Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2014. Том 55, № 6

УДК 512.723

СЕМЕЙСТВА СТАБИЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ РАНГА 2 С $c_1 = -1$ НА ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{P}^3$

С. А. Тихомиров

Аннотация. Построены бесконечные серии семейств стабильных векторных расслоений ранга 2 на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$, имеющих нечетный первый класс Черна $c_1 = -1$ и произвольный второй класс Черна $c_2 = 2n,\ n \geq 2$. Эти серии отличны от известной серии семейств таких расслоений, построенной Хартсхорном (1978 г.). Согласно гипотезе автора эти семейства содержатся при $n \geq 3$ в неприводимых компонентах пространства модулей стабильных расслоений, отличных от компонент, содержащих семейства Хартсхорна. В статье эта гипотеза доказана для случая $n = 3$. В этом случае схема модулей стабильных векторных расслоений ранга 2 с $c_1 = -1$ и $c_2 = 6$ на $\mathbb{P}^3$ имеет по крайней мере две неприводимые компоненты.

Ключевые слова: векторное расслоение, семейство, пространство модулей.

1. Введение

В статье исследуется схема $M(-1, m)$ модулей стабильных векторных расслоений ранга 2 с классами Черна $c_1 = -1$ и $c_2 = m$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ над алгебраически замкнутым полем $\mathbf{k}$ характеристики 0. Как известно [1], эта схема пуста при $m \neq 2n$. Кроме того, условие стабильности расслоения при $m = 2n$ влечет $n \geq 1$. В 1978 г. Хартсхорн [2, пример 3.1.2] построил серию $\{H_n\}_{n\geq 1}$ семейств векторных расслоений $H_n \subset M(-1, 2n)$ для всех $n \geq 1$, показав тем самым, что все априори незапрещенные значения c_2 реализуются. Затем в 1981 г. Хартсхорн и Сольс [3] исследовали случай $n = 1$ и показали, что $M(-1, 2)$ — гладкая неприводимая схема размерности 11. При этом конструкция семейств H_n показывает, что H_1 — плотное открытое подмножество в $M(-1, 2)$. В 1985 г. в работе Баники и Манолахе [4] рассмотрен случай $n = 2$ и доказано, что схема $M(-1, 4)$ состоит из двух неприводимых компонент — компоненты M' размерности 27, состоящей из расслоений с минимальным спектром $(-1, -1, 0, 0)$, и компоненты M'' размерности 28, состоящей из расслоений с максимальным спектром $(-2, -1, 0, 1)$.

В настоящей статье изучаются следующие случаи $n \geq 3$. А именно, в разд. 2 построены новые бесконечные серии семейств $\{M_{k,n}\}$ стабильных расслоений из $M(-1, 2n)$ для всех $n \geq 3$ (см. теорему 2.1) и сформулирована гипотеза о том, что эти семейства содержатся в компонентах в $M(-1, 2n)$, отличных от тех, которые содержат семейства H_n Хартсхорна (см. гипотезу 2.2). Эта гипотеза доказана для случая $n = 3$. А именно, в этом случае имеются два различных локально замкнутых в $M(-1, 6)$ семейства $M_{0,3}$ и $M_{1,3}$ размерности 43 такие, что всякая неприводимая компонента в $M(-1, 6)$, содержащая любое из этих

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации.

семейств, отлична от неприводимой компоненты, содержащей семейство Хартсхорна H_3. Тем самым схема $M(-1,6)$ имеет по крайней мере две неприводимые компоненты (см. теорему 3.3).

2. Конструкция семейств $M_{k,n}$ расслоений из $M(-1,2n)$

Рассмотрим диофантово уравнение

$$6a + 4b = 2n + 6, \quad n \geq 3. \tag{1}$$

Его решения с неотрицательными a, b имеют следующий вид:

(i) при $n = 2m+1$, $m \geq 1$,

$$a = 2k, \quad b = m + 2 - 3k \quad \text{при } 0 \leq k \leq \left[\frac{m+2}{3}\right]; \tag{2}$$

(ii) при $n = 2m$, $m \geq 2$,

$$a = 1 + 2k, \quad b = m - 3k \quad \text{при } 0 \leq k \leq \left[\frac{m}{3}\right]. \tag{3}$$

Определим функцию $\psi(n)$ для $n \geq 3$, полагая $\psi(n) = \left[\frac{m+2}{3}\right]$ для $n = 2m+1$ и соответственно $\psi(n) = \left[\frac{m}{3}\right]$ для $n = 2m$. Формулы (2) и (3) показывают, что $\psi(n) + 1$ как функция от n дает число решений уравнения (1). Пусть кривая C' есть гладкая секстика в $\mathbb{P}^3$, являющаяся полным пересечением поверхностей степени 2 и 3 в $\mathbb{P}^3$:

$$C' = S_2 \cap S_3, \quad S_i \in |\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(i)|, \ i = 2,3, \quad \omega_{C'} \simeq \mathscr{O}_{C'}(1), \quad g(C') = 4. \tag{4}$$

Пусть C'' — гладкая плоская квартика в $\mathbb{P}^3$:

$$C'' = S_1 \cap S_4, \quad S_i \in |\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(i)|, \ i = 1,4, \quad \omega_{C''} \simeq \mathscr{O}_{C''}(1), \quad g(C'') = 3. \tag{5}$$

Многочлены Гильберта кривых C' и C'' равны соответственно $P'(n) = 6n - 3$ и $P''(n) = 4n - 2$. Как известно (см., например, [5, гл. IV, пример 6.4.2]), $H_{4,6} = \{C' \in \mathrm{Hilb}^{P'(n)}(\mathbb{P}^3) \mid C'$ — гладкая кривая типа (4)$\}$ — неприводимое открытое подмножество схемы Гильберта $\mathrm{Hilb}^{P'(n)}(\mathbb{P}^3)$, а $H_{3,4} = \{C'' \in \mathrm{Hilb}^{P''(n)}(\mathbb{P}^3) \mid C''$ — гладкая кривая типа (5)$\}$ — неприводимое открытое подмножество схемы Гильберта $\mathrm{Hilb}^{P''(n)}(\mathbb{P}^3)$. Кроме того,

$$\dim H_{4,6} = 24, \quad \dim H_{3,4} = 17. \tag{6}$$

Пусть $n \geq 3$ и $0 \leq k \leq \psi(n)$. Следуя (2) и (3), положим $a(k) = 2k$, $b(k) = m + 2 - 3k$ при $n = 2m+1$ и соответственно $a(k) = 1 + 2k$, $b(k) = m - 3k$ при $n = 2m$. Рассмотрим дизъюнктное объединение $Y_{k,n}$ кривых в $\mathbb{P}^3$, состоящее из $a(k)$ секстик $C'_1, \dots, C'_{a(k)}$ вида (4) и $b(k)$ квартик $C''_1, \dots, C''_{b(k)}$ вида (5):

$$Y = Y_{k,n} = C'_1 \sqcup \dots \sqcup C'_{a(k)} \sqcup C''_1 \sqcup \dots \sqcup C''_{b(k)}, \quad 0 \leq k \leq \varphi(n). \tag{7}$$

Из (1), (4) и (5) следует, что

$$\deg Y = 2n + 6, \quad \omega_Y \simeq \mathscr{O}_Y(1). \tag{8}$$

Проведем для кривой Y конструкцию Серра (см. [2, § 1]). Для этого рассмотрим точную тройку $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}$-пучков

$$\xi : 0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \to E \to \mathscr{I}_Y(2) \to 0. \tag{9}$$

Пучок E в этой тройке задается элементом ξ группы $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{I}_Y(2),\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-3))$ как расширение. Таким образом, пучок E в тройке (9) определяется парой (Y,ξ):

$$E=E(Y,\xi).$$

Стандартное вычисление (см. [2, теорема 1.1]) с учетом (7) и второго равенства (8) дает изоморфизм

$$\mathrm{Ext}^1(\mathscr{I}_Y(2),\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-3))\simeq\bigoplus_{i=1}^{a(k)}H^0(\mathscr{O}_{C_i'})\bigoplus_{j=1}^{b(k)}H^0(\mathscr{O}_{C_j''})\simeq\mathbf{k}^{a(k)+b(k)}. \tag{10}$$

При этом изоморфизме элемент $\xi\in\mathrm{Ext}^1(\mathscr{I}_Y(2),\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-3))$ может быть записан в виде

$$\xi=(\lambda_1,\dots\lambda_{a(k)},\mu_1,\dots,\mu_{b(k)}). \tag{11}$$

По конструкции Серра условия

$$\lambda_i\neq 0,\ 1\le i\le a(k),\quad \mu_j\neq 0,\ 1\le j\le b(k), \tag{12}$$

влекут, что в тройке пучок $E(Y,\xi)$ локально свободен, т. е. является векторным расслоением ранга 2 на $\mathbb{P}^3$. При этом из тройки (9) и первого равенства (8) следует, что $E=E(Y,\xi)$ имеет классы Черна

$$c_1(E)=-1,\quad c_2(E)=2n. \tag{13}$$

Из формул (2) и (3) находим, что при $n\ge 3$ кривая $Y=Y_{k,n}$ содержит либо ненулевое четное число секстик C', либо ненулевое кратное 3 число плоских квартик C''. Так как каждая секстика C' лежит на единственной гладкой поверхности степени 2 (квадрике), через две такие непересекающиеся секстики не проходит ни одной квадрики. Аналогично через любые три непересекающиеся плоские секстики не проходит квадрика. В самом деле, любая такая квадрика должна была бы содержать плоскости, натянутые на квартики, а значит, распадаться на три различные плоскости, что невозможно. Следовательно, через кривую $Y_{k,n}$ не проходят квадрики, т. е. $H^0(\mathscr{I}_{Y_{k,n}}(2))=0$. Поэтому из (9) следует, что $H^0(E)=0$, т. е. расслоение $E(Y,\xi)$ стабильно согласно [2, § 3]. Тем самым ввиду (13) имеем

$$[E(Y,\xi)]\in M(-1,2n). \tag{14}$$

(Здесь и всюду ниже через $[E]$ обозначается класс изоморфизма расслоения E.)

Для $n\ge 3$ и $0\le k\le\psi(n)$ рассмотрим многообразие $W_{k,n}=\big\{(C_1',\dots,C_{a(k)}', C_1'',\dots,C_{b(k)}'')\in\mathop{\times}\limits_{i=1}^{a(k)}H_{4,6}\times\mathop{\times}\limits_{j=1}^{b(k)}H_{3,4}\mid$ кривые $C_1',\dots,C_{b(k)}''$ попарно не пересекаются$\}$. По построению $W_{k,n}$ является плотным открытым подмножеством многообразия $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{a(k)}H_{4,6}\times\mathop{\times}\limits_{j=1}^{b(k)}H_{3,4}$. Отсюда и из (6) следует, что

$$\dim W_{k,n}=24a(k)+17b(k). \tag{15}$$

Пусть $\mathbf{Y}\hookrightarrow\mathbb{P}^3\times W_{k,n}$ — универсальное плоское семейство кривых. По определению слоем естественной проекции $\mathbf{Y}\to W_{k,n}$ над точкой $(C_1',\dots,C_{b(k)}'')\in W_{k,n}$ является несвязная кривая Y вида (7) (с упорядочением ее неприводимых связных компонент). Проекция $\mathrm{pr}_2:\mathbb{P}^3\times W_{k,n}\to W_{k,n}$ определяет пучок относительных Ext-ов $F=\mathscr{E}xt^1_{\mathrm{pr}_2}(\mathscr{I}_{\mathbf{Y}}\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(2)\boxtimes\mathscr{O}_{W_{k,n}},\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)\boxtimes\mathscr{O}_{W_{k,n}})$. Так как согласно (10) размерность векторного пространства $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{I}_Y(2), \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-3))$ не зависит от точки $Y \in W_{k,n}$ и равна $a(k)+b(k)$, в силу замены базы [6, теорема A.5] F — локально свободный пучок ранга

$$\mathrm{rk}\, F = a(k) + b(k) \tag{16}$$

на $W_{k,n}$ такой, что для $Y \in W_{k,n}$ имеем $F \otimes \mathbf{k}_{\{Y\}} = \mathrm{Ext}^1(\mathscr{I}_Y(2), \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-3))$. Рассмотрим многообразие $\Pi = \mathbf{P}(F^\vee)$ с проекцией $\pi : \Pi \to W_{k,n}$ и пучком Гротендика $\mathscr{O}_\Pi(1)$. Ввиду последнего равенства получаем, что

$$\pi^{-1}(Y) = P(\mathrm{Ext}^1(\mathscr{I}_Y(2), \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3})), \quad Y \in W_{k,n}. \tag{17}$$

На $\mathbb{P}^3 \times \Pi$ определены плоское над Π семейство кривых $\mathbf{Y}_\Pi = \mathbf{Y} \times_{W_{k,n}} \Pi$ и универсальное расширение (см. [7])

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \boxtimes \mathscr{O}_\Pi(1) \to \mathbf{E} \to \mathscr{I}_{\mathbf{Y}_\Pi} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \boxtimes \mathscr{O}_\Pi \to 0. \tag{18}$$

Воспользуемся описанием (17) слоев проекции π и рассмотрим в Π открытое подмножество $\widetilde{B}_{k,n} = \{(Y, \mathbf{k}\xi) \mid Y \in W_{k,n},\ \mathbf{k}\xi$ — точка в $\pi^{-1}(Y)$ такая, что ξ, будучи записан в виде (11), удовлетворяет (12)$\}$. Так как по построению для любой точки $(Y, \mathbf{k}\xi) \in U$ ограничение на $\mathbb{P}^3 \times \{(Y, \mathbf{k}\xi)\}$ тройки (18) совпадает с тройкой (9), получаем, что $\mathbf{E}|_{\mathbb{P}^3 \times \{(Y,\mathbf{k}\xi)\}} = E(Y, \xi)$. Отсюда и из (14) вытекает существование морфизма

$$\tilde{f} : \widetilde{B}_{k,n} \to M(-1, 2n), \quad (Y, \xi) \mapsto [\mathbf{E}|_{\mathbb{P}^3 \times \{(Y,\mathbf{k}\xi)\}}]. \tag{19}$$

Отметим, что (15) и (16) дают равенство $\dim \widetilde{B}_{k,n} = \dim W_{k,n} + \mathrm{rk}\, F - 1 = 25a(k) + 18b(k) - 1$. Подставляя сюда $a(k)$ и $b(k)$, находим

$$\dim \widetilde{B}_{k,n} = 18m + 35 - 4k,\ n = 2m+1, \quad \dim \widetilde{B}_{k,n} = 18m + 24 - 4k,\ n = 2m. \tag{20}$$

Так как по построению пучок $\mathbf{E}$ плоский над $\widetilde{B}_{k,n}$, функция $h^0(E(Y,\xi)(3))$ полунепрерывна сверху как функция от точки $(Y, \mathbf{k}\xi) \in \widetilde{B}_{k,n}$. Поэтому в $\widetilde{B}_{k,n}$ существует открытое плотное подмножество $\widetilde{B}'_{k,n} \subset \widetilde{B}_{k,n}$, на котором эта функция принимает минимальное значение

$$h^0_{\min} = \min\{h^0(E(Y,\xi)(3)) \mid (Y, \mathbf{k}\xi) \in \widetilde{B}_{k,n}\}. \tag{21}$$

На $W_{k,n}$ действует группа $G = S_{a(k)} \times S_{b(k)}$, где $S_{a(k)}$ (соответственно $S_{b(k)}$) — симметрическая группа, действующая перестановками на секстиках $C'_1, \dots, C'_{a(k)}$ (соответственно квартиках $C''_1, \dots, C''_{b(k)}$). Так как каждая точка $Y \in \widetilde{B}'_{k,n}$ есть кривая вида (7) — дизъюнктное объединение секстик и квартик, группа G действует на $W_{k,n}$ без неподвижных точек. Это действие поднимается естественным образом до действия группы G на $\widetilde{B}'_{k,n}$ такого, что проекция $\pi|_{\widetilde{B}'_{k,n}} : \widetilde{B}'_{k,n} \to W_{k,n}$ G-эквивариантна. Пусть $B_{k,n} = \widetilde{B}'_{k,n}/G$ и $\tau : \widetilde{B}'_{k,n} \to B_{k,n}$ — морфизм факторизации. По построению морфизм $\tilde{f}|_{\widetilde{B}'_{k,n}}$, определенный в (19), пропускается через τ, т. е. определен морфизм

$$f : B_{k,n} \to M(-1, 2n) \tag{22}$$

такой, что $\tilde{f}|_{\widetilde{B}'_{k,n}} = f \circ \tau$. Положим

$$M_{k,n} = f(B_{k,n}). \tag{23}$$

Из [2, теорема 1.1] непосредственно следует, что слой морфизма f над произвольной точкой $[E] \in M_{k,n}$ есть открытое подмножество проективного пространства $P(H^0(E(3)))$, описываемое следующим образом:

$$f^{-1}([E]) = \{\mathbf{k}s \in P(H^0(E(3))) \mid (s)_0 \text{ — кривая типа (7)}\}. \tag{24}$$

(Здесь использовано стандартное обозначение $(s)_0$ для схемы нулей сечения s.) Тем самым с учетом (21) имеем $\dim M_{k,n} = \dim B_{k,n} - h^0_{\min} + 1$. Отсюда, из (20) и того, что $\dim B_{k,n} = \dim \widetilde{B}'_{k,n} = \dim \widetilde{B}_{k,n}$, находим

$$\begin{gathered}\dim M_{k,n} = 18m + 36 - 4k - h^0_{\min}, \quad n = 2m+1,\\ \dim M_{k,n} = 18m + 25 - 4k - h^0_{\min}, \quad n = 2m.\end{gathered} \tag{25}$$

Итак, имеет место

Теорема 2.1. *Для $n \geq 3$ и $0 \leq k \leq \psi(n)$ в схеме $M(-1,2n)$ определены локально замкнутые подмногообразия $M_{k,n}$, размерности которых даются формулами* (25). *Эти подмногообразия составляют бесконечную серию; их число $\psi(n)$ и размерности как функции от n неограниченно возрастают с ростом n.*

Гипотеза 2.2. *Для любого $n \geq 3$ и любого k, $0 \leq k \leq \psi(n)$, многообразие $M_{k,n}$ содержится в (по крайней мере одной) неприводимой компоненте схемы $M(-1,2n)$, отличной от компоненты, содержащей семейство Хартсхорна H_n.*

В разд. 3 будет доказана гипотеза 2.2 для $n = 3$ (см. теорему 3.3).

3. Семейства $M_{0,3}$ и $M_{1,3}$ расслоений из $M(-1,6)$

В этом разделе рассматривается схема $M(-1,6)$. Сначала рассмотрим четыре возможных значения спектра расслоений из $M(-1,6)$, а затем покажем, что каждому из первых трех значений спектра соответствует (по крайней мере одна) неприводимая компонента этой схемы, так что $M(-1,6)$ имеет не менее трех компонент. Одна из этих компонент известна — это та компонента M_1, которая содержит семейство Хартсхорна H_3 (см. разд. 1). Затем покажем (см. теорему 3.3), что всякая неприводимая компонента схемы $M(-1,6)$, содержащая любое из многообразий $M_{0,3}$ и $M_{1,3}$, отлична от M_1. Это, в частности, доказывает гипотезу 2.2 для $n = 3$.

В 1980 г. Хартсхорн в [8] ввел понятие спектра для стабильных расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^3$. Для расслоения $[E] \in M(-1,2n)$ спектр $\mathrm{Sp}(E)$ определяется как неубывающая последовательность $2n$ целых чисел $\{k_i\}$ следующим образом. Рассмотрим $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$-пучок $\mathscr{H} = \bigoplus\limits_{i=1}^{2n} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k_i)$. Тогда числа k_i однозначно определяются свойствами (см. [8, теорема 7.1]):

$$h^1(E(l)) = h^0(\mathscr{H}(l+1)),\ l \leq -1; \quad h^2(E(l)) = h^1(\mathscr{H}(l+1)),\ l \geq -2. \tag{26}$$

При этом спектр $\mathrm{Sp}(E) = \{k_i\}$ обладает свойством симметричности относительно числа $-\frac{1}{2}$, т. е. удовлетворяет равенству $\{-k_i\} = \{k_i + 1\}$, и свойством связности, означающим, что в последовательности $\{k_i\}$ разность между соседними числами по модулю равна 0 или 1.

Рассмотрим схему $M(-1,2n)$ для случая $n = 3$, т. е. схему $M(-1,6)$. В этом случае для расслоений $[E] \in M(-1,6)$ из условий симметричности и связности спектра непосредственно следует, что возможны следующие четыре значения спектра $\mathrm{Sp}(E)$:

$$\mathrm{Sp}(E) = \{-1,-1,-1,0,0,0\}, \tag{27i}$$

$$\operatorname{Sp}(E) = \{-2, -1, -1, 0, 0, 1\}, \tag{27ii}$$

$$\operatorname{Sp}(E) = \{-2, -2, -1, 0, 1, 1\}, \tag{27iii}$$

$$\operatorname{Sp}(E) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}. \tag{27iv}$$

Рассмотрим в $M(-1,6)$ подмножества $\widetilde{M}_1$–$\widetilde{M}_4$ расслоений, имеющих спектры соответственно вида (27i)–(27iv). Из (26) и (27i)–(27iv) простым вычислением получаем, что

$$[E] \in \widetilde{M}_i \quad \Leftrightarrow \quad h^1(E(-2)) = i - 1, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{28}$$

Напомним, что схема $M(-1,6)$ является геометрическим GIT-фактором $\pi : R \to R/PGL(r) = M(-1,6)$, где R — открытое подмножество подходящей Quot-схемы (см. [9, гл. 4]); при этом если $\mathbf{E}$ — универсальный плоский над R фактор-пучок на $R \times \mathbb{P}^3$, то морфизм $\pi : R \to M(-1,6)$ определяется формулой $x \mapsto [\mathbf{E}|_{\{x\}\times\mathbb{P}^3}]$. Поэтому подмножества

$$R_i = \pi^{-1}(\widetilde{M}_i), \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{29}$$

в силу (28) имеют вид $R_i = \{x \in R \mid h^1(\mathbf{E}|_{\{x\}\times\mathbb{P}^3}(-1)) = 2 + i\}$. Так как пучок $\mathbf{E}$ плоский над R, по теореме о полунепрерывности [5, гл. III, теорема 12.8] подмножества R_i локально замкнуты в R. Более того, $R = R_1 \sqcup R_2 \sqcup R_3 \sqcup R_4$, а $R_2 \sqcup R_3 \sqcup R_4$ и $R_3 \sqcup R_4$ замкнуты в R. Поэтому, поскольку $\pi : R \to M(-1,6)$ — геометрический фактор, подмножества $\widetilde{M}_i$ локально замкнуты в $M(-1,6)$, причем

$$M(-1,6) = \widetilde{M}_1 \sqcup \widetilde{M}_2 \sqcup \widetilde{M}_3 \sqcup \widetilde{M}_4, \quad \widetilde{M}_2 \sqcup \widetilde{M}_3 \sqcup \widetilde{M}_4 \text{ и } \widetilde{M}_3 \sqcup \widetilde{M}_4 \text{ замкнуты в } M(-1,6). \tag{30}$$

Как доказано Хартсхорном в [2], семейство H_3 (см. разд. 1) как подмножество $M(-1,6)$ обладает тем свойством, что схема $M(-1,6)$ неособая вдоль H_3 и имеет размерность $8c_2 - 5 = 8 \cdot 6 - 5 = 43$ в точках из H_3. Это означает, что H_3 содержится в единственной неприводимой компоненте из $M(-1,6)$, имеющей размерность 43 и обозначаемой в дальнейшем через M_1. Напомним, что любое расслоение $[E] \in H_3$ строится как расширение вида

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \to E \to \mathscr{I}_Z(1) \to 0, \tag{31}$$

где $Z = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_4$ — дизъюнктное объединение четырех коник C_i в $\mathbb{P}^3$. Поэтому из тройки $0 \to \mathscr{I}_Z \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \to \bigoplus_{i=1}^{4} \mathscr{O}_{C_i} \to 0$ следует, что $h^1(\mathscr{I}_Z(-1)) = 0$. Из этого равенства и подкрученной на $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)$ тройки (31) получаем, что $h^1(E(-2)) = 0$. Тем самым ввиду (28) имеем включение $H_3 \subset \widetilde{M}_1$. Так как в силу (30) $\widetilde{M}_1$ — открытое подмножество в $M(-1,6)$ и через H_3 проходит единственная неприводимая M_1 компонента из $M(-1,6)$, в общей точке $[E]$ компоненты M_1 выполняется равенство $h^1(E(-2)) = 0$. Другими словами,

$$M_1 = \overline{\widetilde{M}_1 \cap M_1}, \tag{32}$$

где замыкание берется в $M(-1,6)$.

Рассмотрим произвольное расслоение $[E] \in M_{0,3}$, т. е. расслоение, входящее в точную тройку (9), где $Y \in W_{0,3}$, т. е. $Y = Y_{0,3} = C_1'' \sqcup C_2'' \sqcup C_3''$, а C_1'', C_2'' и C_3'' — плоские квартики вида (4). Отсюда и из тройки

$$0 \to \mathscr{I}_Y \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}_3} \to \mathscr{O}_Y \to 0 \tag{33}$$

следует, что $h^0(\mathscr{I}_Y) = 2$. Это равенство и тройка (9), подкрученная на $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)$, дают $h^1(E(-2)) = 2$. Последнее равенство вместе с первой формулой (28) показывают, что $E \in \widetilde{M}_3$. Тем самым $M_{0,3} \subset \widetilde{M}_3$.

Рассмотрим проективные плоскости $\mathbb{P}^2_i = \mathrm{Span}(C''_i)$, $i \in \{1,2,3\}$. В плоскости $\mathbb{P}^2_1$ рассмотрим прямые $l_{12} = \mathbb{P}^2_1 \cap \mathbb{P}^2_2$ и $l_{13} = \mathbb{P}^2_1 \cap \mathbb{P}^2_3$ и нульмерные схемы $Z_j = C''_j \cap \mathbb{P}^2_1 \subset l_{1j}$, $j = 2, 3$. Для общей кривой $Y \in W_{0,3}$ прямые l_{12} и l_{13} различны и не содержатся в кривой C''_1, а схемы Z_j приведены и по условию дизъюнктности $Z_j \cap C''_1 = \varnothing$, $j = 2, 3$. В частности, схемы Z_2 и Z_3 не лежат на одной прямой. Отсюда следует, что не существует плоских квинтик из линейного ряда $|\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2_1}(5)|$, содержащих квартику C''_1 и схемы Z_2 и Z_3. (Действительно, всякая такая квинтика распадается на квартику C''_1 и прямую, содержащую Z_2 и Z_3, что невозможно.) Тем самым всякая поверхность из линейного ряда $|\mathscr{I}_Y(5)|$ квинтик в $\mathbb{P}^3$, содержащих кривую Y, необходимо содержит плоскость $\mathbb{P}^2_1$.

Аналогично для общей кривой $Y \in W_{0,3}$ всякая квинтика из $|\mathscr{I}_Y(5)|$ содержит плоскости $\mathbb{P}^2_2$ и $\mathbb{P}^2_3$. Другими словами, всякая квинтика из $|\mathscr{I}_Y(5)|$ распадается в объединение плоскостей $\mathbb{P}^2_1$, $\mathbb{P}^2_2$, $\mathbb{P}^2_3$ и некоторой квадрики в $\mathbb{P}^3$. Тем самым для общей кривой $Y \in W_{0,3}$ имеем

$$h^0(\mathscr{I}_Y(5)) = h^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(2)) = 10.$$

Отсюда и из тройки (9), подкрученной на $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(3)$, следует, что $h^0(E(3)) = 11$. Это число по определению совпадает с $h^0_{\min}$ в формуле (21). Подставляя его в первую формулу (20) при $k = 0$, $n = 3$, находим $\dim M_{0,3} = 43$. Итак, доказано

Предложение 3.1. *Семейство* $M_{0,3}$ *имеет размерность* 43. *При этом* $M_{0,3} \subset \widetilde{M}_3$.

Рассмотрим произвольное расслоение $[E] \in M_{1,3}$, т. е. расслоение, входящее в точную тройку (9), где $Y = Y_{0,3} = C'_1 \sqcup C'_2$, а C'_1 и C'_2 — секстики вида (4). Отсюда и из тройки (33) находим $h^1(\mathscr{I}_Y) = 1$. Это равенство и тройка (33), подкрученная на $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)$, дают равенство $h^1(E(-2)) = 1$, которое вместе с (28) показывает, что $E \in \widetilde{M}_2$. Тем самым $M_{1,3} \subset \widetilde{M}_2$.

Далее, ввиду (4) пучок идеалов $\mathscr{I}_{C'_i}$ секстики C'_i, где $i = 1, 2$, имеет резольвенту $K^{\cdot}_i : 0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-5) \xrightarrow{e_i} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \to 0$, т. е. $\mathscr{I}_{C'_i} = \mathrm{coker}(e_i)$. Так как Y — дизъюнктное объединение кривых C'_1 и C'_2, пучок идеалов $\mathscr{I}_Y$ равен $\mathscr{I}_{C'_1} \otimes \mathscr{I}_{C'_2}$, поэтому имеет резольвентой тотальный комплекс $K^{\cdot} = \mathrm{Tot}(K^{\cdot}_1 \otimes K^{\cdot}_2)$:

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-10) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-8)^{\oplus 2} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-7)^{\oplus 2} \xrightarrow{e} (\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2))^{\otimes 2} \to 0,$$

т. е. $\mathscr{I}_Y = \mathrm{coker}(e)$. Подкручивая получаемую длинную точную последовательность на $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(5)$, находим $h^0(\mathscr{I}_Y(5)) = 6$, $h^0(\mathscr{I}_Y(5)) = 1$. Отсюда и из тройки (9), подкрученной на $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(3)$, следует, что $h^0(E(3)) = 7$. Это число совпадает с $h^0_{\min}$ в формуле (21). Подставляя его в первую формулу (20) при $k = 1$, $n = 3$, находим $\dim M_{1,3} = 43$. Итак, доказан следующий результат.

Предложение 3.2. *Семейство* $M_{1,3}$ *имеет размерность* 43. *При этом* $M_{1,3} \subset \widetilde{M}_2$.

Из предложений 3.1 и 3.2 получаем основную теорему.

Теорема 3.3. *Всякая неприводимая компонента схемы* $M(-1,6)$*, содержащая любое из семейств* $M_{0,3}$ *и* $M_{1,3}$*, отлична от компоненты* M_1*, содержащей* *семейство Хартсхорна H_3. Тем самым схема $M(-1,6)$ содержит по крайней мере две неприводимые компоненты.*

Доказательство. Действительно, предположим, что M_1 содержит семейство $M_{0,3}$. Тогда $\dim M_2 = \dim M_1 = 43$, поэтому в силу предложения 3.1 $M_1 \cap \widetilde{M}_3$ содержит $M_{0,3}$ в качестве плотного открытого подмножества. Тем самым $M_1 \cap \widetilde{M}_3$ — плотное открытое подмножество в M_1, что противоречит (32). Аналогично, пользуясь предложением 3.2, получаем противоречие в предположении, что M_1 содержит семейство $M_{1,3}$. □

Замечание. В статье В. К. Ведерникова [10] сформулирована (без доказательства) теорема 3.1 о неприводимости, гладкости и рациональности семейства расслоений $[E]$ из $M(-1,2n)$, имеющих неотрицательную часть спектра вида $\{0^{k+3-2l},\dots,(l-1)^{k+2-l},\dots,(k-2)^3,(k-1)^2,k^1\}$, и приведена формула для размерности этих семейств. При $k=l=1$ получаем $n=3$ и спектр вида (27ii). Размерность этого семейства, даваемая формулой Ведерникова, равна 43. Тем самым ввиду предложения 3.2 семейство Ведерникова при условии справедливости утверждения [10, теорема 3.1] содержит семейство $M_{1,3}$ в качестве плотного открытого подмножества.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Atiyah M. F., Rees E.* Vector bundles on projective 3-space // Invent. math. 1976. V. 35. P. 131–153.
2. *Hartshorne R.* Stable vector bundles of rank 2 on $\mathbb{P}_3$ // Math. Ann. 1978. V. 238. P. 229–280.
3. *Hartshorne R., Sols I.* Stable rank 2 vector bundles on $\mathbb{P}^3$ with $c_1=-1$, $c_2=2$ // J. Reine Angew. Math. Z. 1981. Bd 325. S. 145–152.
4. *Bănică C., Manolache N.* Rank 2 stable vector bundles on $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ with Chern classes $c_1=-1$, $c_2=4$ // Math. Z. 1985. Bd 190. S. 315–339.
5. *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.
6. *Lfinsted K., Kleiman S. L.* Basics on families of hyperelliptic curves // Comp. Math. 1979. V. 38. P. 83–111.
7. *Lange H.* Universal families of extensions // J. Algebra. 1983. V. 83. P. 101–112.
8. *Hartshorne R.* Stable reflexive sheaves // Math. Ann. 1980. V. 254. P. 121–176.
9. *Huybrechts D., Lehn M.* The geometry of moduli spaces of sheaves. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010.
10. *Ведерников В. К.* Модули стабильных расслоений ранга 2 на P_3 с фиксированным спектром // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48, № 5. С. 986–998.

Статья поступила 20 марта 2014 г.

Тихомиров Сергей Александрович
Ярославский гос. педагогический университет им. К. Д. Ушинского,
Республиканская ул., 108, Ярославль 150000;
Филиал Северного (Арктического) федерального университета им. М. В. Ломоносова,
пр. Ленина, 9, Архангельская обл., Коряжма 165651
satikhomirov@mail.ru