Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2014. Том 55, № 6

УДК 510.5

Q–СВОДИМОСТЬ И m–СВОДИМОСТЬ НА ВЫЧИСЛИМО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВАХ

И. И. Батыршин

Аннотация. Исследуются различия Q-сводимости и m-сводимости на вычислимо перечислимых множествах. Строится такое не вычислимое не m-полное вычислимо перечислимое множество B, что для всех вычислимо перечислимых множеств $A \leq_Q B$ выполняется $A \leq_m B$. Доказывается, что для любого не вычислимого вычислимо перечислимого множества A существует такое вычислимо перечислимое множество B, что $A \leq_Q B$, но $A \nleq_m B$. Доказывается, что для любого простого множества B существует такое вычислимо перечислимое множество A, что $A \leq_Q B$, но $A \nleq_m B$. Из последнего результата, в частности, следует, что в Q-степени любого простого множества содержится бесконечно много в. п. m-степеней.

Ключевые слова: Q-сводимость, m-сводимость, вычислимо перечислимое множество, простое множество.

1. Введение

Основной задачей теории вычислимости является изучение сложности математических проблем. Одним из ключевых инструментов для решения этой задачи выступают алгоритмические сводимости, которые задают степени неразрешимости этих проблем и позволяют сводить разрешимость одних проблем к другим. Наиболее естественной и широко изученной алгоритмической сводимостью является тьюрингова сводимость (T-сводимость), которая максимально полно отражает интуитивное понятие сведения разрешимости одной математической проблемы к другой.

Изучение вычислимо перечислимых (в. п.) T-степеней началось со статьи Поста [1], ставшей классической и задавшей направления развития теории вычислимости на десятилетия вперед. В этой статье Пост поставил проблему построения не вычислимой не T-полной в. п. T-степени и предложил программу по достижению этой цели, которая заключалась в построении в. п. множества с очень «жидким» дополнением, гарантирующим его неполноту. Для реализации этой программы он ввел несколько алгоритмических сводимостей, в настоящее время называемых в литературе *сильными сводимостями* (см. [2–4]), изучение которых хоть и не привело к решению поставленной им проблемы, но позволило получить ряд важных результатов и дало толчок к постановке и решению новых проблем.

Одной из введенных Постом сводимостей была много-одно сводимость (также известная как m-сводимость), получившая приложения не только в теории вычислимости, но и в теории вычислительной сложности, а также в ряде других смежных дисциплин (множество A *m-сводится к множеству* B ($A \leq_m B$), если существует такая вычислимая функция f, что для всех $x \in \omega$ выполняется $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$).

В настоящее время существует целый ряд независимых решений проблемы Поста, основанных на принципиально разных подходах. Самым известным решением этой проблемы является теорема Фридберга — Мучника (см. [5]), для доказательства которой был разработан метод приоритета, впоследствии ставший одним из наиболее мощных методов в арсенале теории вычислимости. Другим решением проблемы Поста [6] стали K-тривиальные множества — естественный и просто определяемый класс множеств, являющийся одним из ключевых объектов изучения в теории алгоритмической случайности и сложности.

Однако оба эти решения основаны на подходах, весьма далеких от изначальной программы Поста по построению в. п. множества с «жидким» дополнением. Тем не менее программа Поста была выполнена С. С. Марченковым [7], который, используя одну из алгоритмических сводимостей, а именно квазисводимость (Q-сводимость), показал, что η-гипергиперпростые множества, введенные Ю. Л. Ершовым [8], не могут быть T-полными.

Квазисводимость (Q-сводимость) введена Тенненбаумом как одно из естественных усилений T-сводимости (см. [2]) на в. п. множествах. Напомним, что множество A *квазисводится к множеству* $B \subseteq \omega$ ($A \leq_Q B$), если существует такая вычислимая функция g, что для всех $x \in \omega$ выполняется $x \in A \Leftrightarrow W_{g(x)} \subseteq B$.

Q-сводимость по сравнению с другими алгоритмическими сводимостями до недавнего времени привлекала мало внимания в связи с тем, что она не влечет T-сводимости на всех подмножествах множества натуральных чисел. Поэтому с позиции глобальной теории степеней она не представляет такого интереса, как сильные сводимости. Однако на в. п. степенях Q-сводимость влечет T-сводимость, тем самым считаем, что с точки зрения локальной теории степеней она имеет не меньшее значение, чем табличная сводимость или другие сильные сводимости.

Еще одной замечательной особенностью Q-сводимости, помимо участия в решении проблемы Поста, является ее прямая и тесная связь с алгебраическими отношениями между группами, как было показано в [9, 10]. Кроме того, в [11, 12] изучены свойства Q-полных множеств с точки зрения теории алгоритмической случайности и сложности.

В последние годы алгебраическая структура в. п. и n-в. п. Q-степеней интенсивно изучалась. В частности, в [13–19] показано, что верхняя полурешетка в. п. Q-степеней не дистрибутивна и не является решеткой, построены примеры минимальных пар в. п. Q-степеней, изучены дополняемые и недополняемые, расщепляемые и нерасщепляемые, ветвящиеся и неветвящиеся в. п. и n-в. п. Q-степени, доказано что в. п. Q-степени плотны, рассмотрены изолированные и неизолированные 2-в. п. Q-степени, а также ряд других свойств этой алгебраической структуры.

В [14, 20, 21] изучены теории первого порядка в. п. Q-степеней, Π^0_2 Q-степеней и Q-степеней в целом и показано, что первые две теории неразрешимы, а последняя вычислимо изоморфна теории арифметики второго порядка.

Однако взаимосвязь Q-сводимости с m-сводимостью и другими алгоритмическими сводимостями в настоящее время практически не изучена. В частности, до сих пор остается открытым [22] вопрос о существовании в. п. не вычислимой Q-степени, состоящей ровно из одной m-степени.

Целью данной статьи является изучение вопроса о том, насколько сильно m-сводимость и Q-сводимость различаются на в. п. множествах.

В [23] в качестве ключевого вопроса, характеризующего взаимосвязь произвольных алгоритмических сводимостей r_1 и r_2, поставлена проблема существования r_1-степеней, имеющих «r_2-вершину» или «r_2-дно». Говорят, что r_1-степень $\mathbf{b}$ *имеет r_2-вершину*, если в r_1-степени $\mathbf{b}$ существует такое в. п. множество B, что для всех в. п. множеств A из r_1-степени $\mathbf{b}$ выполняется $A \leq_{r_2} B$. Аналогично r_1-степень $\mathbf{b}$ *имеет r_2-дно*, если в r_1-степени $\mathbf{b}$ существует такое в. п. множество B, что для всех в. п. множеств A из r_1-степени $\mathbf{b}$ выполняется $B \leq_{r_2} A$.

Главным результатом данной статьи является построение такого не вычислимого не m-полного в. п. множества B, что для всех в. п. $A \leq_Q B$ выполняется $A \leq_m B$, т. е. множества, которое является m-вершиной своей Q-степени.

Также в работе доказываются следующие теоремы, касающиеся различий m-сводимости и Q-сводимости на в. п. множествах.

(i) Для любого не вычислимого в. п. множества A существует такое в. п. множество B, что $A \leq_Q B$, но $A \not\leq_m B$.

(ii) Для любого простого множества B существует такое в. п. множество A, что $A \leq_Q B$, но $A \not\leq_m B$.

Из последнего результата, в частности, следует, что в Q-степени любого простого множества содержится бесконечно много в. п. m-степеней.

2. Различия m-сводимости и Q-сводимости на в. п. множествах

В работе используются стандартные определения и обозначения, которые могут быть найдены в [2, 3, 5].

При доказательстве предложения 1, теорем 2 и 5 для обеспечения условия $A \leq_Q B$ будем тем или иным способом строить равномерную в. п. последовательность $\{U_x\}_{x\in\omega}$ такую, что $x \in A \Leftrightarrow U_x \subseteq B$. Тогда сводимость $A \leq_Q B$ будет обеспечиваться вычислимой функцией g, удовлетворяющей равенству $W_{g(x)} = U_x$. Однако во избежание излишней загруженности доказательств техническими деталями при доказательстве этих теорем будем сразу говорить, что *строим функцию g и перечисляем элементы в $W_{g(x)}$*, имея при этом в виду, что строим $\{U_x\}_{x\in\omega}$ и затем определяем описанным выше способом функцию g.

В статье изучается вопрос о различии Q-сводимости и m-сводимости на в. п. множествах. Ясно, что m-сводимость влечет Q-сводимость на всех множествах (если $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$ для вычислимой функции f, то $x \in A \Leftrightarrow W_{g(x)} \subseteq B$ для вычислимой функции g, определяемой следующим образом: $W_{g(x)} = \{f(x)\}$). Верно ли обратное на всех или некоторых в. п. множествах? Есть ли такие в. п. множества A и B, что из $A \leq_Q B$ следует $A \leq_m B$?

Эти сводимости совпадают в тривиальных случаях: если множество A вычислимо, то оно m-сводится и Q-сводится ко всем другим множествам, кроме $\varnothing$ и ω, а если множество B m-полное, то к нему m-сводятся и Q-сводятся все в. п. множества.

Совпадают ли эти сводимости в общем случае на всех в. п. множествах? Легко показать, что это не так, а именно существуют в. п. множества, на которых эти две сводимости не совпадают. Далее в статье доказываются более сильные утверждения, однако для удобства понимания читателем доказательств последующих теорем и специфики работы с Q-сводимостью приведем набросок построения таких множеств.

Предложение 1. *Существуют такие в. п. множества A и B, что $A \leq_Q B$, но $A \not\leq_m B$.*

Доказательство. Строим множества A и B по шагам, удовлетворяя глобальное требование $\mathscr{R}$ и для каждого $e \in \omega$ требования $\mathscr{P}_e$:

$$\mathscr{R} : A \leq_Q B; \quad \mathscr{P}_e : (\exists x)(\Phi_e(x) \uparrow \vee \neg(x \in A \Leftrightarrow \Phi_e(x) \in B).$$

Фиксируем какой-либо $\bar{b}$, который никогда не будем класть в B в процессе нашей конструкции.

Для удовлетворения требования $\mathscr{R}$ строим такую вычислимую функцию g, что $x \in A \Leftrightarrow W_{g(x)} \in B$. Для каждого $x \in \omega$ на всех шагах $s > x$, если $x \notin A_s$ и $W_{g(x),s} \subseteq B_s$, перечисляем в $W_{g(x),s+1}$ некий элемент $b \notin B_s$. Если впоследствии x перечисляется в A_t на шаге $t > s$, то перечисляем этот b в B_t.

Базовый модуль для $\mathscr{P}_e$ на шаге s. Если на этом шаге у требования отсутствует свидетель, то назначаем в качестве свидетеля наименьший $x \notin A_s$, не использовавшийся до этого в нашей конструкции, и определяем $W_{g(x),s} = \{b_{x,e}\}$ для некоторого $b_{x,e} \notin B$, также пока не использовавшегося в конструкции.

Проверяем для свидетеля x (уже имевшегося или вновь назначенного) выполнение следующих условий.

Если $x \notin A_s$ и $W_{g(x),s} \subseteq B$ (т. е. стратегия требования $\mathscr{P}_i$ для некоторого $i < e$ на предыдущем шаге перечислила $b_{x,e}$ в B), то перечисляем в $W_{g(x),s}$ новый не использовавшийся ранее элемент $b'_{x,e}$.

Если $(\Phi_e(x) \uparrow \vee \neg(x \in A \Leftrightarrow \Phi_e(x) \in B))[s]$, то на этом шаге больше ничего не делаем.

(1) Если $x \notin A_s$ и $\Phi_{e,s}(x) \downarrow = y \notin B_s$, то возможен один из следующих вариантов:

(1a) если $y = \bar{b}$, то перечисляем x в A_{s+1} и перечисляем $b_{x,e}$ в B_{s+1}; имеем $x \in A$, но $\Phi_e(x) \notin B$, требование удовлетворено и больше не предпринимает никаких действий на следующих шагах;

(1b) если $y \neq \bar{b}$ и $y \neq b_{z,i}$ для всех $i < e$, то перечисляем y в B_{s+1}, навсегда оставляем x в $\bar{A}$ и перечисляем $\bar{b}$ в $W_{g(x),s+1}$; имеем $x \notin A$, но $\Phi_e(x) \in B$, требование удовлетворено и больше не предпринимает никаких действий на следующих шагах;

(1c) если $y = b_{z,i}$ для некоторого $i < e$, то перечисляем x в A_{s+1} и перечисляем $b_{x,e}$ в B_{s+1}.

(2) Если $x \in A_s$ и $W_{g(x),s} \subseteq B_s$ (т. е. на предыдущем шаге стратегия требования $\mathscr{P}_i$ для некоторого $i < e$ перечислила y из п. (1c) в B), то отменяем x как свидетеля.

Конструкция. Положим $A_0 = B_0 = \varnothing$. На шаге s последовательно работаем на требованиях $\mathscr{P}_0$, $\mathscr{P}_1$, …, $\mathscr{P}_s$ в соответствии с приведенным выше модулем.

Легко видеть, что для каждого $\mathscr{P}_e$ будет выбрано не более чем e свидетелей, на одном из которых требование будет удовлетворено, и тем самым конструкция приведет нас к построению искомых множеств. $\square$

Следующим естественным вопросом является вопрос о том, различаются ли Q-сводимость и m-сводимость на всех в. п. множествах или существует такое в. п. множество A, на котором Q-сводимость не отличима от m-сводимости, т. е. все в. п. множества, лежащие по Q-сводимости выше A (или ниже A), лежат выше A (ниже A) и по m-сводимости? Другими словами, можно ли усилить предыдущее предложение, если мы строим только одно множество, а второе фиксировано?

Следующая теорема показывает, что если зафиксировать нижнее множество, то по-прежнему можно построить верхнее множество с теми же свойствами, что и в предыдущем предложении, т. е. что Q-сводимость и m-сводимость различаются *над* всеми в. п. не вычислимыми множествами (над вычислимыми множествами, как упоминалось выше, эти сводимости совпадают).

Теорема 2. *Для любого в. п. не вычислимого A существует такое в. п. множество B, что $A \leq_Q B$, но $A \not\leq_m B$.*

Доказательство. Строим множество B по шагам, удовлетворяя те же требования, что и в предложении 1:

$$\mathscr{R} : A \leq_Q B, \quad \mathscr{P}_e : (\exists x)(\Phi_e(x) \uparrow \vee \neg(x \in A \Leftrightarrow \Phi_e(x) \in B).$$

Базовая стратегия для удовлетворения глобального требования $\mathscr{R}$ остается такой же, как и в предыдущем предложении: строим вычислимую функцию g такую, что $x \in A \Leftrightarrow W_{g(x)} \in B$. Для каждого $x \in \omega$, пока x не перечислен в A, обеспечиваем, чтобы в $W_{g(x)}$ лежал некий элемент $b_x \notin B$. Если x перечисляется в A, то перечисляем этот b в B.

Однако стратегия удовлетворения требования $\mathscr{P}_e$ становится более сложной, так как уже не можем контролировать перечисление элементов в множество A.

Поэтому для каждого $\mathscr{P}_e$ строим такое в. п. множество C_e, что если $(\forall x)(\Phi_e(x) \downarrow \&(x \in A \Leftrightarrow \Phi_e(x) \in B)$, то $\overline{A} = C_e$, что противоречило бы тому, что A не вычислимо.

Базовый модуль для $\mathscr{P}_e$ отдельно от глобального требования $\mathscr{R}$. Используем ω-последовательность циклов $k = 0, 1, 2 \ldots$, каждый из которых действует следующим образом.

(1) Ждем такого шага s, что или $k \in A_s$, или $k \notin A_s$ и $\Phi_{e,s}(k) \downarrow = y \notin B_s$.

(2) В первом случае закрываем цикл k и открываем цикл $k+1$, во втором случае запрещаем y перечисляться в B, перечисляем k в C_e и открываем цикл $k+1$.

(3) Если впоследствии k перечислится в A, то закрываем все циклы.

Модуль имеет следующие выходы.

(А) Какой-то цикл k бесконечно ждет в п. (1) или достигает п. (3). В этом случае или $\Phi_e(k) \uparrow$, или $k \notin A \& \Phi_e(k) \in B$, или $k \in A \& \Phi_e(k) \notin B$. Цикл k является свидетелем того, что $A \not\leq_m B$ посредством Φ_e, требование удовлетворено.

(Б) Каждый цикл работает на конечном числе шагов, и в процессе конструкции открывается бесконечно много циклов. Это означает, что для всех $k \notin A$ цикл k достигнет п. (2) и никогда впоследствии не достигнет п. (3), тем самым $\overline{A} = C_e$, что противоречит тому, что A не вычислимо. Таким образом, этот выход невозможен.

Сложность взаимодействия этой стратегии со стратегией удовлетворения глобального требования $\mathscr{R}$ заключается в том, что последняя может на шаге s_0 для некоторого x перечислить в $W_{g(x)}$ некий элемент b_x, затем на шаге $s_1 > s_0$ для некоторого цикла k окажется, что $\Phi_{e,s_1}(k) \downarrow = b_x$, этот k будет перечислен в

C_e, потом на шаге $s_2 > s_1$ элемент x будет перечислен в A_{s_2}, стратегия для $\mathscr{R}$ перечислит b_x в B_{s_2}, а затем на шаге $s_3 > s_2$ элемент k будет перечислен в A_{s_3} и тем самым будет нарушено условие $C = \overline{A}$. При этом стратегия для $\mathscr{R}$ может нарушать каждое требование $\mathscr{P}_e$ подобным образом бесконечное количество раз на бесконечном количестве циклов.

Этой проблемы можно избежать, если в базовом модуле для $\mathscr{P}_e$ в п. (2) вместо запрещения перечисления y в B, наоборот, будем перечислять y в B, чтобы обеспечить $k \notin A$, но $\Phi_e(k) \in B$, после чего ждать, когда k перечислится в A, и открывать цикл $k+1$. Если при этом окажется, что $y = b_x$ для некоторого x, то для удовлетворения требования $\mathscr{R}$ перечислим в $W_{g(x)}$ еще один элемент $b_x^1 \notin B$. При этой стратегии, так как $A \neq \omega$, будет открыто не более k_0 циклов, где k_0 — наименьший элемент, не принадлежащий A.

Однако при этой стратегии возникает вторая сложность: может случиться так, что для некоторого $x \notin A$ все элементы b_x^1, b_x^2 ..., которые перечисляем в $W_{g(x)}$, будут впоследствии перечислены в B одним из требований $\mathscr{P}_i$, $i \in \omega$, и тем самым окажется, что $W_{g(x)} \subseteq B$, хотя на каждом шаге s и будет выполняться $W_{g(x)} \nsubseteq B[s]$. Таким образом для этого $x \notin A$ не сможем обеспечить выполнение условия $W_{g(x)} \nsubseteq B$.

Чтобы обойти эту сложность, будем комбинировать обе стратегии: стратегию запрещения перечисления y в B и стратегию перечисления y в B.

Базовый модуль для $\mathscr{P}_e$, учитывающий глобальное требование $\mathscr{R}$. Используем ω-последовательность циклов $k = 0, 1, 2\dots$, каждый из которых действует следующим образом.

(1) Ждем такого шага s, что или $k \in A_s$, или $k \notin A_s$ и $\Phi_{e,s}(k)\downarrow = y \notin B_s$.

(2a) Если $k \in A_s$, то открываем цикл $k+1$.

(2b) Если $\Phi_{e,s}(k)\downarrow = y$ и $y = b_x$ для $x > e$, то перечисляем y в B и ждем, пока k перечислится в A.

(3b) Если впоследствии k перечислится в A, то открываем цикл $k+1$.

(2c) Если $\Phi_{e,s}(k)\downarrow = y$ и $y = b_x$ для $x < e$, то запрещаем перечислять $y = b_x$ в B, перечисляем k в C_e и открываем цикл $k+1$.

(3c) Если впоследствии k перечислится в A, то закрываем все циклы.

(4c) Если впоследствии y будет перечислен в B, то открываем цикл $k+1$.

Модуль имеет следующие выходы.

(А) Какой-то цикл k бесконечно ждет в п. (1) или бесконечно ждет в п. (2b), или достигает п. (3c) и не достигает п. (4c). В этом случае или $\Phi_e(k)\uparrow$, или $k \notin A \& \Phi_e(k) \in B$, или $k \in A \& \Phi_e(k) \notin B$. Цикл k является свидетелем того, что $A \nleq_m B$ посредством Φ_e, требование удовлетворено и действует конечное число раз.

(Б) Каждый цикл работает на конечном числе шагов и в процессе конструкции открывается бесконечно много циклов. Это означает, что для всех $k \notin A$ цикл k достигнет п. (2c) и не достигнет п. (3c), или достигнет п. (4c). Однако п. (4c) может достигнуть только конечное число циклов (пусть s — наименьший шаг такой, что $(\forall x < e)(A_s(x) = A(x))$, тогда все циклы, впервые открытые после шага s никогда не достигнут п. (4c)). Поэтому имеем $C_e =^* \overline{A}$, что по-прежнему будет противоречить тому, что A не вычислимо. Таким образом, этот выход по-прежнему невозможен.

В связи с тем, что каждое требование $\mathscr{P}_i$ будет действовать только конечное число раз, избежим второй сложности: для каждого $x \notin A$ в $W_{g(x)}$ будет перечислено только конечное число элементов из-за действий требований $\mathscr{P}_i$ для $i < x$ и тем самым будет обеспечено $x \in A \Leftrightarrow W_{g(x)} \in B$.

Конструкция. Определим функцию длины $l(e,s) = \max\{n < s \mid (\forall k < n)(k \in A \Leftrightarrow \Phi_e(k) \in B)[s]\}$.

Шаг $s = 0$. Положим $B_0 = B_{1,0} = B_{2,0} = \varnothing$ и $W_{g(x),0} = \varnothing$ для всех $x \in \omega$.

Шаг $s+1$. Для всех $k < s$, если $k \notin A_s \& W_{g(k),s} \subseteq B_s$, полагаем $W_{g(k),s+1} = W_{g(k),s} \cup \{s_k\}$ для некоторых не использовавшихся до этого в конструкции и не принадлежащих B элементов $s_k \neq s_m$ при $k \neq m$.

Полагаем $B_{s+1} = B_s \cup B_{1,s} \cup B_{2,s}$, где

$$B_{1,s} = \Big\{\Phi_{e,s}(k) \mid e < s,\ k < l(e,s),\ k \notin A_s,\ \Phi_{e,s}(k) \in \bigcup_{e<x<s} W_{g(x),s}\Big\},$$

$$B_{2,s} = \{x \mid x \in W_{g(k),s},\ k < s,\ k \in A_s \& W_{g(k),s} \not\subseteq B_s\}.$$

Конец конструкции.

Верификация. Определим $B_1 = \bigcup\limits_{s\in\omega} B_{1,s}$, $B_2 = \bigcup\limits_{s\in\omega} B_{2,s}$, $B = \bigcup\limits_{s\in\omega} B_s$ и $W_{g(x)} = \bigcup\limits_{s\in\omega} W_{g(x),s}$ для всех $x \in \omega$.

Лемма 3. *Пусть для всех $n < e$ требование $\mathscr{P}_n$ удовлетворено. Тогда $\mathscr{P}_e$ удовлетворено и найдется такой шаг s_e, что $l(e,s) = l(e,s_e)$ для всех $s > s_e$.*

Доказательство. Пусть s_0 — шаг такой, после которого ни одно $\mathscr{P}_n, n < e$, больше не действует и $A \restriction e = A_{s_0} \restriction e$. Предположим, что $(\Phi_e(k)\downarrow \& (k \in A \Leftrightarrow \Phi_e(k) \in B))$ для всех $k \in \omega$, и пусть тогда $s_k > s_0$ — наименьшие шаги, на которых $\Phi_{e,s_k}(k)\downarrow$.

Покажем, что для всех $k \in \omega$ выполняется $k \in A \Leftrightarrow \Phi_{e,s_k}(k) \in B_{s_k+1}$, т. е. что A вычислимо; противоречие с условиями теоремы.

Если $\Phi_{e,s_k}(k) \in B_{s_k+1}$, то $k \in A$ согласно предположению.

Если $\Phi_{e,s_k}(k) \notin B_{s_k+1}$, то $\Phi_{e,s_k}(k) \notin \bigcup\limits_{e<x<s_k} W_{g(x),s_k} \Rightarrow \Phi_{e,s_k}(k) \notin \bigcup\limits_{e<x} W_{g(x)}$, так как в $W_{g(x)}$ перечисляются только не использовавшиеся до этого элементы. Значит, $\Phi_{e,s_k}(k) \notin B_1$. Если $\Phi_{e,s_k}(k) \in W_{g(x),s_k}$ для некоторого $x < e$, то отметим, что $x \notin A_{s_k}$ (иначе $\Phi_{e,s_k}(k)$ на шаге s_k+1 был бы перечислен в B_{s_k+1}). Так как $s_k > s_0$ (а значит, $A \restriction e = A_{s_k} \restriction e$), то $x \notin A$ и, стало быть, $\Phi_{e,s_k}(k) \notin B_2$. Поэтому $\Phi_{e,s_k}(k) \notin B$ и по предположению $k \notin A$.

Таким образом, наше предположение неверно и $\lim\limits_s l(e,s) < \infty$, т. е. найдется такой шаг s_e, что $l(e,s) = l(e,s_e)$ для всех $s > s_e$. $\square$

Лемма 4. *$A \leq_Q B$ посредством вычислимой функции g.*

Доказательство. Покажем, что для всех $x \in \omega$ выполняется $x \in A \Leftrightarrow W_{g(x)} \subseteq B$.

Если $x \in A_s$ для некоторого наименьшего s, то по конструкции $W_{g(x)} = W_{g(x),s+1} \subseteq B_{2,s+1} \subseteq B$.

Если $x \notin A$, то пусть $s_x = \max\limits_{e<x}\{s_e\}$, где $s_e, e \in \omega$ — шаги из предыдущей леммы. По конструкции существует такой $y \in W_{g(x),s_x+1} - B_{s_x}$, что $y \neq \Phi_e(k)$, для всех $e < x$, $k < \max\limits_{e<x} l(e,s_x)$, поэтому $y \notin B_1$. В силу того, что $x \notin A$, $y \in W_{g(x)}$ и $W_{g(i)} \cap W_{g(j)} = \varnothing$ для всех i,j, имеем $y \notin B_2$, поэтому $y \notin B$ и $W_{g(x)} \not\subseteq B$. $\square$

Эти леммы доказывают теорему. $\square$

Ситуация становится гораздо сложнее, если зафиксировать не нижнее множество из предложения 1, а верхнее. В этом случае ответ на вопрос о различии Q-сводимости и m-сводимости зависит от свойств верхнего множества. Сначала покажем, что Q-сводимость и m-сводимость отличаются *под* всеми простыми множествами.

Теорема 5. *Пусть B — простое множество. Тогда существует такое в. п. множество A, что $A \leq_Q B$, но $A \not\leq_m B$. В частности, можно построить такое простое множество A, что $A \leq_Q B$, но $A \not\leq_m B$.*

Доказательство. Строим множество A по шагам, удовлетворяя те же требования, что и в предложении 1 и теореме 2:

$$\mathscr{R} : A \leq_Q B, \quad \mathscr{P}_e : (\exists x)(\Phi_e(x) \uparrow \vee \neg(x \in A \Leftrightarrow \Phi_e(x) \in B).$$

Для удовлетворения требования $\mathscr{P}_e$ строим такое бесконечное в. п. множество C_e, что если $(\forall x)(\Phi_e(x) \downarrow \wedge (x \in A \Leftrightarrow \Phi_e(x) \in B))$, то $C_e \subseteq \omega - B$, а это противоречило бы тому, что B — простое множество. Для этого будем строить такую бесконечную последовательность свидетелей $x_{e,k}$, что или на одном из них будет нарушено условие $(\Phi_e(x_{e,k}) \downarrow \wedge (x_{e,k} \in A \Leftrightarrow \Phi_e(x_{e,k}) \in B))$, или они составят бесконечное в. п. множество $C_e \subseteq \omega - B$.

Для обеспечения условия $A \leq_Q B$ для каждого выбранного свидетеля $x_{e,k}$ кладем в $W_{g(x_{e,k})}$ некий элемент $b_{e,k,0} \notin B$, не участвовавший до этого момента в конструкции. Если впоследствии $b_{e,k,0}$ будет перечислен в B, то перечисляем в $W_{g(x_{e,k})}$ новый элемент $b_{e,k,1} \notin B$, не участвовавший в конструкции, и т. д.

Базовый модуль для требования $\mathscr{P}_e$.

(1) Выбираем свидетеля $x_{e,0} \notin A$, кладем в $W_{g(x_{e,0})}$ наименьший элемент $b_{e,0,0} \notin B$.

(2) Ждем, пока $\Phi_e(x_{e,0}) \downarrow = y_0 \notin B$. Если до того, как это произошло, $b_{e,0,n}, n \in \omega$, перечислится в B, то перечисляем в $W_{g(x_{e,0})}$ наименьший элемент $b_{e,0,n+1} \notin B$.

(3) Если $\Phi_e(x_{e,0}) \downarrow = y_0 \notin B$, то запрещаем $x_{e,0}$ перечислять в A, перечисляем y_0 в C_e и выбираем свидетеля $x_{e,1} \notin A$.

(4) Если y_0 позднее перечислится в B, то прекращаем дальнейшую работу.

(5) Пусть выбраны свидетели $x_{e,0}, x_{e,1}, \ldots, x_{e,k-1}$, для каждого из которых нашелся соответствующий $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$, удовлетворяющий условию $\Phi_e(x_{e,i}) \downarrow = y_i \notin B$, $i = 0, \ldots, k-1$.

(6) Выбираем свидетеля $x_{e,k} \notin A$, кладем в $W_{g(x_{e,k})}$ наименьший элемент $b_{e,k,0} \notin B$. Аналогично обеспечиваем $W_{g(x_{e,k})} \not\subseteq B$ путем последовательного перечисления в этом множестве элементов $b_{e,k,n} \notin B$, $n \in \omega$.

(7) Ждем, пока $\Phi_e(x_{e,k}) \downarrow = y_k \notin B$. Возможны два варианта.

(7a) Если $y_k \notin \{y_0, \ldots, y_{k-1}\}$, то запрещаем $x_{e,k}$ перечислять в A, перечисляем y_k в C_e и переходим в п. (5) для выбора нового свидетеля $x_{e,k+1} \notin A$.

(7b) Если $y_k = y_i$ для некоторого $i < k$, то перечисляем $b_{e,k,n}$ и $b_{e,i,m}$ в C_e, где $b_{e,k,n}$ и $b_{e,i,m}$ — наибольшие числа, принадлежащие $W_{g(x_{e,k})}$ и $W_{g(x_{e,i})}$ соответственно. Переходим в п. (5) для выбора нового свидетеля $x_{e,k+1} \notin A$.

(8b) Если впоследствии $b_{e,k,n}$ (или $b_{e,i,m}$) перечислится в B, то перечисляем $x_{e,k}$ (или соответственно $x_{e,i}$, но только один из них) в A и прекращаем дальнейшую работу.

(9) Если один из y_i, $i = 0, \ldots, k$, перечислится в B, то прекращаем дальнейшую работу.

Модуль имеет следующие выходы.

(А) Для некоторого свидетеля $x_{e,k}$ модуль бесконечно ждет в п. (7) или достигает п. (9). В этом случае или $\Phi_e(x_{e,k})\uparrow$, или $x_k \notin A$ и $\Phi_e(x_{e,k}) \in B$, тем самым $x_{e,k}$ является свидетелем того, что требование $\mathscr{P}_e$ удовлетворено.

(Б) Для некоторого свидетеля $x_{e,k}$ модуль достигнет п. (8b). В этом случае существует такой $x_{e,i}$, что $\Phi_e(x_{e,k}) = \Phi_e(x_{e,i})$, но $A(x_{e,k}) \neq A(x_{e,i})$, так как один из них перечислен в A, а второй нет. Поэтому или $x_{e,k}$, или $x_{e,i}$ является свидетелем того, что требование $\mathscr{P}_e$ удовлетворено.

(В) Модуль выбирает бесконечно много свидетелей, для каждого из которых достигает п. (7a) или п. (7b), и ни для одного из них не достигает п. (8b) или п. (9). В этом случае множество C_e бесконечно и $C_e \subseteq \omega - B$, что противоречит условиям теоремы.

Таким образом, выход (В) невозможен, модуль имеет или выход (А), или выход (Б), поэтому он запрещает перечислять в A только конечное число элементов и сам перечисляет в A не более одного элемента.

Используя метод конечного приоритета, описанный выше модуль можно сочетать с любым другим модулем, имеющим только конечные выходы, например, можно построить множество A низким. Однако для целей нашего исследования будет полезно построить множество A простым, поэтому приведем формальную конструкцию такого построения.

Стратегия обеспечения простоты множества A стандартна: для каждого требования $S_e : |W_e| = \infty \Rightarrow A \cap W_e \neq \varnothing$ ждем, пока в W_e перечислится некий $y > 4e$ (для обеспечения бесконечности $\overline{A}$), и перечисляем его в A. Небольшая модификация требуется только для обеспечения условия $A \leq_Q B$: будем перечислять y в A на шаге s, только если $W_{g(y),s} \subseteq B_s$. Это обеспечивается с помощью следующего наблюдения: если W_e бесконечно, то в W_e будет перечисляться бесконечное количество элементов $y_i > 4e$, $i \in \omega$, на соответствующих шагах s_i. Если для каждого из этих элементов в $W_{g(y_i),s_i}$ будут содержаться некие элементы $c_i \notin B_{s_i}$, то аналогично с базовым модулем для требования $\mathscr{P}_e$ строим бесконечное в. п. множество $C = \bigcup\limits_i c_i \subseteq \omega - B$, вынуждая один из этих c_i перечислиться в B, после чего перечисляем соответствующий y_i в A.

Для обеспечения бесконечности $\overline{A}$ в базовом модуле для требований $\mathscr{P}_e$ будем выбирать свидетелей $x_{e,k} > 4e$.

Конструкция.

Шаг $s = 0$. Положим $A_0 = \varnothing$ и $W_{g(x),0} = M_{x,0} = \varnothing$ для всех $x \in \omega$.

Шаг $s + 1$. Говорим, что требование $\mathscr{S}_e$ *требует внимания*, если оно не *получало внимания* и

$$(\exists z > 4e)(\forall i < e)(z \notin M_{i,s} \& z \in \overline{A}_s \cap W_{e,s} \& W_{g(z),s} \subseteq B).$$

Говорим, что требование $\mathscr{P}_e$ *диагонализировано*, если $(\exists x < s)(\Phi_e(x)\downarrow \& \neg(x \in A_s \Leftrightarrow \Phi_{e,s}(x) \in B_s)$. Говорим, что требование $\mathscr{P}_e$ *требует внимания*, если оно не диагонализировано и выполнено одно из следующих условий:

(i) $\mathscr{P}_e$ не имеет ни одного свидетеля;

(ii) $\mathscr{P}_e$ имеет свидетелей $\{x_{e,1}, x_{e,1}, \dots, x_{e,n}\}$, для каждого из которых имеет место $\Phi_e(x_{e,k})\downarrow = y_{e,k} \notin B_s$.

Находим наименьший $e < s$, для которого $\mathscr{S}_e$ или $\mathscr{P}_e$ требует внимания (если такого e нет, то переходим к следующему шагу). Если $\mathscr{S}_e$ требует внимания, то перечисляем z в A_{s+1} и инициализируем все требования $\mathscr{P}_i$, $i \geq e$. Говорим, что $\mathscr{S}_e$ *получило внимание.*

Если $\mathscr{S}_e$ не требует внимания и $\mathscr{P}_e$ требует внимания, то возможны три варианта. Если $\mathscr{P}_e$ не имеет ни одного свидетеля, то назначаем в качестве свидетеля $x_{e,0}$ для $\mathscr{P}_e$ наименьшее число, не использовавшееся до этого в нашей конструкции. Если существуют два свидетеля $x_{e,i}, x_{e,j} \notin A_s$ для $\mathscr{P}_e$, для которых $\Phi_e(x_{e,i}) = \Phi_e(x_{e,j})$ и $W_{g(x_{e,i})} \subseteq B$, то перечисляем $x_{e,i}$ в A. Если таких свидетелей нет, то выбираем нового свидетеля $x_{e,n+1} > 4e$ для $\mathscr{P}_e$, который больше всех чисел, использовавшихся до этого в нашей конструкции. Говорим, что $\mathscr{P}_e$ *получило внимание*. Определяем множество запрещенных элементов $M_{e,s+1} = \{x_{e,k}\}_{1\leq k\leq n}$.

Для всех $k < s$ если $k \notin A_{s+1} \& W_{g(k),s} \subseteq B_s$, то перечисляем в $W_{g(k),s+1}$ наименьшие не использовавшиеся до этого в конструкции элементы $s_k \neq s_m$ при $k \neq m$.

Если для всех $e < s$ требования $\mathscr{S}_e$ *получили внимание* путем перечисления соответствующих z_e в A и для всех $i < s$ требования $\mathscr{P}_i$ *диагонализированы*, то для всех таких $x < \max\limits_{e<s}\{z_e\}$, что $x \notin A_s$, перечисляем в $W_{g(x)}$ некоторый фиксированный $\bar{b} \notin B$ (так как B простое, $B \neq \omega$ и такой $\bar{b}$ существует).

Конец конструкции.

Упорядочим требования $\mathscr{S}_e$ и $\mathscr{P}_e$ в один ω-список $\mathscr{Q}_e$, где $\mathscr{Q}_{2k} = \mathscr{S}_k$ и $\mathscr{Q}_{2k+1} = \mathscr{P}_k$.

Лемма 6. *Пусть для всех $i < 2k$ требования $\mathscr{Q}_i$ удовлетворены и действуют только конечное число раз. Тогда требование $\mathscr{Q}_{2k} = \mathscr{S}_k$ удовлетворено и действует только конечное число раз.*

Доказательство. Пусть s_0 — шаг, после которого требования $\mathscr{Q}_i$, $i < 2k$, не действуют, и пусть $m = \max\{x \mid (\exists i < k)(x \in M_{i,s_0})\}$. Предположим, что $\mathscr{S}_k$ не удовлетворено, т. е. $|W_k| = \infty \& A \cap W_k = \varnothing$. Определим в. п. множество $C_k = \{y \mid (\exists t > s_0)(\exists x \in W_{k,t})(x > m \& y \in W_{g(x),t} \cap \overline{B}_t)\}$. В силу предположения $|C_k| = \infty$. Пусть $C_k \cap B \neq \varnothing$, т. е. существует $x \in W_k$ такое, что для некоторого $y \in W_{g(x)}$ найдутся два шага $s > t > s_0$ такие, что $y \in C_{k,t} \cap \overline{B}_t$ и $y \in B_s - B_{s-1}$. По конструкции $\mathscr{S}_k$ получит внимание на шаге $s+1$ и x будет перечислен в A, тем самым $A \cap W_k \neq \varnothing$, что противоречит предположению. Поэтому $C_k \subseteq \omega - B$, что противоречит условиям теоремы. Тем самым $\mathscr{S}_k$ будет удовлетворено и по конструкции получит внимание не более одного раза. $\square$

Лемма 7. *Пусть для всех $i < 2k+1$ требования $\mathscr{Q}_i$ удовлетворены и действуют только конечное число раз. Тогда требование $\mathscr{Q}_{2k+1} = \mathscr{P}_k$ удовлетворено, действует только конечное число раз и множество M_k конечно.*

Доказательство. Пусть s_0 — шаг, после которого требования $\mathscr{Q}_i$, $i < 2k+1$, не действуют, и пусть $m = \max\{x \mid (\exists i < k)(x \in M_{i,s_0})\} \cup A_{s_0}$. Предположим, что требование $\mathscr{P}_k$ не удовлетворено, т. е. $(\forall x)(\Phi_k(x)\downarrow \& (x \in A \Leftrightarrow \Phi_k(x) \in B))$. Определим бесконечное в. п. множество $C_k = C_{1,k} \cup C_{2,k}$, где

$$C_{1,k} = \{y \mid (\exists t > s_0)(\exists x > m)(x \notin A_t \& y = \Phi_k(x) \notin B_t)\},$$

$$C_{2,k} = \{y \mid (\exists t > s_0)(\exists x_1, x_2 > m)(x_1, x_2 \notin A_t \& \Phi_k(x_1) = \Phi_k(x_2) \notin B_t) \\ \& y \in W_{g(x_1),t} \cap \overline{B_t}\}.$$

Предположим, что $C_k \cap B \neq \varnothing$, т. е. существует $y \in C_k \cap B$. Если $y \in C_{1,k}$, то найдутся два шага $s > t > s_0$ такие, что $y = \Phi_{k,t}(x)$ для некоторого $x > m$,

$x \notin A_t$, и $y \in B_s - B_{s-1}$. По конструкции $x \in M_{k,t}$, и так как $t > s_0$, то $x \notin A$; противоречие с предположением, что требование $\mathscr{P}_k$ не удовлетворено.

Если $y \in C_{2,k}$, то найдутся два шага $s > t > s_0$ такие, что для некоторых $x_1, x_2 > m$, $x_1 \notin A_t$, $x_2 \notin A_t$, выполняется $\Phi_{k,t}(x_1) = \Phi_{k,t}(x_2)$, $y \in W_{g(x_1),t} \cap \overline{B_t}$ и $y \in B_s - B_{s-1}$. По конструкции $\mathscr{P}_k$ получит внимание на шаге $s+1$, x_1 будет перечислен в A_{s+1} и $x_2 \in M_{k,s+1}$. Таким образом, $A(x_1) \neq A(x_2)$, но $B(\Phi_k(x_1)) = B(\Phi_k(x_2))$, противоречие с предположением, что требование $\mathscr{P}_k$ не удовлетворено.

Поэтому $C_k \cap B = \varnothing$, т. е. бесконечное в. п. множество C_k содержится в $\omega - B$; противоречие с условиями теоремы.

Тем самым $\mathscr{P}_k$ будет удовлетворено, т. е. $(\exists x)(\Phi_e(x) \uparrow \vee \neg(x \in A \Leftrightarrow \Phi_e(x) \in B)$. Таким образом, $\mathscr{P}_k$ будет диагонализировано на каком-то шаге s, перестанет требовать внимания после этого шага и $M_k = M_{k,s}$. $\square$

Лемма 8. *Множество A простое.*

Доказательство. (1) $\overline{A}$ бесконечно. Заметим, что A содержит не более $2e$ элементов из $\{0, 1, 2, \dots, 4e\}$ для любого e, а именно по одному свидетелю от требований $\mathscr{P}_0$, $\mathscr{P}_1, \dots$, $\mathscr{P}_{e-1}$ и $\mathscr{S}_0$, $\mathscr{S}_1, \dots$, $\mathscr{S}_{e-1}$. Таким образом, $|\overline{A} \restriction (4e+1)| > 2e$, поэтому $\overline{A}$ бесконечно.

(2) По лемме 1 для всех $e \in \omega$ требования $\mathscr{S}_e$ удовлетворены. $\square$

Лемма 9. *$A \leq_Q B$ посредством вычислимой функции g.*

Доказательство. По конструкции $x \in A_{s+1} - A_s$, только если $W_{g(x),s} \subseteq B$, тем самым $x \in A \Rightarrow W_{g(x)} \subseteq B$. Если $x \notin A$, то пусть в силу предыдущих лемм шаг s такой, что все $\mathscr{S}_e, e < x$ получили внимание и все $\mathscr{P}_i$, $i < x$, диагонализированы на этом шаге. По конструкции $\overline{b} \in W_{g(x),s}$, поэтому $W_{g(x)} \nsubseteq B$. $\square$

Эти леммы завершают доказательство теоремы. $\square$

Теорема 5 имеет ряд интересных следствий, касающихся одного из основных вопросов в теории вычислимости о структуре степеней более сильной сводимости внутри степени более слабой сводимости.

Пусть r_1 и r_2 — алгоритмические сводимости такие, что для всех множеств A и B выполняется $A \leq_{r_1} B \Rightarrow A \leq_{r_2} B$. Тогда каждая r_2-степень состоит из некоторой совокупности r_1-степеней. Существует ли такая r_2-степень, которая состоит только из одной r_1-степени? Существует ли такая r_2-степень, которая состоит ровно из двух или трех r_1-степеней или из бесконечного количества степеней? Верны ли эти утверждения, если мы рассматриваем не все множества, а ограничиваемся только вычислимо перечислимыми?

Теорема 5 отвечает на некоторые из этих вопросов.

Следствие 10. *В Q-степени любого простого множества существует бесконечное число в. п. m-степеней.*

Доказательство. Пусть B — простое множество и A — множество, построенное в теореме 5. Так как $A \leq_Q B$, то $A \oplus B \equiv_Q B$. При этом $A \oplus B \nleq_m B$ (иначе $A \leq_m B$). Таким образом, в Q-степени множества B существуют две несравнимые в. п. m-степени.

Множество $A \oplus B$ является простым множеством, поскольку A и B простые. Согласно теореме 5 для $A \oplus B$ существует такое множество C, что $C \leq_Q A \oplus B$, но $C \nleq_m A \oplus B$. Поэтому аналогично имеем $(A \oplus B) \oplus C \equiv_Q A \oplus B \equiv_Q B$ и

$(A \oplus B) \oplus C \nleq_m A \oplus B$, а также $(A \oplus B) \oplus C \nleq_m B$. Таким образом, в Q-степени множества B существуют три в. п. несравнимые m-степени.

Продолжая эту процедуру далее, можно построить в Q-степени множества B бесконечное число в. п. множеств, каждое из которых лежит в отдельной m-степени. $\square$

Еще одним следствием теоремы 5 является то, что в любой в. п. T-степени содержится бесконечное число в. п. m-степеней (этот результат не был ранее нигде прямо сформулирован и доказан, хотя известны гораздо более сильные результаты, например, что в любой в. п. T-степени содержится бесконечное число в. п. tt-степеней, см. [2]).

Следствие 11. *В T-степени любого не вычислимого в. п. множества содержится бесконечное число в. п. m-степеней.*

Доказательство следует из того, что на в. п. множествах Q-сводимость влечет T-сводимость и что в любой в. п. не вычислимой T-степени существует простое множество (а именно, так называемое *дефицитное множество*, см. [2]). $\square$

В случае Q-сводимости дело обстоит гораздо сложнее. Как показал Омададзе (см. [15]), в отличие от T-степеней не в каждой Q-степени есть простое множество. Поэтому доказанная теорема не дает нам оснований полагать, что в каждой не вычислимой в. п. Q-степени существует бесконечное количество в. п. m-степеней.

Если бы нам удалось усилить теорему, убрав из ее условий требование простоты множества B, то был бы получен отрицательный ответ на вопрос о существовании в. п. Q-степени, состоящей из одной в. п. m-степени. Однако следующая теорема показывает, что этого сделать нельзя. Ее доказательство оказывается гораздо сложнее, чем доказательство предыдущих теорем, в частности, требует использования метода бесконечного приоритета.

3. Q-степень, имеющая m-вершину

В разд. 2 показано, что Q-сводимость и m-сводимость различаются *над* всеми в. п. множествами и *под* простыми множествами. Напрашивается вопрос, существует ли такое в. п. множество, *под* которым эти сводимости не отличимы друг от друга? Существуют тривиальные примеры таких множеств. Если множество вычислимо и какое-то множество Q-сводится к нему, то оно само вычислимо и поэтому m-сводится к нему. Если же множество m-полно, то все в. п. множества m-сводятся к нему. Поэтому более точно было бы сформулировать вопрос следующим образом: существует ли такое в. п. не вычислимое, не m-полное множество, что любое в. п. множество, которое Q-сводится к нему, одновременно и m-сводится к нему?

Следующая теорема дает положительный ответ на этот вопрос, что, в терминах работы [23], означает существование нетривиальной Q-степени, имеющей m-вершину.

Теорема 12. *Существует такое в. п. не вычислимое, не m-полное множество B, что $(A \leq_Q B \Rightarrow A \leq_m B)$ для любого в. п. A.*

Доказательство. Строим множество B по шагам, удовлетворяя для каждого $e \in \omega$ следующие требования, где K — креативное множество:

$\mathscr{P}_e : \overline{B} \neq W_e$;

$\mathscr{N}_e : K \nleq_m B$ посредством Φ_e;

$\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle} : (W_i \leq_Q B$ посредством $\Phi_j) \Rightarrow W_i \leq_m B$.

Стратегии для удовлетворения $\mathscr{P}_e$ и $\mathscr{N}_e$ стандартны. Для удовлетворения $\mathscr{P}_e$ выбираем свидетеля x и ждем, пока x перечислится в W_e. Если этого никогда не произойдет, то $x \in \overline{B} \cap \overline{W_e}$, и требование удовлетворено. Если x перечислится в W_e, то перечисляем x в A, удовлетворяя таким образом $\mathscr{P}_e$.

Для удовлетворения $\mathscr{N}_e$ используем ω-последовательность циклов $\{0, 1, \dots\}$ с целью построить в. п. множество $C_e = \overline{K}$, что противоречило бы тому, что K — креативное множество. На каждом цикле x ждем, пока или x перечислится в K, или функция Φ_e определится на элементе x, причем $\Phi_e(x) \downarrow= y \notin B$. Если ни то, ни другое не произойдет, то x будет тем элементом, на котором Φ_e не будет сводить K к B. Если x перечислится в K, то открываем следующий цикл. Если $\Phi_e(x) \downarrow= y \notin B$, то запрещаем y перечислять в B, перечисляем x в C_e и открываем следующий цикл. Так как C_e не может совпасть с $\overline{K}$, рано или поздно какой-то x перечислится в K после того, как положим его в C_e. Тогда наш запрет будет гарантировать, что $x \in K$, но $\Phi_e(x) \notin B$, и $\mathscr{N}_e$ будет тем самым удовлетворено.

Для удовлетворения $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ строим такую вычислимую сводящую функцию $f_{\langle i,j\rangle}$, чтобы добиться выполнения следующего условия:

$$\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle} : (\exists x)(\Phi_j(x) \uparrow \vee \neg(x \in W_i \Leftrightarrow W_{\Phi_j(x)} \subseteq B)) \\ \vee (\forall x)(x \in W_i \Leftrightarrow f_{\langle i,j\rangle}(x) \in B).$$

Для построения такой функции возможны два варианта базового модуля, каждый из которых приводит к удовлетворению $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$, если рассматривать его в отдельности от стратегий требований $\mathscr{P}_e$ и $\mathscr{N}_e$.

Первый вариант базового модуля для требования $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$. Используем ω-последовательность циклов $\{0, 1, \dots\}$, где каждый цикл действует следующим образом.

(1) Ждем пока или k перечислится в W_i, или $\Phi_j(x) \downarrow$ и появится $y \in W_{\Phi_j(x)} \cap \overline{B}$.

(2a) Если k перечислится в W_i, то определяем $f_{\langle i,j\rangle}(k) = b_0$ для некоторого фиксированного $b_0 \in B$ и открываем цикл $k + 1$.

(2b) Если появится $y \in W_{\Phi_j(x)} \cap \overline{B}$, то определяем $f_{\langle i,j\rangle}(k) = y$, запрещаем y перечисляться в B и открываем цикл $k + 1$.

(3b) Если впоследствии k перечислится в W_i, то закрываем все циклы.

Модуль имеет следующие возможные выходы.

(А) Некоторый цикл k бесконечно ждет в п. (1) или достигает п. (3b). В этом случае или $\Phi_j(x) \uparrow$, или $k \notin W_i \& W_{\Phi_j(x)} \subseteq B$, или $k \in W_i \& W_{\Phi_j(x)} \nsubseteq B$. Цикл k является свидетелем того, что $W_i \nleq_Q B$ посредством Φ_j, требование удовлетворено.

(Б) Каждый цикл работает конечное число шагов, и в процессе конструкции открывается бесконечно много циклов. В этом случае $W_i \leq_m B$ посредством $f_{\langle i,j\rangle}$, требование удовлетворено.

Второй вариант базового модуля для требования $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$. Используем ω-последовательность циклов $\{0, 1, \dots\}$, где каждый цикл действует следующим образом:

(1) Ждем пока k перечислится в W_i или $\Phi_j(x) \downarrow$ и появится $y \in W_{\Phi_j(x)} \cap \overline{B}$.

(2a) Если k перечислится в W_i, то определяем $f_{\langle i,j\rangle}(k) = b_0$ для некоторого фиксированного $b_0 \in B$ и открываем цикл $k + 1$.

(2b) Если появится $y \in W_{\Phi_j(x)} \cap \overline{B}$, то определяем $f_{\langle i,j\rangle}(k) = z_k^{\langle i,j\rangle}$ для некоторого не использовавшегося до этого $z_k^{\langle i,j\rangle} \notin B$ (используем $z_k^{\langle i,j\rangle}$ как замену для y) и открываем цикл $k+1$.

(3b) Если впоследствии k перечислится в W_i, то перечисляем $z_k^{\langle i,j\rangle}$ в B и открываем цикл $k+1$.

Модуль имеет следующие возможные выходы.

(А) Некоторый цикл k бесконечно ждет в п. (1). В этом случае или $\Phi_j(x)\uparrow$, или $k \notin W_i \& W_{\Phi_j(x)} \subseteq B$. Цикл k является свидетелем того, что $W_i \not\leq_Q B$ посредством Φ_j, требование удовлетворено.

(Б) Каждый цикл работает конечное число шагов, и в процессе конструкции открывается бесконечно много циклов. В этом случае $W_i \leq_m B$ посредством $f_{\langle i,j\rangle}$, требование удовлетворено.

К сожалению, в случае выбора первого варианта базового модуля для требования $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ при выходе (Б) модуль может запрещать перечислять в B бесконечно много элементов, создавая бесконечные нарушения для требований $\mathscr{P}_e$ с более низким приоритетом, а в случае второго варианта базового модуля для требования $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ при выходе (Б) модуль может перечислять бесконечно много элементов в B, создавая бесконечные нарушения для требований $\mathscr{N}_e$ с более низким приоритетом.

Для преодоления этой трудности будем комбинировать оба варианта базового модуля для $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ и учитывать стратегии удовлетворения требований $\mathscr{P}_e$ и $\mathscr{N}_e$ с более низким приоритетом.

Базовый модуль для требования $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$, учитывающий требования с более низкими приоритетом. Используем ω-последовательность циклов $\{0,1,\dots\}$, где каждый цикл действует следующим образом.

(1) Ждем пока k перечислится в W_i или $\Phi_j(k)\downarrow$ и появится $y \in W_{\Phi_j(k)} \cap \overline{B}$.

(2a) Если k перечислится в W_i, то определяем $f_{\langle i,j\rangle}(k) = b_0$ для некоторого фиксированного $b_0 \in B$ и открываем цикл $k+1$.

(2b) Если появится $y \in W_{\Phi_j(k)} \cap \overline{B}$, который не совпадает ни с одним из свидетелей требований $\mathscr{P}_e$, то определяем $f_{\langle i,j\rangle}(k) = y$, запрещаем y перечисляться в B и открываем цикл $k+1$.

(3b) Если впоследствии k перечислится в W_i, то закрываем все циклы.

(2c) Если появившийся $y \in W_{\Phi_j(k)} \cap \overline{B}$ и y уже был выбран в качестве свидетеля для какого-то из требований $\mathscr{P}_e$, $e > \langle i,j\rangle$, то определяем $f_{\langle i,j\rangle}(k) = z_k^{\langle i,j\rangle}$ для какого-то не использовавшегося до этого $z_k^{\langle i,j\rangle} \notin B$ и открываем цикл $k+1$.

(3c) Если впоследствии $z_k^{\langle i,j\rangle}$ оказывается запрещенным стратегией требования $\mathscr{N}_{e'}$, то возможны два варианта:

(3c1) если $e' < e$, то запрещаем y перечисляться в B и инициализируем требование $\mathscr{P}_e$;

(3c2) если $e' > e$ и впоследствии y перечислится в B и k перечислится в W_i, то перечисляем $z_k^{\langle i,j\rangle}$ в B, инициализируем требование $\mathscr{N}_{e'}$ и открываем цикл $k+1$.

(4c1) Если впоследствии k перечислится в W_i, то закрываем все циклы.

Модуль имеет следующие возможные выходы.

(А) Некоторый цикл k бесконечно ждет в п. (1) или достигает п. (3b), или достигает п. (4c1). В этом случае или $\Phi_j(x)\uparrow$, или $k \notin W_i \& W_{\Phi_j(x)} \subseteq B$, или $k \in$

$W_i \& W_{\Phi_j(x)} \nsubseteq B$. Цикл k является свидетелем того, что $W_i \nleq_Q B$ посредством Φ_j, требование удовлетворено и действует только на конечном числе шагов.

(Б) Каждый цикл работает конечное число шагов, и в процессе конструкции открывается бесконечно много циклов. В этом случае $W_i \leq_m B$ посредством $f_{\langle i,j\rangle}$, требование удовлетворено. При этом требования $\mathscr{P}_e$ (или соответственно $\mathscr{N}_e$), $e > \langle i,j\rangle$, инициализируются только конечное число раз, а именно из-за действий требований $\mathscr{N}_{e'}$, $\langle i,j\rangle < e' < e$ (или соответственно из-за действий $\mathscr{P}_{e'}$, $\langle i,j\rangle < e' < e$). Так как требования $\mathscr{P}_e$ и $\mathscr{N}_{e'}$ действуют только конечное число раз, каждое требование, лежащее под $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$, дождется, что через конечное число шагов стратегия для $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ будет действовать, чтобы удовлетворить именно его.

Однако и при таком модифицированном модуле остаются еще две трудности. Первая трудность заключается в том, что может произойти следующая ситуация: на некотором шаге s_0 какой-то y был выбран свидетелем для требования $\mathscr{P}_e$, затем на шаге $s_1 > s_0$ этот y перечислится в $W_{\Phi_j(k)} \cap \overline{B}$ для какого-то цикла k требования $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}, \langle i,j\rangle < e$, после чего базовый модуль для $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ определит $f_{\langle i,j\rangle}(k) = z_k^{\langle i,j\rangle}$ для некоторого $z_k^{\langle i,j\rangle}$. После этого на шаге $s_2 > s_1$ требование $\mathscr{P}_e$ перечислит y в B. Затем на шаге $s_3 > s_2$ стратегия для требования $\mathscr{N}_{e'}, \langle i,j\rangle < e' < e$, запретит перечислять $z_k^{\langle i,j\rangle}$ в B, а после этого на шаге $s_4 > s_3$ k перечислится в W_i. Так как y уже был перечислен в B (и тем самым $W_{\Phi_j(k)} \subseteq B$), будем вынуждены перечислить $f_{\langle i,j\rangle}(k) = z_k^{\langle i,j\rangle}$ в B, чтобы обеспечить условие $k \in W_i \Leftrightarrow f_{\langle i,j\rangle}(k) \in B$, тем самым нарушая требование $\mathscr{N}_{e'}$ из-за действий $\mathscr{P}_e$ при $e > e'$, что может приводить к бесконечным нарушениям требования $\mathscr{N}_{\langle i,j\rangle}$.

Именно для решения этой трудности необходимо прибегнуть к методу бесконечного приоритета. На приоритетном дереве требование $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ будет иметь два выхода: левый (бесконечный), соответствующий ситуации, когда W_i Q-сводится к B посредством Φ_j, и правый (конечный), соответствующий ситуации, когда W_i не Q-сводится к B посредством Φ_j. Если истинным является правый выход, то требование $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ действует только конечное число раз и конечное число раз нарушает требования с более низким приоритетом. Если истинным будет являться левый выход, то будем попадать на этот выход только на тех шагах, на которых $(\forall x)(x \in W_i \Leftrightarrow W_{\Phi_j(x)} \subseteq B)[s]$, и тем самым описанная выше ситуация не возникнет, а именно между шагами s_2 и s_3 в $W_{\Phi_j(k)} \cap \overline{B}$ будет перечислен какой-то новый y', который будет запрещен требованием $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ в соответствии с п. (3c1), как только $\mathscr{N}_{e'}$, $\langle i,j\rangle < e' < e$, запретит перечислять $z_k^{\langle i,j\rangle}$ в B.

Еще одной трудностью является то, что теперь базовые модули для требований $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ могут конфликтовать друг с другом. В частности, может оказаться так, что в базовом модуле требования $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ на цикле k на шаге (2) y может совпасть с $z_{k'}^{\langle i',j'\rangle}$ для некоторого цикла k' некоторого требования $\mathscr{R}_{\langle i',j'\rangle}$ (в том числе при $i = i'$, $j = j'$). Это означает, что требование $\mathscr{R}_{\langle i',j'\rangle}$ на цикле k' достигло шага (2c), т. е. нашелся некий $y \in W_{\Phi_{j'}(i)} \cap \overline{B}$, выбранный в качестве свидетеля для требования $\mathscr{P}_e$ (или в качестве $z_{k''}^{\langle i'',j''\rangle}$ для требования $\mathscr{R}_{\langle i'',j''\rangle}$ и т. д., но эта цепочка рано или поздно закончится некоторым свидетелем y требования $\mathscr{P}_e$). В этом случае для удовлетворения $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ определяем $f_{\langle i,j\rangle}(k) = z_k^{\langle i,j\rangle}$ и запрещаем перечислять этот y в B, дальше действуя, как описано в модуле.

Приоритетное дерево. Используем бесконечное дерево $\mathscr{T} = 2^{<\omega}$ со стандартным лексикографическим упорядочением $0 <_L 1$.

Упорядочим требования $\mathscr{P}_e$, $\mathscr{N}_e$ и $\mathscr{R}_e$ в единый список $\mathscr{S}_i$ такой, что $\mathscr{S}_i = \mathscr{R}_e$ при $i = 3e$, $\mathscr{S}_i = \mathscr{P}_e$ при $i = 3e+1$, $\mathscr{S}_i = \mathscr{N}_e$ при $i = 3e+2$. Для каждой вершины $\sigma \in \mathscr{T}$ длины n назначаем требование $\mathscr{S}_n$.

Определения. Определим функции длины для требований $\mathscr{R}_{\langle i,j\rangle}$ и $\mathscr{N}_e$:

$$l^R(\langle i,j\rangle, s) = \max\{n \mid (\forall x < n)(x \in W_i \Leftrightarrow W_{\Phi_j(k)} \subseteq B)[s]\},$$

$$l^N(e,s) = \max\{n \mid (\forall x < n)(x \in K \Leftrightarrow \Phi_e(x) \in \ B[s])\}.$$

Называем z *заменой* для x на шаге s, если для некоторого $n > 0$ существуют индексы $i_1, \dots, i_n$ и элементы $z_0, \dots, z_n$, $y_0, \dots, y_n$, удовлетворяющие следующим условиям: 1) $z_k = f_{i_k}(y_k)[s]$ для всех $k = \overline{1,n}$; 2) $z_k \in W_{\Phi_{i_{k+1}}(y_{k+1})} \cap \overline{B}[s]$ для всех $k = \overline{0, n-1}$; 3) $z_0 = x$ является свидетелем для некоторого $\mathscr{P}_\sigma$ на шаге s и $z_n = z$.

Введем индукцией по $|\tau|$ определения τ-шага, $m^R(\tau,s)$ и $m^N(\tau,s)$.

(i) Каждый шаг является λ-шагом (где λ — пустая строка).

(ii) Пусть s является τ-шагом и $|\tau| = 3e$. Определим $m^R(\tau,s) = \max\{l^R(e,t) \mid t < s$ является τ-шагом$\}$. Если $l^R(e,s) > m^R(\tau,s)$, то называем s $\tau\hat{}0$-*шагом*, в ином случае — $\tau\hat{}1$-*шагом.*

(iii) Пусть s является τ-шагом и $|\tau| = 3e+1$. Определим $m^N(\tau,s) = max\{l^N R(e,t)|\ t < s$ является τ-шагом$\}$. Тогда если $l^N(e,s) > m^N(\tau,s)$, то называем s $\tau\hat{}0$-*шагом*, в ином случае — $\tau\hat{}1$-*шагом.*

(iv) Пусть s является τ-шагом и $|\tau| = 3e+2$. Тогда если $W_{e,s} \cap B_s \neq \varnothing$, то называем s $\tau\hat{}0$-*шагом*, в ином случае — $\tau\hat{}1$-шагом.

Обозначим через TP_s такую уникальную вершину τ длины s, что s является τ-шагом.

Говорим, что требование $\mathscr{P}_\tau$ *требует внимания* на τ-шаге $s > |\tau| = 3e+1$, если $W_{e,s} \cap B_s = \varnothing$ и либо $\mathscr{P}_\tau$ не имеет свидетеля на шаге s, либо $\mathscr{P}_\tau$ имеет свидетеля $x \in W_{e,s}$.

Говорим, что требование $\mathscr{N}_\tau$ *требует внимания* на τ-шаге $s > |\tau| = 3e+2$, если $l^N(e,s) > m^N(\tau,s)$.

Конструкция.

Шаг $s = 0$. Полагаем $B_0 = \varnothing$ и для всех τ и k полагаем сводящие функции f_τ^k для $\mathscr{R}_\tau$ неопределенными для всех x: $f_{\tau,0}^k(x)\uparrow$.

Шаг $s > 0$.

1. Вычисляем TP_s. Инициализируем все стратегии, прикрепленные к вершинам справа от TP_s: у стратегий $\mathscr{P}_\tau$ отменяем выбранных свидетелей, у стратегий $\mathscr{R}_\tau$ — сводящую функцию f_τ^k.

2. Находим наименьшую $\tau \prec TP_s$ такую, что $\mathscr{S}_\tau$ требует внимания.

Если $|\tau| = 3e+1$ для некоторого e и $\mathscr{P}_\tau$ не имеет свидетеля на шаге s, то назначаем нового свидетеля для $\mathscr{P}_\tau$, в ином случае перечисляем свидетеля $\mathscr{P}_\tau$ в B. Говорим, что $\mathscr{P}_\tau$ *получает внимание*, и инициализируем все стратегии, назначенные вершинам, продолжающим τ.

Если $|\tau| = 3e+2$ для некоторого e, то инициализируем все стратегии, назначенные вершинам, продолжающим τ, и говорим, что $\mathscr{N}_\tau$ *получает внимание.*

В обоих случаях для всех $\sigma \prec \tau$ (или для всех $\sigma \prec TP_s$, если ни одна из стратегий не требует внимания) при $|\sigma| = 3\langle i,j\rangle$ для каких-либо i, j если s является $\sigma\hat{}0$-шагом, определяем сводящую функцию для $\mathscr{R}_\sigma$. Если сводящая функция f^k_σ, определенная на последнем σ-шаге $t < s$, была отменена на некотором шаге u, $t < u < s$, то строим новую сводящую функцию f^{k+1}_σ, полагая далее $m = k+1$. Если она не была отменена, то полагаем далее $m = k$. Для всех $x < l^R(\langle i,j\rangle, s)$ таких, что $f^m_{\sigma,s-1}(x)\uparrow$, определяем $f^m_{\sigma,s}(x)$. Если $x \in W_{i,s}$, то полагаем $f^m_{\sigma,s}(x) = b_0$ для некоторого фиксированного $b_0 \in B$. Если $x \notin W_{i,s}$ и существует $y_x \in W_{\Phi_j(x)} \cap \overline{B}$, не использующийся ни одной из стратегий для требований $\mathscr{P}_e$ и $\mathscr{R}_e$ для всех $e \in \omega$, то определяем $f^m_{\sigma,s}(x) = y_x$. Если $x \notin W_{i,s}$ и существует $y_x \in W_{\Phi_j(x)} \cap \overline{B}$, являющийся для некоторого σ' свидетелем для $\mathscr{P}_{\sigma'}$ или заменой для $\mathscr{R}_{\sigma'}$, то полагаем $f^m_{\sigma,s}(x) = z_x$ для некоторого не использовавшегося элемента z_x. Для всех $x < l^R(\langle i,j\rangle, s)$ если $x \in W_{i,s}$, то перечисляем $f^m_{\sigma,s}(x)$ в B.

Отметим, что конструкция обеспечивает следующее: если z является заменой для x, то z будет перечислен в B только после того, как x будет перечислен в B.

Конец конструкции.

Верификация. Определим истинный путь TP как самый левый путь, лежащий на $\mathscr{T}$ и посещаемый на бесконечном количестве шагов. Другими словами, пусть TP будет уникальным путем, лежащим на $\mathscr{T}$, таким, что

$$\sigma \prec TP \Leftrightarrow \exists^\infty s(\sigma \prec TP_s) \& \exists^{<\infty} s(TP_s <_{lex} \sigma).$$

Лемма 13. *Для всех $e \in \omega$ требования $\mathscr{P}_e$ удовлетворены стратегией $\mathscr{P}_\tau$ при $\tau = TP \upharpoonright 3e+1$.*

Доказательство. Полагаем по индукции, что для всех $\sigma \prec \tau$ все стратегии для требований $\mathscr{R}_\sigma$ при $\sigma\hat{\ }1 \prec TP \upharpoonright 3e+1$ и для $\mathscr{P}_\sigma$ и $\mathscr{N}_\sigma$ действуют только конечное число раз. Пусть s — наименьший шаг такой, что для всех $t > s$ эти стратегии не действуют на шаге t и TP_t не находится слева от τ.

Так как s выбран как наименьший шаг, удовлетворяющий этим условиям, стратегия для $\mathscr{P}_\tau$ инициализирована на шаге s. Поэтому на следующем τ-шаге $t > s$, на котором $\mathscr{P}_\tau$ получит внимание, для $\mathscr{P}_\tau$ будет назначен свидетель x. Поскольку стратегия $\mathscr{P}_\tau$ не может быть инициализирована после шага t, этот свидетель не будет отменен. Если x будет перечислен в W_e на шаге $u > t$, то на первом шаге $v > u$, на котором $\mathscr{P}_\tau$ получит внимание, он будет перечислен в B. Если $x \notin W_e$, то стратегия для $\mathscr{P}_\tau$ не перечислит x в B. Так как стратегии для требований $\mathscr{P}_e$ выбирают свидетелей, а стратегии для требований $\mathscr{R}_e$ выбирают замены только среди не использовавшихся до этого чисел, то x не может быть перечислен в B из-за действий стратегий для других требований. Поэтому x будет свидетелем того, что $\overline{B} \neq W_e$, тем самым требование $\mathscr{P}_e$ будет удовлетворено стратегией $\mathscr{P}_\tau$, которая будет действовать не более двух раз, что позволяет нам продолжать индукционное предположение. $\square$

Лемма 14. *Для всех $e \in \omega$ требования $\mathscr{N}_e$ удовлетворены стратегией $\mathscr{N}_\tau$ при $\tau = TP \upharpoonright 3e+2$.*

Доказательство. Полагаем по индукции, что для всех $\sigma \prec \tau$ все стратегии для требований $\mathscr{R}_\sigma$ при $\sigma\hat{\ }1 \prec TP \upharpoonright 3e+1$ и для $\mathscr{P}_\sigma$ и $\mathscr{N}_\sigma$ действуют только конечное число раз. Пусть s — наименьший шаг такой, что для всех $t > s$ эти стратегии не действуют на шаге t и TP_t не находится слева от τ.

Предположим, что $\mathscr{N}_e$ не удовлетворено, т. е. $x \in K \Leftrightarrow \Phi_e(x) \in B$. Покажем, что тогда K вычислимо. Для всех $x > s$ пусть $t > s$ — наименьший шаг, на котором $\mathscr{N}_\tau$ получает внимание, и либо $x \in K_t$, либо $\Phi_{e,t}\downarrow = y \notin B$.

На этом шаге будут инициализированы все стратегии, назначенные вершинам, продолжающим τ или лежащим правее τ, поэтому на шагах $u > t$ эти стратегии не перечислят y в B. В силу выбора s стратегии для $\mathscr{P}_\sigma$, $\sigma \prec \tau$, также не перечислят y в B. Если y является заменой для некоторого $z \notin B$ на шаге t, то в силу выбора s стратегии $\mathscr{R}_\sigma$ и $\mathscr{R}_\sigma$ при $\sigma \prec \tau$ на шагах $u > t$ не перечислят z в B, все другие стратегии будут инициализированы на шаге t, поэтому также не перечислят z в B на шагах $u > t$. Как отмечалось выше, y не будет перечислен в B, так как z никогда не будет перечислен в B.

Таким образом, $x \in K \Leftrightarrow x \in K_t$, что противоречит тому, что K — креативное множество. Итак, $\mathscr{N}_e$ удовлетворено стратегией $\mathscr{N}_\tau$, т. е. существует такой y, что $\Phi_e(y) \uparrow$ или $y \in K \& \Phi_e(y) \notin B$, или $y \notin K \& \Phi_e(y) \in B$. Поэтому $\mathscr{N}_\tau$ не будет действовать после шага t, на котором $y \in K_t$ или $\Phi_{e,t}(y) \downarrow \in B_t$. $\square$

Лемма 15. *Для всех $e \in \omega$ требования $\mathscr{R}_e$ удовлетворены стратегией $\mathscr{R}_\tau$ при $\tau = TP \restriction 3e$.*

Доказательство. Полагаем по индукции, что для всех $\sigma \prec \tau$ все стратегии для требований $\mathscr{R}_\sigma$ при $\sigma\hat{\ }1 \prec TP \restriction 3e+1$ и для $\mathscr{P}_\sigma$ и $\mathscr{N}_\sigma$ действуют только конечное число раз. Пусть s — наименьший шаг такой, что для всех $t > s$ эти стратегии не действуют на шаге t и TP_t не находится слева от τ.

Если $\tau\hat{\ }1 \prec TP$, то существует только конечное число шагов, на которых $l^R(e,s) > m^R(e,s)$, следовательно, требование $\mathscr{R}_e$ удовлетворено. Поэтому рассмотрим случай, когда $\tau\hat{\ }0 \prec TP$. Покажем, что в этом случае $W_e \leq_m B$.

Так как s выбран как наименьший шаг, удовлетворяющий описанным выше условиям, на этом шаге была отменена функция f^k_τ для некоторого k. Покажем, что $x \in W_e \Leftrightarrow f^{k+1}_\tau(x) \in B$. Поскольку $\tau\hat{\ }0 \prec TP$, для всех $x \in \omega$ найдется наименьший шаг $t > s$, на котором $l^R(e,t) > x$. По конструкции $f^{k+1}_{\tau,t}(x)$ будет определена, причем $x \in W_{e,t} \Leftrightarrow f^{k+1}_{\tau,t}(x) \in B_t$. Если для некоторого шага $u > t$ имеем $x \in W_{e,u} - W_{e,u-1}$, то по конструкции $f^{k+1}_{\tau,t}(x)$ будет перечислено в B_u. Поэтому $x \in W_e \Rightarrow f^{k+1}_\tau(x) \in B$. Если $x \notin W_e$, то стратегия $\mathscr{R}_\tau$ никогда не перечислит $f^{k+1}_{\tau,t}(x)$ в B. Так как стратегии для требований $\mathscr{P}_e$ выбирают свидетелей, а стратегии для требований $\mathscr{R}_e$ выбирают замены только среди не использовавшихся до этого чисел, то x не может быть перечислен в B из-за действий стратегий для других требований. Значит, $x \notin W_e \Rightarrow f^{k+1}_\tau(x) \notin B$. В силу выбора шага s, $f^{k+1}_\tau(x)$ никогда не будет отменена. Поэтому $x \in W_e \Leftrightarrow f^{k+1}_\tau(x) \in B$, следовательно, требование $\mathscr{R}_e$ удовлетворено. $\square$

Леммы показывают, что все требования удовлетворены, и тем самым завершают доказательство теоремы. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Post E. L.* Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems // Bull. Amer. Math. Soc. 1944. V. 50, N 5. P. 284–316.
2. *Odifreddi P.* Classical recursion theory. The Theory of Functions and Sets of Natural Numbers. Amsterdam: Elsevier, 1989. (Stud. Logic Found. Math; V. 125).
3. *Odifreddi P.* Classical recursion theory. V. II. Amsterdam: Elsevier, 1999. (Stud. Logic Found. Math; V. 143).
4. *Odifreddi P.* Reducibilities // Handbook of computability theory. Amsterdam: Elsevier, 1999. P. 89–120. (Stud. Logic Found. Math; V. 140).
5. *Соар Р. И.* Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань: Казан. мат. о-во, 2000.

6. *Kučera A.* An alternative, priority-free, solution to Post's problem // Math. Foundations Comp. Sci. (Bratislava, 1986). Berlin: Springer-Verl., 1986. P. 493–500. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 233).

7. *Марченков С. С.* Об одном классе неполных множеств // Мат. заметки. 1976. Т. 20, № 4. С. 473–478.

8. *Ершов Ю. Л.* Позитивные эквивалентности // Алгебра и логика. 1971. Т. 10, № 6. С. 620–650.

9. *Добрица В. П.* О проблеме равенства слов на рекурсивно определенных группах // Третья Всесоюз. конф. по мат. логике: Тез. докл. Новосибирск: Ин-т математики, 1974. С. 63–65.

10. *Белеградек О. В.* Об алгебраически замкнутых группах // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 3. С. 239–255.

11. *Kummer M.* Kolmogorov complexity and instance complexity of recursively enumerable sets // SIAM J. Comput. 1996. N 25. P. 1123–1143.

12. *Batyrshin I. I.* Quasi-completeness and functions without fixed points // Math. Log. Q. 2006. V. 52, N 6. P. 595–601.

13. *Fischer P.* Some results on recursively enumerable degrees of weak reducibilities: Dissertation. Universität Bielefeld, 1986.

14. *Downey R. R., LaForte G. G., Nies A.* Computably enumerable sets and quasi-reducibility // Ann. Pure Appl. Logic. 1998. V. 95. P. 1–35.

15. *Omanadze R. Sh.* Quasi-degrees of recursively enumerable sets // Computability and models: Perspectives East and West. New York; Boston; Dordrecht; London; Moscow: Kluwer Acad.; Plenum Publ., 2002. P. 289–319.

16. *Arslanov M. M., Omanadze R. Sh.* Q-degrees of n-c.e. sets // Illinois J. Math. 2007. V. 51, N 4. P. 1189–1206.

17. *Arslanov M. M., Batyrshin I. I., Omanadze R. Sh.* Structural properties of Q-degrees of n-c.e. sets // Ann. Pure Appl. Logic. 2008. V. 156. P. 13–20.

18. *Батыршин И. И.* Изолированные 2-вычислимо перечислимые Q-степени // Изв. вузов. Математика. 2010. № 4. С. 3–9.

19. *Batyrshin I. I.* Non-isolated quasi-degrees // Math. Log. Q. 2009. V. 55, N 6. P. 587–597.

20. *Affatato M. L., Kent T. F., Sorbi A.* Undecidability of local structures of s-degrees and Q-degrees // Tbilisi Math. J. 2008. V. 1. P. 15–32.

21. *Marsibilio D., Sorbi A.* First order theory of the s-degrees and arithmetic // J. Log. Comp. 2013. V. 23, N 6. P. 1267–1292.

22. *Omanadze R. Sh., Chitaia I. O.* $Q1$-degrees of c.e. sets // Arch. Math. Logic. 2012. V. 51, N 5–6. P. 503–515.

23. *Downey R. G., Jockush C. G.* T-degrees, jump classes and strong reducibilities // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V. 301, N 1. P. 103–136.

Статья поступила 27 ноября 2013 г.

Батыршин Ильнур Ильдарович
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
batyrshin@gmail.com