Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2015. Том 56, № 1

УДК 515.164

КВАЗИЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБЛАСТЬ КВАЗИЛИНЕЙЧАТОГО МНОГООБРАЗИЯ И СТЕПЕНЬ КВАЗИЛИНЕЙЧАТОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

А. Г. Аббасов

Аннотация. Вводится квазицилиндрическая структура в $H_s(\mathbb{M},\mathbb{N})$, где $\partial\mathbb{N} \neq \varnothing$, определяется степень фредгольмова специального квазилинейчатого отображения, заданного на такой области, и доказывается ее основное свойство.

Ключевые слова: квазицилиндрическая область, фредгольмово квазилинейчатое многообразие, фредгольмово специальное квазилинейчатое отображение, степень отображения.

§ 1. Введение

Как известно, не для каждого бесконечномерного отображения можно определить степень, обладающую основными свойствами классической (конечномерной) степени [1]. С этой целью введены различные (хорошо известные) классы бесконечномерных отображений, одним из которых является класс фредгольмовых квазилинейчатых (FQL)-отображений, определенных на банаховом пространстве [2]. В дальнейшем эта теория получила развитие в [3, 4]. Если в [3] теория степени FQL-отображения была расширена на квазицилиндрическую (QC)-область банахова пространства, то в [4] она была расширена на фредгольмово квазилинейчатое (FQL)-многообразие, в котором в качестве FQL-многообразия было взято гильбертово многообразие $H_s(\mathbb{M},\widetilde{\mathbb{N}})$ для достаточно большого s, где $\mathbb{M}$ и $\widetilde{\mathbb{N}}$ — компактные гладкие многообразия и $\partial\widetilde{\mathbb{N}} = \varnothing$.

Целью настоящей работы является распространение теории степени на бесконечномерные многообразия с краем особого вида, а именно на QC-области FQL-многообразия. Для этого в § 2 рассматривается пространство $H_s(\mathbb{M},\mathbb{N})$, s достаточно большое, где $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ — компактные гладкие многообразия, а $\partial\mathbb{N} \neq \varnothing$. В отличие от предыдущего случая (когда $\partial\widetilde{\mathbb{N}} = \varnothing$) последнее не является многообразием [5]), поэтому в нем невозможно ввести (дополнительную) структуру FQL-многообразия. Однако в множестве $\widetilde{\Omega} = H_s(\mathbb{M},\operatorname{int}(\mathbb{N}))$ можно ввести структуру QC-области FQL-многообразия. Этому и посвящен весь § 2, в котором проверяется выполнение для множества $\widetilde{\Omega}$ всех условий определения 2.1. Точнее, сначала (в п. (a) § 2) доказывается, что $\widetilde{\Omega}$ — область FQL-многообразия $X = H_s(\mathbb{M},\widetilde{\mathbb{N}})$, где $\widetilde{\mathbb{N}}$ — дубль многообразия $\mathbb{N}$. Далее (в пп. (b_1), (b_2)) доказывается, что $\widetilde{\Omega}$ можно исчерпывать изнутри (в каждом шаре объемлющего банахова пространства) цилиндрическими (C)-областями ($\widetilde{\Omega}_N$), т. е. гомеоморфными образами ($\Phi_N(D_N)$) ограниченных областей (D_N) аффинных расслоений

$(\eta_N = (Y_N, q_N, \Omega_N))$. Заметим, что впервые понятие QC-области, а точнее QC-области банахова пространства, введено в [3]. Наша QC-область является расширением на FQL-многообразие последнего.

В § 3 введено понятие фредгольмова специального квазилинейчатого ($FSQL$)-отображения, определенного на QC-области FQL-многообразия, и приведен пример. Отметим, что $FSQL$-отображения — это те же FQL-отображения, приспособленные к структуре FQL-многообразия. (В [6] доказано совпадение классов FQL- и $FSQL$-отображений.)

В § 4 вводится понятие степени $FSQL$-отображения, определенного на QC-области FQL-многообразия. Введение степени проводится с помощью метода, ставшего уже классическим, а именно доказывается стабилизация степеней (специальным образом построенных) конечномерных отображений, предел которых и принимается за степень исследуемого отображения. После этого доказывается основное ее свойство, а именно при $\deg(f) \neq 0$ уравнение $f(x) = z$ имеет решение для любого $z \in Z$, где $f : \widetilde{\Omega} \to Z$ — $FSQL$-отображение, определенное на QC-области FQL-многообразия, а Z — реальное банахово пространство.

§ 2. *QC*-область *FQL*-многообразия

Пусть X — FQL-многообразие, вложенное в банахово пространство E, $\eta_N = (Y_N, q_N, \Omega_N)$ — аффинное расслоение, вложенное в банахово пространство Y, с тотальным пространством Y_N $(Y_N \subseteq Y)$, базой Ω_N, являющейся N-мерным многообразием, и непрерывным эпиморфизмом $q_N : Y_N \to \Omega_N$. Более того, предположим, что $\operatorname{codim}_Y\bigl(Y_\lambda^N\bigr) = N$ для любого $\lambda \in \Omega_N$, где $Y_\lambda^N = q_N^{-1}(\lambda)$ — слой η_N. Пусть D_N — ограниченная область в Y_N и $\Phi_N : D_N \to X$ — гомеоморфизм на свой образ, который обозначим через $\widetilde{\Omega}_N$:

$$\Phi_N(D_N) = \widetilde{\Omega}_N. \tag{2.1}$$

Множество вида (2.1) будем называть *цилиндрической* (C)-*областью* FQL-многообразия X.

Определение 2.1. Подмножество $\widetilde{\Omega}$ FQL-многообразия X называется QC-*областью* X, если

(a) оно является областью X;

(b) существует последовательность C-областей $\widetilde{\Omega}_N$, исчерпывающих $\widetilde{\Omega}$ изнутри в каждом шаре из E, т. е.

(b_1) $\forall R > 0\ \exists N_R\ \forall N > N_R\ \widetilde{\Omega}_{N,R} \subset \widetilde{\Omega}_R$, где $\widetilde{\Omega}_{N,R} = \widetilde{\Omega}_N \cap B_R$, $\widetilde{\Omega}_R = \widetilde{\Omega} \cap B_R$, а B_R — шар в E радиуса R;

(b_2) $\forall R > 0\ \forall \gamma > 0\ \exists N_{R,\gamma} > N_R\ \forall N > N_{R,\gamma}\ \widetilde{\Omega}_R^\gamma \subset \widetilde{\Omega}_{N,R}$, где $\widetilde{\Omega}_R^\gamma = \{x \in \widetilde{\Omega}_R \mid \operatorname{dist}(x, \partial\widetilde{\Omega}) > \gamma,\ \gamma > 0\}$, а $\operatorname{dist}(x, \partial\widetilde{\Omega}) = \inf\limits_{x'} \|x - x'\|_E$, $x' \in \partial\widetilde{\Omega}$.

2.1. Пример QC-области FQL-многообразия. Пусть $\widetilde{X} = H_s(\mathbb{M}, \mathbb{N})$, s достаточно большое, где $\mathbb{M}$, $\mathbb{N}$ — компактные гладкие многообразия размерностей соответственно m, n и $\partial\mathbb{N} \neq \varnothing$. Обозначим $\widetilde{\Omega} = H_s(\mathbb{M}, \operatorname{int}(\mathbb{N})) = \{u \in \widetilde{X} \mid u(x) \in \operatorname{int}(\mathbb{N})\ \forall x \in \mathbb{M}\}$. Очевидно, что $\partial\widetilde{\Omega} = \{v \in \widetilde{X} \mid \exists x_v \in \mathbb{M}\quad v(x_v) \in \partial\mathbb{N}\}$. Покажем, что $\widetilde{\Omega}$ — QC-область FQL-многообразия $X = H_s(\mathbb{M}, \widetilde{\mathbb{N}})$, где $\widetilde{\mathbb{N}}$ — дубль многообразия $\mathbb{N}$. Предположим, что $\widetilde{\mathbb{N}}$ и X вложены соответственно в R^{2n+1} и $H_s(\mathbb{M}, R^{2n+1})$ (для простоты отображения вложения будут опущены). Кроме того, пусть $\widetilde{\Omega}_R = \widetilde{\Omega} \cap B_R$, где $B_R = \{u \in H_s(\mathbb{M}, R^{2n+1}) \mid \|u\|_s < R\}$, а $\| \|_s$ — норма в $H_s(\mathbb{M}, R^{2n+1})$.

(a) Сначала покажем, что $\widetilde{\Omega}$ — область в X. Предположим обратное. Тогда будут существовать точка $u_0 \in \widetilde{\Omega}$ и последовательность $\{v_l\} \subset X - \widetilde{\Omega}$ такие, что $v_l \to u_0$ в $H_s(\mathbb{M}, R^{2n+1})$. В силу того, что $\{v_l\} \subset X - \widetilde{\Omega}$, для любого v_l существует $x_l \in \mathbb{M}$ такое, что $v_l(x_l) \in \widetilde{\mathbb{N}} - \operatorname{int}(\mathbb{N})$. Так как $\mathbb{M}$ — компакт, найдутся $\{x_{l_k}\} \subset \{x_l\}$ и $x_0 \in \mathbb{M}$ такие, что $x_{l_k} \to x_0$. Поскольку $v_l \to u_0$ в $H_s(\mathbb{M}, R^{2n+1})$, имеем $v_{l_k}(x_{l_k}) \to u_0(x_0)$ в R^{2n+1}. Действительно,

$$\|v_{l_k}(x_{l_k}) - u_0(x_0)\|_{2n+1} \le \|v_{l_k}(x_{l_k}) - v_{l_k}(x_0)\|_{2n+1} + \|v_{l_k}(x_0) - u_0(x_0)\|_{2n+1} \to 0$$

при $k \to \infty$ в силу того, что из условия $\|v_l - u_0\|_s \to 0$ следует, что $\|v_l - u_0\|_C \to 0$. Значит,

$$\|v_{l_k}(x) - u_0(x)\|_{2n+1} \to 0, \ x \in \mathbb{M}, \quad \text{при} \ \ k \to \infty$$

(здесь $\|\cdot\|_{2n+1}$ — норма в R^{2n+1}). Поскольку $v_{l_k}(x_{l_k}) \in \widetilde{\mathbb{N}} - \operatorname{int}(\mathbb{N})$ для любого k и $(\widetilde{\mathbb{N}} - \operatorname{int}(\mathbb{N}))$ — компакт, то $u_0(x_0) \in \widetilde{\mathbb{N}} - \operatorname{int}(\mathbb{N})$, т. е. $u_0 \in X - \widetilde{\Omega}$. Это противоречит предположению. □

(b) Теперь начнем строить последовательность C-областей, исчерпывающих $\widetilde{\Omega}$ изнутри в каждом шаре из $H_s(\mathbb{M}, R^{2n+1})$. (Заметим, что $H_s(\mathbb{M}, R^{2n+1})$ соответствует пространству E из определения 2.1.) Для этого сначала построим базу (Ω_N) аффинного расслоения (η_N).

Пусть

$$\mathbb{N}^v = \{y \in \mathbb{N} \mid \operatorname{dist}(y, \partial\mathbb{N}) > v, v > 0\}, \ \text{где} \ \operatorname{dist}(y, \partial\mathbb{N}) = \min_y \|y - y'\|_{2n+1}, \ y' \in \partial\mathbb{N}.$$

Очевидно, $\mathbb{N}^v$ — область в $\mathbb{N}$, поэтому она тоже является n-мерным многообразием.

Пусть $\{x_1, \ldots, x_N\}$ — δ-сеть $\mathbb{M}$. Сопоставим каждому отображению $u \in \widetilde{\Omega}_R$ «точку» $p_N(u) = (u(x_1), \ldots, u(x_N)) \in [\mathbb{N}]^N$. Кроме того, пусть

$$\Omega_N^v = \{\bar{y} = (y_1, \ldots, y_N) \in [\mathbb{N}^v]^N \mid \exists u \in \widetilde{\Omega}_R \ u(x_1) = y_1, u(x_2) = y_2, \ldots, u(x_N) = y_N\}.$$

Очевидно, Ω_N^v — область в $[\mathbb{N}^v]^N$, поэтому она (как и само $[\mathbb{N}^v]^N$) является $(n \cdot N)$-мерным многообразием. Вышеупомянутая база построена.

Займемся построением самого расслоения η_N и гомеоморфизма Φ_N из определения C-области.

Для каждой точки $\bar{y} \in \Omega_N^v$ нижеследующим образом построим отображение $U_{\bar{y}} \in \widetilde{\Omega}$, для которого $U_{\bar{y}}(x_i) = y_i \in \mathbb{N}^v$, $i = \overline{1, N}$. Пусть $\overline{U}_{\bar{y}} : \mathbb{M} \to R^{2n+1}$ такое, что $\overline{U}_{\bar{y}}(x_i) = y_i$, $i = \overline{1, N}$, и, кроме того, норма $\|\overline{U}_{\bar{y}}\|_s$ минимальна среди всех таких отображений: существование, единственность и непрерывная зависимость от $\bar{y}$ такого отображения следует из выпуклости функционала $u \mapsto \|u\|_s^2$. В этом случае $\|\overline{U}_{\bar{y}}\|_s < R$, ибо согласно конструкции $\overline{U}_{\bar{y}}$ имеет минимальную норму среди всех отображений $u \in \widetilde{\Omega}_R$, удовлетворяющих условию $p_N(u)$, а $\|\overline{U}_{\bar{y}}\|_s \le \|u\|_s$ для всех подобных $u(x)$ (множество подобных отображений $u \in \widetilde{\Omega}_R$ непусто из-за конструкции Ω_N^v).

Как известно, $\widetilde{\mathbb{N}}$ имеет трубчатую окрестность в R^{2n+1} (обозначим его радиус через $\varepsilon > 0$). Поэтому для каждой точки y из этой окрестности существует ближайшая точка $\pi(y)$ из $\widetilde{\mathbb{N}}$. Более того, отображение $y \mapsto \pi(y)$ гладко, сюръективно и невырожденно.

Пусть $u \in E$, $\|u\|_s < R$. Так как $\|u\|_{C^1} \le K\|u\|_s$ при достаточно большом s, то $\|u\|_{C^1} \le KR$. Поэтому $\|u'(x)\|_{R^{2n+1}} < KR$ для любого $x \in \mathbb{M}$. Тогда

$$\forall x', x'' \in \mathbb{M}\ \forall u \in E \quad \|u(x') - u(x'')\|_{R^{2n+1}} < KRd(x', x'') \text{ при } \|u\|_s < R$$

(здесь $d(\cdot,\cdot)$ — расстояние на $\mathbb{M}$). Следовательно,

$$\forall x', x'' \in \mathbb{M}\ \forall u \in E \quad \|u(x') - y(x'')\|_{R^{2n+1}} < \varepsilon$$

при $\|u\|_s < R$ и $d(x', x'') < \delta$ $(\delta = \varepsilon/(KR))$.

Пусть $x \in M$. Очевидно, $\exists i\ d(x, x_i) < \delta$. Поэтому

$$\forall x \in M\ \exists x_i \quad \|u(x) - u(x_i)\|_{R^{2n+1}} < \varepsilon \tag{2.2}$$

при каждом $u \in H_s(\mathbb{M}, R^{2n+1})$ и $\|u\|_s < R$. (Очевидно, $\delta \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, а $N \to \infty$ при $\delta \to 0$, следовательно, $N \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.) Значит, для каждого $x \in \mathbb{M}$ точка $u(x)$ будет принадлежать ε-окрестности $\widetilde{\mathbb{N}}$ (в R^{2n+1}) при $\|u\|_s < R$ и $u(x_i) \in \widetilde{\mathbb{N}}$, $i = \overline{1, N}$. Поэтому (с помощью отображения π) ее можно гладко спроектировать на $\widetilde{\mathbb{N}}$. Так как $\|\overline{U}_{\bar y}\|_s < R$, все это верно также для $\overline{U}_{\bar y}$. Пусть $U_{\bar y}(x) = \pi \circ \overline{U}_{\bar y}(x)$. Согласно конструкции, во-первых, $U_{\bar y}(x_i) = y_i$, $i = \overline{1, N}$, т. е. оно принадлежит $p_N^{-1}(\bar y)$, во-вторых, $U_{\bar y}(x) \in \operatorname{int}(\mathbb{N})$ для любого $x \in \mathbb{M}$ при $\varepsilon < v$ (так как $y_i \in \mathbb{N}^v$, $i = \overline{1, N}$), т. е. $U_{\bar y} \in \widetilde{\Omega}$.

Замечание. Благодаря гладкости π имеем $\|U_{\bar y}\|_s \le C\|\overline{U}_{\bar y}\|_s < CR$. Таким образом, $U_{\bar y} \notin \widetilde{\Omega}_R$, но $U_{\bar y} \in \widetilde{\Omega}_{C\cdot R}$.

Пусть $\exp_y : T_y\widetilde{\mathbb{N}} \to \widetilde{\mathbb{N}}$ — экспоненциальное отображение. Как известно, $\exp_y$ — диффеоморфизм между некоторыми окрестностями нуля в $T_y\widetilde{\mathbb{N}}$ и y в $\widetilde{\mathbb{N}}$. Обозначим радиусы этих окрестностей соответственно через $\alpha(y)$ и $\beta(y)$. Из-за гладкости $\exp_y$ на компакте $\widetilde{\mathbb{N}}$ радиусы $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ можно предположить не зависящими от $y \in \widetilde{\mathbb{N}}$. Аналогично доказанному выше можно показать, что β-окрестность $U_{\bar y}(x)$ точки $\bar y \in \Omega_N^v$ включает в себя все $u(x)$ из $p_N^{-1}(p_N(U_{\bar y})) \cap \widetilde{\Omega}_{CR}$ при достаточно малом δ.

Пусть $\bar y_0 \in \Omega_N^v$. Возьмем n ортонормированных векторных полей в окрестности $U_{\bar y_0}(x)$, касательных к $\widetilde{\mathbb{N}}$. Обозначим их через $\vec g_1(y), \dots, \vec g_n(y)$. Так как $U_{\bar y_0} \in \widetilde{\Omega}$, то $U_{\bar y_0}(x) \in \operatorname{int}(\mathbb{N})$, $x \in \mathbb{M}$. Кроме того, поскольку $\operatorname{int}(\mathbb{N}) \Subset \widetilde{\mathbb{N}}$ и $\operatorname{int}(\mathbb{N})$ — открытое множество, эти векторные поля можно расширить на все $\operatorname{int}(\mathbb{N})$ [7], поэтому они будут определены вдоль каждого $U_{\bar y}(x)$, $\bar y \in \Omega_N^v$.

Пусть

$$F^N = \{\bar v \in \mathbb{M} \to R^n \mid \vec v \in H_s, \vec v(x_1) = \dots = \vec v(x_N) = 0\},$$

очевидно, оно является линейным подпространством $H_s(\mathbb{M}, R^n)$ коразмерности nN. Кроме того, пусть $\{\vec e_1, \dots, \vec e_n\}$ — ортонормированный базис в R^n. Очевидно, каждую функцию $\vec v \in F^N$ можно представить в виде

$$\vec v(x) = v_1(x)\vec e_1 + \dots + v_n(x)\vec e_n,$$

где $v_k(x)$ — скалярная функция, $v_k \in H_s(\mathbb{M}, R^1)$, $v_k(x_i) = 0$, $k = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, N}$.

Рассмотрим отображение

$$\Phi_N : \Omega_N^v \times F^N \to p_N^{-1}(\Omega_n^v), \quad \Phi_N(\bar y, \vec v)(x) = \exp_{U_{\bar y(x)}} \vec g(x),$$

где

$$\vec g(x) = v_1(x) \cdot \vec g_1(U_{\vec y}(x)) + \dots + v_n(x) \cdot \vec g_n(U_{\vec y}(x)).$$

(Расслоение $\Omega_N^v \times F^N$ соответствует расслоению $\eta_N = (Y_N, q_N, \Omega_N)$ из начала § 2.) Очевидно,

1) $\Phi_N(\bar{y}', \vec{v}) \neq \Phi_N(\bar{y}'', \vec{w})$ $\forall \vec{v}, \vec{w} \in F^N$ при $\bar{y}' \neq \bar{y}''$ и $\bar{y}', \bar{y}'' \in \Omega_N^v$, так как (согласно конструкции) $\Phi_N(\bar{y}', \vec{v}) \in p_N^{-1}(\bar{y}')$ и $\Phi_N(\bar{y}'', \vec{w}) \in p_N^{-1}(\bar{y}'')$;

2) $\Phi_N(\bar{y}, \vec{v}) \neq \Phi_N(\bar{y}, \vec{w})$ $\forall \bar{y} \in \Omega_N^v$ при $\|\vec{v}\|_C < \alpha$, $\|\vec{w}\|_C < \alpha$ и $\vec{v} \neq \vec{w}$, так как $\exp_y$ — диффеоморфизм в α-окрестности $0_y \in T_y\widetilde{\mathbb{N}}$.

Отсюда следует, что Φ_N — диффеоморфизм между $\Omega_N^v \times \{\vec{v} \in F^N \mid \|\vec{v}\|_C < \alpha\}$ и окрестностью $\{u(x) \mid \|U_{\bar{y}}(x) - u(x)\|_C < \beta\}$, $\bar{y} \in \Omega_N^v$ и $p_N(u(x_i)) = p_N(U_{\bar{y}}(x_i))$, $i = \overline{1, N}$. Согласно конструкции эта окрестность содержит множество $p_N^{-1}(\Omega_N^v)$. Обозначим $\widetilde{\Omega}_N^v = p_N^{-1}(\Omega_N^v)$. В силу конструкции p_N имеем $\widetilde{\Omega}_N^v \subset \widetilde{\Omega}_R$. Поэтому $\widetilde{\Omega}_N^v$ — ограниченная область. Следовательно, $\Phi_N^{-1}(\widetilde{\Omega}_N^v)$ — ограниченная область в $\Omega_N^v \times F^N$. Обозначим $D_N^v = \Phi_N^{-1}(\widetilde{\Omega}_N^v)$.

Проверим условия (b_1) и (b_2) определения 2.1.

(b_1) Как упоминалось выше, $\widetilde{\Omega}_N^v \subset \widetilde{\Omega}_R$. В этом случае N выбирается так, чтобы удовлетворялось условие (2.2).

(b_2) Рассмотрим множество $\widetilde{\Omega}_R^\gamma = \{u \in \widetilde{\Omega}_R \mid \operatorname{dist}(u, \partial\widetilde{\Omega}) > \gamma, \gamma > 0\}$, где

$$\operatorname{dist}(u, \partial\widetilde{\Omega}) = \inf_v \|u - v\|_s, \quad v \in \partial\widetilde{\Omega}.$$

Покажем, что

$$\forall R > 0\ \forall \gamma > 0\ \exists v > 0\ \exists N_{R,\gamma} > N_R\ \forall N > N_{R,\gamma} \quad \widetilde{\Omega}_R^\gamma \subset \widetilde{\Omega}_N^v \text{ (или } \widetilde{\Omega}_R^\gamma \subset \Phi_N(D_N^v))$$

при достаточно малом v. Для этого достаточно доказать следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Если $u \in \widetilde{\Omega}_R^\gamma$, то $p_N(u) \in \Omega_N^v$ при $v \le v_0 = \frac{\gamma}{\sqrt{\operatorname{mes}(\mathbb{M})}}$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что $(u(x_1), \dots, u(x_N)) \in [\mathbb{N}^v]^N$ при $p_N(u) \in \Omega_N^v$, т. е.

$$\forall i = \overline{1, N} \quad u(x_i) \in \mathbb{N}^v. \tag{2.3}$$

Согласно определению $\mathbb{N}^v$ из (2.3) следует, что

$$\forall i = \overline{1, N} \quad \operatorname{dist}(u(x_i), \partial\mathbb{N}) > \varepsilon \text{ или } \forall i = \overline{1, N} \quad \|u(x_i) - y'\|_{2n+1} > v,\ y' \in \partial\mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Поэтому достаточно доказать справедливость (2.4) при условии $u \in \widetilde{\Omega}_R^\gamma$.

Пусть $u \in \widetilde{\Omega}_R^\gamma$. Тогда

$$\|u - v\|_s > \gamma, \quad v \in \partial\widetilde{\Omega}. \tag{2.5}$$

Пусть $y' \in \partial\mathbb{N}$ и $v(x) = y'$, $x \in \mathbb{M}$. Тогда из (2.5) следует, что

$$\|u - y'\|_s > \gamma, \quad y' \in \partial\mathbb{N}.$$

Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма 2.3. *Пусть $u \in \widetilde{\Omega}$, $x^* \in \mathbb{M}$ и $w(x) = u(x^*)$. Тогда*

$$\|u(x^*) - y'\|_s > \gamma, \quad y' \in \partial\mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Доказательство леммы 2.3. Предположим обратное:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists y'_n \in \partial\mathbb{N} \quad \|u(x^*) - y'_n\|_s \le \frac{1}{n}. \tag{2.7}$$

Так как $\partial\mathbb{N}$ — компакт, то

$$\exists\{y'_{n_k}\} \subset \{y'_n\}\ \exists y'_0 \in \partial\mathbb{N} \quad y'_{n_k} \to y'_0 \text{ при } k \to \infty.$$

Переходя к пределу в (2.7), получим $\|u(x^*) - y'_0\|_s = 0$, т. е. $u(x^*) = y'_0$. Поскольку $y'_0 \in \partial\mathbb{N}$, то $u \in \partial\widetilde{\Omega}$, что противоречит предположению $u \in \widetilde{\Omega}$. $\square$

Продолжим доказательство теоремы 2.2. Из неравенства (2.6) следует, что

$$\gamma^2 < \|u(x^*) - y'\|_s^2 = \sum_{l=1}^{2n+1} \int\limits_{\mathbb{M}} |u_l(x^*) - y'|^2\, dx$$
$$= \operatorname{mes}(\mathbb{M}) \sum_{l=1}^{2n+1} |u_l(x^*) - y'|^2 = \|u(x^*) - y'\|_{2n+1}^2 \operatorname{mes}(\mathbb{M}).$$

Следовательно,

$$\|u(x^*) - y'\|_{2n+1} > \frac{\gamma}{\sqrt{\operatorname{mes}(\mathbb{M})}}.$$

Поэтому если $u \in \widetilde{\Omega}_R^\gamma$, то $u(x^*) \in \mathbb{N}^v$ при $v \leq v_0 = \frac{\gamma}{\sqrt{\operatorname{mes}(\mathbb{M})}}$. Последнее неравенство верно для каждого x_i, $i = \overline{1, N}$, ввиду того, что x^* — произвольная точка $\mathbb{M}$. $\square$

§ 3. *FSQL*-отображение *QC*-области

Пусть $\widetilde{\Omega}_N$ — C-область FQL-многообразия X, а Z — банахово пространство. Кроме того, пусть $\zeta_N = (\widetilde{Z}, \chi_N, \widetilde{Z}_N)$ — аффинное расслоение, вложенное в Z, с тотальным пространством $\widetilde{Z}$ ($\widetilde{Z} \subseteq Z$), проекцией χ_N, базой $\widetilde{Z}_N$, являющейся N-мерным многообразием, и слоем $\widetilde{Z}_\theta^N = \chi_N^{-1}(\theta)$, причем $\operatorname{codim}_Z(\widetilde{Z}_\theta^N) = N$ для любого $\theta \in \widetilde{Z}_N$.

Определение 3.1. Непрерывное отображение $f^N : \widetilde{\Omega}_N \to Z$ называется *фредгольмово специально линейчатым* (FSL), если существует расслоение $\zeta_N = (\widetilde{Z}, \chi_N, \widetilde{Z}_N)$ такое, что $F^N = f^N \circ \Phi_N$ — биморфизм между расслоениями $\eta_N = (Y_N, q_N, \Omega_N)$ и $\zeta_N = (\widetilde{Z}, \chi_N, \widetilde{Z}_N)$. (Для $\eta_N = (Y_N, q_N, \Omega_N)$ см. начало § 2; не путать отображения F^N и Φ_N с аналогичными из § 2.)

Пусть $\widetilde{\Omega}$ — QC-область FQL-многообразия X

Определение 3.2. Непрерывное отображение $f : \widetilde{\Omega} \to Z$ называется *фредгольмово специально квазилинейчатым* ($FSQL$), если существуют последовательность C-областей $\widetilde{\Omega}_N$, исчерпывающих $\widetilde{\Omega}$ изнутри в каждом шаре из E, и последовательность FSL-отображений $\{f^N \mid f^N : \widetilde{\Omega}_N \to Z\}$, равномерно сходящаяся к f в каждом $\widetilde{\Omega}_R^\gamma$, т. е.

$$\forall\mu > 0\ \exists N(R,\gamma,\mu) > 0\ \forall N \geq N(r,\gamma,\mu)\ \forall x \in \widetilde{\Omega}_R^\gamma \quad \|f^N(x) - f(x)\|_Z < \mu, \tag{3.1}$$

причем

$$\big\|F_\lambda^N\big\| < C(\widetilde{\Omega}, R, \gamma), \quad \big\|\big(F_\lambda^N\big)^{-1}\big\| < C(\widetilde{\Omega}, R, \gamma) \tag{3.2}$$

при $\lambda \in q_N\big(\Phi_N^{-1}\big(\widetilde{\Omega}_R^\gamma\big)\big)$ и $N > N(R,\gamma,\mu)$, а $C(\widetilde{\Omega}, R, \gamma)$ не зависит от $N > N(R,\gamma,\mu)$ (здесь число $N(R,\gamma,\mu) > 0$ выбирается таким, что $\widetilde{\Omega}_R^\gamma \subset \widetilde{\Omega}_{N,R}$ при $N > N(R,\gamma,\mu)$, поэтому все FSL-отображения f^N будут определены в $\widetilde{\Omega}_R^\gamma$ при $N > N(R,\gamma,\mu)$).

Замечание. Здесь $\|\cdot\|_Z$ — норма в Z, а F^N_λ — сужение F^N на слой $Y^N_\lambda = q_N^{-1}(\lambda)$, $\lambda \in \Omega_N$ (напомним, что $F^N = f^N \circ \Phi_N$).

3.1. Пример $FSQL$-отображения, определенного на QC-области. Пусть $\mathbb{N}$ — компактное гладкое многообразие с границей, $f : \mathbb{N} \to R$ — гладкое отображение с отличным от нуля градиентом во всех точках. Тогда $F_f : H_s(\mathbb{M}, \operatorname{int}(\mathbb{N})) \to H_s(\mathbb{M}, R)$, $F_f : u \mapsto f(u)$, — $FSQL$-отображение между QC-областью $H_s(\mathbb{M}, \operatorname{int}(\mathbb{N}))$ и $H_s(\mathbb{M}, R)$.

Этот факт вытекает из теоремы 1.1, замечания в ее конце и теоремы 1.4 из [2].

§ 4. Степень $FSQL$-отображения, определенного на QC-области

Пусть X — FQL-многообразие, вложенное в банахово пространство E, $\widetilde{\Omega}$ — QC-область FQL-многообразия, $f : \widetilde{\Omega} \to Z$ — $FSQL$-отображение между $\widetilde{\Omega}$ и банаховым пространством Z. Кроме того, предположим удовлетворение следующих априорных оценок:

$$\|x\|_E < \Psi_1(\|f(x)\|_Z), \quad x \in \widetilde{\Omega}, \tag{4.1}$$

$$\operatorname{dist}(x, \partial\widetilde{\Omega}) > \Psi_2(\|f(x)\|_Z), \quad x \in \widetilde{\Omega}, \tag{4.2}$$

где $\Psi_1, \Psi_2 : R^+ \to R^+$ — положительные, соответственно монотонно возрастающая и монотонно убывающая функции. Оценки такого типа возникают при изучении нелинейной задачи Гильберта (см. [2, 3]).

Рассмотрим следующее уравнение:

$$f(x) = z_0, \quad z_0 \in Z, \tag{4.3}$$

где $f : \widetilde{\Omega} \to Z$ — $FSQL$-отображение, удовлетворяющее условиям (4.1) и (4.2). Для простоты функции Ψ_1 и Ψ_2 предположим тождественными. В этом случае, учитывая вышеуказанные условия, можем утверждать, что все решения уравнения (4.3) будут принадлежать множеству $\widetilde{\Omega}_{R_0} = \widetilde{\Omega} \cap B_{R_0}$, где B_{R_0} — шар в E радиуса $R_0 = \|z_0\|_Z$, и отстоять от $\partial\widetilde{\Omega}$ на расстояние $\gamma_0 = \|z_0\|_Z$, т. е. принадлежать множеству $\widetilde{\Omega}^{\gamma_0}_{R_0}$.

Замечание. По п. (b_2) определения 2.1 $\widetilde{\Omega}^{\gamma_0}_{R_0} \subset \widetilde{\Omega}_{N,R_0}$ при $N > N_{R_0,\gamma_0}$.

Пусть $\{\widetilde{\Omega}_N\}$ — последовательность C-областей, исчерпывающих $\widetilde{\Omega}$ изнутри в каждом шаре из E, и $\{f^N \mid f^N : \widetilde{\Omega}_N \to Z\}$ — последовательность FSL-отображений, равномерно сходящаяся к f в каждом $\widetilde{\Omega}^{\gamma}_{R}$, т. е. удовлетворяются условия (3.1) и (3.2). Рассмотрим уравнение

$$f^N(x) = z_0, \quad z_0 \in Z. \tag{4.4}$$

Будем искать его решения в $\widetilde{\Omega}^{\gamma'_0}_{R'_0}$, где $R'_0 = \|z_0\|_Z + 2\mu$ и $\gamma'_0 = \|z_0\|_Z - 2\mu$.

Замечание. Согласно п. (b_2) определения 2.1 существует число $N_{R'_0,\gamma'_0}$ такое, что $\widetilde{\Omega}^{\gamma'_0}_{R'_0} \subset \widetilde{\Omega}_{N,R'_0}$ при $N > N_{R'_0,\gamma'_0}$. Кроме того, μ можно выбрать таким малым, что $\gamma'_0 = \|z_0\|_Z - 2\mu > 0$.

Очевидно, нахождение решений уравнения (4.4) в $\widetilde{\Omega}^{\gamma'_0}_{R'_0}$ равносильно нахождению решений уравнения

$$F^N(y) = z_0, \quad z_0 \in Z, \tag{4.5}$$

в $\Phi_N^{-1}\big(\widetilde{\Omega}_{R_0'}^{\gamma_0'}\big)$, так как Φ_N — гомеоморфизм. Это уравнение можно свести к конечномерному.

Действительно, поскольку F^N — биморфизм между аффинными расслоениями $\eta_N = (Y_N, q_N, \Omega_N)$ и $\zeta_N = (\widetilde{Z}, \chi_N, \widetilde{Z}_N)$, он индуцирует конечномерное непрерывное отображение $G_N : \Omega_N \to \widetilde{Z}_N$ между базами этих расслоений, т. е. если F^N (как биморфизм) переводит слой $q_N^{-1}(\lambda)$, $\lambda \in \Omega_N$, расслоения η_N на слой $\chi_N^{-1}(\theta)$, $\theta \in \widetilde{Z}_N$, расслоения ζ_N, то отображение G_N будет переводить точку λ в точку $\theta : G_N(\lambda) = \theta$.

Рассмотрим конечномерное уравнение

$$G_N(\lambda) = \theta_0, \quad \theta_0 = \chi_N(z_0), \tag{4.6}$$

в $q_N\big(\Phi_N^{-1}\big(\widetilde{\Omega}_{R_0'}^{\gamma_0'}\big)\big)$.

Замечание. Так как $z_0 \notin f^N\big(\partial\widetilde{\Omega}_{R_0'}^{\gamma_0'}\big)$ при достаточно большом N, то

$$\theta_0 \notin G_N\Big(\partial\Big(q_N\big(\Phi_N^{-1}\big(\widetilde{\Omega}_{R_0'}^{\gamma_0'}\big)\big)\Big)\Big) \quad \text{при } N \text{ достаточно большом.}$$

Лемма 4.1. *Нахождение решений уравнения* (4.5) *равносильно нахождению решений уравнения* (4.6) *при достаточно больших* N.

Доказательство. 1. Пусть $y_0 \in \Phi_N^{-1}\big(\widetilde{\Omega}_{R_0'}^{\gamma_0'}\big)$ — решение уравнения (4.5), т. е. $F^N(y_0) = z_0$. Так как $y_0 \in \Phi_N^{-1}\big(\widetilde{\Omega}_{R_0'}^{\gamma_0'}\big) \subset D_N \subset Y_N$ и Y_N — тотальное пространство η_N, существует такое $\lambda_0 \in q_N\big(\Phi_N^{-1}\big(\widetilde{\Omega}_{R_0'}^{\gamma_0'}\big)\big) \subset \Omega_N$, что $q_N(y_0) = \lambda_0$. Поскольку F^N — биморфизм между аффинными расслоениями η_N и ζ_N, то F^N должен переводить слой $q_N^{-1}(\lambda_0)$ расслоения η_N на слой $\chi_N^{-1}(\theta_0)$ расслоения ζ_N, содержащий точку z_0. Следовательно, согласно определению $G_N(\lambda_0) = \theta_0$. Таким образом, если $y_0 \in \Phi_N^{-1}\big(\widetilde{\Omega}_{R_0'}^{\gamma_0'}\big)$ — решение уравнения (4.5), то $\lambda_0 = q_N(y_0)$ — решение уравнения (4.6).

2. Пусть $\lambda_0 \in q_N\big(\Phi_N^{-1}\big(\widetilde{\Omega}_{R_0'}^{\gamma_0'}\big)\big) \subset \Omega_N$ — решение уравнения (4.6). Тогда биморфизм F^N переведет слой $q_N^{-1}(\lambda_0)$ расслоения η_N на слой $\chi_N^{-1}(\theta_0)$ расслоения ζ_N. Так как F^N — изоморфизм между слоями $q_N^{-1}(\lambda_0)$ и $\chi_N^{-1}(\theta_0)$, существует точка $y_0 \in q_N^{-1}(\lambda_0)$, удовлетворяющая уравнению (4.5). Однако может быть, что $y_0 \notin \Phi_N^{-1}\big(\widetilde{\Omega}_{R_0'}^{\gamma_0'}\big)$. Покажем, что этого не произойдет. Предположим, что $y_0 \notin \Phi_N^{-1}\big(\widetilde{\Omega}_{R_0'}^{\gamma_0'}\big)$. Тогда $\Phi_N(y_0) \notin \widetilde{\Omega}_{R_0'}^{\gamma_0'}$. Обозначим $\Phi_N(y_0) = x_0$. Поскольку $x_0 \notin \widetilde{\Omega}_{R_0'}^{\gamma_0'}$, имеем (c_1) $\|x_0\|_E \geq R_0'$ или (c_2) $\operatorname{dist}(x_0, \partial\widetilde{\Omega}) \leq \gamma_0'$. Рассмотрим эти случаи отдельно.

(c_1) Пусть $\|x_0\|_E \geq R_0'$, т. е. $\|x_0\|_E \geq \|z_0\|_Z + 2\mu$. Тогда при условиях (4.1) и (3.1)

$$\begin{aligned}\|f^N(x_0)\|_Z \geq \|f(x_0)\|_Z - \|f(x_0) - f^N(x_0)\|_Z \geq \|x_0\|_E - \mu \\ \geq (\|z_0\|_Z + 2\mu) - \mu = \|z_0\|_Z + \mu > \|z_0\|_Z,\end{aligned}$$

т. е. x_0 не является решением уравнения (4.4). Поэтому y_0 не является решением уравнения (4.5). Из этого противоречия следует, что $\|x_0\|_E < R_0'$.

(c_2) Пусть $\operatorname{dist}(x_0, \partial\widetilde{\Omega}) \leq \gamma_0' = \|z_0\|_Z - 2\mu$. Так как x_0 — решение уравнения (4.4), то

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(x_0, \partial\widetilde{\Omega}) \leq \|f^N(x_0)\|_Z - 2\mu \leq (\|f(x_0)\|_Z + \|f(x_0) - f^N(x_0)\|_Z) - 2\mu \\ < (\|f(x_0)\|_Z + \mu) - 2\mu = \|f(x_0)\|_Z - \mu < \|f(x_0)\|_Z,\end{aligned}$$

что противоречит неравенству (4.2). Поэтому $x_0 \in \widetilde{\Omega}_{R_0'}^{\gamma_0'}$ и, следовательно, $y_0 \in \Phi_N^{-1}\big(\widetilde{\Omega}_{R_0'}^{\gamma_0'}\big)$. $\square$

Замечание. Из этих неравенств следует также, что $z_0 \notin f^N\big(\widetilde{\Omega}_{R_0'}^{\gamma_0'}\big)$ при N достаточно большом. Тогда можно определить степень биморфизма F^N и, следовательно, степень FSL-отображения f^N.

Определение 4.2. $\deg(f^N) = \deg(F^N) = \deg(G_N)$.

Замечание. Знак степени зависит от ориентаций на Ω_N и $\widetilde{Z}_N$. Однако это не важно для доказательства существования решения уравнения (4.3), так как абсолютное значение последнего постоянно.

Теорема 4.3. *Пусть f^{N_1}, $f^{N_2} : \widetilde{\Omega}_{R_0'}^{\gamma_0'} \to Z$ — FSL-отображения, достаточно близкие к $FSQL$-отображению f в $\widetilde{\Omega}_{R_0'}^{\gamma_0'}$. Тогда*

$$|\deg(f^{N_1})| = |\deg(f^{N_2})|$$

при достаточно больших N_1 и N_2.

Доказательство этой теоремы подобно доказательству теоремы 2.3 из [1]. По теореме 4.3 последовательность $\{|\deg(f^N)|\}$ стабилизируется при достаточно больших N. Поэтому можем дать следующее

Определение 4.4. $\deg(f) = \lim\limits_{N\to\infty} |\deg(f^N)|$.

Теорема 4.5. *Пусть $\{f_t \mid f_t : \Omega \to Z\}$ — семейство $FSQL$-отображений, непрерывно (равномерно в каждом $\widetilde{\Omega}_R^\gamma$) зависит от параметра $t \in [0,1]$. Кроме того, предположим выполнение условий (4.1), (4.2) при каждом t, причем функции Ψ_1 и Ψ_2 не зависят от t. Тогда*

$$\deg(f_0, z_0) = \deg(f_1, z_0), \quad z_0 \in Z.$$

Доказательство. Учитывая компактность $[0,1]$ и равномерную непрерывность семейства $\{f_t\}$ по t, можно аппроксимировать семейство $FSQL$-отображений $\{f_t \mid f_t : \Omega \to Z\}$ семейством FSL-отображений $\big\{f_t^N \mid f_t^N : \widetilde{\Omega}_N \to Z\big\}$. Согласно теореме 4.3 абсолютное значение степени FSL-отображения локально постоянно при достаточно больших N. Поэтому $\big|\deg\big(f_0^N\big)\big| = \big|\deg\big(f_1^N\big)\big|$. Тем самым

$$\deg(f_0, z_0) = \deg(f_1, z_0), \quad z_0 \in Z. \quad \square$$

Теорема 4.6. *При условиях* (4.1), (4.2)

$$\deg(f, z_1) = \deg(f, z_2), \quad z_1, z_2 \in Z.$$

Доказательство. Пусть

$$R \geq \Psi_1(\max\{\|z_1\|_2, \|z_2\|_2\} + 2\mu), \quad \gamma \leq \Psi_2(\min\{\|z_1\|_2, \|z_2\|_2\} - 2\mu)$$

и $\{f^N\}$ — последовательность FSL-отображений, сходящаяся к f в $\widetilde{\Omega}_R^\gamma$. Так как

$$\deg(f, z_1) = |\deg(f^N, z_1)|, \quad \deg(f, z_2) = |\deg(f^N, z_2)|, \quad z_1, z_2 \in Z,$$

при достаточно больших N, достаточно доказать, что

$$|\deg(f^N, z_1)| = |\deg(f^N, z_2)|.$$

Для этого достаточно выполнение равенства

$$\deg(G_N, \theta_1) = \deg(G_N, \theta_2),$$

где $\theta_1 = \chi_N(z_1)$, $\theta_2 = \chi_N(z_2)$. Это равенство известно из классического (конечномерного) анализа.

Теорема 4.7. *Пусть удовлетворяются условия* (4.1), (4.2) *и* $\deg(f) \neq 0$. *Тогда уравнение* (4.3) *имеет решение при любом* $z_0 \in Z$.

Доказательство этой теоремы подобно доказательствам аналогичных теорем из [2–4].

Замечание. Конкретные примеры вычисления степени $FSQL$-отображения, приведены в [2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bessaga C.* Every infinite-dimensional Hilbert space is diffeomorphic with its unit sphere // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math., Astronom, Phys. 1966. V. 14. P. 27–31.
2. *Шнирельман А. И.* Степень квазилинейчатого отображения и нелинейная задача Гильберта // Мат. сб. 1972. Т. 89, № 3. С. 366–389.
3. *Эфендиев М. А.* Степень FQL-отображения в квазицилиндрической области и нелинейная задача Гильберта // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270, № 1. С. 58–61.
4. *Abbasov A.* Fredholm quasilinear manifolds and degree of a Fredholm quasilinear mapping between them // Ukrainian Math. J. 2011. V. 63, N 5. P. 579–595.
5. *Ebin D. G., Marsden J.* Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid // Ann. Math. 1970. V. 92, N 1. P. 102–163.
6. *Abbasov A.* A special quasi-linear mapping and its degree // Turkish J. Math. 2000. V. 24, N 1. P. 1–14.
7. *Хирш М.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1997.

Статья поступила 14 апреля 2014 г.

Аббасов Акиф Гамид оглы
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Biga Iktizadi ve Idari Bilimler Fakültesi
Çanakkale/Türkiye
akifabbasov@gmail.com