3) выполнены. Применяя теорему 1, видим, что система (3) неполна в пространстве $A(D)$; противоречие. Теорема 2 доказана.

## 3. Определение полноты некоторых систем аналитических функций

Рассмотрим, как может применяться теорема 2. Пусть имеем систему функций

$$\bigcup_{j=0}^{2}\{[W(z)]^{3n+l_j}A_j(z)\}_{n=0}^{\infty}, \tag{12}$$

где

$$W(z)\equiv e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar a z}$$

— автоморфизм единичного круга: $\{|z|<1\}\longrightarrow\{|w|<1\}$, $|a|<1$, $\theta\in\mathbf{R}$, $A_j(z)$, $j=0,1,2$, — аналитические, не имеющие нулей в единичном круге $\{|z|<1\}$ функции.

**Утверждение 1.** *Система функций* (12) *полна в пространстве* $A(|z|<1)$ *тогда и только тогда, когда функция* $\Delta_3(w,a,\theta)$ *вида*

$$\Delta_3(w,a,\theta)\equiv\begin{vmatrix} A_0\big(\frac{w+ae^{i\theta}}{w\bar a+e^{i\theta}}\big) & \delta^{l_0}A_0\big(\frac{w\delta+ae^{i\theta}}{w\delta\bar a+e^{i\theta}}\big) & \delta^{2l_0}A_0\big(\frac{w\delta^2+ae^{i\theta}}{w\delta^2\bar a+e^{i\theta}}\big)\\ A_1\big(\frac{w+ae^{i\theta}}{w\bar a+e^{i\theta}}\big) & \delta^{l_1}A_1\big(\frac{w\delta+ae^{i\theta}}{w\delta\bar a+e^{i\theta}}\big) & \delta^{2l_1}A_1\big(\frac{w\delta^2+ae^{i\theta}}{w\delta^2\bar a+e^{i\theta}}\big)\\ A_2\big(\frac{w+ae^{i\theta}}{w\bar a+e^{i\theta}}\big) & \delta^{l_2}A_2\big(\frac{w\delta+ae^{i\theta}}{w\delta\bar a+e^{i\theta}}\big) & \delta^{2l_2}A_2\big(\frac{w\delta^2+ae^{i\theta}}{w\delta^2\bar a+e^{i\theta}}\big)\end{vmatrix}$$

*не обладает ни одним полным набором нулей одного ранга в круге* $|w|<1$.

Здесь $l_j\in\{0,1,2\}$.

Доказательство следует из теоремы 2.

Рассмотрим следующую систему функций:

$$\bigcup_{j=0}^{2}\left\{\left[\frac{z}{1-z}\right]^{3n+l_j}\frac{f_j(z)}{1-z}\right\}_{n=0}^{\infty} \tag{13}$$

в области $D_1\equiv\left\{z: z=x+iy,\ x<\frac12\right\}$, где $f_j(z)$ — аналитические функции, не имеющие нулей в области $D_1$. Применяя теорему 2, при $W(z)\equiv\frac{z}{1-z}$, $A_j(z)\equiv\frac{f_j(z)}{1-z}$, $j=0,1,2$, получим

**Утверждение 2.** *Система функций* (13) *полна в пространстве* $A(D_1)$ *тогда и только тогда, когда функция* $\Delta_3(w)$ *вида*

$$\Delta_3(w)\equiv\begin{vmatrix} f_0(\frac{w}{w+1}) & \delta^{l_0}f_0(\frac{w\delta}{w\delta+1}) & \delta^{2l_0}f_0(\frac{w\delta^2}{w\delta^2+1})\\ f_1(\frac{w}{w+1}) & \delta^{l_1}f_1(\frac{w\delta}{w\delta+1}) & \delta^{2l_1}f_1(\frac{w\delta^2}{w\delta^2+1})\\ f_2(\frac{w}{w+1}) & \delta^{l_2}f_2(\frac{w\delta}{w\delta+1}) & \delta^{2l_2}f_2(\frac{w\delta^2}{w\delta^2+1})\end{vmatrix}$$

*не имеет ни одного полного набора нулей одного ранга в области* $\{|w|<1\}$.

Это обобщение и усиление одного результата Альпера (см. [12]).

От утверждений 1, 2 может создаться впечатление, что указанные критерии слишком «глухи» и оставляют желать много лучшего. Покажем, что это не так.

Рассмотрим систему функций $\left\{\frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}(z^2-1)\right\}_{n=0}^{\infty}$ (частный случай системы (13)). В качестве области $D$ опять рассмотрим область $D_1$. Легко видеть, что указанную выше систему функций можно записать в виде

$$\left\{\left[\frac{z}{1-z}\right]^{3k}(-1)(z+1)\right\}_{k=0}^{\infty} \cup \left\{\left[\frac{z}{1-z}\right]^{3k+1}(-1)(z+1)\right\}_{k=0}^{\infty} \cup \left\{\left[\frac{z}{1-z}\right]^{3k+2}(-1)(z+1)\right\}_{k=0}^{\infty}.$$

Сравнивая (3) и записанное выражение, заключаем, что

$$l_0=0,\ l_1=1,\ l_2=2, \quad A_0(z)\equiv A_1(z)\equiv A_2(z)\equiv -(z+1), \quad W(z)\equiv \frac{z}{1-z}.$$

Образом области $D_1$ при отображении $w=\frac{z}{1-z}$ будет единичный круг $|w|<1$, ясно, что он обладает свойством (2). Рассмотрим функцию $\Delta_3(w)$ в (4) (или $\Delta_3(w)$ в утверждении 2). Учитывая вид функций $A_j(z)$ и то, что $z=\frac{w}{w+1}$ — обращение функции $w=\frac{z}{1-z}$, имеем

$$\Delta_3(w)=(\delta^2-\delta)(\delta^2-1)(\delta-1)\left(\frac{2w+1}{w+1}\right)\left(\frac{2w\delta+1}{w\delta+1}\right)\left(\frac{2w\delta^2+1}{w\delta^2+1}\right).$$

Отсюда находим нули функции $\Delta_3(w)$ — точки $\{w_0,\ w_0\delta,\ w_0\delta^2\}$, где $w_0=-\frac{1}{2}$. Проведем разрезы в области $G_1\equiv\{w:|w|<1\}$ и образуем область

$$G_2\equiv\{G_1\setminus\{(l)\cup(\delta l)\cup(\delta^2 l)\}\},$$

здесь $l\equiv\left\{w: w=u+i0,\ u\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right]\right\}$ и $\delta^k l=\left\{w: w\exp\left(-\frac{2\pi ik}{3}\right)\in l\right\}$, $k=1,2$. Тогда в области $G_2$ нет ни одного полного набора нулей функции $\Delta_3(w)$. Очевидно, что область $G_2$ обладает свойством (2). Найдем область $D_2: W(D_2)\equiv G_2$ $\left(W(z)\equiv\frac{z}{1-z}\right)$. Легко видеть, что $D_2$ имеет вид

$$D_2\equiv D_1\setminus\{(-\infty,-1]\cup l^+\cup l^-\},$$

напомним, что $D_1\equiv\left\{z: z=x+iy,\ x<\frac{1}{2}\right\}$ и $l^+$ — часть дуги окружности, начинающаяся в точке с координатами $\left(\frac{2}{7};\frac{\sqrt{3}}{7}\right)$ и продолжающаяся до прямой $x=\frac{1}{2}$ — границы области $D_1$ (она пересекает эту границу в точке с координатами $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$): $W(l^+)\equiv\delta^2 l$. Аналогично $l^-$ — симметричная ей относительно действительной оси дуга окружности в области $D_1$: $W(l^-)\equiv\delta l$. Таким образом, справедливо

**Утверждение 3.** 1. *Система функций* $\left\{\frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}(z^2-1)\right\}_{n=0}^{\infty}$ *полна в пространстве* $A(D_2)$.

2. *Эта же система функций не полна в пространстве* $A(D_1)$.

Замечание 1. Утверждение 3 (даже в этом частном случае) является усилением и обобщением одного результата Альпера (см. [12]).

Рассмотрим другой пример, систему функций вида

$$\bigcup_{j=0}^{2}\{z^{3n+l_j}A_j(z)\}_{n=0}^{\infty}, \tag{14}$$

где $l_0=0$, $l_1=1$, $l_2=2$, $A_0(z)\equiv 1$, $A_1(z)\equiv\exp(z)$, $A_2(z)\equiv\exp(2z)$ и $W(z)\equiv z$.

Очевидно, что эта система функций есть весьма частный случай системы функций (3), но тем не менее она обобщает хорошо известную систему функций $\{z^{2n}\}_{n=0}^{\infty} \cup \{z^{2n+1}e^z\}_{n=0}^{\infty}$, которая рассматривалась в [13]. Обозначим $D_3 \equiv \{z = x+iy : |y| < \pi\}$.

Возьмем точку $z_1 = -\frac{\pi\sqrt{3}}{9} + i\frac{\pi}{3}$, $z_1 \in D_3$. Легко видеть, что система точек $\{z_1,\ z_1\delta,\ z_1\delta^2\} \subset D_3$, где точка $z_1\delta^2 = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ лежит на положительной части действительной оси, лежащей в $D_3$. Проведем разрез $l_1$ в области $D_3$ от точки $\left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}, 0\right)$ вдоль положительной части действительной оси и до $(+\infty)$, так что $l_1 \equiv \left[\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}, +\infty\right)$. Кроме того, проведем разрезы $\delta l_1$ и $\delta^2 l_1$ в области $D_3$ (здесь $\delta^k l_1 \equiv \left\{z : z\exp\left(-\frac{2\pi i k}{3}\right) \in l_1\right\}$, $k = 1, 2$) и рассмотрим круг $\{z : |z| < \pi\}$ в области $D_3$. Пусть $D_4 \equiv \{z : |z| < \pi\} \setminus \{l_1 \cup \delta l_1 \cup \delta^2 l_1\}$.

Отметим, что при отображении $w = z$ область $D_4$ перейдет в ту же самую область $D_4$, но уже в плоскости $\mathbf{C}_w$. Обозначим последнюю через $D_4^{(C_w)}$, таким образом, $D_4^{(C_w)}$ — образ области $D_4$ при отображении $w = z$. Заметим, что область $D_4^{(C_w)}$ заведомо обладает свойством (2).

**Утверждение 4.** 1. *Система функций* (14) *полна в пространстве* $A(D_4)$.

2. *Система функций* (14) *неполна в пространстве* $A(|z| < \pi)$.

Доказательство. 2. Согласно теореме 2 нужно рассмотреть в области $D_4^{(C_w)}$ функцию $\Delta_3(w)$, которая в данном случае примет вид

$$\Delta_3(w) \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^w & \delta e^w & \delta^2 e^{w\delta^2} \\ e^{2w} & \delta^2 e^{2w\delta} & \delta^4 e^{2w\delta^2} \end{vmatrix}.$$

Легко видеть, что $\Delta_3(w) = (\delta e^{w\delta} - e^w)(\delta^2 e^{w\delta^2} - e^w)(\delta^2 e^{w\delta^2} - \delta e^{w\delta})$.

Отсюда определяем нули функции $\Delta_3(w)$ — они имеют вид $\{w_1, w_1\delta, w_1\delta^2\}$, где $w_1 = -\frac{1}{\delta-1}\frac{2\pi i}{3}$.

Нетрудно проверить, что $w_1 = W(z_1)$ при отображении $w \equiv z$. В таком случае справедливо включение $\{w_1, w_1\delta, w_1\delta^2\} \subset \{|w| < \pi\}$. Применяя теорему 2, заключаем, что система функций (14) неполна в пространстве $A(|z| < \pi)$.

1. Рассмотрим теперь область $D_4$ и ее образ $D_4^{(C_w)}$. Очевидно, что в области $D_4^{(C_w)}$ нет полного набора нулей функции $\Delta_3(w)$. Применяя теорему 2, заключаем, что система функций (14) полна в пространстве $A(D_4)$. Утверждение 4 доказано.

Замечание 2. Легко определить «радиус полноты» системы функций (14) — он равен $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

## 4. Простейшие приложения к интерполяции

Пусть $D$ — односвязная ограниченная область, о которой говорилось во введении. Через $A(\exp, D)$ обозначим пространство целых функций $F(z)$, представимых в виде

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{tz} g(t)\, dt,$$

где $g(z) \in A_0(\overline{\mathbf{C}_z} \setminus D)$, $g(z)$ ассоциированная по Борелю с $F(z)$, $\operatorname{supp} g(z) \subset \operatorname{int}\Gamma$ (связь между функциями $F(z)$ и $g(z)$ называют *преобразованием Бореля*, см. [8, 14]).

Рассмотрим интерполяционную задачу Абеля — Гончарова (А-Г): *найти целую функцию $F(z) \in A(\exp, D)$, удовлетворяющую условиям*

$$F^{(n)}(\lambda_n) = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{15}$$

*здесь числовая последовательность $\{\lambda_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, узлов интерполяции имеет вид*

$$\lambda_n = \begin{cases} 3k, & n = 3k, \\ 3k + 1 + 1, & n = 3k + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ 3k + 2 + 2, & n = 3k + 2, \end{cases} \tag{16}$$

*и последовательность $\{a_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, — некоторая допустимая последовательность комплексных чисел.*

Хорошо известно (см. [8, 14])

Определение 2. Пространство $A(\exp, D)$ называется *пространством единственности интерполяционной задачи* А-Г, если условия $F(z) \in A(\exp, D)$, $F^{(n)}(\lambda_n) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, влекут за собой $F(z) \equiv 0$.

В [15] указаны пространства единственности интерполяционной задачи А-Г (15), (16) [15, теоремы 1.14, 1.15]. Не приводя указанных выше результатов (это заняло бы достаточно много места), получим новый результат, который заведомо сильнее указанных теорем в [15] (при $p = 3$). Однако прежде чем это сделать, приведем некоторые дополнительные факты и построения.

Пусть

$$U = \left\{ z = \rho e^{i\varphi} : 0 \le \rho < \frac{\pi - |\varphi|}{\sin|\varphi|},\ |\varphi| \le \pi \right\}.$$

Область $U$ впервые введена В. Л. Гончаровым и А. О. Гельфондом [16, 17]. Известно, что функция $w = ze^z$ аналитическая и однолистная в области $U$ и отображает ее на плоскость $\mathbf{C}_w$ с разрезом от точки $u = -1/e$ $(w = u + iv)$ вдоль отрицательной части действительной оси и до $-\infty$ [18], так что можно записать

$$U \to W(U) \equiv G \equiv \mathbf{C}_w \setminus \{(-\infty; -1/e]\},$$

здесь $w = ze^z$.

Через $z = \psi(w)$ обозначим обращение функции $w = ze^z$ в области $U$.

Рассмотрим уравнение

$$\psi(w) - \psi(w\delta) = \frac{2\pi i}{3}. \tag{17}$$

Корни уравнения (17) найдены в [15]. Пусть $w^*$ — ближайший к началу координат корень уравнения (17), тогда $\arg w^* = \frac{2\pi}{3}$, $|w^*| = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \exp\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)$. Образом точки $w^*$ при отображении $z = \psi(w)$ в области $U$ будет точка $z^* = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + i\frac{\pi}{3}$ (см. [15]). Заметим, что, возможно, существуют и другие корни уравнения (17), например $w^{**}$, но в любом случае они так же имеют $\arg w^{**} = \frac{2\pi}{3}$. Рассмотрим три точки $w^*$, $w^*\delta$, $w^*\delta^2$ в области $G$ (напомним, что $G \equiv \mathbf{C}_w \setminus (-\infty, -1/e])$, тогда точки $w^*$ и $w^*\delta$ будут симметричны друг другу относительно действительной оси в области $G$, точка $w^*\delta^2$ будет лежать на положительной части действительной оси в области $G$: $w^*\delta^2 = u + i0 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \exp\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)$. Проведем разрез вдоль положительной части действительной оси в $\mathbf{C}_w$ от точки $w^*\delta^2$ и до $(+\infty)$. Обозначим его через $L_0$, очевидно, что $L_0 \subset G$. При отображении $z = \psi(w)$ разрез $L_0$ перейдет в положительную часть действительной оси в области $U$ с началом в точке $x_0$ ($x_0 = 0,89961\dots$ — единственный положительный корень уравнения $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \exp \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = xe^x$) и до $+\infty$. Пусть $\gamma_0 \equiv \{z = x + i0 : x \in [x_0, +\infty)\}$, тогда $W(\gamma_0) \equiv L_0$, $W(z) \equiv ze^z$). Вращая разрез $L_0$ вокруг начала координат в $\mathbf{C}_w$ против часовой стрелки, получим разрезы $L_0\delta, L_0\delta^2$. Прообразами этих разрезов при отображении $w = ze^z$ будут две кривые, которые опишем в общих чертах:

$$\gamma_0^+ : W(\gamma_0^+) \equiv \delta L_0, \quad \gamma_0^- : W(\gamma_0^-) \equiv \delta^2 L_0.$$

Заметим, что обе кривые расположены в области $U$: $\gamma_0^+$ в верхней полуплоскости, а $\gamma_0^-$ в нижней, и симметричны друг другу относительно действительной оси в $\mathbf{C}_z$. Таким образом, получим область $U \setminus \{\gamma_0 \cup \gamma_0^- \cup \gamma_0^+\}$, обозначим $l_0 \equiv \{w : w = u + i0;\ u \in (-\infty, -1/e]\}$. Проведем разрезы

$$\delta l_0 \equiv \left\{ w : w \exp\left( -\frac{2\pi i}{3} \right) \in l_0 \right\}, \quad \delta^2 l_0 \equiv \left\{ w : w \exp\left( -\frac{4\pi i}{3} \right) \in l_0 \right\}.$$

Выше отмечали, что $G \equiv W(U)$ и $G \equiv \mathbf{C}_w \setminus \{(-\infty, -1/e]\}$, где $w = ze^z$. Заметим, что прообразами разрезов $\delta l_0$ и $\delta^2 l_0$ при отображении $w = ze^z$ будут кривые $\gamma_1^-$ и $\gamma_1^+$:

$$W(\gamma_1^-) = \delta l_0, \quad W(\gamma_1^+) = \delta^2 l_0.$$

Рассмотрим области следующего вида:

$$G_1 \equiv G \setminus \{\{\delta l_0\} \cup \{\delta^2 l_0\}\}, \quad G_2 \equiv G_1 \setminus \{L_0 \cup \delta L_0 \cup \delta^2 L_0\}.$$

Прообразом области $G_2$ при отображении $w = ze^z$ будет область

$$U^* \equiv U \setminus \{\gamma_0 \cup \gamma_0^- \cup \gamma_0^+ \cup \gamma_1^- \cup \gamma_1^+\}.$$

Сформулируем первый из основных результатов этого раздела.

**Теорема 3.** 1. *Пространство* $A(\exp, U^*)$ *является пространством единственности интерполяционной задачи* А-Г (15), (16).

2. *Пространство* $A(\exp, U \setminus \{\gamma_1^- \cup \gamma_1^+\})$ *уже не является пространством единственности интерполяционной задачи* А-Г (15), (16).

Доказательство. 1. Предположим, что $F(z) \in A(\exp, U^*)$ и $F^{(n)}(\lambda_n) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, но тем не менее $F(z) \not\equiv 0$. Покажем, что это предположение приводит к противоречию. Действительно, вычисляя производные $F^{(n)}(\lambda_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (te^t)^{3k} g(t)\, dt = 0,\ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (te^t)^{3k+1} e^t g(t)\, dt = 0,\ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (te^t)^{3k+2} e^{2t} g(t)\, dt = 0, \tag{18}$$

где $g(z) \in A_0(\overline{\mathbf{C}}_z \setminus U^*)$, $g(z) \not\equiv 0$, $\operatorname{supp} g(z) \subset \operatorname{int} \Gamma$.

Из (18) и [14] заключаем, что система функций

$$\{(ze^z)^{3n}\}_{n=0}^{\infty} \cup \{(ze^z)^{3n+1} e^z\}_{n=0}^{\infty} \cup \{(ze^z)^{3n+2} e^{2z}\}_{n=0}^{\infty} \tag{19}$$

неполна в пространстве $A(U^*)$.

Заметим, что образ области $U^*$ при отображении функцией $w = ze^z$ заведомо удовлетворяет условию (2). В таком случае к системе функций (19) применима теорема 2, согласно которой в области $G_2$ имеется хотя бы один полный набор нулей функции $\Delta_3(w)$ в (4). Учитывая (4), (19) и $\delta = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$, видим, что функция $\Delta_3(w)$ в данном случае имеет вид

$$\Delta_3(w) \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{\psi(w)} & \delta e^{\psi(w\delta)} & \delta^2 e^{\psi(w\delta^2)} \\ [e^{\psi(w)}]^2 & [\delta e^{\psi(w\delta)}]^2 & [\delta^2 e^{\psi(w\delta^2)}]^2 \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Из (20) заключаем, что

$$\Delta_3(w) \equiv (\delta e^{\psi(w\delta)} - e^{\psi(w)})(\delta^2 e^{\psi(w\delta^2)} - e^{\psi(w)})(\delta^2 e^{\psi(w\delta^2)} - \delta e^{\psi(w\delta)}). \tag{21}$$

Условие $\Delta_3(w) = 0$ приводит к трем множителям. В результате имеем набор точек $\{w^*, w^*\delta, w^*\delta^2\}$ (см. (17) и ниже), полный набор нулей функции $\Delta_3(w)$ одного ранга. Но по построению в области $G_2$ нет ни одного полного набора нулей одного ранга (хотя бы точек $w^*, w^*\delta, w^*\delta^2$), ибо они (и, возможно, другие подобного типа) вырезаны лучами $L_0, \delta L_0, \delta^2 L_0$. Применяя теорему 2, заключаем, что система функций (19) полна в пространстве $A(U^*)$; противоречие. П. 1 теоремы доказан.

2. П. 2 сразу следует из теоремы 2. Действительно, в области $G_1$ заведомо имеется полный набор нулей одного ранга для функции $\Delta_3(w)$ (это точки $w^*, w^*\delta, w^*\delta^2$). Применяя теорему 2, видим, что система функций (19) неполна в пространстве $A(U \setminus \{\gamma_1^- \cup \gamma_1^+\})$, а учитывая (18), заключаем, что $\exists F(z) \in A(\exp, U \setminus \{\gamma_1^- \cup \gamma_1^+\})$: $F^{(n)}(\lambda_n) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, но $F(z) \not\equiv 0$. Теорема доказана.

Замечание 3. В указанном выше пространстве $A(\exp, U^*)$ может быть решена и проблема конструкции, т. е. можно указать вид функции $F(z) \in A(\exp, U^*)$, удовлетворяющей условиям (15), (16) при некоторых условиях допустимости на числовую последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ в (15) (см. [6]).

Сформулируем второй основной результат данного раздела. Рассмотрим следующий вариант интерполяционной задачи Гельфонда — Ибрагимова (задача о трех точках, см. [10, 14, 18]). *Для каких пространств $A(\exp, D)$ из условий $F(z) \in A(\exp, D)$ и*

$$F^{(3n)}(0) = 0,\ F^{(3n+1)}(1) = 0,\ F^{(3n+2)}(2) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

*будет следовать, что $F(z) \equiv 0$?* Этот вопрос можно поставить как вопрос об описании пространства единственности в интерполяционной задаче о восстановлении целой функции $F(z) \in A(\exp, D)$ по заданным значениям ее производных в трех точках:

$$F^{(3n)}(0) = a_n,\ F^{(3n+1)}(1) = b_n,\ F^{(3n+2)}(2) = c_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{22}$$

где $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ — некоторые допустимые последовательности комплексных чисел. Тогда, учитывая преобразование Бореля, систему функций (14) и утверждение 4, можем заключить, что справедлива

**Теорема 4.** 1. *Пространство $A(\exp, D_4)$ — пространство единственности интерполяционной задачи* (22).

2. *Пространство $A(\exp, |z| < \pi)$ уже не является пространством единственности интерполяционной задачи* (22).

Замечание 4. В пространстве $A(\exp, D_4)$ может быть решена и проблема конструкции, т. е. можно указать вид функции $F(z) \in A(\exp, D_4)$, удовлетворяющей условиям (22) при некоторых условиях допустимости на числовые последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ в (22) (см. [6]).

Замечание 5. Из теоремы 2 достаточно просто можно получить все результаты Ю. А. Казьмина [10], связанные с задачей Гельфонда — Ибрагимова.

Замечание 6. Метод, который использовался при доказательстве теоремы 2, можно полностью перенести и на более общий случай системы функций вида (1) (при $p > 3$), однако ввиду громоздкости в данной работе этим заниматься не будем.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Казьмин Ю. А.* Общая проблема моментов в комплексной области // Proc. Conf. constructive theory of functions. Budapest, 1972. P. 225–254.
2. *Миролюбов А. А.* К вопросу о полноте системы показательных функций // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 1. С. 3–10.
3. *Казьмин Ю. А.* Полнота в криволинейной полосе последовательности показательных функций // Вестн. МГУ. 1968. Т. 6. С. 18–31.
4. *Boas R. P.* A completeness theorem // Amer. J. Math. 1940. V. 62, N 2. P. 312–318.
5. *Boas R. P.* Some uniqueness theorems for entire functions // Amer. J. Math. 1940. V. 62, N 2. P. 319–324.
6. *Андриянов Г. И.* Модифицированная проблема моментов в комплексной области // Мат. заметки. 2002. Т. 72, № 6. С. 804–814.
7. *Андриянов Г. И.* О полноте одной системы аналитических функций // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 2. С. 163–177.
8. *Евграфов М. А.* Основные понятия интерполяции целых функций. М., 1975. 86 с. (Препринт/ИПМ АН СССР).
9. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978. Т. 2.
10. *Казьмин Ю. А.* Об одной задаче Гельфонда — Ибрагимова. II // Вестн. МГУ. 1965. Т. 6. С. 37–44.
11. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
12. *Альпер С. Я.* О полноте системы аналитических функций // Докл. АН СССР. 1949. Т. 200, № 6. С. 1029–1032.
13. *Ибрагимов И. И., Аршон И. С.* О полноте некоторых систем аналитических функций // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197, № 5. С. 1010–1013.
14. *Ибрагимов И. И.* Методы интерполяции и некоторые их применения. М.: Наука, 1971.
15. *Андриянов Г. И.* Интерполяционная задача Абеля — Гончарова: Дисс. … канд. физ.-мат. наук. М., 1998.
16. *Гончаров В. Л.* Интерполяционные процессы и целые функции // Успехи мат. наук. 1937. Т. 3. С. 113–143.
17. *Гельфонд А. О.* Проблема представления и единственности аналитической функции первого порядка // Успехи мат. наук. 1937. Т. 3. С. 144–174.
18. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.


*Статья поступила 28 марта 2014 г.*

Андриянов Геннадий Иванович
Калужский филиал Московского гос. технического университета
(МГТУ) им. Н. Э. Баумана,
ул. Баумана, 2, Калуга 248000
g.andrijanov@yandex.ru