Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2015. Том 56, № 1

УДК 917.95

О РАСПОЛОЖЕНИИ СПЕКТРА ЗАДАЧИ ТРИКОМИ

Ю. К. Сабитова

Аннотация. Для уравнения смешанного типа с двумя спектральными параметрами λ_1 и λ_2 изучается однородная задача Трикоми и приводятся условия относительно этих параметров, при которых исследуемая задача имеет только нулевое решение. Отсюда получены множества на комплексной плоскости, где не лежат точки спектра задачи Трикоми.

Ключевые слова: уравнения смешанного типа, задача Трикоми, теоремы единственности, спектр.

§ 1. Введение

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu = \operatorname{sgn} y |y|^n u_{xx} + u_{yy} - \lambda |y|^n u = 0, \tag{1}$$

где $n = \text{const} \geq 0$,

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_1 = \mu_1^2, & y > 0, \\ \lambda_2 = \mu_2^2, & y < 0, \end{cases}$$

λ_1, λ_2 — заданные числовые, вообще говоря, комплексные параметры, в области D, ограниченной гладкой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$ и $B(l,0)$, $l > 0$, а при $y < 0$ — характеристиками

$$AC : x - \frac{2}{n+2}(-y)^{\frac{n+2}{2}} = 0, \quad CB : x + \frac{2}{n+2}(-y)^{\frac{n+2}{2}} = l \tag{2}$$

уравнения (1), и следующую задачу Трикоми (задачу T).

Задача T. *Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям*

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-), \tag{3}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-, \tag{4}$$

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma, \tag{5}$$

$$u(x,y) = \psi(x,y), \quad (x,y) \in AC, \tag{6}$$

где φ, ψ — заданные достаточно гладкие функции, при этом $\varphi(A) = \psi(A)$,

$$D_+ = D \cap \{y > 0\}, \quad D_- = D \cap \{y < 0\}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований р_Поволжье_а (проект 14–01–97003).

Первые фундаментальные результаты по задаче Т принадлежат Трикоми [1]. Он впервые установил знакоопределенность интеграла

$$\int\limits_0^1 u(x,0-0)u_y(x,0-0)\,dx \geq 0 \tag{7}$$

для уравнения (1) при $n = 1$, $\lambda = 0$, т. е. для уравнения

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{8}$$

и на основе этого доказал теорему единственности решения задачи Т для уравнения (8) без каких-либо геометрических ограничений на кривую Γ.

Впоследствии Ф. И. Франкль [2] показал, что проблема истечения сверхзвуковой струи из сосуда с плоскими стенками (внутри сосуда скорость дозвуковая) на плоскости годографа сводится к задаче Т для уравнения Чаплыгина

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{9}$$

где $K(0) = 0$, $K'(y) > 0$, $K(y)$ — достаточно гладкая функция, и доказал единственность решения этой задачи методом энергетических оценок при условии

$$F(y) = 2\biggl(\frac{K(y)}{K'(y)}\biggr)' + 1 \geq 0 \quad \text{при } y < 0.$$

Проттер [3] обобщил отмеченный выше результат Ф. И. Франкля. Единственность решения задачи Т для уравнения Чаплыгина им доказана в следующих случаях:

1) гладкая кривая Γ произвольна, но гиперболическая часть области D ограничивается тем, что $F(y) > y_0$, где $y_0 < 0$;

2) на гиперболическую часть области D нет ограничений и функция $F(y)$ может принимать любые конечные значения при $y < 0$, но кривая Γ не должна простираться слишком далеко в направлении оси $x = 0$;

3) функция $K(y)$ имеет непрерывную производную третьего порядка, удовлетворяющую неравенству $K'''(y) < 0$ всякий раз, когда $F(y) < 0$ при $y < 0$.

В дальнейшем этот метод получил развитие в работах Ю. М. Березанского [4, гл. VI, § 3, гл. IV], В. П. Михайлова [5], А. М. Нахушева [6] для более общих уравнений смешанного типа.

Начало другому направлению исследований задачи Т принадлежит А. В. Бицадзе [7, 8], где он впервые сформулировал принцип экстремума для уравнения Лаврентьева

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} = 0 \tag{10}$$

и доказал теоремы единственности и существования решения задачи Т для уравнения (10). Затем этот принцип был установлен в [9, 10] для уравнения (8), а для уравнения (9) — в [11–14] при достаточно жестких ограничениях на функцию $K(y)$ или при малости длины l линии изменения типа уравнения (9).

В работе К. Б. Сабитова [15] доказана единственность решения задачи Т для уравнения (9) без указанных выше ограничений на кривую Γ, функцию $F(y)$ и длину l.

В [5] для уравнения Чаплыгина со спектральным параметром

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} - \lambda u = 0$$

при достаточно больших $\lambda > 0$ доказана единственность сильных решений обобщенной задачи T при некоторых ограничениях на подход кривой Γ в точках A и B.

В конце 1970-х гг. появились работы, где ставились задачи о существовании собственных значений однородной задачи T и расположении точек спектра этой задачи на комплексной плоскости (λ).

В 1977 г. Т. Ш. Кальменов [16] на основе принципа экстремума и теории положительных решений операторных уравнений М. А. Красносельского [17, с. 68] доказал существование хотя бы одного собственного значения однородной задачи T для оператора Лаврентьева — Бицадзе, определяемого левой частью уравнения (10). В 1981 г. аналогичный результат был получен в [18] для оператора Трикоми.

Параллельно этим работам велись исследования в направлении получения теорем единственности решения задачи T для уравнений с одним спектральным параметром λ:

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} - \lambda u = 0, \tag{11}$$

$$(\operatorname{sgn} y)u_{xx} + u_{yy} - \lambda u = 0, \tag{12}$$

$$(\operatorname{sgn} y)|y^n|u_{xx} + u_{yy} - \lambda u = 0, \quad n > 0. \tag{13}$$

С. М. Пономарев [19–22] показал единственность решения задачи T для уравнения (1) при $n = 0$ и $\lambda_1 = |\lambda_2|$, т. е. для уравнения (11), а также когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \alpha + i\beta$, где $\alpha > 0$ и $|\beta| \le 2\alpha\sqrt{2}$, в случае уравнения (12).

Е. И. Моисеев [23–29] впервые для уравнения (1) при $n = 0$ с комплексным параметром $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu^2$ доказал единственность решения задачи T при $|\arg\mu| \le \operatorname{arctg} k_0$, где $1/\sqrt{2} < k_0 < 1$ является корнем уравнения $2k = 2k^2 - 1 + 2k\sqrt{2k^2-1}$, путем установления знакоопределенности выражения

$$\operatorname{Re}\int_0^1 \exp(-2ax)\bar{u}\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} dx, \quad |a| \ge |\operatorname{Im}\mu|, \tag{14}$$

т. е. в угле $|\arg\lambda| = 2|\arg\mu| \le 2\operatorname{arctg} k_0 \approx 80^0$ комплексной плоскости (λ) он показал отсутствие точек спектра задачи T для уравнения (12).

В [26–29] рассмотрена задача T для уравнения (13) и доказана единственность решения этой задачи в случае, когда параметр λ принадлежит сектору

$$|\arg\lambda| \le \frac{\pi m}{m+2}.$$

В [30] показано, что существует достаточно большое число $M > 0$ такое, что если $|\mu| \ge M$, то при $|\operatorname{Im}\mu| \le \operatorname{Re}\mu - M$ имеет место единственность решения задачи T для уравнения (12).

Отметим также работы [31–33], посвященные исследованию задачи T для уравнений (1) и (13). В [31] получена оценка решения задачи T для уравнения (1) при $n > 0$ через граничные функции, из которой следует единственность решения, когда $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 = -\lambda_1$. Шнайдер [32] изучил задачу T для уравнения (13) при $n > 2$ и $\lambda < 0$ и при $0 < n \le 2$ и $0 < -\lambda < n(n+2)/8$.

Е. И. Моисеев [33] доказал единственность решения задачи T для уравнения (1) при $\lambda_1 = \mu^2$, $\lambda_2 = -\lambda_1 = -\mu^2$, μ — комплексное число, удовлетворяющее условиям

$$\operatorname{Re}\mu > 0, \quad |\operatorname{Im}\mu| \le C,$$

где постоянная C зависит от размеров области D_+.

Знакоопределенность выражения (7) можно установить по-разному: исходя из представления решения уравнения в области гиперболичности [1] или методом интегральных тождеств [2]. Если для данного уравнения не удается прямо доказать знакоопределенность (7), то следует искать такое преобразование уравнения, что для нового уравнения устанавливается знак выражения (7). Реализуя указанный прием для уравнения (1) при $n = 0$, К. Б. Сабитов [34] показал, что решение задачи Т единственно при всех действительных λ_1 и λ_2, удовлетворяющих неравенствам $\lambda_1 > -\lambda_2 - p$ и $\lambda_1 > -p$, где $p = 2/(9\,\mathrm{mes}\,D_+)$, $\mathrm{mes}\,D_+$ — мера области D_+, а в случае комплексных $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $\lambda_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ при условии, что $\alpha_1 > -p$ и $(\alpha_2 - \alpha_1 - p)^2 + \beta_2^2 < 4(\alpha_1 + p)^2$.

В данной работе, объединяя уравнения (11)–(13) в одно уравнение (1) с двумя параметрами λ_1 и λ_2, единым подходом на основании неотрицательности выражений (7) и (14) получаем теоремы единственности решения задачи Т, из которых найдены множества на комплексной плоскости (λ), не содержащие точек спектра задачи Т для уравнений (11)–(13).

Прежде чем сформулировать основные утверждения, уточним класс решений уравнения (1).

Определение 1. *Регулярным решением* уравнения (1) в области D будем называть функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (3), (4) и, кроме того, $u(x, y)$ имеющую непрерывные производные u_x и u_y в $\overline{D}_+$, за исключением точек A и B, где они могут иметь особенности порядка меньше единицы.

Утверждение 1. *Если в классе регулярных решений уравнения* (1) *при* $n = 0$ *существует решение задачи* (3)–(6), *то оно единственно при всех* λ_1 *и* λ_2, *удовлетворяющих неравенству*

$$2\,\mathrm{Re}\,\lambda_1 + \mathrm{Re}\,\lambda_2 > |\lambda_2| - 2p, \tag{15}$$

где $p = 2/(9\mathrm{mes}D_+)$, $\mathrm{mes}D_+$ *— мера области* D_+.

Утверждение 2. *Если в классе регулярных решений уравнения* (1) *при* $n > 0$ *существует решение задачи* (3)–(6), *то оно единственно при всех* λ_1 *и* λ_2, *удовлетворяющих неравенству*

$$2\,\mathrm{Re}\,\lambda_1 + \mathrm{Re}\,\lambda_2 > |\lambda_2| - 2p_1, \tag{16}$$

где $p_1 = 1/C_{D_+}$, C_{D_+} *— положительная постоянная, зависящая только от диаметра области* D_+ *по направлению оси абсцисс.*

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то из неравенства (15) получим множество

$$|\lambda| < 3\,\mathrm{Re}\,|\lambda| + p,$$

которое представляет внутренность правой ветви гиперболы с центром в точке $(-3p/4, 0)$ и полуосями $a = p/4$, $b = p/\sqrt{2}$, где отсутствуют точки спектра задачи Т для уравнения (12).

Когда $\lambda_2 = -\lambda_1$, $\lambda_1 = \lambda$, из неравенства (15) имеем

$$|\lambda| < \mathrm{Re}\,|\lambda| + 2p,$$

что определяет внутренность параболы вдоль вещественной оси с центром в точке $(-p, 0)$, на котором нет точек спектра задачи Т для уравнения (11).

На основании неравенства (16) аналогичные множества получим в случае уравнения (1) при всех $n > 0$ когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и $\lambda_1 = \lambda$ и $\lambda_2 = -\lambda$.

§ 2. Теоремы единственности решения задачи T для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева — Бицадзе

2.1. Случай $n = 0$, λ_1 и λ_2 — действительные числа. Пусть в уравнении (1) $n = 0$, в этом случае оно примет вид

$$Lu = (\operatorname{sgn} y)\, u_{xx} + u_{yy} - \lambda\, u = 0. \tag{17}$$

В области D_- для уравнения (17) рассмотрим задачи Дарбу, решения которых в [35] построены в явном виде. Из этих формул при условии $u|_{AC} = 0$ найдем равенства, связывающие функции $\tau(x) = u(x, 0)$ и $\nu(x) = u_y(x, 0)$:

$$\nu(x) = \tau'(x) + \mu_2 \int\limits_0^x \frac{J_1[\mu_2(x-t)]}{x-t} \tau(t)\, dt, \quad 0 < x < l, \tag{18}$$

$$\tau(x) = \int\limits_0^x J_0[\mu_2(x-t)] \nu(t)\, dt, \quad 0 \le x \le l, \tag{19}$$

где $J_q(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода порядка q, в равенствах (18) и (19) $q = 1$ и $q = 0$ соответственно.

Лемма 1. *Если $u|_{AC} = 0$ и $\lambda_2 \ge 0$, то для любого регулярного решения уравнения (17) при любом $x \in [0, l]$ имеет место неравенство*

$$J = \int\limits_0^x u(t, 0) u_y(t, 0)\, dt = \int\limits_0^x \tau(t)\nu(t)\, dt \ge 0. \tag{20}$$

Доказательство. Знакоопределенность интеграла J в [34] установлена с помощью равенства (18). Неравенство (20) можно доказать также исходя из равенства (19). Заменим функцию Бесселя $J_0(z)$ ее интегральным представлением [36, с. 92]

$$J_q(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma\big(q + \frac{1}{2}\big)} \left(\frac{z}{2}\right)^q \int\limits_0^1 (1 - \xi^2)^{q - \frac{1}{2}} \cos(z\xi)\; d\xi$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^q \int\limits_{-1}^1 e^{iz\xi} (1 - \xi^2)^{q - \frac{1}{2}}\, d\xi, \tag{21}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, $\operatorname{Re} q > -1/2$. Действительно, на основании (19) и (21) при $q = 0$ имеем

$$J = \int\limits_0^x \nu(t) \int\limits_0^t J_0[\mu_2(t-s)] \nu(s)\, ds dt$$
$$= \frac{2}{\pi} \int\limits_0^x \nu(t) \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^1 (1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} \cos[\mu_2(t-s)\xi]\, d\xi \right) \nu(s)\, ds dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 (1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\,d\xi \int\limits_0^x \nu(t)\int\limits_0^t \nu(s)\cos[\mu_2(t-s)\xi]\,dsdt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 (1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\Phi_\nu^2(x,\xi)+F_\nu^2(x,\xi)\right]d\xi \geq 0, \quad (22)$$

где

$$\Phi_\nu(t,\xi) = \int\limits_0^t \nu(s)\cos(\mu_2 s\xi)\,ds, \quad F_\nu(t,\xi) = \int\limits_0^t \nu(s)\sin(\mu_2 s\xi)\,ds.$$

Лемма 2. *Если $u|_\Gamma = 0$, то справедлива оценка*

$$\iint\limits_{D_+} u^2\,dxdy \leq \frac{9\,\mathrm{mes}\,D_+}{2}\iint\limits_{D_+} |\nabla u|^2\,dxdy. \quad (23)$$

Доказательство. Действительно, область D_+ отобразим симметрично относительно оси $y=0$ и полученную область обозначим через D_+^*. На эту область функцию $u(x,y)$ продолжим четным образом. Тогда получим функцию $\tilde{u}(x,y) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$, где $Q = D_+ \cup D_+^* \cup AB$. Используя неравенство [37, с. 83]

$$\|u\|_{2,\Omega} \leq \beta^{\frac{n+2}{n}}(\mathrm{mes}\Omega)^{\frac{1}{n}}\|\nabla u\|_{2,\Omega},$$

где $\beta = \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha$, $\alpha = \frac{n}{n+2}$, n — размерность области Ω, имеем

$$\iint\limits_Q \tilde{u}^2\,dxdy \leq \frac{9\mathrm{mes}Q}{4}\iint\limits_Q |\nabla\tilde{u}|^2\,dxdy.$$

Отсюда следует справедливость оценки (23).

Лемма 3. *Если $u|_{AC} = 0$ и $\lambda_2 < 0$, то для любого регулярного решения $u(x,y)$ уравнения (17) при любом $x \in [0,l]$ имеет место неравенство*

$$J_a = \int\limits_0^x e^{-2at}u(t,0)u_y(t,0)\,dt \geq 0,$$

где $a = \mathrm{const} \geq \alpha$.

Доказательство. При $\lambda_2 < 0$ в формулах (18) и (19) надо учесть, что $\mu_2 = \sqrt{\lambda_2} = i\sqrt{|\lambda_2|} = i\alpha$, $\alpha = \sqrt{|\lambda_2|} > 0$ и $J_1[\mu_2(x-t)] = iI_1[\alpha(x-t)]$, $J_0[\mu_2(x-t)] = I_0[\alpha(x-t)]$, где $I_q(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода. На основании (19) аналогично (22) преобразуем интеграл

$$J_a = \int\limits_0^x e^{-2at}\nu(t)\int\limits_0^t I_0[\alpha(t-s)]\nu(s)\,dsdt. \quad (24)$$

В (24) заменим функцию $I_0(z)$ в силу формулы [36, с. 93]

$$I_q(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^q \int\limits_{-1}^1 e^{-zt}(1-t^2)^{q-\frac{1}{2}}\,dt, \quad (25)$$

где $\operatorname{Re} q > -1/2$, ее интегральным представлением. Тогда соотношение (24) на основании (25) при $q = 0$ примет вид

$$J_a = \frac{1}{\pi}\int_0^x e^{-2at}\nu(t)\int_0^t \nu(s)ds\int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-\alpha(t-s)\xi}\,d\xi dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\,d\xi\int_0^x e^{-2at}\nu(t)\int_0^t e^{-\alpha(t-s)\xi}\nu(s)\,dsdt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\,d\xi\int_0^x e^{-2t(a+\alpha\xi)}\nu(t)e^{\alpha t\xi}\int_0^t e^{\alpha s\xi}\nu(s)\,dsdt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\,d\xi\int_0^x e^{-2t(a+\alpha\xi)}\frac{d}{dt}F^2(t,\xi)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\left[F^2(x,\xi)e^{-2x(a+\alpha\xi)}+2(a+\alpha\xi)\int_0^x F^2(t,\xi)e^{-2t(a+\alpha\xi)}\,dt\right]d\xi \geq 0,$$

так как $a + \alpha\xi \geq a - \alpha \geq 0$; здесь $F(t,\xi) = \int\limits_0^t e^{\alpha s\xi}\nu(s)\,ds$.

Теорема 1. *Если в классе регулярных решений уравнения* (17) *в области* D *существует решение задачи* T, *то оно единственно при всех* λ_1 *и* λ_2, *удовлетворяющих одному из следующих условий*:

1) $\lambda_2 \geq 0$ *и* $\lambda_1 > -p = -2/(9\operatorname{mes} D_+)$, *где* $\operatorname{mes} D_+$ — *мера области* D_+;

2) $\lambda_2 < 0$ *и* $\lambda_1 > -\lambda_2 - p$.

Доказательство. 1. Пусть $u(x,y)$ — решение однородной задачи T из класса регулярных решений уравнения (17). Отойдем от границы области D_+ внутрь области на расстояние $\varepsilon > 0$ от кривой Γ и на расстояние $\delta > 0$ от отрезка AB и образовавшуюся таким образом подобласть обозначим через $D_+^{\varepsilon,\delta}$. Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{D_+^{\varepsilon,\delta}} u(u_{xx} + u_{yy} - \lambda_1 u)\,dxdy = 0.$$

Интегрируя его по частям, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ и учитывая, что $u|_\Gamma = 0$, получим

$$\iint\limits_{D_+}\left(u_x^2 + u_y^2 + \lambda_1 u^2\right)dxdy + \int_0^1 \tau(x)\nu(x)\,dx = 0. \tag{26}$$

Отсюда в силу леммы 1 при $\lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 \geq 0$ следует, что $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}_+$. Тогда ввиду единственности решения задачи Коши или задач Дарбу для уравнения (17) в области D_- имеем $u(x,y) \equiv 0$ и в $\overline{D}_-$.

Если $\lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 < 0$, то из равенства (26) вытекает, что

$$\iint\limits_{D_+}\left(u_x^2 + u_y^2\right)dxdy \leq (-\lambda_1)\iint\limits_{D_+} u^2\,dxdy. \tag{27}$$

Тогда из (27) и (23) получим

$$\iint\limits_{D_+} \left(u_x^2 + u_y^2\right) dxdy \le -\frac{\lambda_1}{p} \iint\limits_{D_+} \left(u_x^2 + u_y^2\right) dxdy.$$

Отсюда при $-p < \lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 \ge 0$ следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в D.

2. Введем в рассмотрение функцию $\omega(x, y) = e^{-ax}u(x, y)$, где $u(x, y)$ — решение однородной задачи T для уравнения (17), $a = \alpha = \sqrt{|\lambda_2|}$. Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{D_+^{\varepsilon,\delta}} \omega[\omega_{xx} + \omega_{yy} + 2a\omega_x + (a^2 - \lambda_1)\omega]\, dxdy = 0.$$

Интегрируя его по частям и перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и $\delta \to 0$, получим

$$\iint\limits_{D_+} \left[\omega_x^2 + \omega_y^2 - (a^2 - \lambda_1)\omega\right] dxdy + \int\limits_0^l e^{-2at}u(t, 0)u_y(t, 0)\, dt = 0. \tag{28}$$

Отсюда в силу леммы 3 при $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_1 \ge -\lambda_2$ сразу же вытекает единственность решения задачи T для уравнения (17). Пусть $-\lambda_2 > \lambda_1 > -\lambda_2 - p$. Тогда из равенства (28) и леммы 2 имеем

$$\iint\limits_{D_+} \left(\omega_x^2 + \omega_y^2\right) dxdy \le -(\lambda_1 + \lambda_2) \iint\limits_{D_+} \omega^2\, dxdy \le -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{p} \iint\limits_{D_+} \left(\omega_x^2 + \omega_y^2\right) dxdy. \tag{29}$$

Из неравенства (29) также следует единственность решения задачи T для уравнения (17), так как $\lambda_1 + \lambda_2 + p > 0$.

2.2. Случай $n = 0$, λ_1 и λ_2 — комплексные числа. Пусть λ_1 и λ_2 являются комплексными числами: $\lambda_1 = \lambda_{11} + i\lambda_{12}$, $\lambda_2 = \lambda_{21} + i\lambda_{22}$, $\mu_1 = \mu_{11} + i\mu_{12}$, $\mu_2 = \mu_{21} + i\mu_{22}$, $\lambda_{ij}, \mu_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2$. Тогда $u(x, y) = u_1(x, y) + iu_2(x, y)$, $\bar{u}(x, y) = u_1(x, y) - iu_2(x, y)$.

Лемма 4. *Если $u|_{AC} = 0$, то для любого регулярного решения $u(x, y)$ уравнения (17) при любом $x \in [0, l]$ имеет место неравенство*

$$\operatorname{Re} J_a = \operatorname{Re} \int\limits_0^x e^{-2at}\bar{u}(t, 0)u_y(t, 0)\, dt \ge 0, \quad a = \text{const} \ge |\mu_{22}|.$$

Доказательство. На основании (19) и (21) вычислим интеграл

$$\begin{aligned} J_a = \int\limits_0^x e^{-2at}\nu(t)\bar{\tau}(t)\, dt &= \int\limits_0^x e^{-2at}\nu(t) \int\limits_0^t J_0[\bar{\mu}_2(t - s)]\bar{\nu}(s)\, dsdt \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^x e^{-2at}\nu(t) \int\limits_0^t \bar{\nu}(s)\, ds \int\limits_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} e^{i\bar{\mu}_2(t-s)\xi}\, d\xi dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}}\, d\xi \int\limits_0^x e^{-2at} \int\limits_0^t \nu(t)\bar{\nu}(s) e^{(\mu_{22} + i\mu_{21})(t-s)\xi}\, dsdt. \end{aligned} \tag{30}$$

Предварительно найдем

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}[\nu(t)\bar{\nu}(s)e^{i\mu_{21}(t-s)\xi}]\\
&\quad= \mathrm{Re}[(\nu_1(t)\nu_1(s)+\nu_2(t)\nu_2(s))+i(\nu_2(t)\nu_1(s)-\nu_1(t)\nu_2(s))]\\
&\qquad\times[\cos\mu_{21}(t-s)\xi+i\sin\mu_{21}(t-s)\xi]\\
&= [\nu_1(t)\nu_1(s)+\nu_2(t)\nu_2(s)]\cos\mu_{21}(t-s)\xi-[\nu_2(t)\nu_1(s)-\nu_1(t)\nu_2(s)]\sin\mu_{21}(t-s)\xi\\
&= [\nu_1(t)\nu_1(s)+\nu_2(t)\nu_2(s)][\cos\mu_{21}t\xi\cos\mu_{21}s\xi+\sin\mu_{21}t\xi\sin\mu_{21}s\xi]\\
&\quad-[\nu_2(t)\nu_1(s)-\nu_1(t)\nu_2(s)][\sin\mu_{21}t\xi\cos\mu_{21}s\xi-\cos\mu_{21}t\xi\sin\mu_{21}s\xi]\\
&= \nu_1(t)\nu_1(s)\cos\mu_{21}t\xi\cos\mu_{21}s\xi+\nu_2(t)\nu_2(s)\,\mathrm{co}\,s\mu_{21}t\xi\cos\mu_{21}s\xi\\
&\quad+\nu_1(t)\nu_1(s)\sin\mu_{21}t\xi\sin\mu_{21}s\xi+\nu_2(t)\nu_2(s)\sin\mu_{21}t\xi\sin\mu_{21}s\xi\\
&\quad-\nu_2(t)\nu_1(s)\sin\mu_{21}t\xi\cos\mu_{21}s\xi+\nu_1(t)\nu_2(s)\sin\mu_{21}t\xi\cos\mu_{21}s\xi\\
&\quad+\nu_2(t)\nu_1(s)\cos\mu_{21}t\xi\sin\mu_{21}s\xi-\nu_1(t)\nu_2(s)\cos\mu_{21}t\xi\sin\mu_{21}s\xi\\
&= [\nu_1(t)\cos\mu_{21}t\xi-\nu_2(t)\sin\mu_{21}t\xi][\nu_1(s)\cos\mu_{21}s\xi-\nu_2(s)\sin\mu_{21}s\xi]\\
&\quad+[\nu_1(t)\sin\mu_{21}t\xi+\nu_2(t)\cos\mu_{21}t\xi][\nu_1(s)\sin\mu_{21}s\xi+\nu_2(s)\cos\mu_{21}s\xi]. \qquad (31)
\end{aligned}
$$

Введем в рассмотрение вспомогательные функции:

$$
P_1(t,\xi)=[\nu_1(t)\cos\mu_{21}t\xi-\nu_2(t)\sin\mu_{21}t\xi]e^{-\mu_{22}t\xi},
$$

$$
P_2(t,\xi)=[\nu_1(t)\sin\mu_{21}t\xi+\nu_2(t)\cos\mu_{21}t\xi]e^{-\mu_{22}t\xi},
$$

$$
F_i(t,\xi)=\int_0^t P_i(s,\xi)\,ds, \quad i=1,2.
$$

Тогда на основании (30) и (31) имеем

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,J_a &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{-\frac12}\int_0^x e^{-2t(a-\mu_{22}\xi)}\\
&\quad\times\left[P_1(t,\xi)\int_0^t P_1(s,\xi)\,ds+P_2(t,\xi)\int_0^t P_2(s,\xi)\,ds\right]dtd\xi\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{-\frac12}\int_0^x e^{-2t(a-\mu_{22}\xi)}\frac{d}{dt}\left[F_1^2(t,\xi)+F_2^2(t,\xi)\right]dtd\xi\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{-\frac12}\Bigg\{\left[F_1^2(x,\xi)+F_2^2(x,\xi)\right]e^{-2x(a-\mu_{22}\xi)}\\
&\quad+2(a-\mu_{22}\xi)\int_0^x\left[F_1^2(t,\xi)+F_2^2(t,\xi)\right]e^{-2t(a-\mu_{22}\xi)}\,dt\Bigg\}d\xi\ge 0.
\end{aligned}
$$

Теорема 2. *Если в классе регулярных решений уравнения* (17) *существует решение задачи* T, *то оно единственно при всех* λ_1 *и* λ_2, *удовлетворяющих неравенству*

$$
\mathrm{Re}\,\lambda_1>|\,\mathrm{Im}\,\mu_2|^2-p.
$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1 введем функцию $\omega(x,y) = e^{-ax}u(x,y)$, где $a = |\mu_{22}| = |\operatorname{Im}\mu_2|$, которая в области D_+ является решением уравнения

$$M\omega = \omega_{xx} + \omega_{yy} + 2a\omega_x + (a^2 - \lambda_1)\omega = 0.$$

Рассмотрим тождество

$$\overline{\omega}M\omega = (\overline{\omega}\omega_x)_x + (\overline{\omega}\omega_y)_y - \overline{\omega}_x\omega_x - \overline{\omega}_y\omega_y + 2a\overline{\omega}\omega_x + (a^2 - \lambda_1)|\omega|^2 = 0$$

и проинтегрируем его по области $D_+^{\varepsilon,\delta}$. У полученного равенства выделим реальную часть

$$\iint\limits_{D_+^{\varepsilon,\delta}} \left[\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}|\omega|^2 + a|\omega|^2\right)_x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}|\omega|^2\right)_y\right] dxdy$$
$$- \iint\limits_{D_+^{\varepsilon,\delta}} [|\nabla\omega|^2 - \operatorname{Re}(a^2 - \lambda_1)|\omega|^2]\, dxdy = 0.$$

Применяя здесь формулу Грина, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ и учитывая граничное условие $\omega|_\Gamma = 0$, получим

$$\iint\limits_{D_+} |\nabla\omega|^2\, dxdy + (\operatorname{Re}\lambda_1 - a^2) \iint\limits_{D_+} |\,\omega|^2\, dxdy + \operatorname{Re}\int\limits_0^l e^{-2at}\; \bar{u}(t,0)u_y(t,0)\, dt = 0. \quad (32)$$

В силу леммы 4 при $\operatorname{Re}\lambda_1 \geq |\operatorname{Im}\mu_2|^2$ из равенства (32) следует единственность решения задачи T для уравнения (17) в области D.

Если $\operatorname{Re}\lambda_1 < |\operatorname{Im}\mu_2|^2$, то из равенства (32) на основании леммы 2 имеем

$$\iint\limits_{D_+} |\nabla\omega|^2\, dxdy \leq -(\operatorname{Re}\lambda_1 - a^2) \iint\limits_{D_+} |\omega|^2\, dxdy \leq -\frac{\operatorname{Re}\lambda_1 - a^2}{p} \iint\limits_{D_+} |\nabla\omega|^2\, dxdy.$$

Отсюда также вытекает, что $u(x,y) \equiv 0$ в D.

Таким образом, если в уравнении (17) λ_1 и λ_2 вещественные, то из теоремы 1 следует, что при $\lambda_1 > -p$ и $\lambda_1 + \lambda_2 > -p$ однородная задача T может иметь не более одного решения. Если $\lambda_2 = \lambda_1$, то при всех $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 > -p/2$ имеет место единственность решения задачи T для уравнения (12). Если $\lambda_2 = -\lambda_1$, то при всех $\lambda_1 > -p$ справедлива теорема о единственности решения задачи T для уравнения (11).

Когда λ_1 и λ_2 — комплексные параметры, в силу теоремы 2 получим условие

$$\operatorname{Re}\lambda_1 > |\operatorname{Im}\mu_2|^2 - p, \quad (33)$$

обеспечивающее единственность решения задачи T для уравнения (17). Поскольку $\lambda_2 = \lambda_{21} + i\lambda_{22} = \mu_2^2 = (\mu_{21} + i\mu_{22})^2$, отсюда найдем

$$\mu_{21}^2 = \frac{\sqrt{\lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2} + \lambda_{21}}{2} = \frac{|\lambda_2| + \operatorname{Re}\lambda_2}{2},$$

$$\mu_{22}^2 = \frac{\sqrt{\lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2} - \lambda_{21}}{2} = \frac{|\lambda_2| - \operatorname{Re}\lambda_2}{2}.$$

Тогда неравенство (33) равносильно следующему:

$$2\operatorname{Re}\lambda_1 + \operatorname{Re}\lambda_2 > |\lambda_2| - 2p. \tag{34}$$

Если теперь $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то из (34) получим

$$|\lambda| < 3\operatorname{Re}\lambda + 2p. \tag{35}$$

Соотношение (35) равносильно неравенствам

$$\operatorname{Re}\lambda > -\frac{2}{3}p, \quad \frac{\left(\operatorname{Re}\lambda + \frac{3}{4}p\right)^2}{(p/4)^2} - \frac{(\operatorname{Im}\lambda)^2}{(p/\sqrt{2})^2} > 1. \tag{36}$$

Геометрическое место точек λ, удовлетворяющих условиям (36), представляет собой внутренность правой ветви гиперболы с центром в точке $(-3p/4, 0)$ и полуосями $a = p/4, b = p/\sqrt{2}$.

Когда $\lambda_1 = \lambda,\ \lambda_2 = -\lambda$, из неравенства (34) имеем

$$|\lambda| < \operatorname{Re}\lambda + 2p,$$

что, в свою очередь, равносильно неравенству

$$(\operatorname{Im}\lambda)^2 < 4p(\operatorname{Re}\lambda + p). \tag{37}$$

Множество точек λ, удовлетворяющих условию (37), есть внутренность параболы вдоль вещественной оси с центром в точке $\lambda = -p$.

§ 3. Теоремы единственности решения задачи T для уравнения с обобщенным оператором Трикоми

3.1. Случай $n > 0$, λ_1 и λ_2 — действительные числа. В этом пункте рассмотрим задачу (3)–(6) для уравнения (1) при всех $n > 0$.

Предварительно для уравнения (1) в области D_- рассмотрим задачу Дарбу с данными $u_y(x,0) = \nu(x)$, $0 < x < l$, $u|_{AC} \equiv 0$, решение которой построено в [38, 39]. Отсюда найдем соотношение, связывающее функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\tau(x) = k_1 \int\limits_0^x (x-t)^{-2\beta} \overline{J}_{-\beta}[\sqrt{\lambda_2}(x-t)]\nu(t)\,dt, \tag{38}$$

где

$$k_1 = \frac{\Gamma(\beta)(2-4\beta)^{2\beta}}{2\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}, \quad \beta = \frac{n}{2(n+2)} \in \left(0, \frac{1}{2}\right),$$

$$\overline{J}_{-\beta}(z) = \Gamma(1-\beta)\left(\frac{z}{2}\right)^{\beta} J_{-\beta}(z),$$

$J_{-\beta}(z)$ — функция Бесселя первого рода.

Лемма 5. *Если $u|_{AC} = 0$ и $\lambda_2 \geq 0$, то для любого регулярного решения $u(x,y)$ уравнения (1) при любом $x \in [0,l]$ имеет место неравенство*

$$J = \int\limits_0^x u(t,0)u_y(t,0)\,dt = \int\limits_0^x \tau(t)\nu(t)\,dt \geq 0. \tag{39}$$

Доказательство. На основании (38) и (21) преобразуем интеграл

$$
\begin{aligned}
J &= k_1 \int\limits_0^x \nu(t) \int\limits_0^t (t-s)^{-2\beta} \overline{J}_{-\beta}[\sqrt{\lambda_2}(t-s)]\nu(s)\,dsdt \\
&= k_1 k_2 \int\limits_0^x \nu(t) \int\limits_0^t (t-s)^{-2\beta} \int\limits_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}-\beta} \cos[\sqrt{\lambda_2}(t-s)\xi]\,d\xi dsdt \\
&= k_1 k_2 \int\limits_0^1 (1-\xi^2)^{-\beta-\frac{1}{2}}\,d\xi \int\limits_0^x \nu(t) \int\limits_0^t (t-s)^{-2\beta} \cos[\sqrt{\lambda_2}(t-s)\xi]\,dsdt, \qquad (40)
\end{aligned}
$$

где

$$k_2 = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)}.$$

С учетом формулы из [1, с. 385]

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \cos kt\,dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{k^\alpha} \cos\frac{\alpha\pi}{2}, \quad k>0,\ 0<\alpha<1,$$

функцию $(t-s)^{-2\beta}$ по аналогии с тем, как сделал Трикоми, представим в следующем виде:

$$(t-s)^{-2\beta} = \frac{1}{\Gamma(2\beta)\cos\pi\beta} \int\limits_0^{+\infty} \eta^{2\beta-1} \cos\eta(t-s)\,d\eta. \qquad (41)$$

Подставляя (41) в (40), имеем

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{k_1 k_2}{\Gamma(2\beta)\cos\pi\beta} \int\limits_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-\beta-\frac{1}{2}}\,d\xi \int\limits_0^{+\infty} \eta^{2\beta-1}\,d\eta \\
&\qquad \times \int\limits_0^x \nu(t) \int\limits_0^t \nu(s) \cos\eta(t-s) \cos[\sqrt{\lambda_2}(t-s)\xi]\,dsdt \\
&= k_3 \int\limits_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-\beta-\frac{1}{2}}\,d\xi \int\limits_0^{+\infty} \eta^{2\beta-1}\,d\eta \int\limits_0^x \sum_{i=1}^4 Q_i(t,\xi,\eta) \int\limits_0^t Q_i(s,\xi,\eta)\,dsdt, \qquad (42)
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{gathered}
Q_1(t,\xi,\eta) = \nu(t)\cos\lambda_2 t\xi \cos\eta t, \quad Q_2(t,\xi,\eta) = \nu(t)\sin\lambda_2 t\xi\cos\eta t, \\
Q_3(t,\xi,\eta) = \nu(t)\cos\lambda_2 t\xi \sin\eta t, \quad Q_4(t,\xi,\eta) = \nu(t)\sin\lambda_2 t\xi \sin\eta t, \\
k_3 = \frac{k_1 k_2}{\Gamma(2\beta)\cos\pi\beta}.
\end{gathered}
$$

Вводя новые функции

$$\Phi_i(t,\xi,\eta) = \int\limits_0^t Q_i(s,\xi,\eta)\,ds, \qquad (43)$$

равенство (42) можно записать в виде

$$J = k_3 \int\limits_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{-\beta-\frac{1}{2}}\, d\xi \int\limits_{0}^{+\infty} \eta^{2\beta-1}\, d\eta \int\limits_{0}^{x} \sum_{i=1}^{4} \Phi_i(t,\xi,\eta)\Phi'_{it}(t,\xi,\eta)\, dt$$

$$= \frac{k_3}{2} \int\limits_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{-\beta-\frac{1}{2}}\, d\xi \int\limits_{0}^{+\infty} \eta^{2\beta-1}\, d\eta \int\limits_{0}^{x} \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{4} \Phi_i^2(t,\xi,\eta)\right) dt$$

$$= \frac{k_3}{2} \int\limits_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{-\beta-\frac{1}{2}}\, d\xi \int\limits_{0}^{\eta} \eta^{2\beta-1} \sum_{i=1}^{4} \Phi_i^2(x,\xi,\eta)\, d\eta \ge 0.$$

Лемма 6. *Если $u|_\Gamma = 0$, то справедлива оценка*

$$\iint\limits_{D_+} y^n u^2(x,y)\, dxdy \le C_{D_+} \iint\limits_{D_+} \left(y^n u_x^2 + u_y^2\right) dxdy, \tag{44}$$

где положительная постоянная C_{D_+} зависит только от диаметра области D_+ по направлению оси абсцисс.

Доказательство. Введем в рассмотрение прямоугольник $\Omega = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le c\}$, где $a = \min\limits_{\overline{D}_+} x$, $b = \max\limits_{\overline{D}_+} x$, $c = \max\limits_{\overline{D}_+} y$, который содержит область D_+. Функцию $u(x,y)$ продолжим нулем за кривой Γ. Справедливо равенство

$$y^{\frac{n}{2}} u = \int\limits_{a}^{x} y^{\frac{n}{2}} u_t(t,y)\, dt.$$

Отсюда на основании неравенства Коши — Буняковского имеем

$$y^n u^2 \le (x-a) \int\limits_{a}^{x} y^n u_t^2(t,y)\, dt \le (x-a) \int\limits_{a}^{b} y^n u_x^2(x,y)\, dx.$$

Интегрируя данное неравенство по x от a до b, получим

$$\int\limits_{a}^{b} y^n u^2(x,y)\, dx \le \frac{(b-a)^2}{2} \int\limits_{a}^{b} y^n u_x^2(x,y)\, dx. \tag{45}$$

Снова интегрируя по y от 0 до c неравенство (45), имеем

$$\iint\limits_{\Omega} y^n u^2\, dxdy \le \frac{(b-a)^2}{2} \iint\limits_{\Omega} y^n u_x^2\, dxdy \le \frac{(b-a)^2}{2} \iint\limits_{\Omega} \left(y^n u_x^2 + u_y^2\right) dxdy.$$

Отсюда следует оценка (44).

Лемма 7. *Если $u|_{AC} = 0$ и $\lambda_2 < 0$, то для любого регулярного решения уравнения (1) при любом $x \in [0,l]$ имеет место неравенство*

$$J_a = \int\limits_{0}^{x} e^{-2at} u(t,0) u_y(t,0)\, dt \ge 0 \tag{46}$$

при $a = \mathrm{const} \geq \alpha$.

Доказательство. Пусть в уравнении (1) $\lambda_2 < 0$. В этом случае в формуле (38) надо учесть, что $\mu_2 = \sqrt{\lambda_2} = i\sqrt{|\lambda_2|} = i\alpha$, $\alpha = \sqrt{|\lambda_2|} > 0$, и в силу формулы (25) имеем

$$\begin{aligned}
&\overline{J}_{-\beta}[\sqrt{\lambda_2}(x-t)] = \overline{J}_{-\beta}[i\alpha(x-t)] \\
&= \Gamma(1-\beta)\left(\frac{i\alpha(x-t)}{2}\right)^{\beta} J_{-\beta}[i\alpha(x-t)] = \Gamma(1-\beta)\left(\frac{i\alpha(x-t)}{2}\right)^{\beta} i^{-\beta} I_{-\beta}[\alpha(x-t)] \\
&= \Gamma(1-\beta)\left(\frac{\alpha(x-t)}{2}\right)^{\beta} \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)}\left(\frac{\alpha(x-t)}{2}\right)^{-\beta} \times \int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{-\beta-\frac{1}{2}} e^{-\alpha(x-t)\xi}\, d\xi \\
&= \frac{\Gamma(1-\beta)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)} \int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{-\beta-\frac{1}{2}} e^{-\alpha(x-t)\xi}\, d\xi. \qquad (47)
\end{aligned}$$

На основании формул (38) и (47) преобразуем интеграл в правой части доказываемого неравенства (46):

$$\begin{aligned}
J_a &= k_1 \int_0^x e^{-2at}\nu(t) \int_0^t (t-s)^{-2\beta}\overline{J}_{-\beta}[\sqrt{\lambda_2}(t-s)]\nu(s)\, dsdt \\
&= k_1 k_2 \int_0^x e^{-2at}\nu(t) \int_0^t (t-s)^{-2\beta}\nu(s) \int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{-\beta-\frac{1}{2}} e^{-\alpha(t-s)\xi}\, d\xi dt \\
&= k_1 k_2 \int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{-\beta-\frac{1}{2}}\, d\xi \int_0^x e^{-2at}\nu(t) \int_0^t \nu(s)(t-s)^{-2\beta} e^{-\alpha(t-s)\xi}\, dsdt. \qquad (48)
\end{aligned}$$

В (48) функцию $(t-s)^{-2\beta}$ по формуле (41) заменим ее интегральным представлением. Тогда получим

$$\begin{aligned}
J_a &= k_3 \int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{-\beta-\frac{1}{2}}\, d\xi \int_0^{+\infty} \eta^{2\beta-1}\, d\eta \int_0^x e^{-2t(a+\alpha\xi)}\nu(t) e^{\alpha t\xi} \\
&\quad \times \int_0^t \nu(s) e^{\alpha s\xi} \cos\eta(t-s)\, dsdt = \frac{k_3}{2}\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{-\beta-\frac{1}{2}}\, d\xi \\
&\quad \times \int_0^{+\infty} \eta^{2\beta-1}\, d\eta \int_0^x e^{-2t(a+\alpha\xi)} \frac{d}{dt}\left[M_1^2(t,\xi,\eta) + M_2^2(t,\xi,\eta)\right] dt \\
&= \frac{k_3}{2}\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{-\beta-\frac{1}{2}}\, d\xi \int_0^{+\infty} \eta^{2\beta-1} \Bigg\{ \left[M_1^2(x,\xi,\eta) + M_2^2(x,\xi,\eta)\right] e^{-2x(a+\alpha\xi)} \\
&\quad + 2(a+\alpha\xi) \int_0^x \left[M_1^2(t,\xi,\eta) + M_2^2(t,\xi,\eta)\right] e^{-2t(a+\alpha\xi)} dt \Bigg\}\, d\eta \geq 0,
\end{aligned}$$

где

$$M_1(t,\xi,\eta) = \int\limits_0^t \nu(s)e^{\alpha s\xi}\cos\eta s\,ds, \quad M_2(t,\xi,\eta) = \int\limits_0^t \nu(s)e^{\alpha s\xi}\sin\eta s\,ds.$$

Теорема 3. *Если в классе регулярных решений уравнения* (1) *в области* D *существует решение задачи* T, *то оно единственно при всех* λ_1 *и* λ_2, *удовлетворяющих одному из следующих условий:*

1) $\lambda_2 \geq 0$ *и* $\lambda_1 > -p_1 = -1/C_{D_+}$, *где* C_{D_+} — *положительная постоянная из леммы* 6;

2) $\lambda_2 < 0$ *и* $\lambda_1 > -\lambda_2 - p_1$.

Доказательство. 1. Пусть $u(x,y)$ — решение однородной задачи T из класса регулярных решений уравнения (1). Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{D_+^{\varepsilon,\delta}} u(y^n u_{xx} + u_{yy} - \lambda_1 y^n u)\,dxdy = 0.$$

Интегрируя его по частям, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и $\delta \to 0$ и учитывая граничное условие $u|_\Gamma = 0$, получим

$$\iint\limits_{D_+} \left(y^n u_x^2 + u_y^2 + \lambda_1 y^n u^2\right) dxdy + \int\limits_0^l u(x,0)u_y(x,0)\,dx = 0. \tag{49}$$

В силу (49) и леммы 4 при $\lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 \geq 0$ получим, что $u(x,y) \equiv 0$ в D. Если $\lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 < 0$, то из (49) имеем

$$\iint\limits_{D_+} \left(y^n u_x^2 + u_y^2\right) dxdy \leq (-\lambda_1) \iint\limits_{D_+} y^n u^2\,dxdy. \tag{50}$$

Тогда из оценок (50) и (44) следует, что

$$\iint\limits_{D_+} \left(y^n u_x^2 + u_y^2\right) dxdy \leq -\lambda_1 C_{D_+} \iint\limits_{D_+} \left(y^n u_x^2 + u_y^2\right) dxdy.$$

Из последнего неравенства при $\lambda_1 > -p_1$ вытекает, что $u(x,y) \equiv 0$ в D.

2. Аналогично теореме 2 рассмотрим функцию $\omega(x,y) = \exp(-ax)u(x,y)$, где $u(x,y)$ — решение однородной задачи T для уравнения (1), $a = \alpha = \sqrt{|\lambda_2|}$, и интеграл

$$\iint\limits_{D_+^{\varepsilon,\delta}} \omega[y^n\omega_{xx} + \omega_{yy} + 2ay^n\omega_x + (a^2 - \lambda_1)y^n\omega]\,dxdy = 0.$$

Интегрируя по частям и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и $\delta \to 0$, получим

$$\iint\limits_{D_+} \left[y^n\omega_x^2 + \omega_y^2 - (a^2 - \lambda_1)y^n\omega^2\right] dxdy + \int\limits_0^l e^{-2ax}u(x,0)u_y(x,0)\,dx = 0. \tag{51}$$

Из равенства (51) в силу леммы 5 при $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_1 \geq -\lambda_2$ следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в D. Если $-\lambda_2 > \lambda_1 > -\lambda_2 - p_1$, то из (51) имеем

$$\iint\limits_{D_+} \left(y^n \omega_x^2 + \omega_y^2\right) dxdy \leq -(\lambda_1 + \lambda_2) \iint\limits_{D_+} y^n \omega^2 \, dxdy$$

$$\leq -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{p_1} \iint\limits_{D_+} \left(y^n \omega_x^2 + \omega_y^2\right) dxdy.$$

Отсюда при $\lambda_1 + \lambda_2 + p_1 > 0$ вытекает также единственность решения задачи T для уравнения (1).

3.2. Случай $n > 0$, λ_1 и λ_2 — комплексные числа.

Лемма 8. *Если $u|_{AC} = 0$, то для любого регулярного решения $u(x, y)$ уравнения (1) при любом $x \in [0, l]$ имеет место неравенство*

$$\operatorname{Re} J_a = \operatorname{Re} \int\limits_0^x e^{-2at} \bar{u}(t, 0) u_y(t, 0) \, dt \geq 0,$$

когда $a = \text{const} \geq |\mu_{22}|$.

Доказательство. Используя формулы (38), (21) и (41), преобразуем интеграл J_a:

$$J_a = k_1 \int\limits_0^x e^{-2at} \nu(t) \int\limits_0^t (t - s)^{-2\beta} \overline{J}_{-\beta}[\bar{\mu}_2(t - s)] \bar{\nu}(s) \, dsdt$$

$$= k_1 k_2 \int\limits_0^x e^{-2at} \nu(t) \int\limits_0^t (t - s)^{-2\beta} \; \bar{\nu}(s) \int\limits_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{-\beta - \frac{1}{2}} e^{i\bar{\mu}_2(t-s)\xi} \, d\xi dt$$

$$= k_1 k_2 \int\limits_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{-\beta - \frac{1}{2}} \int\limits_0^x e^{-2at} \nu(t) \int\limits_0^t (t - s)^{-2\beta} \nu(s) e^{(\mu_{22} + i\mu_{21})(t-s)\xi} \, dsdt$$

$$= k_3 \int\limits_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{-\beta - \frac{1}{2}} \, d\xi \int\limits_0^{+\infty} \eta^{2\beta - 1} \, d\eta \int\limits_0^x e^{-2t(a - \mu_{22}\xi)} \nu(t) e^{-\mu_{22} t\xi}$$

$$\times \int\limits_0^t \bar{\nu}(s) e^{-\mu_{22} s\xi} \cos \eta(t - s) e^{i\mu_{21}(t-s)\xi} \, dsdt. \qquad (52)$$

Аналогично доказательству леммы 4 выделим вещественную часть равенства (52). На основании (31) введем вспомогательные функции

$$N_1(t, \xi, \eta) = \int\limits_0^t P_1(s, \xi) \cos \eta s \, ds, \quad N_2(t, \xi, \eta) = \int\limits_0^t P_1(s, \xi) \sin \eta s \, ds,$$

$$N_3(t, \xi, \eta) = \int\limits_0^t P_2(s, \xi) \cos \eta s \, ds, \quad N_4(t, \xi, \eta) = \int\limits_0^t P_2(s, \xi) \sin \eta s \, ds,$$

где $P_i(t,\xi)$ определены выше в лемме 4. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} J_a &= \frac{k_3}{2}\int\limits_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{-\beta-\frac{1}{2}}\,d\xi\int\limits_{0}^{+\infty}\eta^{2\beta-1}\,d\eta\int\limits_{0}^{x}e^{-2t(a-\mu_{22}\xi)}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{4}N_i^2(t,\xi,\eta)\,dt\\ &= \frac{k_3}{2}\int\limits_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{-\beta-\frac{1}{2}}\,d\xi\int\limits_{0}^{\infty}\eta^{2\beta-1}\Bigg[e^{-2x(a-\mu_{22}\xi)}\sum_{i=1}^{4}N_i^2(x,\xi,\eta)\\ &\qquad + 2(a-\mu_{22}\xi)\int\limits_{0}^{x}e^{-2t(a-\mu_{22}\xi)}\sum_{i=1}^{4}N_i^2(t,\xi,\eta)\,dt\Bigg]\,d\eta \geq 0.\end{aligned}$$

Теорема 4. *Если в классе регулярных решений уравнения* (1) *в области* D *существует решение задачи* T, *то оно единственно при всех* λ_1 *и* λ_2, *удовлетворяющих неравенству*

$$\operatorname{Re}\lambda_1 > |\operatorname{Im}\mu_2|^2 - p_1. \tag{53}$$

Доказательство. Аналогично теореме 3 рассмотрим функцию $\omega(x,y) = \exp(-ax)u(x,y)$, где $a = |\mu_{22}| = |\operatorname{Im}\mu_2|$, которая в D_+ является решением эллиптического уравнения

$$N\omega = y^n\omega_{xx} + \omega_{yy} + 2ay^n\omega_x + (a^2-\lambda_1)y^n\omega = 0.$$

Рассмотрим тождество

$$\overline{\omega}N\omega = (\overline{\omega}y^n\omega_x)_x + (\overline{\omega}\omega_y)_y - y^n\overline{\omega}_x\omega_x - \overline{\omega}_y\omega_y + 2ay^n\overline{\omega}\omega_x + (a^2-\lambda_1)y^n|\omega|^2 = 0$$

и интегрируем его по области $D_+^{\varepsilon,\delta}$. Из данного интеграла найдем вещественную часть

$$\iint\limits_{D_+^{\varepsilon,\delta}}\left[y^n\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}|\omega|^2 + a|\omega|^2\right)_x + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}|\omega|^2\right)_y\right]dxdy - \iint\limits_{D_+^{\varepsilon,\delta}}\left[y^n\omega_x^2 + \omega_y^2 - \operatorname{Re}(a^2-\lambda_1)y^n|\omega|^2\right]dxdy = 0. \tag{54}$$

Применяя формулу Грина к первому интегралу равенства (54) и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, $\delta\to 0$, получим

$$\iint\limits_{D_+}\left(y^n\omega_x^2+\omega_y^2\right)dxdy + \operatorname{Re}(a^2-\lambda_1)\iint\limits_{D_+}y^n|\omega|^2\,dxdy + \operatorname{Re}\int\limits_{0}^{l}e^{-2ax}\bar{u}(x,0)u_y(x,0)\,dx = 0. \tag{55}$$

В силу равенства (55) и леммы 8 при $\operatorname{Re}\lambda_1 \geq |\operatorname{Im}\mu_2|^2$ следует, что $u(x,y)\equiv 0$ в D. Если $-p_1 < \operatorname{Re}\lambda_1 - |\mu_2|^2 < 0$, то из равенства (55) и леммы 6 имеем

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_+}\left(y^n\omega_x^2+\omega_y^2\right)dxdy &\leq -(\operatorname{Re}\lambda_1 - a^2)\iint\limits_{D_+}y^n|\omega|^2\,dxdy\\ &\leq -\frac{\operatorname{Re}\lambda_1^2 - a^2}{p_1}\iint\limits_{D_+}\left(y^n\omega_x^2+\omega_y^2\right)dxdy.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $u(x,y) \equiv 0$ в D.

Таким образом, когда в уравнении (1) λ_1 и λ_2 — комплексные параметры, на основании теоремы 4 неравенство (53) является достаточным условием единственности решения задачи T для уравнения (1). Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то условие (53) равносильно неравенству

$$|\lambda| < 3\operatorname{Re}\lambda + 2p_1,$$

которое, в свою очередь, равносильно системе неравенств

$$\operatorname{Re}\lambda > -\frac{2}{3}p_1, \quad \frac{\left(\operatorname{Re}\lambda + \frac{3}{4}p_1\right)^2}{(p_1/4)^2} - \frac{(\operatorname{Im}\lambda)^2}{(p_1/\sqrt{2})^2} > 1.$$

Если $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = -\lambda_1 = -\lambda$, то условие (53) равносильно неравенству

$$|\lambda| < \operatorname{Re}\lambda + 2p_1$$

или системе неравенств

$$\operatorname{Re}\lambda > -2p_1, \quad (\operatorname{Im}\lambda)^2 < 4p_1(\operatorname{Re}\lambda + p_1),$$

что представляет собой внутренность параболы с вершиной в точке $(-p_1, 0)$ вдоль положительной оси комплексной плоскости (λ).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Трикоми Ф.* О линейных уравнениях смешанного типа. М.: Гостехиздат, 1947.
2. *Франкль Ф. И.* О задачах Чаплыгина С. А. для смешанных до и сверхзвуковых течений // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1945. Т. 9, № 2. С. 121–142.
3. *Protter M. H.* Uniqueness theorems for the Tricomi problem // J. Rational Mech. Anal. 1953. Part 1. V. 2, N 1. P. 107–114; 1955. Part 2. V. 4, N 5. P. 721–733.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка, 1965.
5. *Михайлов В. П.* Об обобщенной задаче Трикоми // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175, № 5. С. 1012–1014.
6. *Нахушев А. М.* К априорным оценкам для задачи Трикоми и Дарбу // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1. С. 107–117.
7. *Бицадзе А. В.* О некоторых задачах смешанного типа // Докл. АН СССР. 1950. Т. 70, № 4. С. 561–565.
8. *Бицадзе А. В.* К проблеме уравнений смешанного типа: Дис. … д-ра физ.-мат. наук: МИАН, 1951.
9. *Germain P., Bader R.* Sur le probleme de Tricomi // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. 1951. V. 232. P. 463–465.
10. *Germain P., Bader R.* Sur le probleme de Tricomi // Rend. Circ. Mat. Palermo, II Ser. 1953. V. 2. P. 53–69.
11. *Бабенко К. И.* К теории уравнений смешанного типа: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. МИАН, 1952.
12. *Agmon S., Nirenberg L., Protter M.* A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type // Commun. Pure Appl. Math. 1953. V. VI, N 4. P. 455–470.
13. *Пулькин С. П.* К вопросу о решении задачи Трикоми для уравнения Чаплыгина // Изв. вузов. Математика. 1958. Т. 3, № 2. С. 219–226.
14. *Волкодавов В. Ф., Невоструев Л. М.* Принцип локального экстремума для уравнения $yz_{xx} + z_{yy} + c(x,y)z = 0$ и его применения // Волж. мат. сб. (Куйбышев). 1966. № 4. С. 14–23.
15. *Сабитов К. Б.* О задаче Трикоми для уравнения Чаплыгина // Докл. АН. 1994. Т. 335, № 4. С. 430–432.
16. *Кальменов Т. Ш.* О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева — Бицадзе // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 8. С. 1718–1725.

17. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962.

18. *Гайдай Н. Н.* О существовании спектра для оператора Трикоми // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 1. С. 31–38.

19. *Пономарев С. М.* К задаче на собственные значения для уравнения Лаврентьева — Бицадзе // Докл. АН СССР. 1977. Т. 233, № 1. С. 39–40.

20. *Пономарев С. М.* О задаче Трикоми для системы уравнений смешанного типа на плоскости // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242, № 6. С. 1256–1257.

21. *Пономарев С. М.* О единственности решения задачи Трикоми для одного уравнения смешанного типа на плоскости // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 183–184.

22. *Пономарев С. М.* Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева — Бицадзе: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. МГУ, 1981.

23. *Моисеев Е. И.* Некоторые теоремы единственности для уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238, № 3. С. 531–533.

24. *Моисеев Е. И.* О теоремах единственности для уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242, № 1. С. 48–51.

25. *Моисеев Е. И.* Некоторые свойства решения уравнения Лаврентьева — Бицадзе // Мат. заметки. 1979. Т. 26, № 4. С. 535–546.

26. *Моисеев Е. И.* О задаче Трикоми для уравнения Геллерстедта // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246, № 2. С. 275–278.

27. *Моисеев Е. И.* Некоторые вопросы спектральной теории уравнений смешанного типа: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. МГУ, 1979.

28. *Моисеев Е. И.* О единственности решения задачи Трикоми для уравнения смешанного типа // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 5. С. 707–718.

29. *Моисеев Е. И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: МГУ, 1988.

30. *Моисеев Е. И.* О расположении спектра задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева — Бицадзе // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 1. С. 97–106.

31. *Ежов А. М., Пулькин С. П.* Оценка решения задачи Трикоми для одного уравнения смешанного типа // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193, № 5. С. 978–980.

32. *Schneider M.* Schwache and halbstarke Losungen des Tricomi problems // Math. Nachr. 1974. V. 60. P. 167–180.

33. *Моисеев Е. И.* О представлении решения задачи Трикоми в виде биортогонального ряда // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 7. С. 1229–1237.

34. *Сабитов К. Б.* О задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева — Бицадзе со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 11. С. 1977–1984.

35. *Сабитов К. Б.* Принцип экстремума для одного уравнения второго рода в бесконечной области // Дифференц. уравнения. Рязань. 1977. № 10. С. 146–148.

36. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966. Т. 2.

37. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.

38. *Бакиевич Н. И.* Сингулярные задачи Трикоми для уравнения $\eta^\alpha u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\mu^2\eta^\alpha u=0$ // Волж. мат. сб. 1963. Вып. 1. С. 42–52; Изв. вузов. Математика. 1964. Т. 2. С. 7–13.

39. *Капилевич М. Б.* О функциях Грина — Адамара для сингулярных задач Трикоми // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1966. N 3. P. 317–324.

Статья поступила 13 августа 2012 г.

Сабитова Юлия Камилевна
Стерлитамакская гос. педагогическая академия,
пр. Ленина, 37, Стерлитамак 453100
ori_05@mail.ru