

## О МОНОДРОМИИ ОБЩЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Е. Н. Михалкин

**Аннотация.** Рассматривается общее приведенное алгебраическое уравнение степени  $n$  с комплексными коэффициентами. Многозначная функция, представляющая решение этого уравнения, называется *общей алгебраической функцией*. В пространстве коэффициентов рассматривается дискриминантное множество  $\nabla$  указанного уравнения и в его дополнении выбирается максимальная полициркулярная область  $D$ , содержащая начало координат. Описывается монодромия общей алгебраической функции в окрестности множества  $D$ . В частности доказывается, что  $\nabla$  пересекает границу  $\partial D$  в  $n$  вещественных алгебраических поверхностях  $\mathcal{S}^{(j)}$  размерности  $n - 2$ . При этом всякая ветвь  $y_j(x)$  общей алгебраической функции имеет в  $D$  ветвление лишь на паре поверхностей  $\mathcal{S}^{(j)}, \mathcal{S}^{(j-1)}$ .

**Ключевые слова:** алгебраическое уравнение, гипергеометрическая функция, дискриминант, интегральное представление, монодромия.

### Введение

В статье будем рассматривать общее алгебраическое уравнение

$$y^n + x_{n-1}y^{n-1} + \dots + x_1y - 1 = 0. \quad (1)$$

Главным решением уравнения (1) называется ветвь  $y_0(x) = y_0(x_1, \dots, x_{n-1})$  решения с условием  $y_0(0) = 1$ . Для указанного решения Меллином [1] получены интегральное представление (в виде интеграла по мнимому подпространству), а также разложение в гипергеометрический ряд. Также отмечено, что остальные решения уравнения (1) получаются из главного по формуле

$$y_j(x) = \varepsilon_j y_0(\varepsilon_j x_1, \varepsilon_j^2 x_2, \dots, \varepsilon_j^{n-1} x_{n-1}),$$

где  $\varepsilon_j = e^{\frac{2\pi i}{n}j}$  — первообразный корень из единицы степени  $n$ . Поэтому имеются все  $n$  решений  $y_j(x)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ , в виде степенных рядов с центром  $x = 0$ .

Область сходимости указанных степенных рядов является полной полициркулярной (точнее  $(n - 1)$ -циркулярной) логарифмически выпуклой областью [2]. Описание этой области приведено в [3].

Интегральные представления Меллина для решений  $y_j(x)$  сходятся в полиугловых областях [4]. Поскольку всякая пара, состоящая из полициркулярной и полиугловой областей, имеет непустое пересечение, представленные решения

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-31265-мол.а), а также гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор № 14.Y26.31.0006).

в виде соответствующих рядов и интегралов являются аналитическими продолжениями друг в друга. Такая схема аналитических продолжений описана в [5].

В настоящей статье реализуем некоторые аналитические продолжения общей алгебраической функции, основанные на другом ее интегральном представлении. А именно, в статье [6] для уравнения (1) получено решение в виде интеграла по отрезку. Область сходимости этого интеграла представляет собой дополнение к комплексно-линейчатой поверхности: эта область ни поликруговая, ни полиугловая.

На основе полученного интегрального представления в [6] описана монодромия решения  $y(x)$  уравнения (1) с одним параметром, т. е. когда в (1) лишь одна из переменных  $x_j$  отлична от нуля.

Для пояснения сути исследования заметим, что дискриминантное множество уравнения (1) допускает  $n$ -значную параметризацию Горна — Капранова  $x = \Psi(s)$  [3] (см. формулу (4) в § 1), где  $s$  пробегает комплексное проективное пространство размерности  $n - 2$ . Каждая из  $n$  ветвей параметризации определяет так называемую струну, которая получается сужением  $\Psi(s)$  на вещественное подпространство  $\mathbb{R}\mathbb{P}_{n-2}$ . Область сходимости  $D$  гипергеометрического ряда (сходящегося в окрестности  $x = 0$ ), представляющего решение уравнения (1), примыкает к дискриминантному множеству  $\nabla$  по части границы  $\partial D$ , состоящей из  $n$  струн  $\mathcal{S}^{(0)}, \mathcal{S}^{(1)}, \dots, \mathcal{S}^{(n-1)}$  (их точное определение см. в § 2). В данной статье описывается характер ветвления решения  $y(x)$  уравнения (1) при продолжении из области  $D$  вокруг струн.

Предложение 2 утверждает, что комплексная прямая, выпущенная из начала координат  $x = 0$  через произвольную точку на любой струне  $\mathcal{S}^{(j_0)}$ , пересекает каждую из струн  $\mathcal{S}^{(j)}$  в единственной точке. На каждой такой комплексной прямой можно выбрать  $n$  петель  $\sigma_j$  с началом в  $x = 0$ , окружающих струны  $\mathcal{S}^{(j)}$ . Основным результатом о монодромии общей алгебраической функции  $y(x)$  содержится в теореме 3 и состоит в том, что при продолжении через границу  $\partial D$  области  $D$  всякая ветвь  $y_j(x)$  решения уравнения (1) имеет ветвление лишь в паре струн  $\mathcal{S}^{(j)}$  и  $\mathcal{S}^{(j-1)}$ , причем второго порядка.

Приведем геометрическую интерпретацию вышесказанного для кубического уравнения

$$y^3 + x_2 y^2 + x_1 y - 1 = 0, \quad (2)$$

дискриминант которого есть полином

$$\Delta(x_1, x_2) = 27 + 4x_1^3 - 4x_2^3 + 18x_1 x_2 - x_1^2 x_2^2.$$

На рис. 1 изображены в логарифмической шкале

$$\ln : (x_1, x_2) \longrightarrow (\ln |x_1|, \ln |x_2|)$$

дискриминантное множество  $\nabla = \{(x_1, x_2) : \Delta(x_1, x_2) = 0\}$  уравнения (2) (темнозакрашенная область) и область  $D$  сходимости соответствующего гипергеометрического ряда (светлозакрашенная область). Параметризация  $\nabla$  определяет три струны, которые на рисунке проектируются в жирную кривую. Мы доказываем, что при продолжении через границу  $\partial D$  каждое решение  $y_j(x)$  уравнения (2) имеет ветвление лишь в точках двух струн.

В случае уравнения (1) таких струн будет  $n$ . Однако при продолжении через  $\partial D$  любое из решений  $y_j(x)$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ , по-прежнему имеет ветвление лишь в двух струнах из  $n$ .

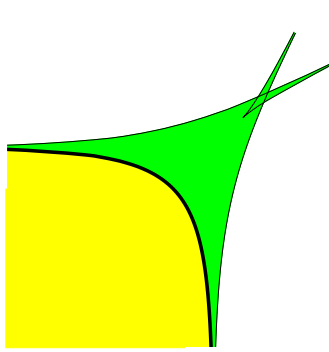


Рис. 1. Примыкание области к  $\nabla$  для кубического уравнения в логарифмической шкале.

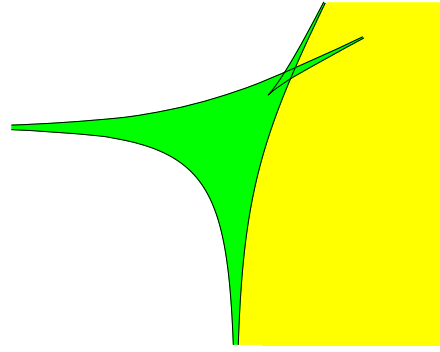


Рис. 2. Область сходимости одного из рядов Лорана, представляющего решение уравнения (2).

В основе доказательства теоремы 3 лежит конструкция двух разрезов  $\Sigma_+$  и  $\Sigma_-$  в виде вещественных гиперповерхностей, полученных на основе упомянутого интегрального представления для  $y_0(x)$  из [6] (точную формулировку см. в теореме 1 ниже). В § 2 описывается дифференциальная геометрия этих разрезов. А именно, доказывается, что разрезы  $\Sigma_{\pm}$  не пересекают область  $D$  и примыкают к ее границе лишь по двум струнам  $\mathcal{S}^{(0)}$  и  $\mathcal{S}^{(n-1)}$ , касаясь дискриминантного множества (предложение 1, теорема 2).

Отметим, что в статьях [7, 8] рассмотрена монодромия решения системы дифференциальных уравнений Меллина.

**§ 1. Степенной ряд и интегральное представление для  $y_0(x)$**

Согласно [1] гипергеометрический ряд, представляющий главное решение уравнения (1), следующий:

$$y_0(x) = \frac{1}{n} \sum_{|k| \geq 0} \frac{(-1)^{|k|} \Gamma(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}k_1 + \dots + \frac{n-1}{n}k_{n-1})}{k_1! \dots k_{n-1}! \Gamma(\frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}k_1 - \dots - \frac{1}{n}k_{n-1} + 1)} x_1^{k_1} \dots x_{n-1}^{k_{n-1}}, \quad (3)$$

где  $|k| = k_1 + \dots + k_{n-1}$ ,  $k_i \geq 0$ .

Опишем область сходимости ряда (3). Для этого обозначим через  $\Delta(x) = \Delta(x_1, \dots, x_{n-1})$  дискриминант уравнения (1). Его нулевое множество  $\nabla = \{x \in \mathbb{C}^{n-1} : \Delta(x) = 0\}$  называется *дискриминантным множеством уравнения*. Введем следующие векторы:

$$\alpha = (n - 1, \dots, 2, 1), \quad \beta = (1, 2, \dots, n - 1),$$

с помощью которых дискриминантное множество  $\nabla$  уравнения (1) допускает параметризацию  $\Psi : \mathbb{C}\mathbb{P}_s^{n-2} \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$  по формуле [3, 4]

$$x_k = \Psi_k(s) = \frac{ns_k}{\langle \alpha, s \rangle} \left( - \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}}, \quad k = 1, \dots, n - 1, \quad s \in \mathbb{C}\mathbb{P}_{n-2} \quad (4)$$

(здесь  $\langle , \rangle$  — знак скалярного произведения). Тогда область сходимости  $D$  ряда (3) определяется из параметризации (4). А именно, поверхность

$$|x_k| = |\Psi_k(s)|, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad s \in \mathbb{R}_+^{n-1},$$

задает границу  $\partial|D|$  изображения  $|D|$  области  $D$  на диаграмме Рейнхардта [3, 9].

В [5] получены аналитические продолжения ряда (3), представленные рядами Лорана — Пуизо в других областях, определенным образом примыкающих к дискриминантному множеству (см., например, светлорозовую область на рис. 2).

Выпишем представление для  $y_0(x)$  в виде интеграла по отрезку. Для участвующей в этом представлении логарифмической функции ее ветви выбираются условием  $\ln 1 = 0$ .

**Теорема 1** [6]. *Ветвь  $y_0(x)$  решения уравнения (1) представляется интегралом*

$$y_0(x) = 1 + \frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 t^{\frac{1-n}{n}} (1-t)^{-\frac{1+n}{n}} \left[ e^{\frac{\pi i}{n}} \ln \left( 1 + \sum_{k=1}^{n-1} e^{-\frac{k}{n}\pi i} x_k t^{\frac{n-k}{n}} (1-t)^{\frac{k}{n}} \right) - e^{-\frac{\pi i}{n}} \ln \left( 1 + \sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{k}{n}\pi i} x_k t^{\frac{n-k}{n}} (1-t)^{\frac{k}{n}} \right) \right] dt, \quad (5)$$

сходящимся в области  $\mathbb{C}^{n-1} \setminus (\Sigma_- \cup \Sigma_+)$ , где  $\Sigma_{\mp} = \bigcup_{t \in [0;1]} \Sigma_{\mp}(t)$  — семейства гиперплоскостей

$$\Sigma_{\mp}(t) = \left\{ x \in \mathbb{C}^{n-1} : \sum_{k=1}^{n-1} e^{\mp \frac{n-k}{n}\pi i} x_k t^{\frac{n-k}{n}} (1-t)^{\frac{k}{n}} = 1 \right\}.$$

Отметим, что так как логарифмические функции в (5) голоморфны и однозначны в области  $\mathbb{C}^{n-1} \setminus (\Sigma_- \cup \Sigma_+)$ , то  $y_0(x)$  голоморфна в этой области. Каждое из семейств  $\Sigma_-$ ,  $\Sigma_+$  является вещественной гиперповерхностью, и они служат разрезами, т. е. препятствиями к многозначности  $y_0(x)$  в  $\mathbb{C}^{n-1} \setminus (\Sigma_- \cup \Sigma_+)$ .

## § 2. Геометрия разрезов $\Sigma_+$ и $\Sigma_-$

Рассмотрим логарифмическую проекцию дискриминантной гиперповерхности  $\nabla$ :

$$\ln : \nabla \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}, \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \rightarrow (\ln |x_1|, \dots, \ln |x_{n-1}|).$$

Образ  $\ln \nabla \subset \mathbb{R}^{n-1}$  называется *амебой алгебраической гиперповерхности* (см. [3, 10]). Обозначим через  $K$  множество критических точек этой проекции. Известно [11, 12], что  $K$  равно образу  $\Psi(\mathbb{RP}_{n-2})$  вещественного проективного пространства относительно отображения (4).

**Предложение 1.** *Комплексные гиперплоскости семейств  $\Sigma_{\pm}$  касаются дискриминантного множества  $\nabla$  вдоль подмножеств*

$$K_{\pm} = \left\{ \Psi^{\pm}(s) : s \in \mathbb{RP}_{n-2}, \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} > 0 \right\} \subset K,$$

где  $\Psi^\pm(s)$  — ветви параметризации (4), определяемые условиями  $\arg\left(-\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\right)^{\frac{1}{n}} = \mp\frac{\pi}{n}$ . В точке  $x = \Psi^\pm(s)$  с  $\nabla$  касается гиперплоскость  $\Sigma_\pm(t)$  семейства  $\Sigma_\pm$ , соответствующая параметру  $t = \frac{\langle\beta,s\rangle}{\langle\alpha,s\rangle + \langle\beta,s\rangle}$ .

На рис. 3 в логарифмической шкале изображено указанное в предложении 1 свойство касания. В них, как и на рис. 1, рассмотрен дискриминант уравнения (2), а в качестве прямых  $\Sigma_\pm(t)$  берутся прямые для значений  $t = 0,15$ ,  $t = 0,5$ ,  $t = 0,9$ .

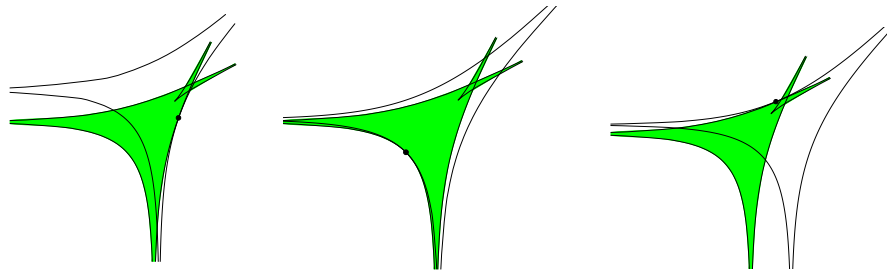


Рис. 3. Касание  $\nabla$  гиперплоскостями из  $\Sigma_\pm$  при  $t = 0,15; 0,5; 0,9$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Пусть  $F_\pm(x;t)$  — аффинные функции (переменного  $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$ ), определяющие  $\Sigma_\pm(t)$ :

$$F_\pm(x;t) = \sum_{k=1}^{n-1} x_k t^{\frac{k}{n}} (1-t)^{\frac{n-k}{n}} e^{\pm \frac{k}{n} \pi i} - 1 =: \sum_{k=1}^{n-1} x_k A_k^\pm(t) - 1.$$

Для рассматриваемых  $s$  точки касания  $\nabla$  и  $\Sigma_\pm(t)$  определяются системой уравнений (относительно  $t = t(s)$ )

$$F_\pm(\Psi(s); t(s)) = 0, \quad \text{grad}_s F_\pm(\Psi(s); t(s)) = 0.$$

Пусть  $s \in \mathbb{RP}_{n-2}$ , причем  $\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle} > 0$ . Для таких  $s$  параметризацию (4) можно записать в виде  $n$  ветвей  $x = \Psi^{(j)}(s)$ :

$$x_k = \Psi_k^{(j)}(s) = e^{-\frac{\pi k i}{n}(1+2j)} \frac{ns_k}{\langle\alpha,s\rangle} \left(\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\right)^{\frac{k}{n}}, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

где в качестве радикала степени  $\frac{k}{n}$  берется арифметическое значение, а  $j$  принимает значения  $0, 1, \dots, n-1$ . Очевидно,  $\Psi^{(0)}(s) = \Psi^+(s)$ ,  $\Psi^{(n-1)}(s) = \Psi^-(s)$ . Вычислим частные производные  $\frac{\partial \Psi_k^{(j)}}{\partial s_\nu}$ . Для  $k \neq \nu$  имеем

$$\frac{\partial \Psi_k^{(j)}}{\partial s_\nu} = B_{k\nu}^{(j)}(s),$$

где

$$B_{k\nu}^{(j)}(s) = e^{-\frac{\pi k i}{n}(1+2j)} \frac{ns_k}{\langle\alpha,s\rangle^2 \langle\beta,s\rangle} \left(\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\right)^{\frac{k}{n}} [(k + \nu - n)\langle\beta,s\rangle - \nu k |s|].$$

Функция  $B_{k\nu}^{(j)}(s)$  определена также при  $k = \nu$ , и производная  $\frac{\partial \Psi_\nu^{(j)}}{\partial s_\nu}$  выражается через нее по формуле

$$\frac{\partial \Psi_\nu^{(j)}}{\partial s_\nu} = e^{-\frac{\pi\nu i}{n}(1+2j)} \frac{n}{\langle \alpha, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{\nu}{n}} + B_{\nu\nu}^{(j)}(s).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial F_\pm(\Psi^{(j)}(s); t)}{\partial s_\nu} = A_\nu^\pm(t) e^{-\frac{\pi\nu i}{n}(1+2j)} \frac{n}{\langle \alpha, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{\nu}{n}} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k^\pm(t) B_{k\nu}^{(j)}(s).$$

Заметим, что

$$A_\nu^+(t) e^{-\frac{\pi\nu i}{n}(1+2j)} \Big|_{j=0} = t^{\frac{\nu}{n}} (1-t)^{\frac{n-\nu}{n}} = A_\nu^-(t) e^{-\frac{\pi\nu i}{n}(1+2j)} \Big|_{j=n-1}.$$

Аналогично в произведениях  $A_k^+ B_{k\nu}^{(0)}$  и  $A_k^- B_{k\nu}^{(n-1)}$  степень экспоненты исчезает, поэтому

$$F_\pm(\Psi^\pm(s); t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{ns_k}{\langle \alpha, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}} t^{\frac{k}{n}} (1-t)^{\frac{n-k}{n}} - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} |x_k(s)| t^{\frac{k}{n}} (1-t)^{\frac{n-k}{n}} - 1. \quad (6)$$

Следовательно, для производной получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\pm(\Psi^\pm(s); t)}{\partial s_\nu} &= t^{\frac{\nu}{n}} (1-t)^{\frac{n-\nu}{n}} \frac{n}{\langle \alpha, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{\nu}{n}} \\ &+ \frac{n}{\langle \alpha, s \rangle^2 \langle \beta, s \rangle} \sum_{k=1}^{n-1} t^{\frac{k}{n}} (1-t)^{\frac{n-k}{n}} s_k \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}} ((k+\nu-n)\langle \beta, s \rangle - \nu k |s|). \quad (7) \end{aligned}$$

Положим  $t = \frac{\langle \beta, s \rangle}{n|s|}$ , где  $|s| = s_1 + \dots + s_{n-1}$ . Так как  $n|s| = \langle \alpha, s \rangle + \langle \beta, s \rangle$ , несложно проверить, что  $t \in (0; 1)$  тогда и только тогда, когда  $\frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} > 0$ . Покажем, что при указанном  $t = t(s)$  справедливы тождества

$$F_\pm(\Psi^\pm(s); t(s)) \equiv 0, \quad \frac{\partial F_\pm(\Psi^\pm(s); t(s))}{\partial s_\nu} \equiv 0, \quad \nu = 1, \dots, n-1.$$

Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned} F_\pm(\Psi^\pm(s); t(s)) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{ns_k}{\langle \alpha, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}} \left( \frac{\langle \beta, s \rangle}{n|s|} \right)^{\frac{k}{n}} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{n|s|} \right)^{\frac{n-k}{n}} - 1 \\ &= \frac{1}{|s|} \sum_{k=1}^{n-1} s_k - 1 = 0. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial F_{\pm}(\Psi^{\pm}(s); t(s))}{\partial s_{\nu}} \\
 &= \frac{1}{\langle \alpha, s \rangle^2 \langle \beta, s \rangle} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle \beta, s \rangle^{\frac{k}{n}} \langle \alpha, s \rangle^{\frac{n-k}{n}}}{|s|} s_k \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}} ((k + \nu - n) \langle \beta, s \rangle - \nu k |s|) \\
 & \quad + \frac{1}{\langle \alpha, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}} \frac{\langle \beta, s \rangle^{\frac{\nu}{n}} \langle \alpha, s \rangle^{\frac{n-\nu}{n}}}{|s|} \\
 &= \frac{1}{\langle \alpha, s \rangle \langle \beta, s \rangle |s|} \sum_{k=1}^{n-1} s_k ((k + \nu - n) \langle \beta, s \rangle - \nu k |s|) + \frac{1}{|s|} \\
 &= \frac{1}{\langle \alpha, s \rangle \langle \beta, s \rangle |s|} ((\beta, s)^2 + (\nu - n) \langle \beta, s \rangle |s| - \nu \langle \beta, s \rangle |s|) + \frac{1}{|s|} \\
 &= \frac{1}{\langle \alpha, s \rangle |s|} (\langle \beta, s \rangle - n |s|) + \frac{1}{|s|} = 0.
 \end{aligned}$$

Предложение 1 доказано.

При доказательстве предложения 1 мы определили  $\Psi^{(j)}(s)$  как ветви параметризации (4) с условием

$$\arg \left( - \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{1}{n}} = -\frac{\pi}{n}(1 + 2j)$$

и отметили справедливость равенств  $\Psi^{+}(s) = \Psi^{(0)}(s)$ ,  $\Psi^{-}(s) = \Psi^{(n-1)}(s)$ . Назовем *струной* поверхность

$$\mathcal{S}^{(j)} := \{ \Psi^{(j)}(s) : s \in \mathbb{R}_+^{n-1} \} \subset \nabla, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Для формулировки следующего утверждения напомним, что  $D$  обозначает область сходимости ряда (3).

**Теорема 2.** Разрезы  $\Sigma_+$ ,  $\Sigma_-$  не пересекают область  $D$  и примыкают к ее границе лишь по двум струнам  $\mathcal{S}^{(0)}$  и  $\mathcal{S}^{(n-1)}$ . Таким образом, при продолжении через границу  $\partial D$  главное решение уравнения (1) испытывает ветвление только в точках  $\mathcal{S}^{(0)}$ ,  $\mathcal{S}^{(n-1)}$ .

**Доказательство.** Покажем, что при  $s \in \mathbb{R}_+^{n-1}$  частные производные  $\frac{\partial F_{\pm}(\Psi^{\pm}(s); t)}{\partial s_{\nu}}$  одновременно обращаются в нуль лишь при  $t = \frac{\langle \beta, s \rangle}{n|s|}$ . Ввиду (7) уравнение  $\frac{\partial F_{\pm}(\Psi^{\pm}(s); t)}{\partial s_1} = 0$  равносильно следующему:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\langle \alpha, s \rangle \langle \beta, s \rangle} \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{t}{1-t} \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}} s_k ((n-k-1) \langle \beta, s \rangle + k |s|) \\
 & \quad - \left( \frac{t}{1-t} \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{1}{n}} = 0.
 \end{aligned}$$

Последнее уравнение запишем в виде

$$\sum_{k=0}^{n-2} f_{k+1}(s) b^k = 0, \tag{8}$$

где  $b = \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{n}}$ ,

$$f_k(s) = \frac{1}{\langle \alpha, s \rangle \langle \beta, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}} s_k ((n-k-1)\langle \beta, s \rangle + k|s|) \quad \text{при } k > 1,$$

$$f_1(s) = \frac{1}{\langle \alpha, s \rangle \langle \beta, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{1}{n}} s_1 ((n-2)\langle \beta, s \rangle + |s|) - \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Рассмотрим (8) как алгебраическое уравнение относительно  $b$ . Заметим, что при  $s \in \mathbb{R}_+^{n-1}$  коэффициенты  $f_2(s), \dots, f_{n-1}(s)$  этого уравнения положительные. Поэтому (8) может иметь не более одного положительного корня  $b = b(s)$ . Поскольку функция  $b = \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{n}}$  монотонно возрастает на интервале  $(0, 1)$ , корню  $b(s)$  может соответствовать только одно значение  $t = t(s)$ . Но выше было показано, что таковым  $t(s)$  является  $t = \frac{\langle \beta, s \rangle}{n|s|}$ .

Обозначим через  $|D|$  изображение области  $D$  на диаграмме Рейнхардта. По теореме Пассаре — Циха [3] система функций

$$r_k(s) = \frac{ns_k}{\langle \alpha, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}}, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

задает параметризацию границы  $\partial|D|$ . Обозначим  $A_k(t) := t^{\frac{k}{n}}(1-t)^{\frac{n-k}{n}}$ . Согласно представлению (6) для  $F_{\pm}(\Psi^{\pm}(s); t)$  и следующему за ним доказательству предложения 1, каждая из вещественных гиперплоскостей  $F_{\pm}(\Psi^{\pm}(s); t) = 0$  касается  $\partial|D|$ , причем в точках  $t = \frac{\langle \beta, s \rangle}{n|s|}$ . Так как  $A_k > 0$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , область  $|D|$  лежит под каждой  $\Sigma_{\text{real}}(t) = \{r \in \mathbb{R}_+^{n-1} : A_1(t)r_1 + \dots + A_{n-1}(t)r_{n-1} = 1\}$  и потому выпукла.

Обозначим

$$\tilde{F}(x; t) = A_1(t)x_1 + \dots + A_{n-1}(t)x_{n-1}$$

и заметим, что  $\tilde{F}(r; t) \leq 1$  для всех  $r$  из замыкания  $|\overline{D}|$ , причем равенство достигается лишь в точке  $r(s)$  при  $t = \frac{\langle \beta, s \rangle}{n|s|}$ . Рассмотрим функцию  $\tilde{F}(x; t)$  для комплексных  $x = (r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_{n-1} e^{i\theta_{n-1}}) \in \overline{D}$ . Для нее  $\text{Re } \tilde{F}(x; t) \leq \tilde{F}(r; t)$ , причем равенство имеет место лишь при вещественных  $x$ . Отсюда следует, что

$$\Sigma_{\pm}(t) = \{x \in \mathbb{C}^{n-1} : \tilde{F}(x_1 e^{\pm \frac{\pi i}{n}}, \dots, x_{n-1} e^{\pm \frac{\pi(n-1)i}{n}}) = 1\}$$

не пересекают  $D$ , а ее границу  $\partial D$  пересекают лишь в точках  $\Psi^{\pm}(s)$ ,  $s \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ , обеспечивающих согласно (6) равенство

$$\tilde{F}(x_1(s) e^{\pm \frac{\pi i}{n}}, \dots, x_{n-1}(s) e^{\pm \frac{\pi(n-1)i}{n}}) = \tilde{F}(|x_1|, \dots, |x_{n-1}|).$$

Теорема 2 доказана.

### § 3. Монодромия для $y(x)$ вблизи области $D$

Отметим, что для введенных в предыдущем параграфе струн выполняется условие цикличности:  $\mathcal{S}^{(j)} = \mathcal{S}^{(j+nk)}$  (при  $k \in \mathbb{Z}$ ), поэтому достаточно рассматривать  $\mathcal{S}^{(j)}$  для  $j = 0, \dots, n-1$ .

Используя формулу, выражающую остальные решения уравнения (1) через главное:

$$y_j(x) = \varepsilon_j y_0(\varepsilon_j x_1, \varepsilon_j^2 x_2, \dots, \varepsilon_j^{n-1} x_{n-1}), \quad j = 1, \dots, n-1,$$

получаем



**Следствие 1.** При продолжении через границу  $\partial D$  области  $D$  каждая ветвь  $y_j(x)$  уравнения (1) испытывает ветвление лишь в точках  $\mathcal{S}^{(j-1)}$  и  $\mathcal{S}^{(j)}$ .

Далее перейдем к нахождению порядка ветвления каждой из указанных струн. Для этого заметим, что в силу однородности параметризации (4) одну из координат вектора  $s = (s_1, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^{n-1}$  можно считать равной единице. Пусть  $s_{n-1} = 1$ , тем самым будем рассматривать вектор  $s = (s_1, \dots, s_{n-2}, 1)$ .

Зафиксируем произвольную точку  $s^{(0)} = (s_1^{(0)}, \dots, s_{n-2}^{(0)}, 1)$  с положительными координатами и проведем комплексную прямую  $x = u\Psi^{(j_0)}(s^{(0)})$ ,  $u \in \mathbb{C}$ , через начало координат  $x = 0$  и точку  $\Psi^{(j_0)}(s^{(0)})$  на струне. Эта прямая имеет непустое пересечение с каждой из струн  $\mathcal{S}^{(j)}$ . Действительно, представив  $u = \rho e^{i\varphi}$ , приходим к системе уравнений

$$e^{i(\varphi - \frac{\pi}{n}(1+2j_0))} \rho \frac{ns_k^{(0)}}{\langle \alpha, s^{(0)} \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s^{(0)} \rangle}{\langle \beta, s^{(0)} \rangle} \right)^{\frac{k}{n}} = e^{-\frac{\pi i}{n}(1+2j)} \frac{ns_k}{\langle \alpha, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}}, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

решением которой при  $\varphi = \frac{2\pi}{n}(j_0 - j)$  является

$$(\rho, s_1, \dots, s_{n-2}) = (1, s_1^{(0)}, \dots, s_{n-2}^{(0)}).$$

Таким образом, для каждого  $j$  при  $\arg u = \frac{2\pi}{n}(j_0 - j)$  рассматриваемая прямая пересекает струну  $\mathcal{S}^{(j)}$ . Более того, справедливо

**Предложение 2.** Комплексная прямая  $\{x = u\Psi^{(j_0)}(s^{(0)}) : u \in \mathbb{C}\}$  пересекает каждую из струн  $\mathcal{S}^{(j)}$  в единственной точке.

Доказательство. Нужно показать, что система

$$\rho \frac{ns_k^{(0)}}{\langle \alpha, s^{(0)} \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s^{(0)} \rangle}{\langle \beta, s^{(0)} \rangle} \right)^{\frac{k}{n}} = \frac{ns_k}{\langle \alpha, s \rangle} \left( \frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (9)$$

при выбранном  $s^{(0)}$  имеет единственное решение. Для этого выразим из (9)  $s_k$ ,  $k = 1, \dots, n-3$ , через  $s_{n-2}$  следующим образом. Сначала разделим каждое уравнение из (9) на последнее уравнение этой системы (т. е. при  $k = n-1$ ), в результате получим новую систему уравнений:

$$s_k^{(0)} \left( \frac{\langle \beta, s^{(0)} \rangle}{\langle \alpha, s^{(0)} \rangle} \right)^{\frac{n-k-1}{n}} = s_k \left( \frac{\langle \beta, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle} \right)^{\frac{n-k-1}{n}}, \quad k = 1, \dots, n-2. \quad (10)$$

Теперь разделим каждое из уравнений полученной системы на последнее уравнение этой системы, возведенное в степень  $n-k-1$ , в результате чего придем к требуемой связи между  $s_k$  и  $s_{n-2}$ :

$$s_k = \frac{s_k^{(0)}}{(s_{n-2}^{(0)})^{n-k-1}} s_{n-2}^{n-k-1}, \quad k = 1, \dots, n-3. \quad (11)$$

Представим  $\langle \alpha, s \rangle$ ,  $\langle \beta, s \rangle$  с учетом последнего выражения в виде многочленов с положительными коэффициентами:

$$\langle \alpha, s \rangle = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \frac{s_k^{(0)}}{(s_{n-2}^{(0)})^{n-k-1}} s_{n-2}^{n-k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k s_{n-2}^{n-k-1},$$

$$\langle \beta, s \rangle = \sum_{k=1}^{n-1} k \frac{s_k^{(0)}}{(s_{n-2}^{(0)})^{n-k-1}} s_{n-2}^{n-k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} b_k s_{n-2}^{n-k-1},$$

здесь по-прежнему  $s_{n-1} = s_{n-1}^{(0)} = 1$ . Учитывая полученные соотношения, запишем последнее уравнение системы (10) в виде

$$s_{n-2}^{(0)} \left( \frac{\langle \beta, s^{(0)} \rangle}{\langle \alpha, s^{(0)} \rangle} \right)^{\frac{1}{n}} = s_{n-2} \left( \frac{\sum_{k=1}^{n-1} b_k s_{n-2}^{n-k-1}}{\sum_{k=1}^{n-1} a_k s_{n-2}^{n-k-1}} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (12)$$

Несложно увидеть, что функция  $g(s_{n-2}) = s_{n-2} \left( \frac{\sum_{k=1}^{n-1} b_k s_{n-2}^{n-k-1}}{\sum_{k=1}^{n-1} a_k s_{n-2}^{n-k-1}} \right)^{\frac{1}{n}}$  является строго возрастающей при  $s_{n-2} > 0$ . Для этого достаточно представить  $g(s_{n-2})$  в виде

$$g(s_{n-2}) = s_{n-2}^{\frac{2}{n}} \left( \frac{\sum_{k=1}^{n-1} b_k s_{n-2}^{n-k-1}}{a_1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{a_k}{s_{n-2}^{k-1}}} \right)^{\frac{1}{n}}$$

и учесть, что  $a_k, b_k > 0$ . Следовательно, уравнение (12) имеет лишь одно решение  $s_{n-2} = s_{n-2}^{(0)}$ . Из (11) получаем, что  $s_k = s_k^{(0)}$  для  $k = 1, \dots, n-3$ . Предложение доказано.

Итак, согласно предложению 2 комплексная прямая  $x = u\Psi^{(j_0)}(s^{(0)})$  пересекает каждую из  $n$  струн  $\mathcal{S}^{(j)}$  ровно в одной точке. Обозначим через  $\sigma_j$  петлю, лежащую в указанной прямой, проходящую через  $x = 0$  и окружающую лишь струну  $\mathcal{S}^{(j)}$ . Согласно следствию 1 каждая из струн  $\mathcal{S}^{(j)}$  является точкой ветвления лишь двух ветвей  $y_j(x)$  и  $y_{j+1}(x)$  (с учетом цикличности) из набора  $y_0(x), \dots, y_{n-1}(x)$  всех ветвей.

Также из следствия 1 несложно сделать вывод, что ветвь  $y_j(x)$  при обходе петли  $\sigma_j$  переходит в ветвь  $y_{j+1}(x)$  (здесь понимаем, что  $j = 0, \dots, n-1$ , т. е. учитываем условие цикличности по  $\text{mod } n$ ). Действительно, если предположить, что рассматриваемая ветвь переходит в отличную от  $y_{j+1}(x)$  ветвь, то точка  $\mathcal{S}^{(j)}$  будет являться точкой ветвления бесконечного порядка, так как лишь две ветви  $y_j(x)$  и  $y_{j+1}(x)$  имеют ветвление в этой точке. Аналогично получаем, что ветвь  $y_j(x)$  при обходе петли  $\sigma_{j-1}$  переходит в ветвь  $y_{j-1}(x)$ .

Наконец, укажем порядок ветвления струн  $\mathcal{S}^{(j)}$ . Как было показано, ветвь  $y_j(x)$  при обходе петли  $\sigma_j$  переходит в ветвь  $y_{j+1}(x)$ , а ветвь  $y_{j+1}(x)$  при обходе петли  $\sigma_j$  — в ветвь  $y_{(j+1)-1}(x) = y_j(x)$ . Итак, ветвь  $y_j$  при двукратном обходе петли  $\sigma_j$  перешла сама в себя. Следовательно, порядок ветвления струн  $\mathcal{S}^{(j)}$  равен двум. Таким образом, доказана следующая

**Теорема 3.** При продолжении через границу  $\partial D$  области  $D$  всякая ветвь  $y_j(x)$  решения уравнения (1) имеет ветвление лишь в паре струн  $\mathcal{S}^{(j)}$  и  $\mathcal{S}^{(j-1)}$ , причем второго порядка. При этом ветвь  $y_j(x)$  при обходе петли  $\sigma_j$  переходит в ветвь  $y_{j+1}$ , а при обходе петли  $\sigma_{j-1}$  — в ветвь  $y_{j-1}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Mellin H. J. Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math. 1921. V. 172. P. 658–661.
2. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1976. Ч. 2.

3. *Passare M., Tsikh A.* Algebraic equations and hypergeometric series // The legacy of Niels Henrik Abel. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2004. P. 653–672.
4. *Антипова И. А.* Обращения многомерных преобразований Меллина и решение алгебраических уравнений // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 4. С. 3–20.
5. *Антипова И. А., Михалкин Е. Н.* Аналитические продолжения общей алгебраической функции с помощью рядов Пуансо // Тр. МИАН. 2012. Т. 279. С. 9–19.
6. *Михалкин Е. Н.* О решении общих алгебраических уравнений с помощью интегралов от элементарных функций // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 2. С. 365–371.
7. *Дикенштейн А., Садыков Т. М.* Алгебраичность решений системы уравнений Меллина и ее монодромия // Докл. АН. 2007. Т. 412, № 4. С. 448–450.
8. *Дикенштейн А., Садыков Т. М.* Базисы в пространстве решений системы уравнений Меллина // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 9. С. 59–80.
9. *Семусева А. Ю., Цих А. К.* Области сходимости гипергеометрических рядов многих комплексных переменных // Журн. СВУ. Сер. Математика и физика. 2009. Т. 2, № 2. С. 221–229.
10. *Gelfand I., Kapranov M., Zelevinsky A.* Discriminants, resultants and multidimensional determinants. Boston: Birkhäuser, 1994.
11. *Passare M., Tsikh A.* Amoebas: their spines and their contours // Contemp. Math. 2005. V. 377. P. 275–288.
12. *Mikhalkin G.* Real algebraic curves, the moment map and amoebas // Ann. Math. 2000. V. 151, N 2. P. 309–326.

*Статья поступила 18 июля 2014 г.*

Михалкин Евгений Николаевич  
Сибирский федеральный университет,  
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041  
mikhalkin@bk.ru