Сибирский математический журнал
Июль—август, 2015. Том 56, № 4

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ π–ГРУППЫ С НОРМАЛЬНЫМИ ИНЪЕКТОРАМИ

Н. Т. Воробьев, А. В. Марцинкевич

Аннотация. Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел и $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} \neq (1)$ называют *нормальным в классе* $\mathfrak{S}_\pi$ всех конечных разрешимых π-групп или π-*нормальным*, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ и для любой $G \in \mathfrak{S}_\pi$ ее $\mathfrak{F}$-инъекторы являются нормальными подгруппами G. Изучаются свойства π-нормальных классов Фиттинга: в терминах операторов Локетта доказан критерий π-нормальности произведения классов Фиттинга. π-Нормальный класс Фиттинга называется *нормальным*, если $\pi = \mathbb{P}$. Решетка всех разрешимых нормальных классов Фиттинга является подрешеткой решетки всех разрешимых классов Фиттинга, хотя вопрос о модулярности решетки всех разрешимых классов Фиттинга открыт (см. [1, вопрос 14.47]). Получено положительное решение аналога этого вопроса для случая π-нормальных классов Фиттинга.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.406

Ключевые слова: класс Фиттинга, π-нормальный класс Фиттинга, произведение классов Фиттинга, решеточное объединение классов Фиттинга.

1. Введение

Все рассматриваемые группы в настоящей работе конечны и разрешимы, если не оговорено противное. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Если $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга, то подгруппу $G_\mathfrak{F}$ группы G называют $\mathfrak{F}$-*радикалом* группы G, если она является наибольшей из нормальных подгрупп группы G, принадлежащих $\mathfrak{F}$.

В теории классов групп известна теорема Гашюца — Фишера — Хартли [2] о том, что в любой группе для каждого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены. При этом подгруппа V группы G называется $\mathfrak{F}$-*инъектором* G, если $V \cap N$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой N для любой субнормальной подгруппы N группы G. Заметим, что если $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$ — класс всех π-групп (в частности, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$ — класс всех p-групп), то $\mathfrak{F}$-инъектор группы — это в точности холлова π-подгруппа (силова p-подгруппа) группы G, поэтому следствием из указанной теоремы в [2] является фундаментальная теорема Холла [3] (в частности, теорема Силова [4] в разрешимом случае).

Многие результаты по исследованию структуры классов Фиттинга и характеризации $\mathfrak{F}$-инъекторов и $\mathfrak{F}$-радикалов групп связаны с изучением свойств нормальных классов Фиттинга (см. [5, X–XI]). Основополагающей для исследований в этом направлении является работа Блессеноля — Гашюца [6], в которой построен ряд нетривиальных примеров нормальных классов Фиттинга, каждый из которых не является формацией, и доказано, что пересечение любого множества неединичных нормальных классов Фиттинга является неединичным нормальным классом Фиттинга. Кроме того, позднее Гашюцом [7] были найдены приложения нормальных классов Фиттинга для описания свойств разрешимых радикалов произвольных конечных групп. Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *нормальным* [6], если для каждой группы G ее $\mathfrak{F}$-инъекторы являются нормальными подгруппами G.

Алгебра разрешимых нормальных классов Фиттинга стала изучаться в 70-е гг. прошлого столетия благодаря результатам Косси [8], Бейдельмана [9], Хаука [10], Кусака [11] и Лауша [12]. В частности, Косси [8] было установлено, что произведение двух любых нормальных классов Фиттинга является нормальным классом Фиттинга, а из результатов Кусака [11] следует, что класс Фиттинга, порожденный объединением двух нормальных классов Фиттинга, — нормальный класс Фиттинга. Более того, Лаушем [12] было доказано, что решетка всех нормальных классов Фиттинга обладает свойством модулярности.

Естественное обобщение понятия нормальности класса Фиттинга предложено в [5, X.3.7] (см. также [6, 9, 13]). Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел и $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} \neq (1)$ называют *нормальным в классе* $\mathfrak{S}_\pi$ всех π-групп или просто *π-нормальным* (обозначают $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$), если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ и для любой π-группы G ее $\mathfrak{F}$-инъекторы являются нормальными подгруппами G. Заметим, что π-нормальный класс Фиттинга является нормальным в случае $\pi = \mathbb{P}$.

В связи с этим представляет интерес задача изучения свойств π-нормальных классов Фиттинга, в частности, их произведений и решеток. В настоящей работе для характеризации произведений π-нормальных классов Фиттинга будем использовать операторы Локетта [14] * и $_*$. Напомним, что для каждого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ через $\mathfrak{F}^*$ обозначают наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$, такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*}{=}G_{\mathfrak{F}^*}{\times}H_{\mathfrak{F}^*}$. Класс $\mathfrak{F}_*$ определяется как пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{X}^*$. В частности, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп, то $\mathfrak{F}_*$ — наименьший нормальный класс Фиттинга. Его обозначают через $\mathfrak{S}_*$. *Произведением классов Фиттинга* $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G : G/G_\mathfrak{F} \in \mathfrak{H})$. Хорошо известно, что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна [5, IX.1.12(a),(c)]. В разд. 3 расширяем результаты Хаука [10] о характеризации нормальных произведений классов Фиттинга на случай их π-нормальности. В частности, показано (теорема 3.1), что если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга π-групп, то их произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ — π-нормальный класс Фиттинга в точности тогда, когда $\mathfrak{F}^*\mathfrak{H}^* = \mathfrak{S}_\pi$.

Основной результат работы содержится в разд. 4, где изучается решетка всех π-нормальных классов Фиттинга. Ориентиром для таких исследований является вопрос о том, верно ли, что решетка всех разрешимых классов Фиттинга конечных групп модулярна (см. [1, вопрос 14.47]). Положительное решение этого вопроса для случая разрешимых нормальных классов Фиттинга вытекает из результата Лауша [12] о том, что решетка всех разрешимых нормальных классов Фиттинга изоморфна решетке подгрупп некоторой бесконечной абелевой группы (группы Лауша) (определение группы Лауша см. в [5, определение X.4.2(a)]). Нами доказано, что решетка всех π-нормальных классов Фиттинга модулярна. Заметим при этом, что доказательство свойства модулярности такой решетки альтернативно доказательству Лауша [12] и базируется лишь на описании структуры решеточного объединения классов Фиттинга в терминах групп, факторизуемых радикалами.

В определениях и обозначениях мы следуем [5].

2. Предварительные сведения

Для характеризации произведений π-нормальных классов Фиттинга будем использовать известные свойства $\mathfrak{F}$-радикала группы, которые приведем в качестве лемм.

Лемма 2.1 [5, IX.1.1(a)]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга и G — группа. Если $N \trianglelefteq\trianglelefteq G$, то $N_\mathfrak{F} = N \cap G_\mathfrak{F}$.*

Лемма 2.2 [5, IX.1.12(b)]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — непустые классы Фиттинга. Для любой группы G справедливо равенство $(G/G_\mathfrak{F})_\mathfrak{H} = G_{\mathfrak{F}\mathfrak{H}}/G_\mathfrak{F}$.*

Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — непустые классы Фиттинга, через $\mathfrak{X}/\mathfrak{F}$ обозначают класс групп $(G/G_\mathfrak{F} : G \in \mathfrak{X})$ [5, X.3.4(b)].

Напомним, что если $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп, то через S обозначают отображение, которое сопоставляет каждому классу групп $\mathfrak{X}$ класс $\mathrm{S}\mathfrak{X} = (G : G \leq H$ для некоторой группы $H \in \mathfrak{X})$.

Лемма 2.3 [15]. *Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathfrak{F}$ — нетривиальный класс Фиттинга. Для того чтобы $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{S}(\mathfrak{S}_\pi/\mathfrak{F}) \neq \mathfrak{S}_\pi$.*

Будем использовать также свойства π-нормальных классов Фиттинга и операторов Локетта, которые были получены ранее в [16].

Лемма 2.4 [16, теорема 4.2(d)]. *Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Если хотя бы один из классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ или $\mathfrak{H}$ нормален в $\mathfrak{S}_\pi$, то их произведение является π-нормальным классом Фиттинга.*

Лемма 2.5 [16, теорема 4.2(a),(b)]. *Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга π-групп, то справедливы следующие утверждения:*

(a) *$\mathfrak{F}\mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}\mathfrak{H}^* \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$;*

(b) *$\mathfrak{F}^*\mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}^*\mathfrak{H}^* = \mathfrak{S}_\pi$.*

Класс групп называют *формацией*, если он замкнут относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Если $\mathfrak{F}$ — непустая формация, то $\mathfrak{F}$-*корадикалом* $G^\mathfrak{F}$ группы G называется пересечение всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$. Заметим, что если $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}$ — формация всех абелевых групп, то $G^\mathfrak{A} = G'$ — коммутант группы G.

Используемые в дальнейшем известные свойства операторов Локетта [14] * и $_*$ представляет

Лемма 2.6 [5]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — непустые классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) [5, X.1.8(b)] *если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ то, $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{H}^*$;*

(2) [5, X.1.15] *имеет место $(\mathfrak{F}_*)_* = \mathfrak{F}_* = (\mathfrak{F}^*)_* \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F}_*)^* \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{A}$;*

(3) [5, X.1.18] *если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_*$;*

(4) [5, X.3.12] *если π — некоторое непустое множество простых чисел такое, что $\mathfrak{F}\mathfrak{S}_\pi = \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}_* \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_{\pi'}$.*

Через $G \wr H$ будем обозначать регулярное сплетение групп G и H, через $G^\natural$ — базисную группу $G \wr H$. В следующих леммах приведем свойства сплетений, которые будем использовать.

Лемма 2.7 [5, A.18.8(a),(b)]. *Пусть G и X — неединичные группы, $W = X \wr G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $H \leq G$, то $X^\natural H \cong (X^{|G:H|}) \wr H$;*

(2) *если $N \trianglelefteq W$ и $N \cap X^\natural = 1$, то $N = 1$.*

Лемма 2.8 [5, X.2.1(a)]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Локетта и G — группа. Если $G \notin \mathfrak{F}$, то $(G \wr H)_\mathfrak{F} = (G_\mathfrak{F})^\natural$ для всех групп H.*

Лемма 2.9 [5, X.2.4]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, G — группа и H — нильпотентная группа. Если существует натуральное число m такое, что $G^m \wr H \in \mathfrak{F}$, то $G^n \wr H \in \mathfrak{F}^*$ для любого $n \in \mathbb{N}$.*

Для характеризации произведений π-нормальных классов Фиттинга будем использовать критерий π-нормальности класса Фиттинга, который представляет

Лемма 2.10 [5, X.3.7]. *Пусть π — некоторое непустое множество простых чисел. Если $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга такой, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$, то следующие утверждения эквивалентны:*

(a) $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$;

(b) *для каждого простого числа $p \in \pi$ и группы $G \in \mathfrak{F}$ существует натуральное число n такое, что $G^n \wr Z_p \in \mathfrak{F}$;*

(c) $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}_\pi$;

(d) *$G/G_\mathfrak{F}$ является абелевой группой для всех групп G из $\mathfrak{S}_\pi$.*

3. π-Нормальные произведения

Напомним, что группу G называют *комонолитической*, если в G имеется такая нормальная подгруппа M (*комонолит группы* G), что G/M — простая группа и $N \leq M$ для любой собственной нормальной подгруппы N группы G. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ назовем *π-нормальным*, если $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ — π-нормальный класс Фиттинга. Характеризацию π-нормальных произведений классов Фиттинга описывает

Теорема 3.1. *Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга π-групп. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) $\mathfrak{F}\mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$;

(b) $\mathfrak{F}\mathfrak{H}^* \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$;

(c) $\mathfrak{F}^*\mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$;

(d) $\mathfrak{F}^*\mathfrak{H}^* = \mathfrak{S}_\pi$;

(e) *существует множество простых чисел $\sigma \subseteq \pi$ такое, что $\mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^* = \mathfrak{S}_\pi$.*

Доказательство. Эквивалентность утверждений (a) и (b), утверждений (c) и (d) следует по лемме 2.5. Установим эквивалентность утверждений (b) и (e).

(b)$\Rightarrow$(e) Пусть $\mathfrak{F}\mathfrak{H}^* \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$ и $\sigma = \{p \in \pi : \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}^*\}$. Покажем, что $\mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^* = \mathfrak{S}_\pi$. Очевидно, что $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\sigma$. Докажем обратное включение. Пусть G — группа минимального порядка из класса $\mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\sigma \setminus \mathfrak{F}^*$. Тогда по индукции группа G комонолитична с комонолитом $M = G_{\mathfrak{F}^*}$. По определению множества σ в случае $p \in \sigma$, очевидно, имеет место $G \in \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}^*$, что невозможно.

Пусть $p \notin \sigma$. Тогда $G/M \in \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{S}_\sigma = (1)$, где (1) — класс единичных групп. В этом случае $G = M$ и $G \in \mathfrak{F}^*$, что противоречит выбору группы G.

Теперь установим справедливость равенства $\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^* = \mathfrak{S}_\pi$. Пусть $\sigma = \pi$. Тогда из условия $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ по утверждению (1) леммы 2.6 следует, что $\mathfrak{H}^* \subseteq (\mathfrak{S}_\pi)^*$. Так как $\mathfrak{S}_\pi$ — класс Локетта, $(\mathfrak{S}_\pi)^* = \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{H}^* \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, в данном случае $\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^* = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}^* = \mathfrak{S}_\pi$.

Рассмотрим случай $\sigma \neq \pi$. Очевидно, что $\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^* \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Докажем обратное включение $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^*$. Пусть H — группа минимального порядка из класса $\mathfrak{S}_\pi \setminus \mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^*$. Если $O_\sigma(H) \neq 1$, то по индукции $H/O_\sigma(H) \in \mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^*$. Стало быть, $H \in \mathfrak{S}_\sigma(\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^*)$. Отсюда ввиду ассоциативности операции умножения классов Фиттинга $H \in \mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^*$, что противоречит выбору группы H.

Пусть $O_\sigma(H) = 1$. Покажем, что в этом случае $H \notin \mathfrak{H}^*$. Действительно, если предположить что $H \in \mathfrak{H}^*$, то $H = H/H_{\mathfrak{S}_\sigma} \in \mathfrak{H}^*$ и $H \in \mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^*$, что противоречит выбору группы H.

Пусть R — неединичная π-группа и $W = H \wr R$. Докажем, что $O_\sigma(W) = 1$. Предположим, что $O_\sigma(W) \neq 1$. Пусть $H^\natural$ — базисная группа W. Так как $O_\sigma(H) = 1$ и $\mathfrak{S}_\sigma$ — класс Локетта, то $O_\sigma(H^\natural) = H^\natural_{\mathfrak{S}_\sigma} \times H^\natural_{\mathfrak{S}_\sigma} \times \dots \times H^\natural_{\mathfrak{S}_\sigma}$. Отсюда по лемме 2.1 $O_\sigma(W) \cap H^\natural = O_\sigma(H^\natural) = 1$. Следовательно, по утверждению (2) леммы 2.7 имеем $O_\sigma(W) = 1$. Так как $H \notin \mathfrak{H}^*$, по лемме 2.8 получаем $W_{\mathfrak{H}^*} = (H \wr R)_{\mathfrak{H}^*} = (H_{\mathfrak{H}^*})^\natural$ и фактор-группа $W/W_{\mathfrak{H}^*}$ не является абелевой группой.

Пусть $\mathrm{Soc}(W) = \prod\limits_{N_i \lhd W} N_i$ — цоколь группы W и $\sigma(\mathrm{Soc}(W)) = \{p_1, \dots, p_m\}$. Так как $O_\sigma(W)$ — наибольшая из нормальных σ-подгрупп группы W, то $O_\sigma(W) > N_i$ для любого $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Ввиду того, что $N_i \neq 1$, получаем $O_\sigma(W) \neq 1$. Полученное противоречие доказывает, что $\{p_1, \dots, p_m\} \subseteq \sigma^* = \pi \setminus \sigma$. Следовательно, $\sigma^* = \{p \in \pi : \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_p \neq \mathfrak{F}^*\}$ и $\mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_{p_i} \neq \mathfrak{F}^*$ для любого $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. По следствию [5, X.2.14] существует группа $G \in \mathfrak{F}$ такая, что $G \wr P_i \notin \mathfrak{F}^*$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ и для всех p_i-групп $P_i \neq 1$.

Пусть $W_1 = G \wr W$. Тогда $W_1 = G^\natural \rightthreetimes W$. Так как $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, $G^\natural \in \mathfrak{F}$. Стало быть, $G^\natural \leq (W_1)_{\mathfrak{F}}$.

Рассмотрим два следующих случая.

Случай 1. $G^\natural < (W_1)_{\mathfrak{F}}$.

По определению $\mathfrak{F}$-радикала группы W и $G^\natural < (W_1)_{\mathfrak{F}}$ следует существование такой нормальной подгруппы $N \in \mathfrak{F}$, что $G^\natural N \leq (W_1)_{\mathfrak{F}}$. В качестве N возьмем минимальную нормальную подгруппу группы W_1. По утверждению (1) леммы 2.7 имеем $G^\natural N \cong G^{|W:N|} \wr N$. Следовательно, $G^{|W:N|} \wr N \in \mathfrak{F}$, и N — нильпотентная группа. Значит, по лемме 2.9 имеем $G \wr N \in \mathfrak{F}^*$. Это противоречит предположению о том, что $G \wr P_i \notin \mathfrak{F}^*$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ и для всех p_i-групп $P_i \neq 1$. Итак, в данном случае импликация (b)⇒(e) верна.

Остается принять

Случай 2. $G^\natural = (W_1)_{\mathfrak{F}}$.

Так как $W_1 = G^\natural \rightthreetimes W$, то $W_1/G^\natural \cong W$ и $G^\natural \cap W = 1$. Следовательно, ввиду изоморфизмов $W_1/(W_1)_{\mathfrak{F}} \cong W$, $(W_1/(W_1)_{\mathfrak{F}})/((W_1)_{\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*}/(W_1)_{\mathfrak{F}}) \cong W_1/(W_1)_{\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*}$ с учетом леммы 2.2 и изоморфизма $(W_1)_{\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*}/(W_1)_{\mathfrak{F}} \cong (W_1/(W_1)_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{H}^*} \cong W_{\mathfrak{H}^*}$ получаем $(W_1/(W_1)_{\mathfrak{F}})/((W_1)_{\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*}/(W_1)_{\mathfrak{F}}) \cong W_1/(W_1)_{\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*} \cong W/(W)_{\mathfrak{H}^*}$. Как установлено выше, $W/W_{\mathfrak{H}^*} \notin \mathfrak{A}$. Поэтому по лемме 2.10 (импликация (d)⇒(a)) произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*$ не π-нормально. Это завершает доказательство равенства $\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^* = \mathfrak{S}_\pi$. Импликация (b)⇒(e) доказана.

(e)⇒(b) Пусть существует непустое множество простых чисел σ из π такое, что $\mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^* = \mathfrak{S}_\pi$. Докажем, что $\mathfrak{F}\mathfrak{H}^* \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$.

Если $\sigma^* = \pi \setminus \sigma$ — пустое множество, то $\sigma = \pi \setminus \sigma^* = \pi$. Следовательно, $\mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\pi = \mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}_\pi$. По лемме 2.10 (импликация (c)$\Rightarrow$(a)) $\mathfrak{F}$ — π-нормальный класс Фиттинга. Значит, по лемме 2.4 $\mathfrak{F}\mathfrak{H}^* \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$.

Пусть $\sigma^* = \pi \setminus \sigma \neq \varnothing$. Тогда $\mathfrak{S}_\sigma \neq \mathfrak{S}_\pi$. Покажем, что $(\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*)\mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{S}_\pi$.

Предположим от противного, что $\mathfrak{S}_\pi \setminus (\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*)\mathfrak{S}_\sigma$ — непустой класс. Пусть G — группа минимального порядка из класса $\mathfrak{S}_\pi \setminus (\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*)\mathfrak{S}_\sigma$. Тогда группа G комонолитична с комонолитом $M = G_{(\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*)\mathfrak{S}_\sigma}$ и $G/M \cong Z_p$.

Пусть $p \in \sigma$. Тогда $G/M = G/G_{(\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*)\mathfrak{S}_\sigma} \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{S}_\sigma$. Ввиду ассоциативности операции умножения классов Фиттинга $G \in (\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*)\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{S}_\sigma = (\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*)\mathfrak{S}_\sigma$. Полученное противоречие доказывает, что $(\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*)\mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{S}_\pi$.

Предположим, что $p \in \sigma^* = \pi \setminus \sigma \subseteq \sigma'$. Заметим, что $G/G' \cong Z_{p^n}$ для некоторого $p \in \sigma'$. Так как по утверждению (2) леммы 2.6 $\mathfrak{S}_\pi \subseteq (\mathfrak{S}_\pi)_*\mathfrak{A}$, то $G/G_{(\mathfrak{S}_\pi)_*}$ абелева. Следовательно, для любой группы G имеем $G' \leq G_{(\mathfrak{S}_\pi)_*}$.

Покажем, что

$$G_{\mathfrak{F}^*}/(G_{\mathfrak{F}^*} \cap G_{(\mathfrak{S}_\pi)_*}) = G_{\mathfrak{F}^*}/G_{\mathfrak{F}^* \cap (\mathfrak{S}_\pi)_*} \in \mathfrak{S}_{\sigma'}.$$

Поскольку $G_{\mathfrak{F}^*}/G_{\mathfrak{F}^* \cap (\mathfrak{S}_\pi)_*} \cong G_{(\mathfrak{S}_\pi)_*}G_{\mathfrak{F}^*}/G_{(\mathfrak{S}_\pi)_*}$, $G_{(\mathfrak{S}_\pi)_*}G_{\mathfrak{F}^*}/G' \leq G/G' \cong Z_{p^n} \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{S}_{\sigma'}$ и формация $\mathfrak{S}_{\sigma'}$ наследственна, то $G_{(\mathfrak{S}_\pi)_*}G_{\mathfrak{F}^*}/G' \in \mathfrak{S}_{\sigma'}$. Таким образом, $G_{\mathfrak{F}^*}/G_{\mathfrak{F}^* \cap (\mathfrak{S}_\pi)_*} \in \mathfrak{S}_{\sigma'}$ ввиду изоморфизма $(G_{(\mathfrak{S}_\pi)_*}G_{\mathfrak{F}^*}/G')/(G_{(\mathfrak{S}_\pi)_*}/G') \cong G_{\mathfrak{F}^*}/G_{\mathfrak{F}^* \cap (\mathfrak{S}_\pi)_*}$.

Учитывая утверждения (2) и (3) леммы 2.6, получаем

$$\mathfrak{F}^* \cap (\mathfrak{S}_\pi)_* \subseteq (\mathfrak{F}^*)_*\mathfrak{S}_{\sigma'} = \mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_{\sigma'}.$$

Отсюда $G_{\mathfrak{F}^* \cap (\mathfrak{S}_\pi)_*} \in \mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_{\sigma'}$. Значит, $G_{\mathfrak{F}^* \cap (\mathfrak{S}_\pi)_*}/(G_{\mathfrak{F}^* \cap (\mathfrak{S}_\pi)_*})_{\mathfrak{F}_*} \in \mathfrak{S}_{\sigma'}$. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$, то $\mathfrak{F}_* \subseteq (\mathfrak{S}_\pi)_*$ по утверждению (3) леммы 2.6. Значит, $G_{\mathfrak{F}^* \cap (\mathfrak{S}_\pi)_* \cap \mathfrak{F}_*} = G_{\mathfrak{F}_*}$ и $G_{\mathfrak{F}^* \cap (\mathfrak{S}_\pi)_*}/G_{\mathfrak{F}^* \cap (\mathfrak{S}_\pi)_* \cap \mathfrak{F}_*} = G_{\mathfrak{F}^* \cap (\mathfrak{S}_\pi)_*}/G_{\mathfrak{F}_*} \in \mathfrak{S}_{\sigma'}$.

Ввиду изоморфизма $(G_{\mathfrak{F}^*}/G_{\mathfrak{F}_*})/(G_{\mathfrak{F}^* \cap (\mathfrak{S}_\pi)_*}/G_{\mathfrak{F}_*}) \cong G_{\mathfrak{F}^*}/G_{\mathfrak{F}^* \cap (\mathfrak{S}_\pi)_*}$ группа $G_{\mathfrak{F}^*}/G_{\mathfrak{F}^* \cap (\mathfrak{S}_\pi)_*}$ принадлежит $\mathfrak{S}_{\sigma'}$. Следовательно, $(G_{\mathfrak{F}^*}/G_{\mathfrak{F}_*}) \in (\mathfrak{S}_{\sigma'})^2 = \mathfrak{S}_{\sigma'}$. Поскольку $\mathfrak{S}_{\sigma'}$ — формация, $(G_{\mathfrak{F}^*}/G_{\mathfrak{F}_*})/(G_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}_*}) \cong G_{\mathfrak{F}^*}/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}_{\sigma'}$.

С учетом условия $\mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{F}^*$ и леммы 2.2 имеем $G_{\mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\sigma}/G_{\mathfrak{F}^*} = (G/G_{\mathfrak{F}^*})_{\mathfrak{S}_\sigma}$ и заключаем, что σ-радикал группы $G/G_{\mathfrak{F}^*}$ — единичная группа. По утверждению (2) леммы 2.6 $\mathfrak{F}\mathfrak{S}_\sigma \subseteq \mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{F}^*$. Следовательно, $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{S}_\sigma} \leq G_{\mathfrak{F}^*}$. Тогда $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{S}_\sigma}/G_{\mathfrak{F}} \leq G_{\mathfrak{F}^*}/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}_{\sigma'}$ и ввиду наследственности формации $\mathfrak{S}_{\sigma'}$ σ-радикал группы $G/G_{\mathfrak{F}}$ является σ'-группой. Стало быть, $(G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{S}_\sigma} = 1$.

Так как $G \in \mathfrak{S}_\pi$, то $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}_\pi = \mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^*$ и $(G/G_{\mathfrak{F}})/(G/G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{S}_\sigma} \in \mathfrak{H}^*$. Значит, $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}^*$ и $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}^* \subseteq (\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*)\mathfrak{S}_\sigma$. Полученное противоречие доказывает равенство $(\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*)\mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{S}_\pi$. Итак, $G/G_{\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*} \in \mathfrak{S}_\sigma$ и $G \in \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, $\mathfrak{S}_\pi/\mathfrak{F}\mathfrak{H}^* = (G/G_{\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*} : G \in \mathfrak{S}_\pi) \subseteq \mathfrak{S}_\sigma$. Поскольку $\mathrm{S}(\mathfrak{S}_\pi/\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{S}(\mathfrak{S}_\sigma) = \mathfrak{S}_\sigma \neq \mathfrak{S}_\pi$, по лемме 2.3 класс $\mathfrak{F}\mathfrak{H}^*$ нормален в $\mathfrak{S}_\pi$. Импликация (e)$\Rightarrow$(b) доказана.

(e)$\Rightarrow$(d) Пусть существует непустое множество простых чисел $\sigma \subseteq \pi$ такое, что $\mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^* = \mathfrak{S}_\pi$. Так как по утверждению (1) леммы 2.6 из $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ следует $\mathfrak{F}^* \subseteq (\mathfrak{S}_\pi)^* = \mathfrak{S}_\pi$, то $\mathfrak{F}^*\mathfrak{H}^* = (\mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\sigma)\mathfrak{H}^* = \mathfrak{F}^*(\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{H}^*) = \mathfrak{F}^*\mathfrak{S}_\pi = \mathfrak{S}_\pi$ и импликация (e)$\Rightarrow$(d) доказана.

Заметим, что $(\mathfrak{F}^*)^* = \mathfrak{F}^*$ и $(\mathfrak{H}^*)^* = \mathfrak{H}^*$, поэтому (e) и (d) сформулированы для классов Локетта $\mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{H}^*$. Как установлено выше, (e)$\Leftrightarrow$(b). Следовательно, утверждение (b) справедливо для классов Локетта и обращается в утверждение (d). Итак, (d)$\Rightarrow$(e). Теорема доказана.

4. Модулярность решетки $\mathfrak{E}_\pi$-нормальных классов Фиттинга

В настоящем разделе не предполагаем, что рассматриваемые группы разрешимы.

Напомним, что *решеточным объединением* $\mathfrak{F}\vee\mathfrak{H}$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ [11] называют класс Фиттинга, порожденный объединением $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$.

Через Sn будем обозначать оператор, который сопоставляет каждому классу групп $\mathfrak{X}$ класс групп $\mathrm{Sn}\,\mathfrak{X} = (G : G \trianglelefteq\trianglelefteq H$ для некоторой группы $H \in \mathfrak{X})$.

Лемма 4.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — классы Фиттинга. Если $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{Y}^*$, то $\mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y} = \mathrm{Sn}(G : G = G_\mathfrak{X} G_\mathfrak{Y})$.*

Доказательство. Докажем, что $\mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y} \subseteq \mathrm{Sn}(G : G = G_\mathfrak{X} G_\mathfrak{Y})$. Пусть $X \in \mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y}$. Покажем, что $X \in \mathrm{Sn}(G : G = G_\mathfrak{X} G_\mathfrak{Y})$. Так как по условию $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{Y}^*$, то $X \in \mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y}^* \subseteq \mathfrak{Y}^*$. По определению оператора * группа $X \in \mathfrak{Y}^* = (G : (G\times G)_\mathfrak{Y}$ входит подпрямо в $(G\times G))$. Значит, $X \trianglelefteq (X\times X)_\mathfrak{Y} K$, где $K \in \mathfrak{X}$. Следовательно, $X \trianglelefteq\trianglelefteq X_\mathfrak{Y} X_\mathfrak{X}$ и $X \in \mathrm{Sn}(G : G = G_\mathfrak{X} G_\mathfrak{Y})$.

Докажем обратное включение: $\mathrm{Sn}(G : G = G_\mathfrak{X} G_\mathfrak{Y}) \subseteq \mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y}$. Пусть $Y \in (G : G = G_\mathfrak{X} G_\mathfrak{Y})$. Покажем, что $Y \in \mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y}$. Заметим, что $Y_\mathfrak{X} \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y}$ и $Y_\mathfrak{Y} \in \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y}$. Стало быть, $Y = Y_\mathfrak{X} Y_\mathfrak{Y} \in \mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y}$, $(G : G = G_\mathfrak{X} G_\mathfrak{Y}) \subseteq \mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y}$ и $\mathrm{Sn}(G : G = G_\mathfrak{X} G_\mathfrak{Y}) \subseteq \mathrm{Sn}(\mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y}$. Лемма доказана.

Учитывая равносильность (a)$\Leftrightarrow$(c) из леммы 2.10, введем

Определение 4.2. Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем $\mathfrak{E}_\pi$-*нормальным* или *нормальным в классе* $\mathfrak{E}_\pi$ всех конечных π-групп, если $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{E}_\pi$.

В случае, когда $\pi = \mathbb{P}$, $\mathfrak{E}_\pi$-нормальный класс Фиттинга назовем *нормальным.* В универсуме $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп по лемме 2.10 условие $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}_\pi$ эквивалентно тому, что $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$. Заметим также, что решетка всех нормальных классов Фиттинга является подрешеткой решетки всех классов Фиттинга.

По теореме Лауша [12] решетка всех разрешимых нормальных классов Фиттинга модулярна, хотя вопрос о модулярности решетки всех разрешимых классов Фиттинга остается открытым (см. [1, вопрос 14.47]). Аналог этого вопроса для π-нормальных классов Фиттинга положительно решает

Теорема 4.3. *Решетка всех $\mathfrak{E}_\pi$-нормальных классов Фиттинга модулярна.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{F}$ — π-нормальные классы Фиттинга, причем $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{X}\vee(\mathfrak{Y}\cap\mathfrak{F}) \subseteq (\mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y})\cap\mathfrak{F}$. По определению решеточного объединения $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y}$. По условию теоремы $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{X}\subseteq(\mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y})\cap\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{Y}\cap\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{Y}\cap\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y}$, то $\mathfrak{Y}\cap\mathfrak{F}\subseteq(\mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y})\cap\mathfrak{F}$. Следовательно, по определению операции решеточного объединения получаем $\mathfrak{X}\vee(\mathfrak{Y}\cap\mathfrak{F}) \subseteq (\mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y})\cap\mathfrak{F}$.

Докажем обратное включение $(\mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y})\cap\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}\vee(\mathfrak{Y}\cap\mathfrak{F})$.

Поскольку $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — $\mathfrak{E}_\pi$-нормальные классы Фиттинга, $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{Y}^*$. Следовательно, по лемме 4.1 справедливо равенство

$$\mathfrak{X}\vee\mathfrak{Y} = \mathrm{Sn}(G : G = G_\mathfrak{X} G_\mathfrak{Y}). \tag{1}$$

Пусть $K \in \mathfrak{X}\vee(\mathfrak{Y}\cap\mathfrak{F})$. Ввиду (1) существует группа $G = G_\mathfrak{X} G_\mathfrak{Y}$ такая, что $K \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Так как $K \in \mathfrak{F}$, то $K \trianglelefteq G_\mathfrak{F}$. Очевидно, из условия $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{F}$ следует $G_\mathfrak{X} \subseteq G_\mathfrak{F}$. Тогда, учитывая тождество Дедекинда, имеем $K \trianglelefteq\trianglelefteq G_\mathfrak{F} = G \cap G_\mathfrak{F} =$

$G_{\mathfrak{X}}G_{\mathfrak{Y}} \cap G_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{X}}(G_{\mathfrak{Y}} \cap G_{\mathfrak{F}}) = G_{\mathfrak{X}}G_{\mathfrak{Y}\cap\mathfrak{F}}$. Следовательно, $K \in \mathfrak{X} \vee (\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F})$ и $(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \vee (\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F})$. Теорема доказана.

Следствие 4.4. *Решетка всех нормальных классов Фиттинга модулярна.*

Следствие 4.5 [12]. *Решетка всех разрешимых нормальных классов Фиттинга модулярна.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коуровская тетрадь.* Нерешенные вопросы теории групп. 18-е изд., доп. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2014.
2. *Fischer B., Gaschütz W., Hartley B.* Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen // Math. Z. 1967. Bd 102, Heft 5. S. 337–339.
3. *Hall Ph.* A note on soluble groups // J. London Math. Soc. 1928. V. 3. P. 98–105.
4. *Sylow M. L.* Théorèmes sur les groupes de substitutions // Math. Ann. 1872. V. 5. P. 584–594.
5. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
6. *Blessenohl D., Gaschütz W.* Über normale Schunk- und Fittingklassen // Math. Z. 1970. Bd 118, Heft 1. S. 1–8.
7. *Gaschütz W.* Zwei Bemerkungen über normale Fittingklassen // J. Algebra. 1974. V. 30. P. 277–278.
8. *Cossey J.* Products of Fitting classes // Math. Z. 1975. Bd 141. S. 289–295.
9. *Beidleman J. C.* On products and normal Fitting classes // Arch. Math. (Basel). 1977. V. 28. P. 347–356.
10. *Hauck P.* On products of Fitting classes // J. London Math. Soc. 1979. V. 20, N 3. P. 423–434.
11. *Cusack E.* The join of two Fitting classes // Math. Z. 1979. Bd 167. S. 37–47.
12. *Lausch H.* On normal Fitting classes // Math. Z. 1973. Bd 130, Heft 1. S. 67–72.
13. *Савельева Н. В., Воробьев Н. Т.* Максимальные подклассы локальных классов Фиттинга // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 6. С. 1411–1419.
14. *Lockett F. P.* The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ // Math. Z. 1974. Bd 137, Heft 2. S. 131–136.
15. *Савельева Н. В., Воробьев Н. Т.* Максимальные по сильному π-вложению классы Фиттинга // Изв. Гомель. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2008. Т. 47, № 2. С. 157–168.
16. *Турковская А. В., Воробьев Н. Т.* Об операторах Локетта и произведениях π-нормальных классов Фиттинга // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта імя П. М. Машэрава. 2011. Т. 64, № 4. С. 6–11.

Статья поступила 15 июля 2014 г.

Воробьев Николай Тимофеевич, Марцинкевич Анна Веславовна
Витебский гос. университет им. П. М. Машерова,
Московский пр., 33, Витебск 210038, Беларусь
hanna-t@mail.ru