Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2015. Том 56, № 2

УДК 514.745.82

О ДВУХ КЛАССАХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Н. Б. Аюпова, В. П. Голубятников

Аннотация. Рассмотрены две кусочно-линейные четырехмерные динамические системы химической кинетики. Для одной из них в явном виде построена гиперповерхность, разделяющая области притяжения двух устойчивых стационарных точек и содержащая неустойчивый цикл этой системы. Для другой установлено существование траектории, которая не содержится в области притяжения устойчивого цикла, описанного ранее Глассом и Пастернаком. Проведено сопоставление гомотопических типов фазовых портретов этих двух систем.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, цикл, инвариантное многообразие, ретракт.

Введение

В настоящей работе продолжается начатое в [1–3] изучение фазовых портретов нелинейных динамических систем с правыми частями специального вида:

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_{j-1}) - k_j \cdot x_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{1}$$

в которых все переменные, параметры и функции принимают неотрицательные значения и $x_{j-1} = x_n$ при $j = 1$. Такие динамические системы возникают при моделировании ряда биологических процессов (см. [4–6]); вычитаемые в правых частях соответствуют процессам разложения биологических молекул, положительные коэффициенты k_j — константы реакций — характеризуют скорости этих разложений. Переменные x_j обозначают концентрации участвующих в реакциях веществ, слагаемое $f_j(x_{j-1})$ описывает скорость синтеза вещества с номером j в зависимости от концентрации x_{j-1} вещества с номером $j-1$.

Для нечетномерных динамических систем вида (1) в [3, 7, 8] установлены условия существования циклов, рассмотрены вопросы их устойчивости и показано, что ни один цикл системы вида (1) не может отталкивать ее траектории во всех направлениях. В этих публикациях предполагалось, что в системе (1) уравнений химической кинетики все функции f_j гладкие и монотонно убывающие, что моделирует отрицательные обратные связи между биологическими субстанциями. Там же отмечено, что фазовые портреты четномерных систем вида (1) имеют существенно иное строение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–0074) и междисциплинарного гранта № 80 СО РАН.

В этой работе будем изучать четырехмерную динамическую систему вида (1) с «пороговыми» правыми частями $f_j(x) = L_j(x)$, где

$$L_j(x) = A_j > 2 \text{ при } 0 \le x < 1, \quad L_j(x) = 0 \text{ при } 1 \le x, \tag{2}$$

$A_j = \text{const}$. Такие функции, получаемые как предельные формы гладких правых частей, рассматривались в [9, 10] при моделировании отрицательных обратных связей.

Для простоты изложения система (1) будет изучаться здесь в симметричном безразмерном виде: $k_j = 1$ и $L_j(x) = L(x)$, $A_j = A$ при всех $j = 1, \ldots, 4$.

Наряду с убывающими ступенчатыми функциями будем рассматривать возрастающие функции Γ_j:

$$\Gamma_j(x) = A_j > 2 \text{ при } 1 \le x, \quad \Gamma_j(x) = 0 \text{ при } 0 \le x < 1, \tag{3}$$

которые моделируют положительные обратные связи. Динамические системы с подобными функциями в правых частях изучались ранее в [10, 11].

В фазовых портретах таких кусочно-линейных динамических систем важную роль играет точка E, у которой все координаты равны единице и в которой правые части всех уравнений динамических систем вида (4) и (5) имеют разрывы, но нас будут интересовать только те траектории, которые в эту точку не попадают.

1. Построение диаграмм

Рассмотрим четырехмерные динамические системы

$$\frac{dx_1}{dt} = L(x_4) - x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = L(x_1) - x_2, \quad \frac{dx_3}{dt} = L(x_2) - x_3, \quad \frac{dx_4}{dt} = L(x_3) - x_4, \tag{4}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = L_1(x_4) - x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = \Gamma_2(x_1) - x_2, \quad \frac{dx_3}{dt} = \Gamma_3(x_2) - x_3, \quad \frac{dx_4}{dt} = \Gamma_4(x_3) - x_4, \tag{5}$$

где во всех уравнениях функции L, L_1, Γ_j определены в (2), (3). Динамическая система (4) симметрична относительно перестановки переменных

$$\zeta : x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4 \to x_1.$$

Приведенные в [7] рассуждения показывают, что все траектории систем (4) и (5), начинающиеся в параллелепипеде $\Pi^4 = [0, A_1] \times [0, A_2] \times [0, A_3] \times [0, A_4]$, с ростом t не выходят из него, т. е. Π^4 является инвариантным множеством этой системы. Это утверждение справедливо и для подобных динамических систем произвольных размерностей.

Трехмерные и пятимерные версии системы (4) рассматривались в [1, 9, 12, 13]. Проводимые нами построения могут быть перенесены и на динамические системы бо́льших размерностей (см. [7, 10]). Для изучения фазовых портретов систем (4) и (5) разобьем параллелепипед Π^4 плоскостями, параллельными координатным плоскостям и проходящими через точку $E = (1, 1, 1, 1)$. Получающиеся 16 областей (блоков) разбиения перенумеруем бинарными индексами:

$$\{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\} = \{\mathbf{X} \in Q \mid x_1 \gtrless_{\varepsilon_1} 1,\ x_2 \gtrless_{\varepsilon_2} 1,\ x_3 \gtrless_{\varepsilon_3} 1,\ x_4 \gtrless_{\varepsilon_4} 1\}. \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \{0, 1\}$ и отношения порядка определяются, как в [8], следующим образом: символ $\gtrless_0$ означает $\le$, а символ $\gtrless_1$ означает $\ge$.

Для гладких динамических систем вида (1) в качестве указанной точки E рассматривается одна из стационарных точек системы.

В основе всех дальнейших построений лежит наблюдение: для динамических систем вида (1) произвольных размерностей (с монотонно убывающими функциями f_j, гладкими или ступенчатыми) все возможные переходы между блоками (6) осуществляются только по одной из двух следующих схем:

$$\{\varepsilon_\star 00\varepsilon_*\} \to \{\varepsilon_\star 01\varepsilon_*\} \quad \text{или} \quad \{\varepsilon_\star 11\varepsilon_*\} \to \{\varepsilon_\star 10\varepsilon_*\},$$

где через $\varepsilon_\star$ и ε_* обозначены наборы бинарных индексов, возможно, пустые (см., например, [7, 8]). Это позволяет построить ориентированный граф с 16 вершинами, соответствующими блокам $\{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\}$. Рассмотрим вложенную в этот граф диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \{1110\} & \longrightarrow & \{1100\} & \longrightarrow & \{1101\} & \longrightarrow & \{1001\} \\ \uparrow & & & & & & \downarrow \\ \{0110\} & \longleftarrow & \{0111\} & \longleftarrow & \{0011\} & \longleftarrow & \{1011\} \end{array}. \tag{7}$$

В [2] описано построение проходящего по диаграмме (7) цикла $\mathscr{C}$ системы (4), симметричного относительно циклической замены переменных ζ, и установлено, что в фазовом портрете этой системы имеется две устойчивые стационарные точки:

$$U_0 : (x_1 = 0;\ x_2 = A;\ x_3 = 0;\ x_4 = A), \quad U_1 : (x_1 = A;\ x_2 = 0;\ x_3 = A;\ x_4 = 0).$$

Следующее утверждение доказывается так же, как и его аналоги, полученные в работах [2, 9, 10].

Лемма 1. *Внутри каждой области* $B = \{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\}$ *разбиения* (6) *траектории систем* (4), (5) *прямолинейны и их продолжения пересекаются в одной точке* U_B.

Замечания. 1. Здесь для каждой из динамических систем зависимость точки U_B от блока B определяется по-своему.

2. Для системы (4) несложные вычисления показывают, что $U_B \in B$ только для блоков $B = \{1010\}$ и $B = \{0101\}$ и что $U_B = (A, A, A, A)$ для $B = \{0000\}$ и $U_B = (0, 0, 0, 0)$ для $B = \{1111\}$.

В терминах работы [12], где рассматривалась система (4), блоки, перечисленные в диаграмме (7), а также четыре блока $\{1000\}$, $\{0100\}$, $\{0010\}$ и $\{0001\}$ имеют потенциальный уровень два. Это означает, что из каждого из них траектории системы (4) могут переходить в точности в два соседних блока. Например, из $\{1110\}$ траектории могут переходить в блок $\{1100\}$, как в диаграмме (7), и в блок $\{1010\}$. Блоки $\{1010\}$ и $\{0101\}$ имеют нулевой потенциальный уровень, в них траектории пересекаются в точках U_1 и U_0 соответственно и за пределы этих блоков выходить не могут. Блоки $\{0000\}$ и $\{1111\}$ имеют потенциальный уровень, равный четырем, из каждого из них траектории выходят во все четыре соседних с ним блока. Следовательно, $\{0101\}$ содержится в области притяжения точки U_0, а $\{1010\}$ — в области притяжения точки U_1. Подобным же образом это утверждение проверяется и для любых четномерных динамических систем, в том числе и для несимметричных, у которых правые части имеют вид (2) или (3).

2. Геометрия фазового портрета системы (4). Построение сепаратрисы

Для динамической системы (4) обозначим через $Q^4 = \Pi^4 \setminus (\{0000\} \cup \{1010\} \cup \{0101\} \cup \{1111\})$ объединение областей, имеющих потенциальный уровень два. Построим кусочно-линейную трехмерную гиперповерхность $M^3 \subset Q^4$, разделяющую области притяжения точек $U_0 \in \{0101\}$ и $U_1 \in \{1010\}$ и содержащую построенный в [2] цикл $\mathscr{C}$ этой системы и двумерную инвариантную поверхность $M^2 \subset \Pi^4$, «натянутую» на этот цикл. Такая сепаратриса необходимо должна проходить через точку E. Для удобства вычислений введем систему координат (X_1, X_2, X_3, X_4), в которой $X_i = x_i - 1$ и точка E является начальной.

Будем строить эту поверхность как объединение трехмерных плоских областей, каждая из которых лежит в соответствующей области разбиения (6). Пусть пересечение $M^3 \cap \{1110\}$ — это плоскость P_0^3 с уравнением

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 = 0. \tag{8}$$

На грани $F_0 = \{1110\} \cap \{1100\}$, где $X_3 = 0$, плоскость P_0^3 высекает двумерную плоскость P_0^2 с уравнением

$$\alpha_1 X_1^0 + \alpha_2 X_2^0 + \alpha_4 X_4^0 = 0, \quad X_3^0 = 0, \tag{9}$$

которая продолжается в следующую область $\{1100\}$ диаграммы (7) плоскостью P_1^3 с уравнением

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \alpha_4 X_4 = 0. \tag{10}$$

Так как в $\{1100\}$ все траектории системы (4) описываются гомотетиями с центром в точке $Z_1 = (A-1, -1, -1, A-1)$ (см. [2]), координаты этой точки Z_1 должны удовлетворять уравнению (10), тем самым $\beta_3 = (A-1)\cdot(\alpha_1 + \alpha_3) - \alpha_2$.

На грани $F_1 = \{1100\} \cap \{1101\}$, где $X_4 = 0$, плоскость P_1^3 высекает плоскость P_1^2 с уравнением $\alpha_1 X_1^{(1)} + \alpha_2 X_2^{(1)} + \beta_3 X_3^{(1)} = 0$, как и на предыдущем шаге построения. В следующую область $\{1101\}$ диаграммы (7), в которой траектории системы (4) описываются гомотетиями с центром в точке $Z_2 = (-1, -1, -1, A-1)$, плоскость P_1^2 продолжится до плоскости P_2^3 с уравнением

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 = 0 \tag{11}$$

и «новый» коэффициент β_4 определяется тем, что точка Z_1 лежит на продолжении плоскости P_2^3 за пределы блока $\{1101\}$.

Таким образом, $\beta_4(A-1) = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_3 \equiv A\alpha_1 + (A-1)\alpha_4$, и на грани F_2, где $X_2 = 0$, плоскость P_2^3 высекает плоскость P_2^2 с уравнением

$$\alpha_1 X_1^{(2)} + \beta_3 X_3^{(2)} + \beta_4 X_4^{(2)} = 0, \quad X_2^{(2)} = 0, \tag{12}$$

как и на предыдущих шагах построения.

Прежде чем начать нахождение коэффициентов уравнений перечисленных выше плоскостей, отметим, что начальная область $\{1110\}$ диаграммы (7) имеет общую грань $X_2 = 0$ с содержащей точку U_1 областью $\{1010\}$, из которой траектории системы (4) не выходят, поэтому сепаратриса M^3 и грань $F_{10} = \{1110\} \cap \{1010\}$ могут иметь всего одну общую точку — точку E. Поскольку коэффициенты уравнения (8) интересны только с точностью до пропорциональности, можно считать, что $\alpha_1 > 0$, и в дальнейшем будем обозначать через w_* отношение $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$. В области $\{1110\}$ имеем $X_1 \geq 0$, $X_3 \geq 0$, $X_4 \leq 0$, поэтому только при $\alpha_3 > 0$ и $\alpha_4 < 0$ грань F_{10} пересекается с M^3 только по точке E. Таким образом, $w_* < 0$.

Аналогично третья область $\{1101\}$ диаграммы (7), в которой $X_2 \geq 0$, $X_3 \leq 0$, $X_4 \geq 0$, имеет общую грань $X_1 = 0$ с содержащей точку U_0 областью $\{0101\}$, из которой траектории системы (4) также не выходят, поэтому в уравнении (11), а также в других уравнениях коэффициенты α_2 и β_4 отрицательны. Таким образом, $\frac{\beta_4}{\alpha_2} > 0$, $\frac{\beta_3}{\alpha_2} < 0$, что эквивалентно неравенствам

$$w_* > -1 + \frac{1}{A}, \quad G(w_*) = w_*^2 + w\frac{2A-1}{A-1} + 1 < 0 \tag{13}$$

соответственно.

Поскольку система (4) симметрична и при сдвигах вдоль ее траекторий грань F_0 переходит в F_2, плоскость (9) при циклической замене переменных $X_1^0 \to X_4^{(2)}$, $X_2^0 \to X_1^{(2)}$, $X_4^0 \to X_3^{(2)}$ переходит в плоскость (12), поэтому соответствующие коэффициенты в уравнениях этих плоскостей пропорциональны:

$$\frac{\beta_4}{\alpha_1} = \frac{\beta_3}{\alpha_4} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} < 0.$$

Из этих пропорций прямыми вычислениями показывается, что отношение w_* является наибольшим из отрицательных корней уравнения

$$F(w) = (A-1)w^3 + \frac{2A^3 - 6A^2 + 4A - 1}{(A-1)^2}w^2 + \frac{A^2 - 4A + 1}{(A-1)}w - 1 = 0$$

и что для него выполняются оба условия (13).

Тем самым процесс построения трехмерных плоскостей в областях диаграммы (7) может быть однозначно продолжен до исчерпывания всей диаграммы. Кроме того, из каждой области $\{1100\}$, $\{0110\}$, $\{0011\}$, $\{1001\}$ поверхность M^3 продолжается аналогичным образом и в оставшиеся области с потенциальным уровнем два — $\{1000\}$, $\{0100\}$, $\{0010\}$, $\{0001\}$ соответственно.

Теорема 1. *Построенная поверхность M^3 содержит в себе цикл $\mathscr{C} \subset Q_8$, а также натянутую на него инвариантную кусочно-линейную двумерную поверхность с вершиной E.*

Доказательство. Предположим, что это не так и что точка пересечения $\mathbf{X}_0 = \mathscr{C} \cap F_0$ не лежит в P_0^2, которую трехмерная плоскость P_0^3 высекает из грани F_0. Плоский угол в P_0^2 порождает дугу l_0 на единичной окружности. Эта дуга при сдвигах вдоль траекторий системы (4) перейдет в пересечение грани F_2 с плоскостью P_2^3 и породит там аналогичную плоскую дугу l_2. Таким образом, множество лучей, описываемых дугой l_0 в грани F_0, и множество лучей, описываемых дугой l_2 в грани F_2, конгруэнтны относительно циклической замены переменных ζ. Согласно теореме о неподвижной точке в плоскости P_0^2 найдется такой луч EY_0, который при композиции сдвига вдоль траекторий системы (4) и преобразования ζ^{-1} перейдет сам в себя. После прохода по диаграмме (7) этот луч также переходит в себя.

Поскольку сдвиги вдоль траекторий с грани F_i на грань F_{i+1}, $i = 0, 1, \ldots$, являются проективными преобразованиями и переводят прямые в прямые, плоскость, натянутая на лучи $E\mathbf{X}_0$ и EY_0, при сдвигах вдоль траекторий также породит полиэдральную трехмерную поверхность, не совпадающую с построенной поверхностью M^3, значит, предположение $\mathbf{X}_0 \notin P_0^2$ противоречит однозначности этого построения.

3. Геометрия фазового портрета системы (5)

В [10] Гласс и Пастернак рассматривали динамические системы вида (5) произвольных размерностей, в которых функция L_1 монотонно убывала, а все остальные функции Γ_j, $j \geq 2$, монотонно возрастали (см. (3)).

Для таких систем определение потенциального уровня блока может быть сформулировано точно так же. В указанной работе для четырехмерного случая построена аналогичная (7) диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \{1000\} & \longrightarrow & \{1100\} & \longrightarrow & \{1110\} & \longrightarrow & \{1111\} \\ \uparrow & & & & & & \downarrow \\ \{0000\} & \longleftarrow & \{0001\} & \longleftarrow & \{0011\} & \longleftarrow & \{0111\} \end{array}, \tag{14}$$

вложенная в ориентированный граф с вершинами, соответствующими всем 16 блокам разбиения (6). В этом графе стрелки, которые соответствуют переходам через гиперплоскости $x_j = 1$, $j > 1$, имеют направление, противоположное тому, которое описано в диаграмме (7). Обозначим через G_8 объединение перечисленных здесь восьми блоков. Все они имеют потенциальный уровень один в указанном выше смысле. В [10] установлены условия существования пробегающего по области G_8 согласно диаграмме (14) устойчивого цикла системы (5). Область G_8 является невыпуклым многогранником, звездным относительно точки E.

Из этих комбинаторных конструкций следует, что в отличие от системы (4) в фазовом портрете четырехмерной динамической системы (5) нет ни областей с нулевым потенциальным уровнем, ни устойчивых стационарных точек. Поэтому рассматриваемый ниже вопрос о построении гиперповерхности, разделяющей области притяжения пары устойчивых стационарных точек системы (4), для системы (5) не возникает.

Отметим еще одно существенное различие фазовых портретов систем (4) и (5). Для симметричной системы (4) диагональ $\Delta = \{x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}$ куба Π^4 состоит из двух траекторий, сходящихся с противоположных направлений: из блоков $\{0000\}$ и $\{1111\}$ к точке E (см. замечание 2 к лемме 1). Аналогичное утверждение справедливо и для несимметричных версий системы (4) любых размерностей. Следующая лемма вытекает из леммы 1.

Лемма 2. (1) *Все точки открытой области* $\mathrm{int}(\Pi^4)$, *у которых описанные в лемме* 1 *сегменты траекторий динамической системы* (4) *не проходят через точку* E, *образуют область* $\Pi^4 \setminus \Delta$, *гомеоморфную произведению* $S^2 \times D^2$ *двумерной сферы и открытого двумерного диска.*

(2) *Для системы* (5) *таким множеством точек с нетривиальным поведением траекторий является область* $\Pi^4 \setminus E \approx S^3 \times D^1$, *гомеоморфная произведению трехмерной сферы и одномерного диска.*

Здесь и далее через D^m обозначается открытый m-мерный диск.

Для динамической системы (5) восемь блоков разбиения (6), образующих область $\Pi^4 \setminus G_8$, имеют потенциальный уровень три относительно системы (5) и из них может быть составлена диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \{0101\} & \longrightarrow & \{0100\} & \longrightarrow & \{0110\} & \longrightarrow & \{0010\} \\ \uparrow & & & & & & \downarrow \\ \{1101\} & \longleftarrow & \{1001\} & \longleftarrow & \{1011\} & \longleftarrow & \{1010\} \end{array}. \tag{15}$$

Обозначим объединение перечисленных здесь восьми блоков через $\widehat{G}_8$. Внутренности областей $\mathrm{int}(G_8 \setminus E)$ и $\mathrm{int}(\widehat{G}_8 \setminus E)$ гомеоморфны произведению $S^1 \times D^3$. Как показано в [10], инвариантная область $\mathrm{int}(G_8 \setminus E)$ содержит устойчивый цикл системы (5) при подходящих значениях параметров A_1–A_4.

Теорема 2. *В области* $\Pi^4 \setminus G_8 \approx \widehat{G}_8 \setminus E$ *существует траектория* T, *которая бесконечно долго остается в области* $\mathrm{int}(\widehat{G}_8 \setminus E)$ *и проходит через ее блоки согласно диаграмме* (15).

Доказательство. Предположим, что такой траектории нет, тогда существует ретракция r вдоль траекторий системы (5) области $\Pi^4 \setminus E \approx S^3 \times D^1$ на область $G_8 \setminus E \approx S^1 \times D^3$, что противоречит поведению фундаментальных групп этих областей при композиции естественного вложения $G_8 \setminus E \subset \Pi^4 \setminus E$ и ретракции r.

Следствие. *Траекторий* T *из теоремы* 2 *в области* $\widehat{G}_8 \setminus E$ *бесконечно много.*

Действительно, надстроив траекторию T до кусочно-линейной инвариантной поверхности с вершиной E подобно тому, как цикл $\mathscr{C}$ надстраивался до поверхности M^2 (см. п. 2), можно увидеть, что для систем (4) и (5) такие инвариантные поверхности образованы однопараметрическими семействами геометрически различных траекторий. Для системы (5) все эти траектории проходят по области $\mathrm{int}(\widehat{G}_8 \setminus E)$ и через ее блоки согласно диаграмме (15).

Сопоставление утверждений теорем 1 и 2 показывает, что в фазовых портретах динамических систем (4) и (5) траектории ведут себя по-разному ввиду различия гомотопических типов областей $\Pi^4 \setminus E$ и $\Pi^4 \setminus \Delta$.

Для многомерных аналогов систем вида (4) и (5) комбинаторная структура фазовых портретов оказывается намного сложнее. В частности, в размерности 5 система вида (4) при достаточно больших значениях параметра A имеет два цикла (см., например, [1, 2]). В этом случае множество точек в Π^5 с нетривиальным поведением траекторий гомеоморфно $S^3 \times D^2$.

Анализ поведения траекторий пятимерной системы вида (5) в зависимости от всех ее параметров представляет, по-видимому, более сложную задачу, чем в случаях размерностей три и четыре. Теорема 2 аналогичным гомотопическим способом доказывается и для гладких аналогов системы (5) любых размерностей. Поведение траекторий таких гладких динамических систем изучалось ранее многими авторами (см., например, [14–17] и цитированную там литературу).

Авторы искренне благодарны и признательны А. А. Акиньшину, И. В. Голубятникову и А. Е. Гутману за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gaidov Yu. A., Golubyatnikov V. P.* On cycles and other geometric phenomena in phase portraits of some nonlinear dynamical systems // Geometry and applications. New York: Springer, 2014. P. 225–233. (Springer Proc. Math. Stat.; V. 72).
2. *Акиньшин А. А., Голубятников В. П., Голубятников И. В.* О некоторых многомерных моделях функционирования генных сетей // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 1. С. 3–9.
3. *Golubyatnikov V. P., Likhoshvai V. A., Ratushny A. V.* Existence of closed trajectories in 3-D gene networks // J. 3-dimensional images 3D Forum. 2004. V. 18, N 4. P. 96–101.
4. *Elowitz M. B., Leibler S.* A synthetic oscillatory network of transcription regulators // Nature. 2000. V. 403. P. 335–338.
5. *Gardner T. S., Cantor C. R., Collins J. J.* Construction of a genetic toggle switch in Escherichia coli // Nature. 2000. V. 403. P. 339–342.
6. *Murray J. D.* Mathematical biology. I. An introduction. New York: Springer-Verl., 2002.
7. *Golubyatnikov V. P., Golubyatnikov I. V.* On periodic trajectories in odd-dimensional gene networks models // Russ. J. Numerical Anal. Math. Modeling. 2011. V. 28, N 4. P. 397–412.
8. *Gaidov Yu. A., Golubyatnikov V. P.* On the existence and stability of cycles in gene networks with variable feedbacks // Contemp. Math. 2011. V. 553. P. 61–74.

9. *Golubyatnikov V. P., Likhoshvai V. A., Volokitin E. P., Gaidov Yu. A., Osipov A. F.* Periodic trajectories and Andronov–Hopf bifurcations in models of gene networks // Bioinformatics of genome regulation and structure. II. Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer Sci.; Buisiness Media Inc., 2006. P. 405–414.

10. *Glass L., Pasternack J. S.* Stable oscillations in mathematical models of biological control systems // J. Math. Biology. 1978. V. 6. P. 207–223.

11. *Wilds R., Glass L.* Contrasting methods for symbolic analysis of biological regulatory networks // Phys. Rev. 2009. V. 80. P. 062902–1–062902-4.

12. *Акиньшин А. А., Голубятников В. П.* Циклы в симметричных динамических системах // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, № 2. С. 3–12.

13. *Аюпова Н. Б., Голубятников В. П.* О единственности цикла в несимметричной трехмерной модели молекулярного репрессилятора // Сиб. журн. индустр. математики. 2014. Т. 17, № 1. С. 3–7.

14. *Волокитин Е. П., Тресков С. А.* Бифуркации Андронова — Хопфа в модели гипотетических генных сетей // Сиб. журн. индустр. математики. 2005. Т. 8, № 1. С. 30–40.

15. *Gedeon T., Mischaikow K.* Structure of the global attractor of cyclic feedback systems // J. Dynamics Differ. Equations. 1995. V. 7, N 1. P. 141–190.

16. *Hofbauer F., Mallet-Paret J., Smith H.* Stable periodic solutions for hypercycle systems // J. Dynamics Differ. Equations. 1991. V. 3, N 3. P. 423–436.

17. *Лашина Е. А., Чумаков Г. А., Чумакова Н. А.* Максимальные семейства периодических решений кинетической модели гетерогенной каталитической реакции // Вестн. НГУ. Сер. математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 4. С. 42–59.

Статья поступила 19 июня 2014 г.

Аюпова Наталия Борисовна, Голубятников Владимир Петрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
ayupova@math.nsc.ru, glbtn@math.nsc.ru