Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2015. Том 56, № 3

УДК 517.53

УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПОЛЮСОВ

А. Г. Липчинский

Аннотация. Рассматривается интерполяционный процесс для класса функций, имеющих конечное число особых точек, с помощью рациональных функций, полюсы которых совпадают с особыми точками интерполируемой функции. Узлы интерполяции образуют треугольную матрицу. Найдены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости на любом компакте, не содержащем особых точек функции, последовательности интерполяционных дробей к интерполируемой функции, а также другие условия сходимости. Обобщаются и улучшаются известные результаты по интерполированию функций с конечным числом особых точек рациональными дробями и целых функций многочленами.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.301

Ключевые слова: аналитическая функция, особая точка функции, интерполяционный процесс, рациональная дробь, равномерная сходимость, условия сходимости.

Пусть однозначная аналитическая функция $f(z)$ не имеет других особых точек, кроме, быть может, точек a_s, $s = 1, 2, \dots, p+1$, $a_{p+1} = \infty$. Класс таких функций обозначим через $A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$.

Порядок ρ_s и тип σ_s функции около особой точки a_s определяются формулами (см. [1, 2])

$$\rho_s = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M_s(f,r)}{\ln r}, \ \rho_s > 0, \quad \sigma_s = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_s(f,r)}{r^{\rho_s}}, \ s = 1, 2, \dots, p+1,$$

где $M_k(f,r) = \max\limits_{|z-a_k|=\frac{1}{r}} |f(z)|,\ k = 1, 2, \dots, p, \quad M_{p+1}(f,r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$.

Класс функций $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$, у которых порядок около точки a_s либо меньше, либо равен ρ_s, а тип около этой точки меньше σ_s, обозначим через $[\rho_s, \sigma_s)$.

Пусть матрица узлов интерполяции $\{z_j^{(n)}\}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$, обладает следующим свойством. При всех $n > N$ n-ю строку матрицы можно разбить на $p+2$ группы точек $\{z_{s,j}^{(n)}\}$, $s = 1, 2, \dots, p+1$, и $\{z_{0,j}^{(n)}\}$ так, что узлы $\{z_{s,j}^{(n)}\}$, $j = 1, 2, \dots, \lambda_n^{(s)}$, при неограниченном возрастании n имеют единственную точку сгущения a, $z_{p+1,j}^{(n)} \neq 0$, а множество точек $\{z_{0,j}^{(n)}\}$, $j = 1, 2, \dots, \lambda_n^{(0)}$, содержится в некотором компакте, не включающем точек a_k, $k = 1, 2, \dots, p$. Класс матриц, обладающих таким свойством, обозначим символом $\bigcup\limits_{s=1}^{p+1} a_s$.

Введем обозначения

$$u_{n,j}^{(k)} = \left|a_k - z_{k,j}^{(n)}\right|^{-1},\ k = 1, 2, \dots, p, \quad u_{n,j}^{(p+1)} = \left|z_{p+1,j}^{(n)}\right|.$$

Не нарушая общности, далее будем полагать, что при всех $n > n_0$ выполнены неравенства $u^{(s)}_{n,j} \le u^{(s)}_{n,j+1}$, $s = 1,2,\dots,p+1$, в противном случае узлы интерполяции в строках матрицы можно перенумеровать.

Порядок μ_s и тип A_s сходимости последовательности $\{z^{(n)}_{s,j}\}$, $j = 1,2,\dots,\lambda^{(s)}_n$, $s = 1,2,\dots,p+1$, около точек a_s определяются равенствами (см. [1, 2])

$$\frac{1}{\mu_s} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln u^{(s)}_{n,j}}{\ln j}, \quad A_s = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{u^{(s)}_{n,j}}{(j)^{1/\mu_s}}.$$

Функция плотности узлов интерполяции в окрестности точки a_k, обозначаемая через $n_k(R)$, равна количеству чисел из группы $\{z^{(n)}_{k,j}\}$, находящихся вне круга $|z - a_k| < \frac{1}{R}$, $k = 1,2,\dots,p$, и $n_{p+1}(R)$ — число точек группы $\{z^{(n)}_{p+1,j}\}$, попавших в круг $|z| \le R$ (см. [2]).

Будем интерполировать функцию $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ в узлах $\{z^{(n)}_j\} \in \bigcup\limits_{s=1}^{p+1} a_s$ с помощью рациональных функций вида

$$R_{n-1}(z) = \frac{P_{n-1}(z)}{Q_{m_n}(z)}, \tag{1}$$

где $P_{n-1}(z)$ — многочлен степени $n-1$, $Q_{m_n}(z) = \prod\limits_{k=1}^{p}(z - a_k)^{m^{(k)}_n}$, $m^{(k)}_n$ — целые неотрицательные числа, $\sum\limits_{k=1}^{p} m^{(k)}_n = m_n \le n-1$.

Далее будем полагать $m^{(p+1)}_n = n - 1 - m_n$ и обозначать через $b^{(s)}_{\eta^{(s)}_n}$ коэффициент при $\eta^{(s)}_n$-м члене главной части ряда Лорана в окрестности точки a_s функции $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$, где $\eta^{(s)}_n = m^{(s)}_n + 1$, если $b^{(s)}_{m^{(s)}_n+1} \ne 0$, и $\eta^{(s)}_n$ — наименьший номер отличных от нуля членов $b^{(s)}_v$ при $v > m^{(s)}_n + 1$, если $b^{(s)}_{m^{(s)}_n+1} = 0$.

Известно (см. [2, теорема 3]), что если

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\bigl(\lambda^{(s)}_n - m^{(s)}_n\bigr) = 0, \quad s = 1,2,\dots,p+1,$$

то для равномерной сходимости последовательности (1), построенной для функции $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ по матрице узлов $\{z^{(n)}_j\} \in \bigcup\limits_{s=1}^{p+1} a_s$, для функции $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k, необходимо выполнение неравенств

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left[\bigl|b^{(s)}_{\eta^{(s)}_n}\bigr| \cdot \prod_{j=1}^{\lambda^{(s)}_n} u^{(s)}_{n,j} \right]^{1/n} \le 1, \quad s = 1,2,\dots,p+1, \tag{2}$$

и достаточно, чтобы они были строгими.

Прологарифмировав обе части неравенства (2) и применив неравенство Коши для коэффициентов ряда и формулу (см. [3, отд. II, гл. 4, § 1])

$$\sum_{j=1}^{\lambda^{(s)}_n} \ln u^{(s)}_{n,j} = n_s\bigl(R^{(s)}_n\bigr) \cdot \ln R^{(s)}_n - N_s\bigl(R^{(s)}_n\bigr),$$

где $R_n^{(s)} = u^{(s)}_{n,\lambda_n^{(s)}}$, $n_s\big(R_n^{(s)}\big)$ — функции плотности узлов интерполяции около точек a_s, $N_s\big(R_n^{(s)}\big) = \int\limits_0^{R_n^{(s)}} \frac{n_s(t)}{t}\,dt$ — функции Неванлинна (см. [4, гл. III, § 1]), получим

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\big[\ln M_s\big(f, r_n^{(s)}\big) - \eta_n^{(s)} \ln r_n^{(s)} + n_s\big(R_n^{(s)}\big)\cdot \ln R_n^{(s)} - N_s\big(R_n^{(s)}\big)\big] \le 0,$$
$$s = 1, 2, \ldots, p+1,$$

где $r_n^{(s)} > 1$ такое, что $f(z)$ аналитическая в кольце $0 < |z - a_k| \le \frac{1}{r_n^{(k)}}$, $k = 1, 2, \ldots, p$, и аналитическая вне круга $|z| < r_n^{(p+1)}$, если $s = p+1$, за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки.

Полагая

$$r_n^{(s)} = \frac{R_n^{(s)}}{\theta_n^{(s)}}, \quad 0 < \theta_n^{(s)} < 1,$$

последние предельные соотношения перепишем в виде

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\ln M_s\left(f, \frac{R_n^{(s)}}{\theta_n^{(s)}}\right) - \ln\frac{1}{\theta_n^{(s)}} n_s\big(R_n^{(s)}\big) - N_s\big(R_n^{(s)}\big) + \big(\lambda_n^{(s)} - \eta_n^{(s)}\big) \ln\frac{R_n^{(s)}}{\theta_n^{(s)}}\right] \le 0. \tag{3}$$

Если выполнены условия

$$\varliminf_{n\to\infty} \theta_n^{(s)} > 0 \quad \text{и} \quad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\big(\lambda_n^{(s)} - m_n^{(s)} - 1\big) \ln R_n^{(s)} \le 0,$$

то имеют место неравенства

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(s)} - \eta_n^{(s)}}{n} \ln\frac{R_n^{(s)}}{\theta_n^{(s)}} \le 0, \quad s = 1, 2, \ldots, p+1.$$

В самом деле, имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(s)} - \eta_n^{(s)}}{n} \ln\frac{R_n^{(s)}}{\theta_n^{(s)}}$$
$$\le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(s)} - m_n^{(s)} - 1}{n}\big(\ln R_n^{(s)} - \ln\theta_n^{(s)}\big) \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(s)} - m_n^{(s)} - 1}{n} \ln R_n^{(s)} \le 0.$$

При таких условиях заключаем, что если выполнены неравенства

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\ln M_s\left(f, \frac{R_n^{(s)}}{\theta_n^{(s)}}\right) - \ln\frac{1}{\theta_n^{(s)}} n_s\big(R_n^{(s)}\big) - N_s\big(R_n^{(s)}\big)\right] < 0, \quad s = 1, 2, \ldots, p+1, \tag{4}$$

то неравенства (3) также выполняются. Отсюда следует, что при выполненных соотношениях (4) последовательность (1), построенная для функции $f(z) \in A(a_1, a_2, \ldots, a_{p+1})$ по матрице узлов $\big\{z_j^{(n)}\big\} \in \bigcup\limits_{s=1}^{p+1} a_s$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k, $k = 1, 2, \ldots, p$.

В [5] (см. [5, теорема 2]) показано, что при интерполировании целых функций с помощью многочленов числа θ берутся из $\big(0, \frac{1}{2}\big)$ и их, вообще говоря, нельзя брать из интервала $\big(\frac{1}{2}, 1\big)$. Однако в целях отыскания наиболее широкого класса равномерной сходимости интерполяционного процесса при дополнительных условиях, наложенных на узлы интерполяции, числа θ целесообразно выбирать из интервала $(0, 1)$.

Теорема 1. *Пусть* $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup\limits_{s=1}^{p+1} a_s$ — *матрица узлов интерполяции, выполнены условия*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(s)} - m_n^{(s)}}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(s)}}{n} = \chi_s > 0, \quad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\bigl(\lambda_n^{(s)} - m_n^{(s)} - 1\bigr) \ln R_n^{(s)} \le 0,$$

$$s = 1, 2, \dots, p+1, \tag{5}$$

и около одной или нескольких точек a_τ, $1 \le \tau \le p+1$,

$$u_{n,j}^{(\tau)} = u_{n,\lambda_n^{(\tau)}}^{(\tau)} = A_\tau \bigl(\lambda_n^{(\tau)}\bigr)^{1/\rho_\tau} = R_n^{(\tau)}, \quad j = 1, 2, \dots, \lambda_n^{(\tau)}.$$

Если функция $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, p+1)$ *такова, что около точек* a_s, $s = 1, 2, \dots, p+1$, $s \ne \tau$, *имеют место достаточные условия* (2) *или* (4), *а в окрестностях точек* a_τ *при всех* $n > n_0$ *она удовлетворяет неравенствам*

$$\ln M_\tau\biggl(f, \frac{R_n^{(\tau)}}{\theta^{(\tau)}}\biggr) \le \biggl(\frac{R_n^{(\tau)}}{\theta^{(\tau)}}\biggr)^{\rho_\tau} \sigma_\tau(\theta^{(\tau)}), \tag{6}$$

где

$$\sigma_\tau(\theta^{(\tau)}) = \biggl(\frac{\theta^{(\tau)}}{A_\tau}\biggr)^{\rho_\tau} \cdot \ln \frac{1}{\theta^{(\tau)}} - \varepsilon, \quad \theta^{(\tau)} = \exp\biggl\{-\frac{1}{\rho_\tau}\biggr\},$$

$\varepsilon > 0$ *как угодно мало, то последовательность* (1), *построенная для функции* $f(z)$ *по узлам* $\{z_j^{(n)}\}$, *равномерно сходится к* $f(z)$ *на любом компакте, не содержащем точек* a_k, $k = 1, 2, \dots, p$.

Доказательство. По условию теоремы достаточные условия равномерной сходимости рассматриваемого интерполяционного процесса около точек a_s, $s \ne \tau$, выполнены. Покажем, что неравенства (4) около точек a_τ также выполняются. Далее в доказательстве теоремы в целях упрощения записи индекс τ писать не будем.

При заданных узлах интерполяции $N(R_n) = 0$. В силу равенства $n(R_n) = (R_n A^{-1})^\rho$ при выполненных условиях теоремы найдем, что выражение под знаком предела в соотношении (4) не превосходит $\frac{1}{n}\bigl[-\bigl(\frac{A}{\theta}\bigr)^\rho n(R_n)\varepsilon\bigr]$. Поскольку $n(R_n) = \lambda_n$, левая часть неравенства (4) не превосходит

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n}\biggl[-\biggl(\frac{A}{\theta}\biggr)^\rho \varepsilon\biggr] = -\chi\biggl(\frac{A}{\theta}\biggr)^\rho \varepsilon = -\chi A^\rho e\varepsilon.$$

Так как правая часть последнего равенства при любом $\varepsilon > 0$ отрицательна, неравенства (4) имеют место. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть матрица узлов интерполяции* $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup\limits_{1}^{1} a$, $a = \infty$, *такова, что имеют место равенства*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(0)}}{n} = 0 \quad \text{и} \quad u_{n,j} = u_{n,\lambda_n} = A(\lambda_n)^{1/\rho} = R_n.$$

Если целая функция $f(z)$ *при всех* $n > n_0$ *удовлетворяет неравенству*

$$\ln M\biggl(f, \frac{R_n}{\theta}\biggr) \le \biggl(\frac{R_n}{\theta}\biggr)^\rho \sigma(\theta),$$

где

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{\theta}{A}\right)^{\rho} \ln\frac{1}{\theta} - \varepsilon, \quad \theta = \exp\left\{-\frac{1}{\rho}\right\},$$

$\varepsilon > 0$ *как угодно мало, то последовательность интерполяционных полиномов, построенная для функции* $f(z)$ *по узлам* $\{z_j^{(n)}\}$, *равномерно сходится к* $f(z)$ *на любом компакте.*

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(s)}}{n} = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_n^{(p+1)} \le m_n^{(p+1)} + 1 = n,$$

условия (5) выполняются.

Справедливость следствия очевидна и вытекает из теоремы 1.

Замечание 1. Числа $\theta^{(\tau)}$ в теореме 1 выбраны таким образом, что $\sigma_\tau(\theta^{(\tau)})$ на интервале (0,1) принимают наибольшее значение. Следовательно, какие бы точки $\bar\theta^{(\tau)}$ из интервала (0,1), отличные от точек $\theta^{(\tau)}$, мы ни взяли, получим классы равномерной сходимости около точек a_τ уже, чем в теореме 1.

Теорему 1 улучшить нельзя в том смысле, что при заданных узлах интерполяции классы равномерной сходимости функций около точек a_τ, определяемые неравенствами (6), расширить нельзя.

В неулучшаемости теоремы 1 можно убедиться также с помощью теоремы 5 из [2].

В самом деле, поскольку

$$\sigma_\tau\left(\exp\left\{-\frac{1}{\rho_\tau}\right\}\right) = \left(A_\tau^{\rho_\tau} e\rho_\tau\right)^{-1},$$

неравенство (6) можно записать в виде

$$\ln M_\tau\left(f, \frac{R_n^{(\tau)}}{\theta^{(\tau)}}\right) \le \left(\frac{R_n^{(\tau)}}{\theta^{(\tau)}}\right)^{\rho_\tau} \left[\left(A_\tau^{\rho_\tau}\rho_\tau e\right)^{-1} - \varepsilon\right].$$

Отсюда следует, что около каждой особой точки a_τ функция $f(z)$ имеет порядок ρ_τ, а тип не превосходит $\left(A_\tau^{\rho_\tau}\rho_\tau e\right)^{-1} - \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ может быть как угодно малым, заключаем, что $f(z) \in \left\lfloor \rho_\tau, \left(A_\tau^{\rho_\tau}\rho_\tau e\right)^{-1}\right)$ около точек a_τ. На основании теоремы 5 из [2] можем утверждать, что теорему 1 улучшить нельзя.

Заметим, что при $\rho_\tau \ge \frac{1}{\ln 2}$ точки $\theta^{(\tau)}$ принадлежат промежутку $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$.

Теорема 2. *Пусть* $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup\limits_{s=1}^{p+1} a_s$ — *матрица узлов интерполяции, выполнены условия* (5) *и около одной или нескольких точек* a_τ, $1 \le \tau \le p+1$,

$$u_{n,j}^{(\tau)} = A_\tau (j)^{1/\rho_\tau}, \quad j = 1, 2, \dots, \lambda_n^{(\tau)}.$$

Если функция $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ *такова, что около точек* a_s, $s = 1, 2, \dots, p+1$, $s \ne \tau$, *имеют место достаточные условия* (2) *или* (4), *а в окрестностях точек* a_τ *при всех* $n > n_0$ *она удовлетворяет неравенствам*

$$\ln M_\tau\left(f, \frac{R_n^{(\tau)}}{\theta_n^{(\tau)}}\right) \le \left(\frac{R_n^{(\tau)}}{\theta_n^{(\tau)}}\right)^{\rho_\tau} \sigma_\tau\left(\theta_n^{(\tau)}\right), \tag{7}$$

где $R_n^{(\tau)} = A_\tau\big(\lambda_n^{(\tau)}\big)^{1/\rho_\tau}$,

$$\sigma_\tau\big(\theta_n^{(\tau)}\big) = \left(\frac{\theta_n^{(\tau)}}{A_\tau}\right)^{\rho_\tau} \ln\frac{1}{\theta_n^{(\tau)}} + \left(\frac{\theta_n^{(\tau)}}{R_n^{(\tau)}}\right)^{\rho_\tau} N_\tau\big(R_n^{(\tau)}\big) - \varepsilon,$$

$$\theta_n^{(\tau)} = \exp\left\{\big[A_n\big(R_n^{(\tau)}\big)^{-1}\big]^{\rho_\tau} N_\tau\big(R_n^{(\tau)}\big) - \frac{1}{\rho_\tau}\right\},$$

$\varepsilon > 0$ *как угодно мало,* $N_\tau\big(R_n^{(\tau)}\big)$ *— функции Неванлинна, то последовательность* (1), *построенная для функции* $f(z)$ *по узлам* $\big\{z_j^{(n)}\big\}$, *равномерно сходится к* $f(z)$ *на любом компакте, не содержащем точек* a_k, $k = 1, 2, \dots, p$.

Доказательство. В доказательстве индекс τ писать не будем. Покажем сначала, что $\theta_n \in (0,1)$. Применяя формулу (см. [4, гл. III, § 1])

$$N(r) = \sum_{\rho_n \le r} \ln\frac{r}{\rho_n}$$

и полагая $r = R_n$, $\rho_n = u_{n,j}$, при заданных узлах интерполяции будем иметь

$$N(R_n) = \lambda_n \ln R_n - \sum_{j=1}^{\lambda_n} \ln u_{n,j} = \lambda_n \ln R_n - \lambda_n \ln A - \frac{1}{\rho}\ln(\lambda_n!).$$

С помощью формулы Стирлинга (см. [4, гл. II, § 1]), учитывая, что $R_n = A(\lambda_n)^{1/\rho}$, получим

$$\begin{aligned} N(R_n) &= \lambda_n \ln A + \frac{1}{\rho}\lambda_n \ln\lambda_n - \lambda_n \ln A \\ &\quad - \frac{1}{\rho}\left(\lambda_n\ln\lambda_n - \lambda_n + \frac{1}{2}\ln\lambda_n + \frac{1}{2}\ln 2\pi + o(1)\right) = \frac{1}{\rho}\lambda_n - \frac{1}{2\rho}\ln\lambda_n - c_n, \end{aligned}$$

где $c_n = \frac{1}{2}\ln 2\pi + o(1)$. Поскольку $\big(\frac{A}{R_n}\big)^\rho = \lambda_n^{-1}$, окончательно найдем

$$\begin{aligned} \theta_n &= \exp\left\{\left(\frac{A}{R_n}\right)^\rho N(R_n) - \frac{1}{\rho}\right\} \\ &= \exp\left\{\lambda_n^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\lambda_n - \frac{1}{2\rho}\ln\lambda_n - c_n\right) - \frac{1}{\rho}\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2\rho\lambda_n}\ln\lambda_n - \frac{c_n}{\lambda_n}\right\}, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\theta_n \in (0,1)$, причем $\theta_n \to 1$, когда $\lambda_n \to \infty$.

Покажем далее, что при выполненных неравенствах (7) условия (4) имеют место. В самом деле, если максимум модуля функции в окрестностях рассматриваемых особых точек подчинен условиям (7), то выражение под знаком предела в соотношении (4) не превосходит

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n}\left[\left(\frac{R_n}{\theta_n}\right)^\rho\left(\ln\frac{1}{\theta_n}\cdot\left(\frac{\theta_n}{A}\right)^\rho + \left(\frac{\theta_n}{R_n}\right)^\rho N(R_n) - \varepsilon\right) - \ln\frac{1}{\theta_n}n(R_n) - N(R_n)\right] \\ &\qquad = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{R_n}{A}\right)^\rho \ln\frac{1}{\theta_n} - \varepsilon\left(\frac{R_n}{\theta_n}\right)^\rho - n(R_n)\ln\frac{1}{\theta_n}\right]. \end{aligned}$$

Поскольку $n(R_n) = \big(\frac{R_n}{A}\big)^\rho$, имеем

$$\begin{aligned} &\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln M\left(f, \frac{R_n}{\theta_n}\right) - \ln\frac{1}{\theta_n}n(R_n) - N(R_n)\right] \\ &\qquad \le \varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[-\varepsilon\left(\frac{R_n}{\theta_n}\right)^\rho\right] = -\varepsilon\chi A^\rho < 0. \end{aligned}$$

Отсюда на основании условий теоремы можем утверждать, что достаточные условия равномерной сходимости последовательности (1) выполняются около всех особых точек функции. Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть матрица узлов интерполяции* $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_1^1 a$, $a = \infty$, *такова, что выполняются равенства*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(0)}}{n} = 0 \quad \text{и} \quad u_{n,j} = A(j)^{1/\rho}, \quad j = 1, 2, \ldots, \lambda_n.$$

Если целая функция $f(z)$ *при всех* $n > n_0$ *удовлетворяет неравенству*

$$\ln M\left(f, \frac{R_n}{\theta_n}\right) \le \left(\frac{R_n}{\theta_n}\right)^{\rho} \sigma(\theta_n),$$

где $R_n = A(\lambda_n)^{1/\rho}$,

$$\sigma(\theta_n) = \left(\frac{\theta_n}{A}\right)^{\rho} \ln\frac{1}{\theta_n} + \left(\frac{\theta_n}{R_n}\right)^{\rho} N(R_n) - \varepsilon, \quad \theta_n = \exp\left\{\left(\frac{A}{R_n}\right)^{\rho} N(R_n) - \frac{1}{\rho}\right\},$$

$\varepsilon > 0$ *как угодно мало,* $N(R_n)$ — *функции Неванлинна, то последовательность интерполяционных многочленов, построенная для функции* $f(z)$ *по узлам* $\{z_j^{(n)}\}$, *равномерно сходится к* $f(z)$ *на любом компакте.*

Справедливость следствия вытекает из теоремы 2.

Замечание 2. Замечание 1 имеет силу для теоремы 2 и следствий.

В том, что теорема 2 неулучшаема, можно убедиться также с помощью теоремы 4 из [2]. Индекс τ в следующем равенстве писать не будем.

Заметим, что имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(\theta_n) = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{\theta_n}{A}\right)^{\rho} \ln\frac{1}{\theta_n} + \left(\frac{\theta_n}{R_n}\right)^{\rho} N(R_n) - \varepsilon\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[R_n^{-\rho} N(R_n) - \varepsilon\right] = \lim_{n\to\infty}\left[(A^{\rho}\lambda_n)^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\lambda_n - \frac{1}{2\rho}\ln\lambda_n - c_n\right)\right] - \varepsilon = (A^{\rho}\rho)^{-1} - \varepsilon. \tag{8}$$

В силу того, что ε как угодно мало, из неравенства (7) и последнего равенства следует принадлежность функции $f(z)$ около точек a_τ классу $\lfloor \rho_\tau, (A_\tau^{\rho}\rho_\tau)^{-1})$, значит, с помощью теоремы 4 из [2] можно утверждать, что теорему 2 улучшить нельзя.

Поскольку следствия 1 и 2 являются следствиями неулучшаемых теорем 1 и 2 соответственно, они также неулучшаемы.

Так как $\varepsilon > 0$ в равенстве (8) как угодно мало, из следствия 2 и равенства (8) заключаем, что если целая функция $f(z)$ принадлежит $\lfloor \rho, (A^{\rho}\rho)^{-1})$, то последовательность интерполяционных полиномов, построенная для функции $f(z)$ по узлам $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_1^1 a$, $a = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(0)}}{n} = 0$ и $u_{n,j} = A(j)^{1/\rho}$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте.

Следствие 2 улучшает теорему VII из [4] (см. [4, гл. II, § 3, с. 182]). В самом деле, пусть матрица узлов интерполяции $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_1^1 a$, $a = \infty$, $\lambda_n^{(0)} = 0$, такова, что $z_j^{(n)} = j^2$. Тогда $|z_{j-1}^{(n)}| < |z_j^{(n)}| < \cdots < |z_n^{(n)}| < \lambda \cdot n^2$, где $\lambda = 1 + \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$, откуда следует, что для таких узлов неравенство (157) из [4] выполняется при любом $\varepsilon_1 > 0$. На основании следствия 2 и равенства (8) можем утверждать, что если целая функция $f(z)$ принадлежит классу $\left[\frac{1}{2}, 2\right)$, то интерполяционные полиномы, построенные для функции $f(z)$ по узлам $|z_j^{(n)}| = j^2$, равномерно сходятся к $f(z)$ на любом компакте. Из теоремы VII в [4] следует, что при тех же узлах классом равномерной сходимости интерполяционного процесса является класс целых функций $\left[\frac{1}{2}, \sigma+\varepsilon\right)$, где $\varepsilon > 0$ может быть как угодно малым, σ удовлетворяет неравенству

$$\sigma < \frac{2}{(2\lambda)^{1/2}} \int\limits_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2}-1}}{2-t}\,dt = \frac{2}{\sqrt{1+\varepsilon_1}} \ln(\sqrt{2}+1) \approx \frac{2}{\sqrt{1+\varepsilon_1}} \ln(2,41) \approx 2 \cdot \frac{0,8796}{\sqrt{1+\varepsilon_1}}.$$

Поскольку при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\sigma + \varepsilon < 2 \cdot \frac{0,8796}{\sqrt{1+\varepsilon_1}} + \varepsilon < 2 - \varepsilon,$$

приходим к выводу, что класс равномерной сходимости функций при узлах интерполяции $\left|z_j^{(n)}\right| = j^2$, определяемый следствием 2, шире, чем при тех же узлах в теореме VII из [4].

Отметим также, что если $z_j^{(n)} = j$, то класс равномерной сходимости интерполяционного процесса, определяемый теоремой VII из [4], есть класс целых функций $\left[1, \frac{\ln 2}{1+\varepsilon_1} + \varepsilon\right)$, где ε как угодно мало, а класс равномерной сходимости, определяемой следствием 2, составляют целые функции класса $[1, 1)$. В силу того, что при любом положительном ε_1 и ε, удовлетворяющем неравенству $0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1} \ln 2$, имеет место соотношение $\frac{\ln 2}{1+\varepsilon_1} + \varepsilon < \ln 2$, можем утверждать, что класс равномерной сходимости интерполяционного процесса, указанный в теореме VII из [4] при узлах $z_j^{(n)} = j$, не шире класса целых функций $[1, \ln 2)$. Значит, класс равномерной сходимости при узлах $z_j^{(n)} = j$ в следствии 2 шире, чем в теореме VII из [4]. Отсюда заключаем также, что следствие 2 улучшает теорему Фабера (см. [6, гл. II, § 5, теорема 2.5.1]) в том же смысле, что и теорему VII из [4].

Кроме того, следствие 2 обобщает теорему VII из [4] на случай треугольной матрицы узлов интерполяции при более слабых ограничениях, в частности, узлы интерполяции могут иметь предельные точки не только в бесконечности, но и в конечной части плоскости.

Следуя М. К. Гончаровой [7], введем обозначения для повторных показательных функций

$$e_0(x) = x, \quad e_1(x) = e^x, \quad e_l(x) = e_{l-1}(e(x)) = e(e_{l-1}(x)), \quad l = 1, 2, \ldots,$$

и повторных логарифмов

$$\ln_0(x), \quad \ln_1 x = \ln x, \quad \ln_l(x) = \ln_{l-1}(\ln x), \quad (E_l < x < \infty),\ E_l = e_l(0).$$

Будем говорить, что функция $f(z)$ около особой точки a_s, $s = 1, 2, \ldots, p+1$, ступени l_s, если

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln_{l_s} M_s(f, r)}{\ln r} = \infty, \quad \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln_{l+1} M_s(f, r)}{\ln r} = \rho_s < \infty,$$

где ρ_s — порядок функции $f(z)$ ступени l_s около особой точки a_s.

Если $\rho_s > 0$, то тип функции $f(z)$ ступени l_s порядка ρ_s около точки a_s определим равенством

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln_{l_s} M_s(f, r)}{r^{\rho_s}} = \sigma_s.$$

Класс функций $f(z) \in A(a_1, a_2, \ldots, a_{p+1})$, у которых около особой точки a_s ступень меньше l_s, либо равна l_s, но порядок меньше ρ_s, либо порядок равен ρ_s, а тип около этой точки меньше σ_s, обозначим через $[l_s, \rho_s, \sigma_s)$, $\sigma_s > 0$, а если при тех же ступени и порядке около особой точки a_s тип не превосходит σ_s, то — через $[l_s, \rho_s, \sigma_s]$.

Теорема 3. *Пусть* $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup\limits_{s=1}^{p+1} a_s$ *— матрица узлов интерполяции, выполнены условия* (5) *и около одной или нескольких точек* a_τ, $1 \le \tau \le p+1$,

$$u_{n,j}^{\tau} = u_{n,\lambda_n^{(\tau)}}^{(\tau)} = A_\tau \ln_{l_\tau}^{1/\rho_\tau} \lambda_n^{(\tau)} = R_n^{(\tau)}, \quad l_\tau \ge 1,\ j = 1, 2, \ldots, \lambda_n^{(\tau)}.$$

Если функция $f(z) \in A(a_1, a_2, \ldots, a_{p+1})$ *такова, что в окрестностях точек* a_s, $s = 1, 2, \ldots, p+1$, $s \ne \tau$, *выполнены достаточные условия* (2) *или* (4), *а около точек* a_τ *она принадлежит классам* $\lfloor l_\tau + 1, \rho_\tau, A_\tau^{-\rho_\tau})$, *то последовательность* (1), *построенная для функции* $f(z)$ *по узлам* $\{z_j^{(n)}\}$, *равномерно сходится к* $f(z)$ *на любом компакте, не содержащем точек* a_k, $k = 1, 2, \ldots, p$.

Доказательство. По условию теоремы достаточные условия равномерной сходимости последовательности (1) около точек a_s, $s \ne \tau$, выполнены. Покажем, что при выполненных условиях теоремы около точек a_τ неравенства (4) также имеют место.

Пусть функция $f(z)$ около точки a_τ принадлежит классу $\lfloor l_\tau + 1, \rho_\tau, \sigma_\tau^{\rho_\tau} \rfloor$, тогда для максимума модуля этой функции около точки a_τ выполняется неравенство

$$M_\tau(f, r) \le e_{l_\tau+1}\{(r\sigma'_\tau)^{\rho_\tau}\}, \quad \sigma'_\tau = \sigma_\tau + \varepsilon,\ \varepsilon > 0.$$

В целях упрощения записи далее в доказательстве индекс τ писать не будем.

Полагая $r = \frac{R_n}{\theta}$, $0 < \theta < 1$, найдем $\ln M\big(f, \frac{R_n}{\theta}\big) \le e_l\big\{\big(\frac{R_n\sigma'}{\theta}\big)^\rho\big\}$. Учитывая последнее соотношение и равенства

$$n(R_n) = \lambda_n = e_l\biggl\{\biggl(\frac{R_n}{A}\biggr)^\rho\biggr\}, \quad N(R_n) = 0,$$

получим, что выражение в квадратных скобках (4) не превосходит

$$e_l\biggl\{\biggl(\frac{R_n\sigma'}{\theta}\biggr)^\rho\biggr\} - e_l\biggl\{\biggl(\frac{R_n}{A}\biggr)^\rho\biggr\} \cdot \ln\frac{1}{\theta} = e_l\biggl\{\biggl(\frac{R_n}{A}\biggr)^\rho \cdot \biggl(\frac{A\sigma'}{\theta}\biggr)^\rho\biggr\} - e_l\biggl\{\biggl(\frac{R_n}{A}\biggr)^\rho\biggr\} \cdot \ln\frac{1}{\theta}$$
$$= e_l\biggl\{\biggl(\frac{R_n}{A}\biggr)^\rho\biggr\}\biggl[\exp\biggl\{e_{l-1}\biggl(\frac{R_n}{A}\biggr)^\rho \cdot \biggl(\frac{A\sigma'}{\theta}\biggr)^\rho\biggr\} - e_{l-1}\biggl\{\biggl(\frac{R_n}{A}\biggr)^\rho\biggr\}\biggr\} - \ln\frac{1}{\theta}\biggr].$$

Поскольку при любых x_1 и x_2 таких, что $0 < x_1 < x_2$, имеет место неравенство

$$x_1 - x_2 > e_1(x_1) - e_1(x_2) > \cdots > e_{l-1}(x_1) - e_{l-1}(x_2), \tag{9}$$

при $\frac{A\sigma'}{\theta} < 1$ можно утверждать, что правая часть последнего равенства не превосходит

$$\lambda_n\biggl[\exp\biggl\{\biggl(\frac{R_n}{A}\biggr)^\rho\biggl[\biggl(\frac{A\sigma'}{\theta}\biggr)^\rho - 1\biggr]\biggr\} - \ln\frac{1}{\theta}\biggr].$$

Следовательно, если $\frac{A\sigma'}{\theta} < 1$, то в силу того, что $R_n \to \infty$ при $n \to \infty$, имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\biggl[\ln M\biggl(f, \frac{R_n}{\theta}\biggr) - n(R_n)\ln\frac{1}{\theta} - N(R_n)\biggr]$$
$$\le \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n}\biggl[\exp\biggl\{\biggl(\frac{R_n}{A}\biggr)^\rho - \biggl[\biggl(\frac{A\sigma'}{\theta}\biggr)^\rho - 1\biggr]\biggr\} - \ln\frac{1}{\theta}\biggr] = -\chi\ln\frac{1}{\theta} < 0,$$

т. е. условие равномерной сходимости (4) около рассматриваемой особой точки функции $f(z)$ выполнено.

Из неравенства $\frac{A\sigma'}{\theta} < 1$ следует неравенство $\sigma^\rho < \left(\frac{\theta - A\varepsilon}{A}\right)^\rho$ для типа σ^ρ интерполируемой функции $f(z)$. Поскольку правая часть последнего неравенства возрастает с возрастанием θ, чем больше число $\theta \in (0,1)$, тем шире класс равномерной сходимости рассматриваемого интерполяционного процесса. Заметим, что $\sigma^\rho \to A^{-\rho}$ при $\theta \to 1$ и $\varepsilon \to 0$, следовательно, при достаточно больших значениях $\theta < 1$ и малом $\varepsilon > 0$ разность $\left(\frac{1}{A}\right)^\rho - (\sigma)^\rho$ может быть сделана как угодно малой. Отсюда следует, что функция $f(z)$ около рассматриваемой особой точки принадлежит классу $\lfloor l+1, \rho, A^{-\rho})$.

Итак, если функция $f(z)$ около рассматриваемой особой точки принадлежит классу $\lfloor l+1, \rho, A^{-\rho})$, то условия равномерной сходимости (4) около этой точки выполняются. Теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть матрица узлов интерполяции* $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup\limits_1^1 a$, $a = \infty$, *такова, что выполняются равенства*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(0)}}{n} = 0 \quad \text{и} \quad u_{n,j} = A \ln_l^{1/\rho} \lambda_n = R_n, \ j = 1, 2, \ldots, \lambda_n.$$

Если целая функция $f(z)$ принадлежит классу $\lfloor l+1, \rho, A^{-\rho})$, то последовательность интерполяционных многочленов, построенная для функции $f(z)$ по узлам $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте.

Справедливость следствия очевидна и вытекает из теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть даны две матрицы узлов интерполяции $\{z_j^{(n)}\}$ и $\{z_j'^{(n)}\}$, которые принадлежат классу $\bigcup\limits_{s=1}^{p+1} a_s$, являются тождественными, за исключением одного или нескольких $s = \tau$, $1 \le \tau \le p+1$, и для которых выполнены условия (5). Пусть последовательность (1), построенная для функции $f(z) \in A(a_1, a_2, \ldots, a_{p+1})$ по узлам $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k, $k = 1, 2, \ldots, p$. Если для всех τ, $1 \le \tau \le p+1$, выполнены неравенства*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left[\prod_{j=1}^{\lambda_n'^{(\tau)}} u_{n,j}'^{(\tau)}\right]^{1/n} \cdot \left[\prod_{j=1}^{\lambda_n^{(\tau)}} u_{n,j}^{(\tau)}\right]^{-1/n} < 1, \tag{10}$$

где $u_{n,j}'^{(\tau)} = \left|a_\tau - z_{\tau,j}'^{(n)}\right|^{-1}$, $1 \le \tau \le p$, и $u_{n,j}'^{(\tau)} = \left|z_{\tau,j}'^{(n)}\right|$, $\tau = p+1$, то последовательность (1), построенная для функции $f(z)$ по узлам $\{z_j'^{(n)}\}$, также равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k, $k = 1, 2, \ldots, p$.

Доказательство. В силу того, что последовательность (1), построенная для функции $f(z)$ по узлам $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k, для всех a_s, $s = 1, 2, \ldots, p+1$, выполнены условия (2). Покажем теперь, что достаточные условия (2) выполняются для всех s и в случае, когда последовательность (1) построена для функции $f(z)$ по узлам $\{z_j'^{(n)}\}$.

Поскольку матрицы $\{z_j^{(n)}\}$ и $\{z_j'^{(n)}\}$ тождественны для всех $s \ne \tau$, в случае последовательности (1), построенной по матрице узлов $\{z_j'^{(n)}\}$ для функции $f(z)$, условия (2) также выполняются для всех $s \ne \tau$.

Пусть теперь $s = \tau$. Далее в доказательстве теоремы индекс τ писать не будем. На основании неравенства (10) можем записать

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[|b_{\eta_n}|\cdot\prod_{j=1}^{\lambda'_n}u'_{n,j}\right]^{1/n} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left[|b_{\eta_n}|\cdot\prod_{j=1}^{\lambda_n}u_{n,j}\cdot\left(\prod_{j=1}^{\lambda'_n}u'_{n,j} : \prod_{j=1}^{\lambda_n}u_{n,j}\right)\right]^{1/n}$$
$$< \overline{\lim_{n\to\infty}}\left[|b_{\eta_n}|\prod_{j=1}^{\lambda_n}u_{n,j}\right]^{1/n} \le 1.$$

Отсюда следует, что достаточные условия равномерной сходимости последовательности (1), построенной для функции $f(z)$ по матрице узлов $\{z'^{(n)}_j\}$, в окрестности рассматриваемой точки выполняются. Теорема доказана.

Следствие 4. *Если последовательность интерполяционных полиномов, построенная для целой функции $f(z)$ по матрице узлов $\{z^{(n)}_j\} \in \bigcup_1^1 a$, $a = \infty$, у которой $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^{(0)}}{n} = 0$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте, то, какова бы ни была матрица узлов $\{z'^{(n)}_j\}$, удовлетворяющая условиям*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda'^{(0)}_n}{n} = 0, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\prod_{j=1}^{\lambda'_n}u'_{n,j}\right]^{1/n}\cdot\left[\prod_{j=1}^{\lambda_n}u_{n,j}\right]^{-1/n} < 1,$$

последовательность интерполяционных полиномов, построенная для функции $f(z)$ по узлам $\{z'^{(n)}_j\}$, также равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте.

Справедливость следствия вытекает из теоремы 4.

Если функция плотности узлов интерполяции $n_s(r)$ ступени $l_s = 0$, то плотность последовательности узлов v_s и нижний тип A_s определяются так (см. [4, гл. II, § 1, с. 131]):

$$v_s = \lim_{r\to\infty}\frac{\ln n_s(r)}{\ln r},\ v_s = 0, \quad A_s = \underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n_s(r)}{r^{v_s}}.$$

Для функций плотности узлов интерполяции $n_s(r)$ ступени $l_s \ge 1$ плотность v_s и нижний тип A_s последовательности определим формулами

$$v_s = \lim_{r\to\infty}\frac{\ln_{l_s+1} n_s(r)}{\ln r},\ v_s = 0, \quad A_s = \underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln_{l_s} n_s(r)}{r^{v_s}}.$$

Класс последовательностей $\{z^{(n)}_{s,j}\}$ узлов интерполяции, у которых ступень около точки a_s либо больше l_s, либо равна l_s, а плотность больше v_s, либо плотность равна v_s, но нижний тип не меньше A_s, обозначим через $[l_s, v_s, A_s]$.

Теорема 5. *Пусть $\{z^{(n)}_j\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$ — матрица узлов интерполяции, выполнены условия (5) и $\{z^{(n)}_{\tau,j}\} \in [l_\tau, v_\tau, A_\tau]$ около одной или нескольких точек a_τ, $1 \le \tau \le p+1$. Если функция $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ такова, что в окрестностях точек a_s, $s \ne \tau$, выполнены достаточные условия равномерной сходимости (2) или (4), а около точек a_τ она принадлежит классам $\lfloor 1, v_\tau, A_\tau(ev_\tau)^{-1})$ при*

$l_\tau = 0$ или классам $[l_\tau + 1, v_\tau, A_\tau)$ при $l_\tau \ge 1$, то последовательность (1), построенная для функции $f(z)$ по матрице узлов $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k, $k = 1, 2, \ldots, p$.

Доказательство. По условию теоремы достаточные условия равномерной сходимости последовательности (1) около точек a_s $s \ne \tau$, выполнены. Покажем, что условия (4) около точек a_τ также выполняются.

Действительно, пусть $s = \tau$. В целях упрощения записи индекс τ в доказательстве теоремы писать не будем. Возьмем $r = u_{n,\lambda_n}$. На основании определения класса $[l, v, A]$ последовательности узлов интерполяции в окрестности рассматриваемой точки для любого $\varepsilon > 0$ существует N_1 такое, что при всех $n > N_1$ выполняется неравенство

$$n(u_{n,\lambda_n}) = \lambda_n \ge e_l\{(A - \varepsilon)(u_{n,\lambda_n})^v\}. \tag{11}$$

Пусть $l = 0$. В силу принадлежности функции $f(z)$ классу $\left[1, v, \frac{A}{ev}\right)$ на основании определения этого класса можем утверждать, что $f(z) \in \left[1, v, \frac{A'}{ev}\right)$ при любом положительном $A' < A$. Следовательно, для того же ε при всех достаточно больших n будет выполняться неравенство

$$\ln M\left(f, \frac{u_{n,\lambda_n}}{\theta}\right) \le \left(\frac{u_{n,\lambda_n}}{\theta}\right)^v \frac{A' + \varepsilon}{ev}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Поскольку $N(u_{n,\lambda_n}) \ge 0$, при $\theta = e^{-(1/v)}$ с помощью (11) и последнего неравенства получим, что в окрестности рассматриваемой особой точки a выражение под знаком предела в условии (4) не превосходит

$$\frac{1}{n}\left[\left(\frac{u_{n,\lambda_n}}{\theta}\right)^v \frac{A' + \varepsilon}{ev} - \lambda_n \ln\frac{1}{\theta}\right] = \frac{\lambda_n}{n}\left[\left(\frac{u_{n,\lambda_n}}{\theta}\right)^v \frac{A' + \varepsilon}{ev\lambda_n} - \ln\frac{1}{\theta}\right] \le \frac{\lambda_n}{nv}\left[\frac{A' + \varepsilon}{A - \varepsilon} - 1\right]. \tag{12}$$

Выберем $\varepsilon < \frac{A - A'}{2}$, тогда $\frac{A' + \varepsilon}{A - \varepsilon} < 1$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} = \chi > 0$, предел правой части соотношения (12) при $n \to \infty$ отрицателен. Отсюда следует, что условие равномерной сходимости (4) около рассматриваемой особой точки a выполняется.

Пусть $l \ge 1$. Поскольку $f(z) \in [l + 1, v, A)$, по определению этого класса можно утверждать, что $f(z) \in [l + 1, v, A']$, где $0 < A' < A$. Следовательно, для того же $\varepsilon > 0$, что в соотношении (11), существует N_2 такое, что для всех $n > N_2$ в окрестности точки a имеет место неравенство

$$M\left(f, \frac{u_{n,\lambda_n}}{\theta}\right) \le e_{l+1}\left\{(A' + \varepsilon)\left(\frac{u_{n,\lambda_n}}{\theta}\right)^v\right\}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Используя последнее неравенство, неравенства (11) и $N(u_{n,\lambda_n}) \ge 0$, найдем, что выражение под знаком предела в (4) для всех $n > \max\{N_1, N_2\}$ не превосходит

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left[e_l\left\{\left(\frac{u_{n,\lambda_n}}{\theta}\right)^v (A' + \varepsilon)\right\} - \lambda_n \ln\frac{1}{\theta}\right] &= \frac{\lambda_n}{n}\left[e_l\left\{\left(\frac{u_{n,\lambda_n}}{\theta}\right)^v (A' + \varepsilon)\right\} : \lambda_n - \ln\frac{1}{\theta}\right] \\ &= \frac{\lambda_n}{n}\left[\exp\left\{e_{l-1}\left\{\left(\frac{u_{n,\lambda_n}}{\theta}\right)^v (A' + \varepsilon)\right\} - e_{l-1}\{(u_{n,\lambda_n})^v (A - \varepsilon)\}\right\} - \ln\frac{1}{\theta}\right].\end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством (9), заключаем, что правая часть последнего соотношения при $\frac{A'+\varepsilon}{\theta^v(A-\varepsilon)}<1$ не превосходит

$$\frac{\lambda_n}{n}\left[\exp\left\{\left(\frac{u_{n,\lambda_n}}{\theta}\right)^v(A'+\varepsilon)-(u_{n,\lambda_n})^v(A-\varepsilon)\right\}-\ln\frac{1}{\theta}\right]$$
$$=\frac{\lambda_n}{n}\left[\exp\left\{(u_{n,\lambda_n})^v(A-\varepsilon)\left[\frac{A'+\varepsilon}{\theta^v(A-\varepsilon)}-1\right]\right\}-\ln\frac{1}{\theta}\right].$$

Таким образом, если $\frac{A'+\varepsilon}{\theta^v(A-\varepsilon)}<1$, то в силу неограниченного возрастания u_{n,λ_n} при $n\to\infty$ предел правой части последнего равенства равен $-\chi\ln\frac{1}{\theta}$, откуда следует, что предел левой части неравенства (4) не превосходит $-\chi\ln\frac{1}{\theta}$.

Неравенство $\frac{A'+\varepsilon}{\theta^v(A-\varepsilon)}<1$ будет выполняться, если, например, положить $\varepsilon\le\frac{A-A'}{4}$, а $\theta<1$ взять удовлетворяющим неравенству $\frac{3A'+A}{3A+A'}<\theta^v$. Итак, каково бы ни было положительное число $A'<A$, число θ можно выбрать таким, чтобы в окрестности рассматриваемой особой точки неравенство (4) выполнялось. Поскольку разность $A-A'$ может быть как угодно малой, по определению класса $[l+1,v,A)$ можем утверждать, что если $f(z)\in[l+1,v,A)$, то в окрестности точки a достаточное условие равномерной сходимости (4) выполняется. В первой части доказательства показано, что это утверждение верно при $l=0$.

Таким образом, достаточные условия (4) равномерной сходимости последовательности (1) к функции $f(z)$ выполняются в окрестностях всех особых точек при любом неотрицательном целом l. Теорема доказана.

Следствие 5. *Пусть матрица узлов интерполяции* $\{z_j^{(n)}\}\in\bigcup\limits_{s=1}^{p+1}a$, $a=\infty$, *такова, что* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^{(0)}}{n}=0$ *и* $\{z_j^{(n)}\}\in[l,v,A]$. *Если* $f(z)\in\left[1,v,\frac{A}{ev}\right)$ *при* $l=0$ *или* $f(z)\in[l+1,v,A)$ *при* $l\ge1$, *то последовательность интерполяционных полиномов, построенная для функции* $f(z)$ *по узлам* $\{z_j^{(n)}\}$, *также равномерно сходится к* $f(z)$ *на любом компакте.*

Справедливость следствия вытекает из теоремы 5.

Заметим, что функции плотности $n_\tau\big(R_n^{(\tau)}\big)$ последовательностей узлов интерполяции из теоремы 1:

$$u_{n,j}^{(\tau)}=u_{n,\lambda_n^{(\tau)}}^{(\tau)}=A_\tau\big(\lambda_n^{(\tau)}\big)^{1/\rho_\tau}=R_n^{(\tau)},\quad j=1,2,\dots,\lambda_n^{(\tau)},\tag{13}$$

около точек a_τ равны $\big(R_n^{(\tau)}A_\tau^{-1}\big)^{\rho_\tau}$.

Плотности последовательностей узлов интерполяции около точек a_τ определяются равенствами

$$v_\tau=\lim_{R_n^{(\tau)}\to\infty}\frac{\ln n_\tau\big(R_n^{(\tau)}\big)}{\ln R_n^{(\tau)}}=\lim_{R_n^{(\tau)}\to\infty}\frac{\rho_\tau\ln R_n^{(\tau)}-\rho_\tau\ln A_\tau}{\ln R_n^{(\tau)}}=\rho_\tau.$$

Отсюда следует, что функции плотности $n_\tau\big(R_n^{(\tau)}\big)$ ступени 0. Нижние типы функций плотности последовательностей (13) равны A_τ^{-1}, значит, $n_\tau\big(R_n^{(\tau)}\big)\in\big[0,\rho_\tau,A_\tau^{-1}\big]$ около точки a_τ.

Из теоремы 1 вытекает, что интерполяционный процесс равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_s, $s=1,2,\dots,p$, если функция $f(z)$ около точек a_τ принадлежит классам $\lfloor \rho_\tau, (A_\tau^{\rho_t} \rho_\tau e)^{-1})$. По теореме 5 для равномерной сходимости интерполяционного процесса, построенного по узлам (13) около точек a_τ, достаточно, чтобы $f(z) \in \lfloor 1, \rho_\tau, (A_\tau^{\rho_\tau} \rho_\tau e)^{-1})$ около точек a_τ.

Поскольку определения порядка ρ_s и типа σ_s, данные в начале статьи, совпадают с определениями порядка и типа функции первой ступени, классы равномерной сходимости в теоремах 1 и 5 при указанных узлах интерполяции тождественны. В силу неулучшаемости теоремы 1 теорему 5 при $l = 0$ без дополнительных условий на узлы интерполяции улучшить нельзя.

Так как при любых положительных A_1 и A_2 класс целых функций $[\rho_1, A_1)$ содержится в классе $[\rho_2, A_2)$, где $\rho_1 < \rho_2$, из следствия 5 вытекает вторая часть теоремы IV из [4] (см. [4, гл. II, § 3]).

В самом деле, если порядок целой функции $f(z)$ ступени 1 $\rho < v$, то $[\rho, A_1) \subset \lfloor 1, v, \frac{A}{ev})$, каково бы ни было число $A_1 > 0$, значит, последовательность интерполяционных полиномов, построенная по матрице узлов $\{z_j^{(n)}\} \in [0, v, A]$ для функции $f(z)$, равномерно сходится к $f(z)$ в любом конечном круге.

Таким образом, следствие 5 обобщает вторую часть теоремы IV из [4] (см. [4, гл. II, § 3]) на случай треугольной матрицы узлов при более слабых ограничениях, поскольку узлы интерполяции в следствии 5 могут иметь предельные точки в конечной плоскости. Кроме того, следствие 5 обобщает вторую часть теоремы IV из [4] на целые функции любой конечной ступени.

Теорема 5 обобщает вторую часть теоремы IV из [4] на случай треугольной матрицы узлов интерполяции и функции любой конечной ступени с конечным числом особых точек.

Из доказанных теорем можно сделать следующий вывод. Если выполнены условия (5), то чем медленнее узлы интерполяции стремятся к особым точкам функции, тем шире классы равномерной сходимости интерполяционного процесса с помощью дробей (1).

Замечание 3. Пусть для матрицы узлов интерполяции $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$ выполняются условия (5), $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$. При выполненных условиях каждой из теорем 1–3, 5 верны условия (4) равномерной сходимости последовательности (1) к функции $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k, $k = 1, 2, \dots, p$. Может случиться так, что около точек a_s выполняются условия каких-либо двух, трех или всех четырех из указанных выше теорем. Если при этом условия каждой теоремы имеют место около некоторого множества точек из a_s, не имеющего общих элементов с другими множествами, и объединение всех множеств равно a_s, $s = 1, 2, \dots, p+1$, то условия (4) будут выполнены около всех особых точек функции $f(z)$. Следовательно, в таком случае можем утверждать, что последовательность (1), построенная для функции $f(z)$ по узлам $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k, $k = 1, 2, \dots, p$.

Теорема 6. *Пусть* $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$ — *матрица узлов интерполяции, выполнены условия* (5) *и* $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$. *Если существуют последователь-*

ности $\{\theta_n^{(s)}\}$, $0<\theta_n^{(s)}<1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty}\theta_n^{(s)}>0$, *такие, что выполняются неравенства*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left[\left(\ln M_s\left(f,\frac{R_n^{(s)}}{\theta_n^{(s)}}\right)-N_s\big(R_n^{(s)}\big)\right)\big(n_s\big(R_n^{(s)}\big)\big)^{-1}-\ln\frac{1}{\theta_n^{(s)}}\right]<0,\ s=1,2,\dots,p+1, \tag{14}$$

где $R_n^{(s)}=u^{(s)}_{n,\lambda_n^{(s)}}$, $n_s\big(R_n^{(s)}\big)$ — *функции плотности узлов интерполяции около точек* a_s, $N_s\big(R_n^{(s)}\big)$ — *функции Неванлинна, то последовательность* (1), *построенная для функции* $f(z)$ *по узлам* $\{z_j^{(n)}\}$, *равномерно сходится к* $f(z)$ *на любом компакте, не содержащем точек* a_k, $k=1,2,\dots,p$.

Доказательство. Поскольку из условий (5) и выбора $R_n^{(s)}$ следует соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^{(s)}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\big(R_n^{(s)}\big)}{n}=\chi_s>0,$$

неравенства (14) непосредственно вытекают из условий (4) равномерной сходимости последовательности (1) к функции $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k, $k=1,2,\dots,p$. Теорема доказана.

Следствие 6. *Пусть* $\{z_j^{(n)}\}\in\bigcup\limits_1^1 a$, $a=\infty$, — *матрица узлов интерполяции,* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^{(0)}}{n}=0$. *Если существует последовательность* $\{\theta_n\}$, $0<\theta_n<1$, *такая, что выполняется неравенство*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left[\left(\ln M\left(f,\frac{R_n}{\theta_n}\right)-N\big(R_n\big)\right)(n(R_n))^{-1}-\ln\frac{1}{\theta_n}\right]<0,$$

где $R_n=u_{n,\lambda_n}$, $n(R_n)$ — *функция плотности узлов интерполяции,* $N(R_n)$ — *функция Неванлинна, то последовательность интерполяционных полиномов, построенная для функции* $f(z)$ *по узлам* $\{z_j^{(n)}\}$, *равномерно сходится к* $f(z)$ *на любом компакте.*

Доказательство. Из равенства $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^{(0)}}{n}=0$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(R_n)}{n}=1=\chi.$$

В силу того, что $\lambda_n\le m_n+1$, неравенство (4) имеет место без ограничения $\varliminf\limits_{n\to\infty}\theta_s>0$. Справедливость следствия вытекает из теоремы 6. Следствие доказано.

Ввиду того, что в теореме 6 $\theta_n^{(s)}\in(0,1)$, она улучшает теорему 7 из [2], а следствие 6 улучшает следствие 6 из [2], теорему 1 из [5] (см. также [4, гл. II, § 3, теорема III]), теорему из [8] и теорему V из [4] (см. также [4, гл. II, § 3]), поскольку во всех этих теоремах $\theta\in\big(0,\frac12\big)$. Кроме того, в теореме 1 из [5] и теореме из [8] положено $N(R_n)=0$ независимо от узлов интерполяции. Следствие 6 обобщает указанные выше теоремы на случай треугольной матрицы узлов интерполяции с более слабыми ограничениями на их расположение, так как в следствии 6 узлы могут иметь предельные точки в конечной части плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гончаров В. Л.* Об интерполировании функций с конечным числом особенностей с помощью рациональных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1937. № 2. С. 171–189.
2. *Липчинский А. Г.* Интерполирование аналитических функций с конечным числом особенностей // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 5. С. 1027–1047.
3. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: В 2 т. М.: Гостехиздат, 1956. Т. 1.
4. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.
5. *Ибрагимов И. И., Келдыш М. В.* Об интерполировании целых функций // Мат. сб. 1947. Т. 20. С. 283–292.
6. *Ибрагимов И. И.* Методы интерполяции функций и некоторые их применения. М.: Наука, 1971.
7. *Гончарова М. К.* О некоторых интерполяционных рядах, являющихся обобщением рядов Ньютона и Стирлинга // Уч. зап. Моск. ун-та. 1939. Т. 30. С. 17–48.
8. *Дворкин Б. С.* Интерполяционная проблема Ньютона для целой функции со специальными узлами интерполяции // Тр. Ставроп. пед. ин-та. 1958. № 10. С. 67–75.

Статья поступила 15 апреля 2014 г.

Липчинский Александр Григорьевич
Ишимский гос. педагогический институт им. П. П. Ершова,
ул. Ленина, 1, Ишим 627750 Тюменской обл.