Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2015. Том 56, № 1

УДК 517.19

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Д. М. Поляков

Аннотация. Методом подобных операторов изучаются спектральные свойства дифференциального оператора четвертого порядка с двумя видами классических краевых условий. Получена асимптотика спектра и оценки спектральных разложений рассматриваемого оператора. Построена полугруппа операторов, генератором которой является взятый со знаком минус дифференциальный оператор.

Ключевые слова: дифференциальный оператор четвертого порядка, спектр оператора, метод подобных операторов.

Введение

Пусть $\mathrm{L}_2[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ — гильбертово пространство суммируемых с квадратом на $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ комплекснозначных функций со скалярным произведением

$$(x,y)=\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} x(\tau)\overline{y(\tau)}\,d\tau,\quad x,y\in \mathrm{L}_2[\mathbf{a},\mathbf{b}].$$

Через $W_2^4[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ обозначим пространство Соболева $\{y:[\mathbf{a},\mathbf{b}]\to\mathbb{C}: y$ имеет три непрерывные производные, y''' абсолютно непрерывна и $y^{\mathrm{IV}}\in \mathrm{L}_2[\mathbf{a},\mathbf{b}]\}$.

В работе будем рассматривать операторы $L_i:\mathrm{D}(L_i)\subset \mathrm{L}_2[\mathbf{a},\mathbf{b}]\to \mathrm{L}_2[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, $i=1,2$, которые определяются следующим дифференциальным выражением:

$$l(y)=y^{\mathrm{IV}}-a(t)y''-b(t)y,\quad \text{где } a,b\in \mathrm{L}_2[\mathbf{a},\mathbf{b}].$$

Область определения оператора L_1 задается краевыми условиями

$(bc)_1$: $y(0)=y(1)=0$, $y''(0)=y''(1)=0$;

а L_2 — краевыми условиями

$(bc)_2$: $y(-1)=y(1)=0$, $y'(-1)=y'(1)=0$.

Таким образом, $\mathrm{D}(L_i)=\big\{y\in W_2^4[\mathbf{a},\mathbf{b}]: y$ удовлетворяет условию $(bc)_i\big\}$, $i=1,2$. Отметим, что $\mathbf{a}=0$, $\mathbf{b}=1$ для оператора L_1 и $\mathbf{a}=-1$, $\mathbf{b}=1$ для оператора L_2. Оператор $L_{0i}:\mathrm{D}(L_{0i})=\mathrm{D}(L_i)\subset \mathrm{L}_2[\mathbf{a},\mathbf{b}]\to \mathrm{L}_2[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, $L_{0i}y=y^{\mathrm{IV}}$, $i=1,2$, будет называться *свободным оператором.* При изучении оператора L_i

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 13–01–00378, 14–01–31196), а также гранта Российского Научного Фонда (проект 14–21–00066), выполняемого в Воронежском государственном университете (раздел 3).

он будет играть роль невозмущенного оператора, а оператор $B : \mathrm{D}(B) = \mathrm{D}(L_i) \subset \mathrm{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathrm{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $By = a(t)y'' + b(t)y$, — роль возмущения. Оператор L_{0i}, $i = 1, 2$, является самосопряженным положительно определенным оператором с компактной резольвентой.

Опишем спектры $\sigma(L_{0i})$ и собственные функции для L_{0i}, $i = 1, 2$:

$(bc)_1$ $\sigma(L_{01}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, $\lambda_n = \pi^4 n^4$, $n \in \mathbb{N}$, и соответствующая нормированная собственная функция имеет вид $e_n(t) = \sqrt{2}\sin \pi n t$.

$(bc)_2$ $\sigma(L_{02}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, $\lambda_n = \mu_n^4$, $\mu_n = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, или $\mu_n = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{N}$, для нечетного и четного n соответственно. Нормированные собственные функции имеют вид (см. [1])

$$e_n(t) = \frac{1}{\alpha_n}(\cos\mu_n \operatorname{ch}(\mu_n t) - \operatorname{ch}\mu_n \cos(\mu_n t)) \quad \text{для нечетного } n,$$

$$e_n(t) = \frac{1}{\beta_n}(\sin\mu_n \operatorname{sh}(\mu_n t) - \operatorname{sh}\mu_n \sin(\mu_n t)) \quad \text{для четного } n,$$

где

$$\alpha_n = \Bigg(\bigg(\frac{\operatorname{sh} 2\mu_n}{2\mu_n} + 1\bigg)\cos^2\mu_n - \frac{2}{\mu_n}(\operatorname{ch}\mu_n \sin\mu_n + \operatorname{sh}\mu_n \cos\mu_n)\cos\mu_n \operatorname{ch}\mu_n$$
$$+ \bigg(1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n}\bigg)\operatorname{ch}^2\mu_n\Bigg)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{\mu_n}\Bigg(\frac{1}{4} + \mathrm{e}^{-4\mu_n}\bigg(\frac{1}{4\mu_n} + \frac{1}{4}\bigg) + \frac{1}{4\mu_n \mathrm{e}^{2\mu_n}} + \mathrm{e}^{-2\mu_n}\Bigg)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \mathrm{e}^{\mu_n}\bigg(\frac{1}{4} + o(\mathrm{e}^{-2\mu_n})\bigg)^{\frac{1}{2}},$$

$$\beta_n = \Bigg(\bigg(\frac{\operatorname{sh} 2\mu_n}{2\mu_n} - 1\bigg)\sin^2\mu_n - \frac{2}{\mu_n}(\operatorname{ch}\mu_n \sin\mu_n - \operatorname{sh}\mu_n \cos\mu_n)\sin\mu_n \operatorname{sh}\mu_n$$
$$+ \bigg(1 - \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n}\bigg)\operatorname{sh}^2\mu_n)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{\mu_n}\Bigg(\frac{1}{4} + \mathrm{e}^{-4\mu_n}\bigg(\frac{1}{4\mu_n} + \frac{1}{4}\bigg) - \frac{1}{4\mu_n \mathrm{e}^{2\mu_n}} - \mathrm{e}^{-2\mu_n}\Bigg)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \mathrm{e}^{\mu_n}\bigg(\frac{1}{4} + o(\mathrm{e}^{-2\mu_n})\bigg)^{\frac{1}{2}}.$$

Замечание 1. Для собственных значений и собственных функций свободных операторов L_{0i}, $i = 1, 2$, будем использовать одни и те же обозначения: λ_n и e_n соответственно.

Собственное подпространство, отвечающее собственному значению λ_n, $n \in \mathbb{N}$, одномерно. Проекторы Рисса $P_n, n \in \mathbb{N}$, построенные по одноточечным множествам $\{\lambda_n\}$, для любого $x \in \mathrm{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ имеют вид $P_n x = (x, e_n)e_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Интерес к изучению операторов L_1 и L_2 связан с тем, что оператор L_1 с краевыми условиями $(bc)_1$ описывает модель балки или пластины с шарнирным соединением, а оператор L_2 с условиями $(bc)_2$ — с жестко закрепленными концами (см. [2]). Кроме того, оператор с краевыми условиями $(bc)_2$ возникает при визуализации аттракторов для математической модели движения водных растворов полимеров (см. [1]). Отметим, что некоторые упругие системы и фазовые состояния сегнетоэлектрических кристаллов моделируются решениями соответствующего нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка (см. [3, 4]), линеаризация которого приводит к рассмотрению изучаемых здесь дифференциальных операторов L_1, L_2. Самосопряженные дифференциальные операторы четвертого порядка с гладкими коэффициентами a, b и близкими краевыми условиями исследовались в работах [5–7].

В теории возмущенных линейных операторов при изучении дифференциальных операторов, определяемых краевыми условиями на конечном промежутке, используются разнообразные методы. Так, в [8] операторы Шрёдингера и Дирака изучались с помощью резольвентных методов (см. [8–10]). Данные методы позволяют вычислять первое приближение собственных значений возмущенного оператора и его проекторов.

Отметим, что в монографии М. А. Наймарка [11] приведена асимптотика собственных значений для дифференциального оператора n-го порядка с регулярными краевыми условиями в пространстве непрерывных функций и в пространстве вектор-функций.

В [12] получены результаты о равносходимости спектральных разложений возмущения, подчиненного дробной степени невозмущенного оператора, и асимптотические оценки равносходимости спектральных разложений. Однако результаты указанной монографии могут быть применены только в том случае, если a — ограниченная функция. В этом случае в оценках теоремы 3 отсутствует множитель $(\ln n)^{\frac{1}{2}}$. Но такая же оценка получается применением метода этой статьи.

В данной работе получены вторые приближения собственных значений, а также оценки для спектральных проекторов. В отличие от [9, теорема V.4.15] функция a не предполагается ограниченной. Исследование оператора $L_i, i = 1, 2$, проводится с помощью метода подобных операторов (см. [13–18]). Метод возник при создании аналога замены Крылова — Боголюбова для нелинейных уравнений в банаховом пространстве (см. [13–17]). Он тесно соприкасается с методом Фридрихса (см. [10]), который относится к возмущенным операторам с непрерывным спектром. При создании метода подобных операторов использовались методы гармонического анализа. Здесь применяется вариант метода подобных операторов, развиваемый в [18]. Применение такого варианта проведено автором в [19] для случая, когда функция a непрерывно дифференцируема. Суть этого метода заключается в преобразовании подобия исследуемого оператора L_i, $i = 1, 2$, в оператор, спектральные свойства которого близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора L_{0i}, $i = 1, 2$. А именно, доказывается подобие оператора L_i, $i = 1, 2$, оператору блочно-диагонального вида в базисе из собственных векторов оператора L_{0i}, $i = 1, 2$ (аналог теоремы Жордана для линейного оператора в конечномерном пространстве). Таким образом, существенно упрощается изучение оператора L_i, $i = 1, 2$.

Основными результатами статьи являются теоремы 1–3 и 7. Отметим также теорему 6, в которой доказано подобие исследуемых операторов соответствующим операторам, имеющим те же собственные значения (кроме конечного числа), что и невозмущенные операторы. Эта теорема служит основой для получения асимптотики собственных значений рассматриваемых операторов и доказательства равносходимости спектральных разложений.

Теорема 1. *Дифференциальные операторы L_i, $i = 1, 2$, являются операторами с компактной резольвентой, и их спектр представим в виде $\sigma(L_i) = \tilde{\sigma}_m \cup \{\tilde{\lambda}_n,\ n \geq m+1\}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, где $\tilde{\sigma}_m$ — конечное множество с числом точек, не превосходящим m. Все собственные значения $\tilde{\lambda}_{m+1}, \tilde{\lambda}_{m+2}, \ldots$ оператора L_1 являются простыми и допускают следующую асимптотику:*

$$\tilde{\lambda}_n = (\pi n)^4 + (\pi n)^2 \int\limits_0^1 a(t)\,dt - (\pi n)^2 \int\limits_0^1 a(t) \cos 2\pi n t\,dt - n^2 \sum_{\substack{l=1,\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{nl} a_{ln} l^2}{l^4 - n^4} + \zeta_n n^2,$$

$n \geq m+1$, где $a_{nl} = \int\limits_0^1 a(t)\cos\pi(l-n)t\,dt - \int\limits_0^1 a(t)\cos\pi(l+n)t\,dt$, $n, l \geq 1$, и (ζ_n) — суммируемая последовательность.

Для оператора L_2 асимптотика собственных значений для нечетных $n \in \mathbb{N}$ имеет вид

$$\tilde{\lambda}_n = \Big(-\frac{\pi}{4}+\pi n\Big)^4 - \Big(-\frac{\pi}{4}+\pi n\Big)^2 \Bigg(\frac{1}{2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}} \int\limits_{-1}^{1} a(t)(\mathrm{e}^{(-\frac{\pi}{2}+2\pi n)t} + \mathrm{e}^{(\frac{\pi}{2}-2\pi n)t})\,dt$$
$$- \int\limits_{-1}^{1} a(t)\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} a(t)\cos\Big(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\Big)t\,dt\Bigg)$$
$$- \Big(-\frac{\pi}{4}+\pi n\Big)^2 \sum_{\substack{l=1,\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{nl}a_{ln}(-\frac{\pi}{4}+\pi l)^2}{\lambda_l - \lambda_n} + \gamma_n n^2, \quad n \geq m+1,$$

где $\lambda_n = \big(-\frac{\pi}{4}+\pi n\big)^4$. Для четных n

$$\tilde{\lambda}_n = \Big(\frac{\pi}{4}+\pi n\Big)^4 - \Big(\frac{\pi}{4}+\pi n\Big)^2 \Bigg(\frac{1}{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+2\pi n}} \int\limits_{-1}^{1} a(t)(\mathrm{e}^{(\frac{\pi}{2}+2\pi n)t} + \mathrm{e}^{-(\frac{\pi}{2}+2\pi n)t})\,dt$$
$$- \int\limits_{-1}^{1} a(t)\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} a(t)\cos\Big(\frac{\pi}{2}+2\pi n\Big)t\,dt\Bigg)$$
$$- \Big(\frac{\pi}{4}+\pi n\Big)^2 \sum_{\substack{l=1,\\ l\neq n}}^{\infty} \frac{a_{nl}a_{ln}(\frac{\pi}{4}+\pi l)^2}{\lambda_l - \lambda_n} + \gamma_n n^2, \quad n \geq m+1,$$

где $a_{nl} = \int\limits_{-1}^{1} a(t)e_n(t)e_l(t)\,dt$, $n, l \geq 1$, $\lambda_n = \big(\frac{\pi}{4}+\pi n\big)^4$, (γ_n) — суммируемая последовательность.

В следующей теореме символ $\widetilde{P}_n$, $n \geq m+1$ (число $m \in \mathbb{N}$ взято из условий теоремы 1), обозначает проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству $\{\tilde{\lambda}_n\}$ из спектра $\sigma(L_i)$ оператора L_i, $i = 1, 2$. Если Ω — произвольное подмножество из $\mathbb{N}$, то $\widetilde{P}(\Omega) = \sum\limits_{k\in\Omega} \widetilde{P}_k$ — проектор Рисса, построенный по множеству $\{\tilde{\lambda}_k,\, k \in \Omega\}$, и полагается $P(\Omega) = \sum\limits_{k\in\Omega} P_k$. Через $\widetilde{P}_{(m)}$ будет обозначаться проектор Рисса, построенный для оператора L_i, $i = 1, 2$, по спектральному множеству $\tilde{\sigma}_m$, и через $P_{(m)}$ — проектор $P_1 + \cdots + P_m$. Отметим, что следующие теоремы справедливы для обоих операторов L_1, L_2.

Теорема 2. *Система проекторов Рисса $\widetilde{P}_n, n \in \mathbb{N}$, обладает следующим свойством:*

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leq \frac{\widetilde{M}(\ln k(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{k(\Omega)},$$

где $k(\Omega) = \min\limits_{k\in\Omega} k$ и $\widetilde{M} > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от $k(\Omega)$.

Из этой теоремы следует безусловная базисность собственных и присоединенных функций рассматриваемых операторов. Отметим, что такие оценки не могут быть получены на основе резольвентного метода исследования, используемого в [8–10], из-за проблем, связанных с выбором контуров интегрирования.

Непосредственно из теоремы 2 следует

Теорема 3. *Имеют место следующие оценки равносходимости спектральных разложений операторов L_i и L_{0i}, $i = 1, 2$:*

$$\left\| \widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k \right\|_2 \leq \frac{\widetilde{M}(\ln n)^{\frac{1}{2}}}{n}, \quad n \geq m+1,$$

где $\widetilde{M} > 0$ — константа из теоремы 2.

В теореме 7 доказано, что дифференциальный оператор $-L_i$, $i = 1, 2$, является секториальным и генерирует аналитическую полугруппу операторов. Более того, эта полугруппа подобна полугруппе вида $T_{(m)}(t) \bigoplus T^{(m)}(t)$, действующей в $\mathrm{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathscr{H}_{(m)} \bigoplus \mathscr{H}^{(m)}$, где $\mathscr{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}$, $\mathscr{H}^{(m)} = \operatorname{Im}(I - P_{(m)})$, причем $T^{(m)}(t)$ допускает представление вида: $T^{(m)}(t)x = \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} \mathrm{e}^{\tilde{\lambda}_k t}(x, e_k)e_k$, для любого $x \in \mathrm{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

1. Построение допустимой тройки

Согласно схеме метода подобных операторов (см. [16, 18]) первым шагом к его применению является построение допустимой тройки. Данный раздел посвящен построению допустимой тройки для таких абстрактных операторов, которые по своим свойствам наиболее близки к изучаемым дифференциальным операторам L_i, $i = 1, 2$. Затем в разд. 2 она будет применена для исследования операторов L_i, $i = 1, 2$.

Пусть $\mathscr{X}$ — комплексное банахово пространство, $\operatorname{End} \mathscr{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathscr{X}$, с операцией умножения ограниченных операторов и с нормой $\|T\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$. Единицей алгебры служит тождественный оператор I. Этот символ используется для обозначения тождественного оператора в любом из банаховых пространств. Для линейного замкнутого оператора $A : \mathrm{D}(A) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ символом $\mathfrak{L}_A(\mathscr{X})$ обозначим банахово пространство операторов, действующих в $\mathscr{X}$ и подчиненных оператору A. Таким образом, линейный оператор $X : \mathrm{D}(X) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ принадлежит $\mathfrak{L}_A(\mathscr{X})$, если $\mathrm{D}(X) \supseteq \mathrm{D}(A)$ и конечна величина $\|X\|_A = \inf\{C > 0 : \|Xx\| \leq C(\|x\| + \|Ax\|),\ x \in \mathrm{D}(A)\}$, принимаемая за норму в $\mathfrak{L}_A(\mathscr{X})$.

Приведем коротко основные понятия и утверждения метода подобных операторов (см. [16–18]).

Определение 1. Два линейных оператора $A_i : \mathrm{D}(A_i) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, $i = 1, 2$, называются *подобными*, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \operatorname{End} \mathscr{X}$ такой, что $U\mathrm{D}(A_2) = \mathrm{D}(A_1)$ и $A_1 U x = U A_2 x$, $x \in \mathrm{D}(A_2)$. Оператор U называется *оператором преобразования* оператора A_1 в A_2.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{U}$ — линейное подпространство из $\mathfrak{L}_A(\mathscr{X})$ и $J : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$, $\Gamma : \mathfrak{U} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$, являются трансформаторами (т. е. линейными операторами в пространстве линейных операторов). Тройку $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ назовем *допустимой тройкой* для (невозмущенного) оператора $A : \mathrm{D}(A) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, а $\mathfrak{U}$ — *пространством допустимых возмущений*, если выполнены следующие условия:

1) $\mathfrak{U}$ — банахово пространство (со своей нормой $\|\cdot\|_*$), непрерывно вложенное в $\mathfrak{L}_A(\mathscr{X})$;

2) J и Γ — непрерывные трансформаторы, причем J — проектор;

3) $(\Gamma X)\mathrm{D}(A) \subset \mathrm{D}(A)$, более того, $A(\Gamma X) - (\Gamma X)A = X - JX$, $X \in \mathfrak{U}$;

4) $X\Gamma Y, (\Gamma X)Y \in \mathfrak{U}$ для любых $X, Y \in \mathfrak{U}$ и существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\|\Gamma\| \leq \gamma, \quad \max\{\|X\Gamma Y\|_*, \|(\Gamma X)Y\|_*\} \leq \gamma\|X\|_*\|Y\|_*;$$

5) для любых $X \in \mathfrak{U}$ и $\varepsilon > 0$ существует $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$ такое, что

$$\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon.$$

Подобные операторы обладают рядом совпадающих спектральных свойств (см. [18, лемма 1]). Далее используется

Теорема 4 [16, 18]. *Пусть $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора $A : \mathrm{D}(A) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ тройка и B — некоторый оператор из пространства допустимых для A возмущений $\mathfrak{U}$. Тогда если выполнено неравенство $\|J\|\|B\|_*\|\Gamma\| < \frac{1}{4}$, то оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, где $X_* \in \mathfrak{U}$ является решением (нелинейного) уравнения*

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)(JB) - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B = \Phi(X). \tag{1}$$

Решение уравнения (1) можно найти методом простых итераций, полагая $X_0 = 0$, $X_1 = B$ и т. д. (оператор $\Phi : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ является сжимающим в шаре $\{X \in \mathfrak{U} : \|X - B\| \leq 3\|B\|\}$). Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - JX_*$ осуществляет оператор $I + \Gamma X_* \in \mathrm{End}\,\mathscr{X}$.

В нашем случае в качестве пространства $\mathscr{X}$ выступает комплексное гильбертово пространство $\mathscr{H}$. Пусть $\mathfrak{S}_2(\mathscr{H})$ — идеал операторов Гильберта — Шмидта (см. [20]) из алгебры $\mathrm{End}\,\mathscr{H}$. Напомним, что оператор $X \in \mathrm{End}\,\mathscr{H}$ называется *оператором Гильберта — Шмидта*, если для некоторого ортонормированного базиса $f_1, f_2, \ldots$ выполнено неравенство $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\|Xf_j\|^2 < \infty$. Если ввести матрицу (x_{kj}) оператора $X \in \mathrm{End}\,\mathscr{H}$ в ортонормированном базисе $f_1, f_2, \ldots$: $x_{kj} = (Xf_j, f_k)$, $k, j \geq 1$, то это неравенство можно записать в виде $\sum\limits_{k,j=1}^{\infty}|x_{kj}|^2 < \infty$. Пусть $A : \mathrm{D}(A) \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ — нормальный оператор (см. [9]) с компактной резольвентой $R(\cdot, A) : \rho(A) \to \mathrm{End}\,\mathscr{H}$, спектр $\sigma(A)$ которого образует последовательность *простых* собственных значений (λ_n) со свойством

$$|\lambda_k - \lambda_j| \geq \frac{1}{c}|k^4 - j^4|, \quad |\lambda_k| \leq ck^4, \quad k, j \geq 1,\ k \neq j, \tag{2}$$

где $c > 0$ — некоторая константа. При этом $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, и $0 \notin \sigma(A)$. Пусть (e_n) — ортонормированный базис, составленный из собственных векторов.

Пусть P_n — ортогональный проектор, построенный по одноточечному множеству $\{\lambda_n\} \subset \sigma(A)$, $n \geq 1$, и, следовательно, $AP_n = \lambda_n P_n$. Этот проектор имеет вид $P_n x = (x, e_n)e_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Введем в рассмотрение самосопряженный оператор $A^{\frac{1}{2}} : \mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}}) \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ вида

$$A^{\frac{1}{2}}x = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{\frac{1}{2}}P_n x$$

с областью определения $\mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}}) = \left\{ x \in \mathscr{H} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \|P_n x\|^2 < \infty \right\}$.

Банахово пространство допустимых возмущений $\mathfrak{U}$ будет состоять из операторов $X \in \mathfrak{L}_A(\mathscr{H})$, представимых в виде

$$X = X_0 A^{\frac{1}{2}}, \quad X_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathscr{H}).$$

Возьмем в качестве нормы оператора X в $\mathfrak{U}$ величину $\|X\|_* = \|X_0\|_2$.

Далее, следуя приведенной в [16, гл. 2; 18, § 2] схеме, построим трансформаторы $J, \Gamma : \mathfrak{L}_A(\mathscr{H}) \to \mathfrak{L}_A(\mathscr{H})$. Вначале эти трансформаторы определим на алгебре $\mathfrak{S}_2(\mathscr{H})$.

Трансформаторы J и Γ на любом операторе $X \in \mathfrak{S}_2(\mathscr{H})$ определим равенствами

$$JX = \sum_{n=1}^{\infty} P_n X P_n, \quad \Gamma X = \sum_{\substack{k,j=1,\\ k \neq j}}^{\infty} \frac{P_k X P_j}{\lambda_k - \lambda_j} = \sum_{k=1}^{\infty} P_k \sum_{\substack{j=1,\\ j \neq k}}^{\infty} \frac{X P_j}{\lambda_k - \lambda_j}. \tag{3}$$

Корректность определения JX, ΓX и их ограниченность установлены в следующей лемме.

Лемма 1. *Трансформаторы $J, \Gamma : \mathfrak{S}_2(\mathscr{H}) \to \mathfrak{S}_2(\mathscr{H})$ корректно определены, ограничены и обладают свойствами:*
1) *J — проектор, $\|J\| = 1$,*
2) *имеет место оценка $\|\Gamma\| \leq \frac{1}{\inf\limits_{k \neq j} |\lambda_k - \lambda_j|} \leq \frac{c}{15}$, где c определяется в (2).*

Доказательство леммы легко провести, используя (2) и лемму 2 из [18].

Продолжения трансформаторов J и Γ на пространства $\mathfrak{L}_A(\mathscr{H})$ и $\mathfrak{U}$, обозначаемые теми же символами, будут задаваться следующим образом. Положим

$$JX = J(XA^{-1})A, \quad \Gamma X = (\Gamma X A^{-1})A, \quad X \in \mathfrak{L}_A(\mathscr{H}).$$

$$JX = J(XA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}, \quad \Gamma X = (\Gamma X A^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}, \quad X \in \mathfrak{U}. \tag{4}$$

Лемма 2. *Каждый оператор ΓX, $X \in \mathfrak{U}$, допускает расширение на все пространство $\mathscr{H}$ до оператора (обозначаемого тем же символом ΓX), принадлежащего $\mathfrak{S}_2(\mathscr{H})$, причем*

$$\|\Gamma X\|_2 \leq \frac{c^{\frac{3}{2}}}{3} \|X\|_*, \quad X \in \mathfrak{U}, \tag{5}$$

где постоянная $c > 0$ определяется из (2).

Доказательство. Используя оценки (2), легко установить, что ΓX, $X \in \mathfrak{U}$, является оператором Гильберта — Шмидта и справедлива оценка (5). Следовательно, оператор ΓX допускает ограниченное расширение на $\mathscr{H}$. Лемма доказана. □

Замечание 2. Учитывая лемму 2, трансформатор Γ, определенный в формуле (4), будем рассматривать как линейный оператор из $\mathfrak{U}$ со значениями в $\mathfrak{S}_2(\mathscr{H})$ и обозначать тем же символом. При этом из леммы 2 следует, что $\|\Gamma\| \leq \frac{c^{\frac{3}{2}}}{3}$.

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим трансформаторы $J_m : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$, $\Gamma_m : \mathfrak{U} \to \mathfrak{S}_2(\mathscr{H})$, полагая

$$J_m X = JX - J(P_{(m)} X P_{(m)}) + P_{(m)} X P_{(m)}, \quad X \in \mathfrak{U}, \tag{6}$$

$$\Gamma_m X = \Gamma X - P_{(m)}(\Gamma X)P_{(m)}, \quad X \in \mathfrak{U}, \tag{7}$$

где $P_{(m)} = \sum\limits_{k\le m} P_k$. Отметим также, что $J_1 X = JX$ и $\Gamma_1 X = \Gamma X$, $X \in \mathfrak{U}$.

Используя определения трансформаторов J_m и Γ_m, лемму 2 и замечание 2, непосредственной проверкой легко установить справедливость следующей леммы.

Лемма 3. *Каждый из трансформаторов J_m, Γ_m, $m \in \mathbb{N}$, допускает ограниченное расширение на $\mathfrak{L}_A(\mathscr{H})$ (следовательно, и на пространство $\mathfrak{U}$). Также имеют место оценки*

$$\|J_m\| = 1, \quad \|\Gamma_m\| \le \frac{c^{\frac{3}{2}}}{m},$$

где $c > 0$ — величина из (2).

Замечание 3. Отметим, что непосредственно из равенств (6), (7) следует, что оператор ΓX (соответственно JX), $X \in \mathfrak{U}$, отличается от оператора $\Gamma_m X$ ($J_m X$) на оператор конечного ранга $P_{(m)}(\Gamma X)P_{(m)}$ ($P_{(m)}(JX)P_{(m)}$). Поэтому в дальнейшем будем осуществлять проверку всех необходимых свойств для оператора ΓX (соответственно JX).

Покажем, что построенная тройка $(\mathfrak{U}, J_m, \Gamma_m)$ допустима.

Лемма 4. *$(\mathfrak{U}, J_m, \Gamma_m)$ — допустимая тройка для оператора A, причем для величины $\gamma = \gamma_m$ из определения допустимой тройки справедлива оценка $\gamma_m \le \frac{c^{\frac{3}{2}}}{m}$, где $c > 0$ — константа из* (2).

Доказательство. Проверим все свойства допустимой тройки. Первые два свойства следуют из представления пространства допустимых возмущений, леммы 1 и формул (6), (7). Докажем свойство 3, т. е. $(\Gamma_m X)\mathrm{D}(A) \subset \mathrm{D}(A)$ для любого $X \in \mathfrak{U}$. Согласно замечанию 3 вместо $\Gamma_m X$ можно рассмотреть ΓX. Оператор X представим в виде $X = X_0 A^{\frac{1}{2}}$, где $X_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathscr{H})$. Через $\left(x^0_{kj}\right)$ обозначим матрицу оператора X_0 в базисе (e_n). Возьмем произвольный вектор $x \in \mathrm{D}(A)$, тогда $x = A^{-1}y$, где $y \in \mathscr{H}$, $y = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$. Имеют место равенства

$$\begin{aligned}(\Gamma X)A^{-1}y = (\Gamma X)\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{\lambda_j} e_j\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{\lambda_j}(\Gamma X)e_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{\lambda_j}\left(\sum_{\substack{k=1,\\ k\ne j}}^{\infty} \frac{x^0_{kj}\lambda_j^{\frac{1}{2}}}{\lambda_k - \lambda_j} e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e_k,\end{aligned}$$

где $\beta_k = \sum\limits_{\substack{j=1,\\ j\ne k}}^{\infty} \frac{\alpha_j x^0_{kj} \lambda_j^{-\frac{1}{2}}}{\lambda_k - \lambda_j}$, $k \ge 1$. Из (2) с учетом неравенства $\sup\limits_{\substack{k\ge 1,\\ k\ne j}} \frac{k^2}{(k-j)^2 j^2} \le 4$

вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2|\beta_k|^2 \le c^3\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{\infty}\frac{k^4x^0_{kj}\alpha_j}{(k^4-j^4)j^2}\right|^2$$

$$\le c^3\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{\infty}\frac{\left|x^0_{kj}\right|^2k^8}{(k^2+j^2)^2(k+j)^2(k-j)^2j^4}\right)\|y\|^2$$

$$\le c^3\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\left(\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{\infty}\frac{k^2|x^0_{kj}|^2}{(k-j)^2j^2}\right)\|y\|^2 \le \frac{2c^3\pi^2\|X_0\|_2^2\|y\|^2}{3}.$$

Таким образом, $(\Gamma X)A^{-1}x \in \mathrm{D}(A)$, а из полученных оценок следует ограниченность оператора $A(\Gamma X)A^{-1}$. Следовательно, $(\Gamma X)\mathrm{D}(A) \subset \mathrm{D}(A)$, и, значит, $(\Gamma_m X)\mathrm{D}(A) \subset \mathrm{D}(A)$. Осталось установить равенство матриц операторов $A(\Gamma_m X) - (\Gamma_m X)A$ и $X - JX$. При $k \neq j$ имеем

$$\left(\frac{\lambda_k x_{kj}(1-\delta_{kj})}{\lambda_k-\lambda_j}\right)-\left(\frac{x_{kj}(1-\delta_{kj})\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j}\right)=\left(\frac{x_{kj}(\lambda_k-\lambda_j)(1-\delta_{kj})}{\lambda_k-\lambda_j}\right)=x_{kj}-\delta_{kj}x_{kj}.$$

Получаем, что третье свойство допустимой тройки выполнено.

Проверим свойство 4. Возьмем $X, Y \in \mathfrak{U}$ и запишем их в виде $X = X_0A^{\frac{1}{2}}$, $Y = Y_0A^{\frac{1}{2}}$. Пусть $\left(x^0_{nj}\right)$, $\left(y^0_{nj}\right)$ — матрицы операторов X_0 и Y_0 в базисе (e_n) соответственно. Тогда матрица $\left(z^0_{nj}\right)$ оператора Z_0, где $X\Gamma_m Y = X_0A^{\frac{1}{2}}\Gamma_m Y_0 A^{\frac{1}{2}} = Z_0A^{\frac{1}{2}}$, будет иметь вид

$$z^0_{nj} = \sum_{\substack{k=m+1,\\ k\neq j}}^{\infty}\frac{x^0_{nk}\lambda_k^{\frac{1}{2}}y^0_{kj}}{\lambda_k-\lambda_j},\ n\ge 1,\ j\ge m+1, \quad z^0_{nj}=0,\ j\le m.$$

Докажем, что оператор Z_0 является оператором Гильберта — Шмидта. Имеют место оценки

$$\|Z_0\|_*^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|z^0_{nj}\right|^2 = c^3\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=m+1}^{\infty}\left|\sum_{\substack{k=m+1,\\ k\neq j}}^{\infty}\frac{x^0_{nk}k^2y^0_{kj}}{k^4-j^4}\right|^2$$

$$\le c^3\sum_{j=m+1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{k=m+1,\\ k\neq j}}^{\infty}|x^0_{nk}|^2\right)\left(\sum_{\substack{k=m+1,\\ k\neq j}}^{\infty}\frac{k^4|y^0_{kj}|^2}{(k^4-j^4)^2}\right)$$

$$\le c^3\|X\|_*^2\sum_{j=m+1}^{\infty}\sum_{\substack{k=m+1,\\ k\neq j}}^{\infty}\frac{|y^0_{kj}|^2}{(k^2-j^2)^2} \le \frac{c^3\|X\|_*^2\|Y\|_*^2}{m^2},$$

где c — величина из (2). Точно такую же оценку имеем и для $\|(\Gamma_m X)Y\|_*$. Таким образом, $X\Gamma_m Y \in \mathfrak{U}$ и $\|X\Gamma_m Y\|_* \le \frac{c^{\frac{3}{2}}}{m}\|X\|_*\|Y\|_*$. Непосредственным вычислением легко установить, что $\|\Gamma_m\| \le \frac{c^{\frac{3}{2}}}{m}$.

Проверим последнее свойство допустимой тройки. Пусть $X = X_0 A^{\frac{1}{2}}$ — произвольный оператор из $\mathfrak{U}$ и $\varepsilon > 0$. В качестве λ_ε возьмем число $-cn$, $n \in \mathbb{N}$, где $c > 0$ — величина из (2), а $n \in \mathbb{N}$ таково, что $\frac{1}{2} c^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} \|X_0\|_2 < \varepsilon$. Тогда

$$\|X(A-\lambda_\varepsilon I)^{-1}\| \le \|X_0\|_2 \|A^{\frac{1}{2}}(A-\lambda_\varepsilon I)^{-1}\| = \|X_0\|_2 \max_{k\ge 1} \frac{|\lambda_k^{\frac{1}{2}}|}{|\lambda_k - \lambda_\varepsilon|}$$

$$\le \frac{\|X_0\|_2}{c^{\frac{1}{2}}} \max_{k\ge 1} \frac{k^2}{|k^4+n|} \le \frac{\|X_0\|_2}{2c^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}} < \varepsilon.$$

Итак, $(\mathfrak{U}, J_m, \Gamma_m)$ — допустимая тройка. Лемма доказана. $\square$

2. Предварительное преобразование подобия

Вернемся к рассмотрению исследуемого оператора L_i, $i = 1, 2$, определенного во введении. Применим абстрактную схему, описанную в разд. 1, для исследования спектральных свойств оператора L_i, $i = 1, 2$. В качестве оператора A будет выступать свободный оператор L_{0i}, $i = 1, 2$. Операторы L_{0i}, $i = 1, 2$, нормальны с компактной резольвентой и простыми собственными значениями, удовлетворяющими (2), где $c = \pi^4$, для оператора L_{01}, и $c = \left(\frac{5\pi}{4}\right)^4$ для оператора L_{02}. Всюду в дальнейшем $\mathscr{H} = \mathrm{L}_2[0,1]$ для оператора L_1 и $\mathscr{H} = \mathrm{L}_2[-1,1]$ для оператора L_2 (см. введение). Отметим, что все вычисления будем проводить для оператора L_1 в пространстве $\mathrm{L}_2[0,1]$. Для оператора L_2 они осуществляются таким же образом.

Оператор возмущения B, описанный во введении, принадлежит пространству $\mathfrak{L}_{L_{0i}}(\mathscr{H})$, $i = 1, 2$. Следовательно, корректно определены операторы JB, ΓB, $J_m B$, $\Gamma_m B$, заданные формулами (3), (6), (7), для оператора B. Так как оператор B не принадлежит построенному в разд. 1 пространству допустимых возмущений $\mathfrak{U}$, в данном случае необходимо сделать предварительное преобразование подобия (см. [18, § 2]) оператора L_i в оператор $\widetilde{L}_i = L_{0i} - \widetilde{B}$, $i = 1, 2$, где $\widetilde{B}$ уже входит в $\mathfrak{U}$. Этот факт будет установлен в настоящем разделе.

Сначала рассмотрим оператор B. Запишем его в виде $B = B_1 + B_2$, где $B_1 y = ay''$, $B_2 y = by$, $y \in \mathrm{D}(L_{0i})$, $a, b \in \mathscr{H}$. Возмущение B представимо в виде $B = \left(BL_{0i}^{-\frac{1}{2}}\right)L_{0i}^{\frac{1}{2}} = \left(B_1 L_{0i}^{-\frac{1}{2}}\right)L_{0i}^{\frac{1}{2}} + \left(B_2 L_{0i}^{-\frac{1}{2}}\right)L_{0i}^{\frac{1}{2}}$, $i = 1, 2$. Так как функция a принадлежит $\mathscr{H}$, справедливо представление $a(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k(t)$, при этом $\|a\|_{l^2}^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$. Найдем оценки для матричных коэффициентов a_{pj} и b_{pj} операторов B_1 и B_2 соответственно.

Для коэффициентов a_{pj} справедлива оценка

$$|a_{pj}| \le \pi^2 j^2 \sqrt{2}(|a_{|p-j|}| + |a_{p+j}|), \quad p \ne j,\ p, j \ge 1, \tag{8}$$

вытекающая из следующих неравенств:

$$|a_{pj}| = \left|\int\limits_0^1 a(t) e_j''(t) e_p(t)\,dt\right| = \pi^2 j^2 \sqrt{2}\left|\int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \pi k t e_j(t) e_p(t)\,dt\right|$$

$$\le \pi^2 j^2 \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \left|\int\limits_0^1 \cos \pi k t \cos \pi t(p-j)\,dt - \int\limits_0^1 \cos \pi k t \cos \pi t(p+j)\,dt\right|$$

$$\le \pi^2 j^2 \sqrt{2}(|a_{|p-j|}| + |a_{p+j}|).$$

Так как оператор B_2 является оператором умножения на функцию $b \in \mathscr{H}$, для него, очевидно, имеет место оценка

$$|b_{pj}| \leq \sqrt{2}(|b_{|p-j|}| + |b_{p+j}|), \quad p \neq j,\ p, j \geq 1. \tag{9}$$

В случае, когда B — возмущение оператора L_{02}, справедливы оценки

$$|a_{pj}| \leq \frac{M_1 j^2}{p+j}, \quad |b_{pj}| \leq \frac{M_2}{p+j}, \tag{10}$$

где $M_1 = \frac{25\pi^2\|a\|_{l^2}}{4}$ и $M_2 = 4\|b\|_{l^2}$, $p \neq j$, $p, j \geq 1$.

Докажем несколько технических лемм.

Лемма 5. *Для каждого $m \in \mathbb{N}$ оператор $\Gamma_m B$ является оператором Гильберта — Шмидта, причем $\lim\limits_{m\to\infty} \|\Gamma_m B\|_2^2 = 0$.*

Доказательство. Сначала докажем, что оператор ΓB является оператором Гильберта — Шмидта. Согласно оценкам (8) и (9) имеют место следующие неравенства:

$$\sum_{p,j=1}^{\infty} |(\Gamma B e_j, e_p)|^2 = \sum_{p,j=1}^{\infty} |(\Gamma B_1 e_j, e_p) + (\Gamma B_2 e_j, e_p)|^2 \leq 2 \sum_{\substack{p,j=1,\\ p\neq j}}^{\infty} \left|\frac{a_{pj}}{\lambda_p - \lambda_j}\right|^2$$
$$+ 2 \sum_{\substack{p,j=1,\\ p\neq j}}^{\infty} \left|\frac{b_{pj}}{\lambda_p - \lambda_j}\right|^2 \leq \frac{8}{\pi^4}\left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq p}}^{\infty} \frac{|a_{|p-j|}|^2}{(p-j)^2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq p}}^{\infty} \frac{|a_{p+j}|^2}{(p-j)^2}\right)$$
$$+ \frac{8}{\pi^8}\left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^6} \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq p}}^{\infty} \frac{|b_{|p-j|}|^2}{(p-j)^2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^6} \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq p}}^{\infty} \frac{|b_{p+j}|^2}{(p-j)^2}\right) < \infty.$$

Следовательно, $\Gamma B \in \mathfrak{S}_2(\mathscr{H})$. Таким образом, согласно замечанию 3 операторы $\Gamma_m B, m \in \mathbb{N}$, и, следовательно, операторы $\Gamma_m B_1$ и $\Gamma_m B_2$ являются операторами Гильберта — Шмидта. Ясно, что

$$\|\Gamma_m B\|_2^2 = \sum_{\substack{\max\{p,j\}\geq m+1,\\ p\neq j}} \frac{|a_{pj}|^2}{|\lambda_p - \lambda_j|^2} + \sum_{\substack{\max\{p,j\}\geq m+1,\\ p\neq j}} \frac{|b_{pj}|^2}{|\lambda_p - \lambda_j|^2} \to 0 \quad \text{при } m \to \infty$$

(как остаток сходящегося ряда). Аналогичное доказательство проводится и в случае рассмотрения B как возмущения оператора L_{02}. В этом случае используются оценки (10). Лемма доказана. $\square$

Лемма 6. *Оператор $J_m B$ принадлежит пространству допустимых возмущений $\mathfrak{U}$, если B рассматривается как возмущение оператора L_{02}.*

Доказательство. Согласно замечанию 3 все оценки достаточно осуществить для оператора JB. Представим его в виде $JB = \big(JBL_{02}^{-\frac{1}{2}}\big)L_{02}^{\frac{1}{2}} = B_J L_{02}^{\frac{1}{2}}$. Докажем, что оператор B_J принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathscr{H})$. Используя неравенства (10), получим следующие оценки:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \big|\big(JBL_{02}^{-\frac{1}{2}} e_j, e_j\big)\big|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left|\frac{a_{jj} + b_{jj}}{j^2}\right|^2 \leq \frac{M^2}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} + \frac{M_1^2}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^6} < \infty.$$

Таким образом, $B_J \in \mathfrak{S}_2(\mathscr{H})$. Следовательно, операторы $J_m B$, $m \in \mathbb{N}$, принадлежат $\mathfrak{U}$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 7. *Операторы $B\Gamma_m B$, $(\Gamma_m B)J_m B$ принадлежат пространству допустимых возмущений $\mathfrak{U}$.*

Доказательство. Вначале рассмотрим оператор $L_1 = L_{01} - B$ и докажем, что $B\Gamma B \in \mathfrak{U}$ (согласно замечанию 3). Для доказательства этого факта установим, что он представим в виде $B\Gamma B = B\Gamma B L_{01}^{-\frac{1}{2}} L_{01}^{\frac{1}{2}} = B_0 L_{01}^{\frac{1}{2}}$, где $B_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathscr{H})$. Оператор B_0 также представим в виде

$$B_0 = B_1\Gamma B_1 L_{01}^{-\frac{1}{2}} + B_1\Gamma B_2 L_{01}^{-\frac{1}{2}} + B_2\Gamma B_1 L_{01}^{-\frac{1}{2}} + B_2\Gamma B_2 L_{01}^{-\frac{1}{2}}.$$

Докажем, что $\sum\limits_{p,j=1}^{\infty} \left|\left(B_1\Gamma B_1 L_{01}^{-\frac{1}{2}} e_j, e_p\right)\right|^2 < \infty$, т. е. установим, что $B_1\Gamma B_1 L_{01}^{-\frac{1}{2}} \in \mathfrak{S}_2(\mathscr{H})$. Согласно неравенству (8) получим

$$\sum_{p,j=1}^{\infty} \left|\left(B_1\Gamma B_1 L_{01}^{-\frac{1}{2}} e_j, e_p\right)\right|^2 = \sum_{p,j=1}^{\infty} \left| \sum_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{\infty} \frac{a_{pk}a_{kj}}{(\lambda_k - \lambda_j)\lambda_j^{\frac{1}{2}}} \right|^2$$

$$\leq \frac{16}{\pi^4} \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{\infty} \frac{|a_{|p-k|}||a_{|k-j|}|}{|k^2 - j^2|} \right)^2 + \frac{16}{\pi^4} \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{\infty} \frac{|a_{|p-k|}||a_{k+j}|}{|k^2 - j^2|} \right)^2$$

$$+ \frac{16}{\pi^4} \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{\infty} \frac{|a_{p+k}||a_{|k-j|}|}{|k^2 - j^2|} \right)^2 + \frac{16}{\pi^4} \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{\infty} \frac{|a_{p+k}||a_{k+j}|}{|k^2 - j^2|} \right)^2.$$

Оценим первое слагаемое, обозначаемое далее через γ_1. Аналогично той же постоянной оцениваются остальные слагаемые. Рассмотрим последовательности $f_j : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $j \geq 1$, вида $f_j(k) = \frac{|a_{|k-j|}|}{|k^2 - j^2|}$, если $k \neq j$, и 0, если $k = j$. Найдем соответствующую оценку для нормы этих последовательностей в l^1:

$$\|f_j\|_{l^1} = \sum_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{\infty} |f_j(k)| = \sum_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{\infty} \frac{|a_{|k-j|}|}{|k^2 - j^2|} \leq \frac{\|a\|_{l^2}}{j} \left(2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\|a\|_{l^2}\pi}{j\sqrt{3}}, \quad j \geq 1.$$

Ввиду того, что последовательности $p \mapsto |a_{|p-k|}| : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, $k \geq 1$, обозначаемые далее через $\tilde{a}_k$, принадлежат l^2, справедливы следующие неравенства:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k f_j(k) \right\|_{l^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|\tilde{a}_k\|_{l^2} |f_j(k)| \leq \|a\|_{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} |f_j(k)| \leq \frac{\|a\|_{l^2}^2 \pi}{j\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$\gamma_1 = \frac{16}{\pi^4} \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k f_j(k) \right\|_{l^2}^2 \leq \frac{16\|a\|_{l^2}^4}{3\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{8\|a\|_{l^2}^4}{9}.$$

Таким образом, оператор $B_1\Gamma B_1 L_{01}^{-\frac{1}{2}}$ принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathscr{H})$. Так как B_2 — оператор умножения на функцию b из $\mathscr{H}$, то $B_2\Gamma B_2 L_{01}^{-\frac{1}{2}}$, $B_2\Gamma B_1 L_{01}^{-\frac{1}{2}}$, $B_1\Gamma B_2 L_{01}^{-\frac{1}{2}}$ также принадлежат $\mathfrak{S}_2(\mathscr{H})$. Следовательно, $B\Gamma B$ принадлежит $\mathfrak{U}$, поэтому $B\Gamma_m B \in \mathfrak{U}$.

Прямое вычисление показывает, что аналогичное утверждение справедливо для случая, когда B — возмущение оператора L_{02}.

Осталось доказать, что $(\Gamma_m B)J_m B \in \mathfrak{U}$. Согласно лемме 5 оператор $\Gamma_m B$ принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathscr{H})$. Представим оператор $J_m B$ в виде $J_m B = \big(J_m B L_{01}^{-\frac{1}{2}}\big) L_{01}^{\frac{1}{2}}$. Легко доказать, что оператор $(J_m B)L_{01}^{-\frac{1}{2}}$ ограничен. Таким образом, оператор $(\Gamma_m B)(J_m B)L_{01}^{-\frac{1}{2}}$ принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathscr{H})$ как произведение ограниченного оператора на оператор Гильберта — Шмидта. Следовательно, $(\Gamma_m B)J_m B \in \mathfrak{U}$. Для случая, когда B — возмущение оператора L_{02}, этот факт непосредственно следует из лемм 5 и 6. Лемма доказана. □

Лемма 8. *Существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что операторы $B, J_m B, \Gamma_m B$ удовлетворяют следующим условиям для $i = 1, 2$:*

(a) $\Gamma_m B \in \operatorname{End} \mathscr{H}$ *и* $\|\Gamma_m B\|_2 < 1$;

(b) $(\Gamma_m B)\mathrm{D}(L_{0i}) \subset \mathrm{D}(L_{0i})$;

(c) $B\Gamma_m B, (\Gamma_m B)J_m B \in \mathfrak{U}$, *где $\mathfrak{U}$ — пространство допустимых возмущений;*

(d) $L_{0i}(\Gamma_m B)x - (\Gamma_m B)L_{0i}x = Bx - (J_m B)x$, $x \in \mathrm{D}(L_{0i})$;

(e) *для любого $\varepsilon > 0$ существует $\lambda_\varepsilon \in \rho(L_{0i})$ такое, что* $\|B(L_{0i} - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.

Доказательство. Из леммы 5 следует, что $\Gamma_m B \in \mathfrak{S}_2(\mathscr{H}) \subset \operatorname{End} \mathscr{H}$, причем из равенства (7) вытекает, что $\|\Gamma_m B\|_2 < 1$ для достаточно большого $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, выполнено условие (a).

Установим свойство (b) для оператора ΓB (см. замечание 3). Проводя оценки, как при доказательстве свойства 3 леммы 4, и используя неравенства (8)–(10), получим, что $(\Gamma_m B)\mathrm{D}(L_{0i}) \subset \mathrm{D}(L_{0i})$, $i = 1, 2$.

Свойство (c) выполнено в силу леммы 7.

Для доказательства свойства (d) необходимо провести рассуждения, как при доказательстве свойства 4 леммы 4. Кроме того, из равенств (6), (7) следует, что для $x \in \mathrm{D}(L_{0i})$, $i = 1, 2$, справедливы равенства

$$\begin{aligned} L_{0i}(\Gamma_m B)x &= L_{0i}\Gamma B x - L_{0i}P_{(m)}(\Gamma B)P_{(m)} = L_{0i}\Gamma B x - P_{(m)}(L_{0i}\Gamma B)P_{(m)} \\ &= (B - JB)x + (\Gamma B)L_{0i}x - P_{(m)}(B - JB)P_{(m)}x - P_{(m)}(\Gamma B)L_{0i}P_{(m)}x \\ &= (B - J_m B)x + (\Gamma_m B)L_{0i}x. \end{aligned}$$

Таким образом, выполнено свойство (d).

Установим свойство (e) для оператора L_{01}. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $n \in \mathbb{N}$ так, что

$$\left(\frac{\|a\|_{l^2}^2}{3} + \frac{2\|b\|_{l^2}^2}{945}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{3^{\frac{3}{4}}}{\pi\sqrt{2}n^{\frac{1}{4}}} < \varepsilon, \tag{11}$$

и в качестве λ_ε возьмем число $-\pi^4 n$. Непосредственным вычислением легко установить, что оператор $BL_{01}^{-\frac{3}{4}}$ ограничен и справедлива оценка $\big\|BL_{01}^{-\frac{3}{4}}\big\|_2^2 \le 8\big(\frac{\|a\|_{l^2}^2}{3} + \frac{2\|b\|_{l^2}^2}{945}\big)$. Тогда для $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющего (11), справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|B(L_{01} - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| &\le \big\|BL_{01}^{-\frac{3}{4}}\big\|_2 \max_{k \ge 1} \frac{\lambda_k^{\frac{3}{4}}}{|\lambda_k - \lambda_\varepsilon|} \\ &\le \left(\frac{\|a\|_{l^2}^2}{3} + \frac{2\|b\|_{l^2}^2}{945}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \max_{k \ge 1} \frac{k^3}{k^4 + n} \le \left(\frac{\|a\|_{l^2}^2}{3} + \frac{2\|b\|_{l^2}^2}{945}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{3^{\frac{3}{4}}}{\pi\sqrt{2}n^{\frac{1}{4}}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, установлено свойство (e) для L_{01}. Рассуждая аналогично, получим свойство (e) для случая, когда B — возмущение оператора L_{02}. Лемма доказана. □

Теорема 5. *Если число* $m \in \mathbb{N}$ *таково, что*

$$\|\Gamma_m B\|_2 < 1, \tag{12}$$

то оператор $L_i = L_{0i} - B$ *подобен оператору* $\widetilde{L}_i = L_{0i} - \widetilde{B}$, $i = 1, 2$, *где*

$$\widetilde{B} = J_m B_1 + (I + \Gamma_m B)^{-1}(B_1 \Gamma_m B_1 - (\Gamma_m B_1) J_m B_1) + \widetilde{C}. \tag{13}$$

Оператор $\widetilde{C}$ *определяется формулой* $\widetilde{C} = J_m B_2 + (I + \Gamma_m B)^{-1}(B_1 \Gamma_m B_2 + B_2 \Gamma_m B_1 + B_2 \Gamma_m B_2 - (\Gamma_m B_1) J_m B_2 - (\Gamma_m B_2) J_m B_1 - (\Gamma_m B_2) J_m B_2)$, *причем имеет место равенство*

$$(L_{0i} - B)(I + \Gamma_m B) = (I + \Gamma_m B)(L_{0i} - \widetilde{B}), \quad i = 1, 2. \tag{14}$$

Оператор $\widetilde{B}$ *из* (14) *представим в виде*

$$\widetilde{B} = J B_1 + B_1 \Gamma B_1 - (\Gamma B_1) J B_1 + C \in \mathfrak{U}, \tag{15}$$

где $C = C_0 L_{0i}^{\frac{1}{2}}$, C_0 *принадлежит* $\mathfrak{S}_1(\mathscr{H})$ — *идеалу ядерных операторов* (*см.* [20]).

Доказательство. Существование числа $m \in \mathbb{N}$, для которого справедлива оценка (12), доказано в лемме 5. Согласно лемме 8 и теореме 2 из [18] оператор $L_i = L_{0i} - B$ подобен оператору $\widetilde{L}_i = L_{0i} - \widetilde{B}$, $i = 1, 2$, а также справедливы равенства (13), (14). Оператор C из (15) имеет вид

$$C = -(I + \Gamma_m B)^{-1}(\Gamma_m B)(B_1 \Gamma_m B_1 - (\Gamma_m B_1) J_m B_1) + C_1 + \widetilde{C},$$

где оператор $C_1 = B_1 \Gamma_m B_1 - B_1 \Gamma B_1 - (\Gamma_m B_1) J_m B_1 + (\Gamma B_1) J B_1 + J_m B_1 - J B_1$ имеет конечный ранг и, следовательно, принадлежит $\mathfrak{S}_1(\mathscr{H})$.

Из леммы 7 следует, что операторы $(\Gamma_m B) J_m B$ и $B \Gamma_m B$ принадлежат $\mathfrak{U}$. Следовательно, $\widetilde{C} \in \mathfrak{U}$ и $B_1 \Gamma_m B_1$, $(\Gamma_m B_1) J_m B_1 \in \mathfrak{U}$. Таким образом, оператор C представим в виде $C = C_0 L_{0i}^{\frac{1}{2}}$, $i = 1, 2$, где C_0 принадлежит $\mathfrak{S}_1(\mathscr{H})$ (как сумма оператора конечного ранга, оператора из $\mathfrak{U}$ и произведения двух операторов Гильберта — Шмидта, см. [20]). Таким образом, $\widetilde{B} \in \mathfrak{U}$. Теорема доказана. □

3. Доказательство основных результатов

Теорема 5 позволяет свести изучение операторов L_i, $i = 1, 2$, к операторам $\widetilde{L}_i$, $i = 1, 2$. Исследование операторов $\widetilde{L}_i$, $i = 1, 2$, будем осуществлять методом подобных операторов с использованием теоремы 4.

В качестве невозмущенного оператора при изучении оператора $\widetilde{L}_1$ будем использовать нормальный оператор $L'_{01} = L_{01} - JB + P_{(m)}(JB)P_{(m)}$ (согласно равенству (6)) с собственными значениями λ_n при $n \le m$ и

$$\lambda'_n = (\pi n)^4 + (\pi n)^2 \int_0^1 a(t)\, dt, \quad n \ge m + 1,\ m \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Непосредственно из определения операторов JB и $P_{(m)}(JB)P_{(m)}$ следует, что собственные функции оператора L_{01} являются собственными функциями оператора L'_{01}. Поскольку собственные функции образуют ортонормированный базис, оператор L'_{01} нормален. Отметим, что его собственные значения λ'_n для достаточно большого n удовлетворяют оценкам (2) с константой $c = 2\pi^4$.

При изучении оператора $\widetilde{L}_2$ в качестве невозмущенного оператора будет выступать L_{02}, который в дальнейшем будет обозначаться символом L'_{02}.

В условиях следующей теоремы число $m \in \mathbb{N}$ выбирается таким, что одновременно выполнены условия

$$\|\Gamma_m B\|_2 < 1, \quad \frac{c^{\frac{3}{2}}\|B\|_*}{m} < \frac{1}{4}. \tag{17}$$

Отметим, что для исследования оператора $\widetilde{L}_1$ необходимо потребовать дополнительное условие $m \geq \sqrt{\frac{2\int\limits_0^1 |a(t)|dt}{2\pi^8-1}}$. Оно гарантирует выполнение неравенств $|\lambda'_n - \lambda'_j| \geq \frac{1}{2\pi^4}|n^4 - j^4|$ и $|\lambda'_n| \leq 2\pi^4 n^4$, где λ'_n — собственные значения оператора L'_{01} (см. (16)).

Замечание 4. Формулы для проекторов J_m, $m \in \mathbb{N}$, остаются без изменения ввиду того, что у операторов L'_{01} и L_{01} совпадают собственные векторы. Однако трансформатор Γ_m, $m \in \mathbb{N}$, который строится по L_{01}, будет отличаться от трансформатора, который строится по L'_{01}. Будем дальше его обозначать через Γ'_m. Для единообразия тем же символом Γ'_m обозначим трансформатор Γ_m для оператора L'_{02}.

Следующая теорема является одним из основных результатов статьи.

Теорема 6. *Пусть число $m \in \mathbb{N}$ таково, что выполнены условия* (17). *Тогда оператор $L_i = L_{0i} - B$ подобен оператору вида*

$$L'_{0i} - J_m X_* = L'_{0i} - P_{(m)} X_* P_{(m)} - \sum_{j \geq m+1} P_j X_* P_j, \quad i = 1, 2. \tag{18}$$

Оператор $X_* \in \mathfrak{U}$ — решение уравнения

$$X = \widetilde{B}\Gamma'_m X - (\Gamma'_m X)(J_m \widetilde{B}) - (\Gamma'_m X) J_m(\widetilde{B}\Gamma'_m X) + \widetilde{B}, \tag{19}$$

рассматриваемого в $\mathfrak{U}$. Оператор $I + \Gamma'_m X_*$ обратим, и преобразование подобия оператора $L_i = L_{0i} - B$ в оператор $L'_{0i} - J_m X_*$, $i = 1, 2$, осуществляет оператор вида

$$U_m = (I + \Gamma_m B)(I + \Gamma'_m X_*) = I + V_m, \tag{20}$$

где $V_m \in \mathfrak{S}_2(\mathscr{H})$.

Доказательство. Из оценки (12) (см. первое условие (17)) следует, что оператор $I + \Gamma_m B$ обратим. Из теоремы 5 (ее условия выполнены в силу обоих условий из (17)) вытекает подобие оператора $L_i = L_{0i} - B$ оператору вида $\widetilde{L}_i = L'_{0i} - \widetilde{B}$, $i = 1, 2$, где $\widetilde{B}$ определен равенством (13). Поскольку $\widetilde{B}$ принадлежит $\mathfrak{U}$, в силу теоремы 2 из [18], оператор $\widetilde{L}_i = L'_{0i} - \widetilde{B}$ (а следовательно, и $L_i = L_{0i} - B$) подобен оператору $L'_{0i} - J_m X_*$, $i = 1, 2$, вида (18), где $X_* \in \mathfrak{U}$ — решение уравнения (19). Ясно, что оператор преобразования L_i в оператор $L'_{0i} - J_m X_*$, $i = 1, 2$, совпадает с оператором U_m из (20). Поскольку $\Gamma_m B$, $\Gamma'_m X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathscr{H})$, оператор V_m из (20) принадлежит $\mathfrak{S}_2(\mathscr{H})$. Теорема доказана. $\square$

Приступим к доказательству основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Теорема 6 позволяет установить асимптотику собственных значений оператора L_i, $i = 1, 2$. А именно, из равенства

$\sigma(L_i) = \sigma(L'_{0i} - J_m X_*)$ будет следовать, что спектр оператора L_i, $i = 1, 2$, представим в виде

$$\sigma(L_i) = \sigma(L'_{0i} - J_m X_*) = \sigma(A_{(m)}) \cup \Big(\bigcup_{j \geq m+1} \sigma(A_j) \Big), \quad i = 1, 2, \tag{21}$$

где $A_{(m)} = (L'_{0i} - J_m X_* | \mathscr{H}_{(m)})$ — сужение оператора $L'_{0i} - J_m X_*$, $i = 1, 2$, на подпространство $\mathscr{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}$, $P_{(m)} = \sum\limits_{j \leq m} P_j$; $A_j = (L'_{0i} - J_m X_* | \mathscr{H}_j)$ — сужение оператора $L'_{0i} - J_m X_*$, $i = 1, 2$, на подпространство $\mathscr{H}_j = \operatorname{Im} P_j$, $j \geq m + 1$. Из представления (21) следует (ввиду того, что $\dim \mathscr{H}_{(m)} = m$), что множество $\sigma(A_{(m)}) = \sigma_{(m)}$ конечно. Подпространства $\mathscr{H}_j = \operatorname{Im} P_j, j \geq m + 1$, инвариантны относительно $L'_{0i} - J_m X_*$, $i = 1, 2$. Таким образом, операторы $A_{(m)}$, A_j, $j \geq m + 1$, корректно определены.

Легко установить, что операторы $L_i = L_{0i} - B$, $i = 1, 2$, являются операторами с компактной резольвентой. Подпространства $\mathscr{H}_{(k)}$, $k \geq m + 1$, одномерны, и, следовательно, каждый из операторов A_k, $k \geq m + 1$, является скалярным, т. е. оператором умножения на число, причем это число определяется как $\lambda'_n - (X_* e_n, e_n)$. Поскольку каждый из операторов L_i подобен соответствующему оператору $\widetilde{L}_i$, $i = 1, 2$, все дальнейшие вычисления будем проводить с $\widetilde{L}_i$, $i = 1, 2$. Так как X_* удовлетворяет (19), согласно равенству $((\Gamma_m X)(J_m X) e_n, e_n) = 0$ получаем

$$(X_* e_n, e_n) = (\widetilde{B} \Gamma'_m X_* e_n, e_n) + (\widetilde{B} e_n, e_n).$$

В силу представления (13) и замечания 3 имеют место равенства

$$\begin{aligned}(\widetilde{B} e_n, e_n) = (J B_1 e_n, e_n) + (B_1 \Gamma B_1 e_n, e_n) - ((\Gamma B_1) J B_1 e_n, e_n) + (C e_n, e_n) \\ = (B_1 e_n, e_n) + (B_1 \Gamma B_1 e_n, e_n) + (C e_n, e_n).\end{aligned}$$

Величины $(B_1 e_n, e_n)$ при $n \geq m + 1$ имеют вид

$$(B_1 e_n, e_n) = (\pi n)^2 \left(- \int\limits_0^1 a(t)\, dt + \int\limits_0^1 a(t) \cos 2\pi n t\, dt \right).$$

Величина $(B_1 \Gamma B_1 e_n, e_n)$ представима в виде $(B_1 \Gamma B_1 e_n, e_n) = n^2 \sum\limits_{\substack{l=1,\\ l \neq n}}^{\infty} \frac{a_{nl} a_{ln} l^2}{\lambda_l - \lambda_n}$, где a_{nl} — матрица оператора B_1, и $a_{nl} = \int\limits_0^1 a(t) \cos \pi(n - l) t\, dt - \int\limits_0^1 a(t) \cos \pi(n + l) t\, dt$, $n \geq m + 1$.

Используя теорему 5, получим, что остаток будет представлен в виде $\zeta_n n^2$, где (ζ_n) — суммируемая последовательность, т. е. $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} |\zeta_n| < \infty$. Таким образом, при $n \geq m + 1$ асимптотика собственных значений для оператора L_1 принимает вид из формулировки теоремы 1. Для оператора L_2 соответствующая асимптотика получается аналогично. Теорема 1 доказана. $\square$

Следствие 1. *Операторы $L_i = L_{0i} - B$, $i = 1, 2$, спектральны по Данфорду (см. [10]).*

Далее будем рассматривать спектральные проекторы, которые описаны во введении. Отметим, что справедливо разложение единицы

$$I = \sum_{k \geq m+1} P_k + P_{(m)}, \quad I = \sum_{k \geq m+1} \widetilde{P}_k + \widetilde{P}_{(m)},$$

где проектор $\widetilde{P}_{(m)}$ имеет вид $\widetilde{P}_{(m)} = (I + V_m)P_{(m)}(I + V_m)^{-1}$.

Доказательство теоремы 2. Из теоремы 6 следует, что оператор L_1 подобен оператору $L'_{01} - J_m X_*$ (см. формулу (18)) и оператором преобразования является U_m вида (20). Оператор V_m из (20) имеет вид $V_m = \Gamma_m B + \Gamma'_m X_* + (\Gamma_m B)(\Gamma'_m X_*)$. Из равенства $L_{01} - B = (I + V_m)(L'_{01} - J_m X_*)(I + V_m)^{-1}$ и леммы 1 из [18] вытекает, что спектральные проекторы $\widetilde{P}(\Omega)$, $P(\Omega)$ подобны и, более того, оператор $\widetilde{P}(\Omega)$ допускает представление $\widetilde{P}(\Omega) = (I + V_m)P(\Omega)(I + V_m)^{-1}$. Следовательно, оператор $\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)$ представим в виде

$$\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega) = (I + V_m)P(\Omega)(I + V_m)^{-1} - P(\Omega) = (V_m P(\Omega) - P(\Omega)V_m)(I + V_m)^{-1}.$$

Оценим величины $\|\Gamma'_m X_* P(\Omega)\|_2$, $\|P(\Omega)\Gamma'_m X_*\|_2$, $\|\Gamma_m B P(\Omega)\|_2$, $\|P(\Omega)\Gamma_m B\|_2$. Согласно оценкам $|\lambda'_n - \lambda'_j| \geq \frac{1}{2\pi^4}|n^4 - j^4|$ и $|\lambda'_n| \leq 2\pi^4 n^4$ легко установить, что $\|\Gamma'_m X_* P(\Omega)\|_2 \leq \frac{2\sqrt{2}\pi^6}{2k(\Omega)-1}\|\Gamma'_m X_0\|_2$, где $X_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathscr{H})$ в представлении $X_* = X_0 L_{01}^{\frac{1}{2}}$. Аналогично получается оценка $\|P(\Omega)\Gamma'_m X_*\|_2 \leq \frac{2\sqrt{2}\pi^6}{2k(\Omega)-1}\|\Gamma'_m X_0\|_2$. Осталось установить оценку на $\|\Gamma_m B P(\Omega)\|_2$. Так как оператор B_2 есть оператор умножения на функцию b из $\mathscr{H}$, достаточно рассмотреть операторы $\Gamma_m B_1 P(\Omega)$ и $P(\Omega)\Gamma_m B_1$. Таким образом, используя неравенство (8), непосредственным вычислением получим

$$\|\Gamma_m B_1 P(\Omega)\|_2^2 = \sum_{\substack{p=1,\\ p\neq j,\, j\geq k(\Omega)}}^{\infty} \left|\frac{a_{pj}}{\lambda'_p - \lambda'_j}\right|^2 \leq 16\pi^{12} \sum_{\substack{p=1,\\ p\neq j,\, j\geq k(\Omega)}}^{\infty} \frac{|a_{|p-j|}|^2}{(p^2 - j^2)^2}$$
$$+ 16\pi^{12} \sum_{\substack{p=1,\\ p\neq j,\, j\geq k(\Omega)}}^{\infty} \frac{|a_{p+j}|^2}{(p^2 - j^2)^2} \leq 32\pi^{12}\|a\|_{l^2}^2 \left(\sum_{p=1}^{k(\Omega)-1} \frac{1}{(p + k(\Omega))^2(k(\Omega) - p)}\right.$$
$$\left. + \sum_{p=k(\Omega)+1}^{\infty} \frac{1}{(p + k(\Omega))^2(p - k(\Omega))} \right) \leq \frac{\pi^{12}\|a\|_{l^2}^2 c_1}{k^2(\Omega)} \ln\left(\frac{(k(\Omega) - 1)(2k(\Omega) + 1)}{k(\Omega) + 1}\right),$$

где $c_1 > 0$ — некоторая константа. Следовательно, справедлива оценка

$$\|\Gamma_m B_1 P(\Omega)\|_2 \leq \frac{\pi^6\sqrt{c_3}\|a\|_{l^2}}{k(\Omega)} \left(\ln\left(\frac{(k(\Omega) - 1)(2k(\Omega) + 1)}{k(\Omega) + 1}\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогичная оценка справедлива для нормы $\|P(\Omega)\Gamma_m B_1\|_2$. Используя полученные оценки, неравенство (12), а также представление оператора V_m, имеем

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leq \|V_m P(\Omega)\|_2 + \|P(\Omega)V_m\|_2 \leq \|\Gamma_m B_1 P(\Omega)\|_2$$
$$+ \|\Gamma'_m X_* P(\Omega)\|_2 + \|P(\Omega)\Gamma_m B_1\|_2 + \|P(\Omega)\Gamma'_m X_*\|_2 + \|\Gamma'_m X_* P(\Omega)\|_2$$
$$+ \|P(\Omega)\Gamma_m B_1\|_2 \leq \frac{3\pi^6\sqrt{c_3}\|a\|_{l^2}}{k(\Omega)} \left(\ln\left(\frac{(k(\Omega) - 1)(2k(\Omega) + 1)}{k(\Omega) + 1}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \frac{6\sqrt{2}\pi^6}{2k(\Omega) - 1}\|\Gamma_m X_0\|_2 \leq \frac{\widetilde{M}(\ln k(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{k(\Omega)},$$

где $\widetilde{M} > 0$ — некоторая константа, не зависящая от $k(\Omega)$.

Аналогично рассуждая, можно получить такие же оценки и для оператора L_2. Теорема 2 доказана. $\square$

Следствие 2. *В условиях теоремы 2 справедлива оценка*

$$\|\widetilde{P}_n - P_n\|_2 \le \frac{M_3}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $M_3 > 0$ — некоторая константа. В этом случае Ω — одноточечное множество $\{n\}$ и суммирования по j не производится.

Следствие 3. *Если выполнены условия теоремы 2, то верна оценка*

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \|\widetilde{P}_n - P_n\|_2^2 < \frac{M_3^2}{m^2}.$$

Доказательство теоремы 3. Из формул разложения единицы и теоремы 2 имеем

$$\begin{aligned}
&\left\|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\right\|_2 \\
&\quad = \left\|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \widetilde{P}_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{\infty} P_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} P_k\right\|_2 \\
&\quad = \left\|I - \sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{P}_k - I + \sum_{k=n+1}^{\infty} P_k\right\|_2 = \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} \widetilde{P}_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} P_k\right\|_2 \le \frac{\widetilde{M}(\ln n)^{\frac{1}{2}}}{n}.
\end{aligned}$$

Теорема 3 доказана. $\square$

Следствие 4. *Имеет место равномерная сходимость спектральных разложений операторов $L_i = L_{0i} - B$ и L_{0i}, $i = 1, 2$:*

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\widetilde{P}_{(m)} + \sum_{k=m+1}^{n} \widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{k=m+1}^{n} P_k\right\|_2 = 0.$$

4. Построение аналитической полугруппы операторов

В этом разделе полученные теоремы о спектральных свойствах дифференциального оператора $L_i = L_{0i} - B$, $i = 1, 2$ (особенно теорема 6), будут использованы для доказательства секториальности оператора $-L_i = -L_{0i} + B$, $i = 1, 2$, и построения аналитической полугруппы, генератором которой он является.

Определение 3 [21]. Будем называть линейный оператор $\mathscr{A} : \mathrm{D}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ в банаховом пространстве $\mathscr{X}$ *секториальным* оператором, если он замкнут и плотно определен и, кроме того, для некоторого $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, некоторого $M \ge 1$ и некоторого вещественного a сектор $S_{a,\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a)| < \varphi,\ \lambda \ne a\}$ лежит в резольвентном множестве оператора $\mathscr{A}$ и $\|(\lambda - \mathscr{A})^{-1}\| \le \frac{M}{|\lambda - a|}$ для всех $\lambda \in S_{a,\varphi}$.

Отметим, что в следующей теореме и ее доказательстве используются обозначения теоремы 6.

Теорема 7. *Дифференциальный оператор $-L_i = -L_{0i} + B$, $i = 1, 2$, секториален и генерирует аналитическую полугруппу операторов $T : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathscr{H}$. При этом справедливо представление вида $T(t) = U_m \widetilde{T}(t) U_m^{-1}$, где $U_m = (I +$*

$\Gamma_m B)(I+\Gamma'_m X_*)$, и $\widetilde{T}:\mathbb{R}_+\to \operatorname{End}\mathscr{H}$ — полугруппа, генератором которой является оператор $-L'_{0i}+J_mX_*$. Натуральное число m выбирается таким образом, чтобы имело место утверждение теоремы 6.

Доказательство теоремы будет проводиться для обоих операторов L_i, $i=1,2$. По теореме 6 оператор L_i (следовательно, и оператор $-L_i$) подобен оператору $L'_{0i}-J_mX_*$ (соответственно оператору $-L'_{0i}+J_mX_*$), где $X_*=X_0L_{0i}^{\frac{1}{2}}, X_0\in\mathfrak{S}_2(\mathscr{H})$. Стало быть,

(1) $\sigma(-L_i)=\sigma(-L'_{0i}+J_mX_*)=\sigma_m\cup\big(\bigcup\limits_{j\geq m+1}\sigma_j\big)$, где σ_m — конечное множество;

(2) $R(\lambda,-L_i)=U_mR(\lambda,-L'_{0i}+J_mX_*)U_m^{-1}$, где U_m — оператор преобразования, и $\lambda\in\rho(-L_i)=\rho(-L'_{0i}+J_mX_*)$, $\lambda\notin\sigma(-L_i)$.

Для оценки резольвенты оператора $-L'_{0i}+J_mX_*$ рассмотрим равенства

$$\begin{aligned}-L'_{0i}+J_mX_*-\lambda I&=(I+J_mX_*(-L'_{0i}-\lambda I)^{-1})(-L'_{0i}-\lambda I)\\&=\big(I+J_mX_0L_{0i}^{\frac{1}{2}}(-L'_{0i}-\lambda I)^{-1}\big)(-L'_{0i}-\lambda I).\end{aligned}$$

Укажем сектор, для которого спектр оператора $-L'_{0i}+J_mX_*$ лежит в нем и оператор $I+J_mX_0L_{0i}^{\frac{1}{2}}(-L'_{0i}-\lambda I)^{-1}$ обратим. Согласно (1) спектр оператора $-L'_{0i}+J_mX_*$ состоит из объединения конечного множества и множества $\sigma_j, j\geq m+1$, где $\sigma_j=\{-\tilde{\lambda}_j\}$. Все собственные значения оператора $-L'_{0i}+J_mX_*$ лежат в секторе $\gamma=\gamma_0+2\|X_0\|_2^2$, где γ_0 — сектор с вершиной в нуле и аргумент удовлетворяет условию $\frac{3\pi}{4}\leq\arg z\leq\frac{5\pi}{4}$. Для любого λ из γ оператор $I+J_mX_0L_{0i}^{\frac{1}{2}}(-L'_{0i}-\lambda I)^{-1}$ обратим и справедлива оценка $\big\|J_mX_0L_{0i}^{\frac{1}{2}}(-L'_{0i}-\lambda I)^{-1}\big\|\leq\frac{1}{2}$. Непосредственным вычислением устанавливается следующая оценка на резольвенту: $\|R(\lambda,-L'_{0i}+J_mX_*)\|\leq\frac{2}{|\pi^4+\lambda|}\leq\frac{2}{|\lambda-2\|X_0\|_2^2|}$.

Следовательно, оператор $-L'_{0i}+J_mX_*$ (соответственно и оператор $-L_i$) секториален. Тогда согласно теореме II.4.6 из [22] оператор $-L_i$ является генератором аналитической полугруппы $T(t)=U_m\widetilde{T}(t)U_m^{-1}$ (в силу подобия операторов $-L_i$ и $-L'_{0i}+J_mX_*$), где $\widetilde{T}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{\lambda t}R(\lambda,-L'_{0i}+J_mX_*)\,d\lambda$.

Рассмотрим ортогональное разложение $\mathscr{H}=\mathscr{H}_{(m)}\oplus\mathscr{H}^{(m)}$, где $\mathscr{H}_{(m)}=\operatorname{Im}P_{(m)}$, $\mathscr{H}^{(m)}=\operatorname{Im}\big(\sum\limits_{k\geq m+1}P_k\big)$. Соответственно оператор $-L'_{0i}+J_mX_*$ допускает разложение $-L'_{0i}+J_mX_*=(-\widetilde{A}_{(m)}+P_{(m)}|\mathscr{H}_{(m)})\oplus\widetilde{A}^{(m)}$, где $\widetilde{A}_{(m)}$ — сужение оператора $L'_{0i}-J_mX_*$ на $\mathscr{H}_{(m)}$ и $\widetilde{A}^{(m)}$ — сужение оператора $-L'_{0i}+J_mX_*$ на $\mathscr{H}^{(m)}$. Тогда согласно [22] полугруппа $T(t)$ подобна полугруппе $T_m(t)\oplus T^{(m)}(t)$, причем $T^{(m)}(t)$ допускает представление вида

$$T^{(m)}(t)x=\sum_{k=m+1}^{\infty}e^{\tilde{\lambda}_kt}(x,e_k)e_k,\quad x\in\mathscr{H}.$$

Теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кондратьев С. К., Турбин М. В.* Визуализация аттракторов для математической модели движения слабо концентрированных водных растворов полимеров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. физ. мат. 2010. № 2. С. 142–163.
2. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматлит, 1961.

3. *Бардин Б. С., Фурта С. Д.* Локальная теория существования периодических волновых движений бесконечной балки на нелинейно упругом основании // Актуальные проблемы классической и небесной механики. М.: Эльф, 1998. С. 13–22.
4. *Сидоркин А. С.* Доменная структура в сегнетоэлектриках и родственные материалы. М.: Физматлит, 2000.
5. *Баданин А. В., Белинский Б. П.* О колебаниях жидкости в ограниченной полости с пластиной на границе // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 6. С. 936–944.
6. *Баданин А. В., Покровский А. А.* О модели подкрепленной ребром пластины // Вестн. СПбГУ. Сер. 4. 1994. Т. 3, № 18. С. 94–97.
7. *Баданин А. В., Коротяев Е. Л.* Спектральные оценки для периодического оператора четвертого порядка // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22, № 5. С. 1–48.
8. *Джаков П., Митягин Б. С.* Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, № 4. С. 77–182.
9. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
10. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральные операторы.. М.: Мир, 1974. Т. III.
11. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
12. *Агранович М. С.* Спектральные свойства задач дифракции // Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции / Н. Н. Войтович, Б. З. Кацелембаум, А. Н. Сивов. М.: Наука, 1977. С. 289–416.
13. *Баскаков А. Г.* Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 1. С. 21–39.
14. *Баскаков А. Г.* Метод усреднения в теории возмущений линейных дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 4. С. 555–562.
15. *Баскаков А. Г.* Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1986. Т. 50, № 4. С. 435–457.
16. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1987.
17. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58, № 4. С. 3–32.
18. *Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О.* Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Изв. РАН. Сер. мат. 2011. Т. 75, № 3. С. 3–28.
19. *Поляков Д. М.* Спектральные свойства дифференциального оператора четвертого порядка // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. физ. мат. 2012. № 1. С. 179–181.
20. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
21. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
22. *Engel K.-J., Nagel R.* One-parameter semigroups for linear evolution equations. New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1999. (Grad. Texts Math.; V. 194).

Статья поступила 20 декабря 2013 г.

Поляков Дмитрий Михайлович
Воронежский гос. университет,
Научно-исследовательский институт математики ВГУ,
Университетская пл., 1, Воронеж 394006
DmitryPolyakow@mail.ru