Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2014. Том 55, № 6

УДК 512.543

ОБ ОТДЕЛИМОСТИ ПОДГРУПП НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП В КЛАССЕ КОНЕЧНЫХ π–ГРУПП

Е. В. Соколов

Аннотация. Пусть π — непустое множество простых чисел. Доказано, что нильпотентная группа обладает свойством отделимости всех своих π'-изолированных подгрупп в классе конечных π-групп, если в ней существует центральный ряд, каждый фактор F которого удовлетворяет следующему условию: во всякой фактор-группе группы F все примарные компоненты периодической части, соответствующие числам из множества π, конечны. Установлено, что для нильпотентных групп без кручения справедливо также и обратное утверждение.

Ключевые слова: отделимость подгрупп, нильпотентная группа, абелева группа.

Понятие отделимости подгруппы в произвольном классе групп $\mathscr{C}$ было введено А. И. Мальцевым в [1]. Напомним, что подгруппа Y группы X называется $\mathscr{C}$-*отделимой* (в этой группе), если для любого элемента $x \in X\backslash Y$ существует гомоморфизм φ группы X на группу из класса $\mathscr{C}$ такой, что $x\varphi \notin Y\varphi$.

Отметим, что аппроксимируемость группы X классом $\mathscr{C}$ есть не что иное, как отделимость в этом классе единичной подгруппы группы X. Нетрудно показать также (и этот факт будет неоднократно использоваться в дальнейшем), что если класс $\mathscr{C}$ гомоморфно замкнут, то $\mathscr{C}$-отделимость нормальной подгруппы Y группы X равносильна $\mathscr{C}$-аппроксимируемости фактор-группы X/Y.

Наиболее хорошо изучена отделимость в классе всех конечных групп, называемая обычно финитной. В уже упомянутой работе [1] А. И. Мальцев получил критерий финитной отделимости всех подгрупп абелевой группы и установил, что свойством финитной отделимости всех подгрупп обладают некоторые разрешимые группы, названные им ограниченными. Ввиду того, что существуют примеры 2-порожденных групп, не являющихся финитно аппроксимируемыми (см., например, [2]), в неабелевой свободной группе всегда найдется подгруппа, не отделимая в классе всех конечных групп. Вместе с тем из теоремы М. Холла [3] следует, что каждая конечно порожденная подгруппа свободной группы финитно отделима.

Несколько сложнее обстоит дело с отделимостью в классе $\mathscr{F}_\pi$ всех конечных π-групп, т. е. конечных групп, простые делители порядков которых принадлежат некоторому фиксированному непустому множеству простых чисел π. Так, уже в группе $\mathbb{Z}$ подгруппа $n\mathbb{Z}$ является $\mathscr{F}_\pi$-отделимой, лишь когда n — π-число.

В действительности, необходимым условием $\mathscr{F}_\pi$-отделимости подгруппы любой группы служит ее π'-изолированность. Напомним, что подгруппа Y группы X называется π'-*изолированной* (в этой группе), если для любого элемента $x \in X$ и для любого простого числа $q \notin \pi$ из включения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$.

© **2014 Соколов Е. В.**

В самом деле, если элемент $x \in X$ и простое число $q \notin \pi$ таковы, что $x^q \in Y$, то при любом гомоморфизме φ группы X на конечную π-группу $x\varphi \in Y\varphi$. Это следует из того, что порядок r элемента $x\varphi$, будучи π-числом, взаимно прост с q, а потому $q\alpha + r\beta = 1$ для подходящих целых чисел α, β и

$$x\varphi = (x\varphi)^{q\alpha+r\beta} = (x^q\varphi)^\alpha \in Y\varphi.$$

Таким образом, если подгруппа Y $\mathscr{F}_\pi$-отделима в группе X, то должно выполняться включение $x \in Y$ и, стало быть, Y оказывается π'-изолированной в X.

Из сказанного следует, что при изучении отделимости в классе конечных π-групп имеет смысл ограничиться рассмотрением π'-изолированных подгрупп. Далее будем говорить, что группа *обладает свойством* $\mathfrak{S}_\pi$ (для некоторого семейства своих подгрупп), если все ее π'-изолированные подгруппы (принадлежащие данному семейству) являются $\mathscr{F}_\pi$-отделимыми.

Отметим, что если π совпадает с множеством всех простых чисел, а класс $\mathscr{F}_\pi$ — соответственно с классом всех конечных групп, то π'-изолированной оказывается любая подгруппа. Таким образом, в этом случае свойство $\mathfrak{S}_\pi$ означает обычную финитную отделимость всех подгрупп указанного семейства.

Нетрудно показать (см., например, [4]), что при любом выборе множества π свойство $\mathfrak{S}_\pi$ справедливо для циклических подгрупп произвольной свободной группы. В отличие от случая финитной отделимости для конечно порожденных подгрупп это, вообще говоря, уже не так: отвечая на вопрос 15.60 из [5], В. Г. Бардаков [6] показал, что в любой неабелевой свободной группе существует изолированная конечно порожденная подгруппа, не отделимая в классе нильпотентных групп (а следовательно, и в классе конечных π-групп для всякого одноэлементного множества π).

Е. Д. Логинова [7] установила, что произвольная конечно порожденная нильпотентная группа обладает свойством $\mathfrak{S}_\pi$ для всех своих подгрупп (в [7] этот факт доказан для одноэлементного множества π, однако те же рассуждения могут быть использованы и в общем случае). Настоящая статья продолжает исследование $\mathscr{F}_\pi$-отделимости подгрупп нильпотентных групп, и ее целью является отыскание условий, которые достаточно наложить на нильпотентную группу для того, чтобы в ней все π'-изолированные подгруппы оказались $\mathscr{F}_\pi$-отделимыми. Всюду далее будем считать, что π — некоторое фиксированное непустое множество простых чисел.

Приведем сначала ряд результатов, касающихся абелевых групп.

Напомним, что *рангом абелевой группы* называется мощность максимальной линейно независимой системы ее элементов. Поскольку периодические абелевы группы таких систем не содержат, их ранг полагается равным нулю.

Пусть A — произвольная абелева группа. Все примарные компоненты периодической части группы A, соответствующие числам из множества π, будем для краткости называть *примарными π-компонентами*.

Рассмотрим следующий набор условий:

(1) группа A имеет конечный ранг;

$(2)_\pi$ все фактор-группы группы A не содержат p-квазициклических подгрупп для любого $p \in \pi$;

$(3)_\pi$ в произвольной фактор-группе B группы A все примарные π-компоненты периодической части $\tau(B)$ имеют конечный период;

$(4)_\pi$ все примарные π-компоненты периодической части группы A конечны;

$(5)_\pi$ в произвольной фактор-группе B группы A все примарные π-компоненты периодической части $\tau(B)$ конечны.

Предложение 1. *Имеют место следующие утверждения:*
1) $(2)_\pi \Rightarrow (1)$;
2) $(2)_\pi \Leftrightarrow (3)_\pi$;
3) $(3)_\pi \wedge (4)_\pi \Leftrightarrow (5)_\pi$.

Доказательство. 1. Пусть ранг группы A бесконечен. Тогда она содержит в качестве подгруппы свободную абелеву группу бесконечного ранга, среди гомоморфных образов которой есть и p-квазициклические группы для каждого простого числа p. Группа A абелева, поэтому любой гомоморфизм ее подгруппы может быть продолжен до гомоморфизма всей группы. Это означает, что для группы A не выполняется условие $(2)_\pi$.

2. Достаточность утверждения очевидна, проверим необходимость.

Пусть в некоторой фактор-группе B группы A для какого-то $p \in \pi$ существуют элементы $b_1, b_2, b_3, \dots$, имеющие порядки $p, p^2, p^3, \dots$ соответственно. Обозначим подгруппу группы B, порожденную элементами $b_1, b_2, b_3, \dots$, через N.

Группа N счетна и согласно второй теореме Прюфера либо раскладывается в прямое произведение циклических подгрупп, порядки которых не ограничены в совокупности, либо содержит неединичный элемент a бесконечной высоты. В первом случае ее можно гомоморфно отобразить на p-квазициклическую группу, следовательно, существует фактор-группа группы A, содержащая такую подгруппу. Предположим, что реализуется вторая возможность, и покажем, что в этом случае также найдется гомоморфизм группы A на p-квазициклическую группу.

Хорошо известно (см., например, [8, § 9]), что группа A может быть вложена в некоторую полную абелеву группу F и что последняя представима в виде прямого произведения квазициклических групп и групп, изоморфных группе $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Так как N — периодическая p-группа, порядок элемента a конечен и является p-числом. Следовательно, среди прямых сомножителей разложения группы F обязательно есть p-квазициклические группы и существует гомоморфизм ψ группы F на один из таких сомножителей, при котором a переходит в неединичный элемент. Поскольку высота элемента a бесконечна, ограничение φ гомоморфизма ψ на группу A не может иметь конечный образ. Следовательно, гомоморфизм φ искомый.

Таким образом, группа A не удовлетворяет условию $(2)_\pi$.

3. Как и выше, следует проверить лишь необходимость.

Пусть группа A удовлетворяет условиям $(3)_\pi$ и $(4)_\pi$, B — произвольная подгруппа группы A. Из утверждений 1 и 2 следует, что подгруппа B имеет конечный ранг r.

Пусть $b_1, b_2, \dots, b_r$ — некоторая максимальная линейно независимая система элементов группы B и N — подгруппа, порожденная этими элементами. Достаточно показать, что все примарные π-компоненты периодической части фактор-группы A/N конечны. Отсюда будет следовать, что аналогичным свойством обладает и группа A/B.

В самом деле, поскольку все элементы фактор-группы B/N имеют конечный порядок, периодическая часть $\tau(A/B)$ фактор-группы A/B является гомоморфным образом периодической части $\tau(A/N)$ фактор-группы A/N. К тому же она раскладывается в прямое произведение своих примарных компонент. Поэтому каждая ее компонента оказывается гомоморфным образом группы $\tau(A/N)$, а следовательно, и соответствующей примарной компоненты этой группы.

Итак, пусть $T/N = \tau_p(A/N)$ — некоторая примарная π-компонента периодической части фактор-группы A/N. Обозначим через n период этой группы, конечный согласно условию $(3)_\pi$, и через φ — эндоморфизм группы T, осуществляющий возведение каждого ее элемента в степень n. Тогда образ группы T относительно эндоморфизма φ лежит в N, а ядро этого эндоморфизма содержится в соответствующей примарной компоненте $\tau_p(A)$ периодической части группы A.

Так как подгруппа $\tau_p(A)$ ввиду условия $(4)_\pi$ конечна, группа T представляет собой расширение конечной группы при помощи конечно порожденной. Следовательно, она сама конечно порождена, и потому фактор-группа T/N конечна. $\square$

Теорема 1. *Абелева группа обладает свойством $\mathfrak{S}_\pi$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию $(3)_\pi$.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что для абелевой группы G условие $(3)_\pi$ не имеет места. Тогда согласно предложению 1 группа G не удовлетворяет условию $(2)_\pi$ и, следовательно, существует подгруппа H этой группы такая, что фактор-группа G/H содержит p-квазициклическую подгруппу для некоторого $p \in \pi$.

Пусть $T/H = \tau_{p'}(G/H)$ — произведение всех примарных компонент периодической части группы G/H, кроме той, которая соответствует числу p. Тогда фактор-группа $G/T \cong (G/H)/(T/H)$ также содержит p-квазициклическую подгруппу и, следовательно, не является финитно аппроксимируемой. Это означает, что подгруппа T не может быть $\mathscr{F}_\pi$-отделимой в группе G. Вместе с тем периодическая часть группы G/T является p-группой, поэтому подгруппа T π'-изолирована в G.

Таким образом, группа G не обладает свойством $\mathfrak{S}_\pi$.

Достаточность. Пусть G — абелева группа, удовлетворяющая условию $(3)_\pi$, и H — π'-изолированная подгруппа группы G. Покажем, что фактор-группа $A = G/H$ $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема и, следовательно, подгруппа H $\mathscr{F}_\pi$-отделима в G.

Пусть a — произвольный неединичный элемент группы A. Предположим сначала, что он принадлежит некоторой примарной компоненте T периодической части группы A, соответствующей простому числу p.

Так как подгруппа H π'-изолирована в группе G, то $p \in \pi$. Обозначая через n период группы T, конечный ввиду условия $(3)_\pi$, видим, что $A^n \cap T = 1$ и потому элемент $b = aA^n$ фактор-группы $B = A/A^n$ отличен от 1. Остается лишь заметить, что в соответствии с первой теоремой Прюфера периодическая p-группа B раскладывается в прямое произведение циклических подгрупп и, следовательно, аппроксимируется конечными p-группами.

Случай, когда элемент a имеет конечный порядок, не являющийся степенью простого числа, сводится к рассмотренному выше. Необходимо только выбрать некоторый простой делитель p порядка элемента a и перейти к фактор-группе $A/\tau_{p'}(A)$, где, как и выше, $\tau_{p'}(A)$ обозначает произведение всех примарных компонент периодической части группы A, кроме той, которая соответствует числу p.

Предположим теперь, что порядок элемента a бесконечен.

Очевидно, что фактор-группа $A/\langle a\rangle$ также удовлетворяет условию $(3)_\pi$. Поэтому порядки элементов каждой примарной π-компоненты ее периодической части ограничены в совокупности. Это означает, что для любого простого числа $p \in \pi$ можно указать такое n, что $a \notin A^{p^n}$. Доказательство завершается так же, как и в первом случае, необходимо лишь выбрать произвольное число p, принадлежащее множеству π. $\square$

Отметим, что конечности ранга абелевой группы в сочетании с ограниченностью порядков примарных π-компонент ее периодической части недостаточно для того, чтобы эта группа обладала свойством $\mathfrak{S}_\pi$. В качестве примера можно привести группу $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, которая, очевидно, не удовлетворяет условию $(3)_\pi$.

Абелеву группу будем называть π-*ограниченной*, если для нее справедливо условие $(5)_\pi$. Нильпотентную (разрешимую) группу назовем π-*ограниченной*, если она обладает хотя бы одним конечным центральным (соответственно субнормальным) рядом с абелевыми π-ограниченными факторами. Классы π-ограниченных абелевых, нильпотентных и разрешимых групп будем обозначать через $\mathscr{A}_\pi$, $\mathscr{N}_\pi$ и $\mathscr{S}_\pi$ соответственно.

Предложение 2. *Классы $\mathscr{A}_\pi$, $\mathscr{N}_\pi$ и $\mathscr{S}_\pi$ замкнуты относительно взятия подгрупп и гомоморфных образов.*

Доказательство. Если A — некоторая абелева группа и B — произвольная ее подгруппа, то каждый гомоморфный образ фактор-группы A/B является одновременно и гомоморфным образом группы A, а всякий гомоморфный образ группы B вкладывается в некоторый гомоморфный образ группы A. Поэтому если условие $(5)_\pi$ имеет место для группы A, то оно выполняется также и для групп B, A/B. Значит, утверждение предложения справедливо для класса $\mathscr{A}_\pi$.

Далее, если

$$1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \cdots \leqslant G_n = G$$

— субнормальный (центральный) ряд некоторой группы G и $H \leqslant G$ — произвольная подгруппа, то последовательность пересечений

$$1 = G_0 \cap H \leqslant G_1 \cap H \leqslant \cdots \leqslant G_n \cap H = H$$

представляет собой субнормальный (соответственно центральный) ряд группы H, все факторы которого вкладываются в соответствующие факторы ряда группы G. Если подгруппа H нормальна в группе G, то образы G_iH/H членов ряда группы G относительно естественного гомоморфизма $\varepsilon : G \to G/H$ образуют субнормальный (соответственно центральный) ряд фактор-группы G/H, причем факторы этого ряда являются гомоморфными образами факторов ряда группы G. Поэтому из установленных выше свойств класса $\mathscr{A}_\pi$ вытекает, что утверждение предложения имеет место и для классов $\mathscr{S}_\pi$ и $\mathscr{N}_\pi$. $\square$

Предложение 3. *Произвольная абелева $\mathscr{S}_\pi$-группа является $\mathscr{A}_\pi$-группой.*

Доказательство. Пусть G — абелева $\mathscr{S}_\pi$-группа и H — произвольная фактор-группа группы G. Согласно предложению 2 каждая примарная π-компонента T периодической части группы H является $\mathscr{S}_\pi$-группой и, следовательно, обладает субнормальным рядом с $\mathscr{A}_\pi$-факторами. Будучи p-группами для некоторого $p \in \pi$, факторы этого ряда конечны, а вместе с ними конечна и группа T. Таким образом, группа G принадлежит классу $\mathscr{A}_\pi$. $\square$

Из предложений 2 и 3 вытекает, в частности, что факторы произвольного субнормального ряда $\mathscr{S}_\pi$-группы являются $\mathscr{A}_\pi$-группами. Это позволяет дать другое определение групп из класса $\mathscr{N}_\pi$: нильпотентная группа называется π-*ограниченной*, если она принадлежит классу $\mathscr{S}_\pi$.

Предложение 4. *Пусть G — произвольная $\mathscr{N}_\pi$-группа, и пусть $g \in G$ — неединичный элемент, порядок которого конечен и является π-числом. Тогда для любого π-числа m фактор-группа G/G^m принадлежит классу $\mathscr{F}_\pi$ и существует π-число n такое, что $g \notin G^n$.*

Доказательство. Пусть m — некоторое π-число и σ — множество всех его простых делителей. Из предыдущих двух предложений следует, что каждый фактор A произвольного центрального ряда группы G/G^m является $\mathscr{A}_\pi$-группой. Вместе с тем A — периодическая σ-группа, множество σ конечно и содержится в π. Значит, $A \in \mathscr{F}_\pi$. Таким образом, все факторы любого центрального ряда группы G/G^m принадлежат классу $\mathscr{F}_\pi$, откуда следует, что и сама группа G/G^m содержится в этом классе.

Возьмем в качестве m порядок элемента g и зафиксируем некоторый центральный ряд S группы G. Так как $\sigma \subseteq \pi$, все примарные σ-компоненты периодической части каждого фактора этого ряда конечны. Количество этих компонент также конечно ввиду конечности множества σ. Поэтому определено произведение r порядков всех примарных σ-компонент периодических частей факторов ряда S.

Легко видеть, что произвольный элемент группы G, порядок которого является σ-числом, в степени r равен 1. Поэтому уравнение $x^r = g$ не разрешимо в группе G. Но согласно лемме 2 из [1] уравнение $x^r = y$ разрешимо в G для каждого $y \in G^{r^c}$, где c — ступень нильпотентности группы G. Следовательно, $g \notin G^{r^c}$, и число $n = r^c$ искомое. $\square$

Покажем, что π-ограниченные нильпотентные группы обладают свойством $\mathfrak{S}_\pi$. Первым шагом в этом направлении служит критерий $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемости $\mathscr{N}_\pi$-групп, обобщающий теорему Грюнберга [9] об условиях $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемости конечно порожденных нильпотентных групп.

Теорема 2. *π-Ограниченная нильпотентная группа G $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда ее периодическая часть $\tau(G)$ является π-группой.*

Доказательство. Необходимость этого условия очевидна. Проверку достаточности будем вести индукцией по ступени нильпотентности группы G.

Если G является абелевой группой, то ввиду π'-изолированности ее единичной подгруппы требуемый результат вытекает из теоремы 1. Поэтому далее будем предполагать, что группа G имеет ступень нильпотентности $c > 1$ и для всех $\mathscr{N}_\pi$-групп меньшей ступени утверждение справедливо.

Пусть $g \in G$ — произвольный нетривиальный элемент. Покажем, что существует гомоморфизм φ группы G на конечную π-группу, переводящий g в элемент, отличный от единицы.

В силу индуктивных соображений можно считать, что g лежит в центре $Z(G)$ группы G. Подгруппа $H = Z(G)$ согласно предложениям 2 и 3 является $\mathscr{A}_\pi$-группой и по доказанному обладает нормальной подгруппой N конечного π-индекса, не содержащей элемента g. Полагая $G_1 = G/N$ и $g_1 = gN$, видим, что элемент g_1 отличен от единицы и имеет в группе G_1 конечный порядок, являющийся π-числом.

Так как G_1 снова оказывается $\mathscr{N}_\pi$-группой, согласно предложению 4 существует π-число n такое, что $g_1 \notin G_1^n$. Поскольку в силу того же предложения $G_1/G_1^n \in \mathscr{F}_\pi$, гомоморфизм группы G на группу G_1/G_1^n искомый. $\square$

Теорема 3. *Всякая π-ограниченная нильпотентная группа обладает свойством $\mathfrak{S}_\pi$.*

Доказательство. Пусть G — π-ограниченная нильпотентная группа и H — ее произвольная π'-изолированная подгруппа. Обозначим через H_1 нормализатор $N_G(H)$ подгруппы H в группе G и по индукции через H_{i+1} — подгруппу $N_G(H_i)$. Известно, что для некоторого n имеет место равенство $H_n = G$ и что вместе с подгруппой H все члены последовательности

$$H = H_0 \leqslant H_1 \leqslant \dots \leqslant H_n = G$$

π'-изолированы в группе G (см., например, [10, теорема 4.11]).

Применим индукцию по длине цепочки последовательных нормализаторов подгруппы H. Если H нормальна в группе G, утверждение сразу вытекает из теоремы 2. Поэтому далее будем предполагать, что $n \geqslant 2$.

Пусть $g \in G$ — произвольный элемент, не принадлежащий подгруппе H. Необходимо указать гомоморфизм φ группы G на конечную π-группу, при котором $g\varphi \notin H\varphi$.

Согласно теореме 2 подгруппа H_{n-1} $\mathscr{F}_\pi$-отделима в группе G. Поэтому далее можно считать, что $g \in H_{n-1}$. Так как подгруппа H π'-изолирована в группе H_{n-1}, в силу индуктивного предположения существует такая нормальная подгруппа N конечного π-индекса группы H_{n-1}, что $g \notin HN$. Полагая $r = [H_{n-1} : N]$, получаем, что $H_{n-1}^r \leqslant N$ и потому $g \notin HH_{n-1}^r$.

Подгруппа H_{n-1}^r нормальна и, как легко видеть, π'-изолирована в G. Следовательно, группа $G_1 = G/H_{n-1}^r$ $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема согласно теореме 2. В силу предложения 4 фактор-группа H_{n-1}/H_{n-1}^r конечна. Значит, конечна и ее подгруппа $H_1 = HH_{n-1}^r/H_{n-1}^r$. Из соотношения $g \notin HH_{n-1}^r$ вытекает, что $g_1 = gH_{n-1}^r \notin H_1$. Поэтому, пользуясь $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемостью группы G_1, можем найти такую нормальную подгруппу M конечного π-индекса этой группы, что $g_1 \notin H_1M$. Из последнего соотношения следует, что композиция φ естественных гомоморфизмов группы G на G_1 и группы G_1 на фактор-группу G_1/M является искомым отображением. □

Теорема 1 показывает, что абелева группа, удовлетворяющая условию $\mathfrak{S}_\pi$, не обязана быть π-ограниченной. Однако нильпотентная группа, составленная из таких блоков, т. е. обладающая центральным рядом, для всех факторов которого имеет место свойство $\mathfrak{S}_\pi$, может содержать π'-изолированные подгруппы, не отделимые даже в классе всех конечных групп: соответствующий пример приводится в работе [1]. Вместе с тем справедливо

Следствие 1. *Нильпотентная группа без кручения обладает свойством $\mathfrak{S}_\pi$ тогда и только тогда, когда она является π-ограниченной.*

Доказательство. Ввиду теоремы 3 нам следует проверить лишь необходимость. Пусть G — нильпотентная группа без кручения, обладающая свойством $\mathfrak{S}_\pi$, и пусть

$$1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \dots \leqslant G_c = G \qquad (*)$$

— верхний центральный ряд группы G. Покажем, что каждый фактор этого ряда принадлежит классу $\mathscr{A}_\pi$.

Пусть $i \in \{0, \dots, c-1\}$. Из отсутствия кручения в группе G следует, что все члены ряда $(*)$ изолированы в этой группе (см., например, [10, с. 13]). Поэтому если H/G_i — некоторая π'-изолированная подгруппа группы G_{i+1}/G_i, то подгруппа H π'-изолирована в группе G. Так как последняя обладает свойством $\mathfrak{S}_\pi$, то H оказывается $\mathscr{F}_\pi$-отделимой в G, значит, для каждого элемента $g \in G_{i+1} \setminus H$ в группе G существует такая нормальная подгруппа N_g конечного π-индекса, что $g \notin HN_g$. Но тогда $(N_g G_i \cap G_{i+1})/G_i$ — нормальная подгруппа конечного π-индекса группы G_{i+1}/G_i и $gG_i \notin H/G_i \cdot (N_g G_i \cap G_{i+1})/G_i$. В силу произвольности выбора элемента g отсюда следует, что подгруппа H/G_i $\mathscr{F}_\pi$-отделима в группе G_{i+1}/G_i.

Таким образом, группа G_{i+1}/G_i обладает свойством $\mathfrak{S}_\pi$. Поэтому согласно теореме 1 она удовлетворяет условию $(3)_\pi$. Как отмечено выше, подгруппа G_i изолирована в группе G. Следовательно, группа G_{i+1}/G_i не имеет кручения и в силу предложения 1 удовлетворяет условию $(5)_\pi$. $\square$

Пусть далее Π обозначает множество всех простых чисел. Напомним, что согласно [1]

1) абелева группа A называется *ограниченной*, если сама она удовлетворяет условию $(4)_\Pi$, а ее фактор-группа по периодической части $\tau(A)$ — условиям (1) и $(2)_\Pi$;

2) разрешимая группа называется *ограниченной*, если она обладает хотя бы одним конечным субнормальным рядом с абелевыми ограниченными факторами.

Предложение 5. *Абелева группа A удовлетворяет условию $(5)_\pi$ тогда и только тогда, когда для нее справедливо условие $(4)_\pi$, а для фактор-группы $A/\tau(A)$ — условие $(2)_\pi$. В частности, классы $\mathscr{A}_\Pi$ и $\mathscr{S}_\Pi$ совпадают с классами ограниченных абелевых и ограниченных разрешимых групп соответственно, а класс $\mathscr{N}_\Pi$ — с классом нильпотентных групп, являющихся ограниченными разрешимыми.*

Доказательство. Достаточность. Пусть B — произвольная подгруппа группы A. Тогда фактор-группа A/B представляет собой расширение группы

$$\tau(A)B/B \cong \tau(A)/(\tau(A) \cap B)$$

при помощи группы

$$A/\tau(A)B \cong (A/\tau(A))/(\tau(A)B/\tau(A)).$$

Так как группа A удовлетворяет условию $(4)_\pi$, а фактор-группа $A/\tau(A)$ — условию $(2)_\pi$, в группе $\tau(A)/(\tau(A) \cap B)$ все примарные π-компоненты периодической части конечны, а в группе $A/\tau(A)B$ имеют конечный период (поскольку условия $(2)_\pi$ и $(3)_\pi$ равносильны согласно предложению 1). Следовательно, примарные π-компоненты периодической части группы A/B также имеют конечный период и группа A удовлетворяет условию $(3)_\pi$. Из предложения 1 вытекает, что для группы A справедливо условие $(5)_\pi$.

Необходимость ввиду того же предложения почти очевидна. Если группа A удовлетворяет условию $(5)_\pi$, то для нее выполняются также условия $(3)_\pi$ и $(4)_\pi$. Понятно, что и любая фактор-группа группы A удовлетворяет условию $(3)_\pi$, а значит, и условию $(2)_\pi$.

Поскольку условие (1) согласно предложению 1 является следствием условия $(2)_\Pi$, из доказанного вытекает, в частности, что ограниченность группы A в смысле [1] равносильна условию $(5)_\Pi$. Таким образом, совпадение классов, указанных в формулировке предложения, имеет место. $\square$

Следствие 2. *Нильпотентная группа, являющаяся ограниченной разрешимой в смысле А. И. Мальцева, обладает свойством $\mathfrak{S}_\pi$ для любого множества простых чисел π.*

Доказательство. Непосредственно из определений классов $\mathscr{A}_\pi$ и $\mathscr{S}_\pi$ следует, что для любого множества простых чисел π справедливы включения $\mathscr{A}_\Pi \subseteq \mathscr{A}_\pi$ и $\mathscr{S}_\Pi \subseteq \mathscr{S}_\pi$. Поэтому в силу предложения 5 каждая ограниченная разрешимая группа принадлежит классу $\mathscr{S}_\pi$, а каждая нильпотентная группа, являющаяся ограниченной разрешимой — классу $\mathscr{N}_\pi$. Таким образом, утверждение следствия вытекает из теоремы 3. $\square$

В заключение отметим, что для разрешимых групп, не являющихся нильпотентными, равносильность $\mathscr{F}_\pi$-отделимости и π'-изолированности, вообще говоря, не имеет места. С. А. Агалаков [11] показал, что свободные разрешимые группы ступени $n \geqslant 3$ не обладают даже свойством финитной отделимости всех конечно порожденных подгрупп. В. Г. Бардаков [12] установил, что каждая свободная разрешимая группа ступени 2 содержит изолированную конечно порожденную подгруппу, не отделимую в классе конечных π-групп для любого одноэлементного множества π. Более того, даже в сверхразрешимой группе π'-изолированная подгруппа может не быть $\mathscr{F}_\pi$-отделимой, как показывает следующий простой пример, идея которого позаимствована из [13].

Пусть
$$G = \langle a, b;\ a^{-1}ba = b^{-1}\rangle,$$
и пусть множество π не содержит числа 2. Если φ — произвольный гомоморфизм группы G на конечную π-группу, r и s — порядки элементов $a\varphi$ и $b\varphi$ соответственно, то в силу нечетности числа r
$$b\varphi = (a\varphi)^{-r} b\varphi (a\varphi)^r = (b\varphi)^{(-1)^r} = (b\varphi)^{-1}.$$

Отсюда $(b\varphi)^2 = 1$ и $b\varphi = 1$ в силу нечетности s.

Таким образом, группа G не является $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемой. При этом она не имеет кручения, следовательно, ее единичная подгруппа оказывается π'-изолированной, но не $\mathscr{F}_\pi$-отделимой в G.

Автор выражает благодарность рецензенту за ряд ценных советов и замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иванов. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.
2. *Baumslag G., Soliter D.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V. 68. P. 199–201.
3. *Hall M. Jr.* Subgroup of finite index in free groups // Can. J. Math. 1949. V. 1. P. 187–190.
4. *Kim G., Tang C. Y.* On generalized free products of residually finite p-groups // J. Algebra. 1998. V. 201. P. 317–327.
5. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 15-е изд. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2002.
6. *Бардаков В. Г.* К вопросу Д. И. Молдаванского о p-отделимости подгрупп свободной группы // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 505–509.
7. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 395–407.
8. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. 5-е изд. СПб.: Лань, 2009.
9. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1957. V. 7. P. 29–62.

10. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика. Периодический сборник переводов иностранных статей. 1968. Т. 12, № 1. С. 3–36.

11. *Агалаков С. А.* О финитной отделимости групп и алгебр Ли // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 4. С. 363–371.

12. *Bardakov V. G.* On p-separability of subgroups of free metabelian groups // Algebra Colloq. 2006. V. 13, N 2. P. 289–294.

13. *Азаров Д. Н., Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость сверхразрешимых групп конечными p-группами // Науч. тр. Иванов. гос. ун-та. Математика. 1999. № 2. С. 8–9.

Статья поступила 13 сентября 2013 г.

Соколов Евгений Викторович
Ивановский гос. университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
ev-sokolov@yandex.ru