Сибирский математический журнал
Июль—август, 2015. Том 56, № 4

УДК 517.984

ФОРМУЛА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ КРАТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДОПОЛНЕНИЯ ШУРА ОДНОЙ БЛОЧНО–ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ 3×3

М. Э. Муминов, Т. Х. Расулов

Аннотация. Рассматривается дополнение Шура $S(\lambda)$ с вещественным спектральным параметром λ, соответствующее одной блочно-операторной матрице 3×3. Обсуждается случай, когда существенный спектр оператора $S(\lambda)$ может содержать лакуны. Получены формулы для нахождения кратности и числа собственных значений, лежащих на произвольном интервале вне существенного спектра оператора $S(\lambda)$.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.412

Ключевые слова: дополнение Шура, бозонное пространство Фока, блочно-операторная матрица, операторы рождения и уничтожения, оператор со следом, существенный и дискретный спектры, неравенство Вейля.

1. Введение и постановка задачи

Блочно-операторная матрица — это матрица, элементы которой являются линейными операторами в банаховом или гильбертовом пространстве. Одним из специальных классов блочно-операторных матриц являются гамильтонианы системы с несохраняющимся числом квазичастиц на решетке. Их количество может быть неограниченным, как в случае моделей спин-бозонов [1], или ограниченным, как в случае урезанных моделей спин-бозонов [2]. Отметим, что такие системы обычно возникают в задачах физики твердого тела [3], квантовой теории поля [4], статистической физики [5], магнитогидродинамики [6] и квантовой механики [7].

В настоящей работе рассматривается блочно-операторная матрица H, ассоциированная с системой не более чем трех квантовых частиц на d-мерной решетке, и обсуждается случай, когда в рассматриваемой системе число рождений и уничтожений частиц равно единице.

1.1. Блочно операторная матрица. Через $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} := (-\pi, \pi]^{\mathrm{d}}$ обозначим d-мерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней. Пусть $\mathscr{H}_0 := \mathbb{C}$ — одномерное комплексное пространство, $\mathscr{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, и $\mathscr{H}_2 := L_2^{\mathrm{s}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) симметричных функций, определенных на $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$. Пространства $\mathscr{H}_0$, $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ называются *нольчастичным*,

---

Работа выполнена при финансовой поддержке программы фонда Эйнштейна при международном математическом обществе. Второй автор приносит благодарность Берлинской математической школе и институту Вейерштрасса по прикладному анализу и стохастике за приглашение, поддержку и гостеприимство.

одночастичным и *двухчастичным* подпространствами бозонного фоковского пространства $\mathscr{F}_{\mathrm{s}}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ по $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ соответственно. Элементы пространства $\mathscr{H}$ представляются как векторы $F = (f_0, f_1, f_2)$, где $f_i \in \mathscr{H}_i$, $i = 0, 1, 2$. Для двух элементов $F = (f_0, f_1, f_2)$, $G = (g_0, g_1, g_2) \in \mathscr{H}$ их скалярное произведение

$$(F, G)_{\mathscr{H}} := (f_0, g_0)_0 + (f_1, g_1)_1 + (f_1, g_1)_2$$

в $\mathscr{H}$ естественно определяется через скалярные произведения

$$(f_0, g_0)_0 := f_0\overline{g_0},\ (f_1, g_1)_1 := \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} f_1(t)\overline{g_1(t)}\, dt,\ (f_2, g_2)_2 := \int\limits_{(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2} f_2(s,t)\overline{g_2(s,t)}\, dsdt.$$

В гильбертовом пространстве $\mathscr{H} := \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$ рассмотрим блочно-операторную матрицу

$$H := \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} & 0 \\ H_{01}^* & H_{11} & H_{12} \\ 0 & H_{12}^* & H_{22} \end{pmatrix} \tag{1}$$

с матричными элементами

$$H_{00}f_0 = w_0 f_0, \quad H_{01}f_1 = \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_0(t) f_1(t)\, dt,$$

$$(H_{11}f_1)(p) = w_1(p) f_1(p), \quad (H_{12}f_2)(p) = \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_1(t) f_2(p,t)\, dt,$$

$$(H_{22}f_2)(p,q) = (w_2(p) + w_2(q)) f_2(p,q), \quad f_i \in \mathscr{H}_i,\ i = 0, 1, 2.$$

Здесь w_0 — фиксированное вещественное число, $v_i(\cdot)$, $i = 0, 1$, — вещественнозначные ограниченные функции на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, $w_1(\cdot)$ — вещественнозначная кусочно непрерывная и ограниченная функция на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, а $w_2(\cdot)$ — вещественнозначная положительная непрерывная функция на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$.

В этих предположениях на параметры оператор H, действующий в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ по формуле (1), ограничен и самосопряжен. При этом $H_{ij}^* : \mathscr{H}_j \to \mathscr{H}_i$, $i < j$, — сопряженный оператор к H_{ij} и

$$(H_{01}^* f_0)(p) = v_0(p) f_0, \quad (H_{12}^* f_1)(p,q) = \frac{v_1(p) f_1(q) + v_1(q) f_1(p)}{2},$$

где $f_i \in \mathscr{H}_i$, $i = 0, 1$. Операторы H_{01} и H_{12} называются *операторами уничтожения*, а H_{01}^* и H_{12}^* — *операторами рождения* [4]. Оператор уничтожения снижает количество частиц в заданном состоянии на единицу, а оператор рождения увеличивает число частиц в данном состоянии на единицу и является сопряженным к оператору уничтожения. Такие операторы имеют широкое применение в квантовой механике, в частности, в изучении квантовых гармонических осцилляторов и систем многих частиц [8].

Следует заметить, что если параметр-функции оператора H определены как

$$w_0 = \varepsilon \mathrm{s}, \quad v_0(p) = v_1(p) = \alpha v(p), \quad w_1(p) = -\varepsilon \mathrm{s} + \omega(p), \quad w_2(p) = \frac{\varepsilon \mathrm{s}}{2} + \omega(p),$$

то с помощью полученного оператора можно подробно исследовать спектральные свойства решетчатой модели светового излучения с неподвижным атомом и не более чем двумя фотонами [2]. Здесь $\mathrm{s} = \pm$, $\varepsilon > 0$, $\omega(p)$ — энергия фотона с импульсом p (дисперсия свободного поля), $v(\cdot)$ — некоторая непрерывная функция (связанная с взаимодействием между атомом и фотонами) и $\alpha > 0$ — константа связи.

1.2. Первое дополнение Шура. Обозначим через $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\mathrm{ess}}(\cdot)$, $\sigma_{\mathrm{disc}}(\cdot)$ и $\rho(\cdot)$ соответственно спектр, существенный спектр, дискретный спектр и резольвентное множество ограниченного самосопряженного оператора. Пространство $\mathscr{H}$ представим в виде ортогональной суммы гильбертовых пространств $\mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$. Тогда первое дополнение Шура блочно-операторной матрицы H, соответствующее разложению $\mathscr{H} = \{\mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1\} \oplus \mathscr{H}_2$, определяется следующим образом (см., например, [9]):

$$S(\lambda) := \begin{pmatrix} H_{00} - \lambda & H_{01} \\ H_{01}^* & H_{11} - \lambda - H_{12}(H_{22} - \lambda)^{-1} H_{12}^* \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \rho(H_{22}), \tag{2}$$

и оно играет важную роль в спектральном анализе оператора H. Видно, что первое дополнение Шура является операторнозначной регулярной функцией, определенной вне спектра оператора H_{22}. Дополнение Шура сначала использовано в теории матриц [10]. Термин «дополнение Шура» был введен в [11]. В бесконечномерных гильбертовых пространствах дополнение Шура впервые изучено в известной работе М. Г. Крейна [12] о расширениях самосопряженных операторов. Исходя из применений в теории матриц и численной линейной алгебре, дополнение Шура использовали во многих областях математики таких, как статистика, электротехника, C^*-алгебры [13] и теория математических систем [14].

В теории ограниченных и неограниченных блочно-операторных матриц дополнение Шура является мощным инструментом при изучении спектра и различных спектральных свойств. Эти свойства впервые были исследованы в работах Нагела [15, 16]. В [17] существенный спектр блочно-операторной матрицы определен в терминах дополнения Шура. Многие более поздние работы посвящены этому объекту (подробности см. в монографии [9]). Таким образом, в абстрактном случае (т. е. при неконкретизированном виде матричных элементов) свойства дополнения Шура довольно хорошо изучены. Но в некоторых специальных случаях можно наблюдать новые черты дополнения Шура. В данной работе мы подробно изучаем дискретный спектр дополнения Шура на примере блочно-операторной матрицы H в бозонное фоковское пространство.

Следует отметить, что при каждом фиксированном λ оператор типа (2) является оператором, носящим название обобщенной модели Фридрихса. Как таковая обобщенная модель Фридрихса введена в работе [18], где были изучены ее собственные значения и «резонансы» (особенности аналитического продолжения резольвенты). Такие модели рассмотрены также в ряде других работ, из которых упомянем статью [19] — в ней результаты, полученные для обобщенной модели Фридрихса, применяются к проблемам случайного блуждания частицы в случайной среде, работу [20], в которой исследованы так называемые связанные состояния для определенного семейства обобщенных моделей Фридрихса, а также работу [21], где полностью исследован спектр модели и структура ее собственных векторов (как обычных, так и обобщенных) при малых значениях параметра взаимодействия. В [22] оно рассматривается как двухканальная молекулярно-резонансная модель.

1.3. Основные результаты. Одним из важных вопросов в спектральном анализе оператора $S(\lambda)$ является изучение конечности или бесконечности числа собственных значений, лежащих вне существенного спектра. Цель нашей работы — проведение подробного исследования дискретного спектра оператора $S(\lambda)$. Основные результаты настоящей работы состоят в следующем.

• Установлена связь между собственными значениями операторов H и $S(\lambda)$ (см. разд. 2).

• Построен симметризованный аналог уравнения Фаддеева для собственных вектор-функций оператора $S(\lambda)$ и доказаны некоторые основные свойства, связанные с числом собственных значений (см. разд. 3).

• Найдены формулы для кратности и для числа собственных значений, лежащих на произвольном интервале вне существенного спектра оператора $S(\lambda)$. Полученные формулы дают возможность получить асимптотику распределения дискретного спектра, лежащего на лакуне. Найдено достаточное условие конечности дискретного спектра оператора $S(\lambda)$. Исходя из свойств оператора $S(\lambda)$, даны два вывода об операторе H (см. разд. 4).

2. Соотношение между спектральными свойствами операторов H и $S(\lambda)$

В этом разделе для полноты приведем важные свойства оператора $S(\lambda)$ с кратким пояснением доказательства.

При каждом фиксированном $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus [m + w_2(p), M + w_2(p)]$ функцию

$$\Delta(p;\lambda) := w_1(p) - \lambda - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v_1^2(t)\,dt}{w_2(p) + w_2(t) - \lambda},$$

где числа m и M определяются следующим образом:

$$m := \min_{q\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w_2(q), \quad M := \max_{q\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w_2(q).$$

Если определим следующие вспомогательные операторы:

$$S_{00}(\lambda) := H_{00} - \lambda, \quad S_{11}(\lambda) := H_{11} - \lambda - H_{12}(H_{22} - \lambda)^{-1}H_{12}^*, \quad \lambda \in \rho(H_{22}),$$

то оператор $S(\lambda)$ записывается так:

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} S_{00}(\lambda) & H_{01} \\ H_{01}^* & S_{11}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Для удобства оператор $S_{11}(\lambda)$ представим как разность двух операторов

$$S_{11}(\lambda) := S_{11}^0(\lambda) - K(\lambda),$$

где операторы $S_{11}^0(\lambda)$, $K(\lambda) : L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) \to L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ действуют по формулам

$$\big(S_{11}^0(\lambda)f\big)(p) = \Delta(p;\lambda)f(p), \quad (K(\lambda)f)(p) = \frac{v_1(p)}{2}\int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v_1(t)f(t)\,dt}{w_2(p) + w_2(t) - \lambda}.$$

Пусть I_i — единичный оператор в $\mathscr{H}_i$, $i = 0, 1, 2$. Соотношение между спектральными свойствами блочно-операторной матрицы H и дополнением Шура

$S(\lambda)$ можно наблюдать из так называемой «факторизации Фробениуса — Шура» (см., например, [9]), т. е.

$$H-\lambda=\begin{pmatrix} I_0 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & H_{12}(H_{22}-\lambda)^{-1} \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{00}(\lambda) & H_{01} & 0 \\ H_{01}^* & S_{11}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & H_{22}-\lambda \end{pmatrix}$$
$$\times\begin{pmatrix} I_0 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & (H_{22}-\lambda)^{-1}H_{12} & I_2 \end{pmatrix}, \quad z\in\rho(H_{22}).$$

При этом $\sigma(H)\setminus\sigma(H_{22})=\sigma(S)$. Здесь для регулярной оператор-функции

$$S:\mathbb{C}\setminus\sigma(H_{22})\to\mathscr{H}_0\oplus\mathscr{H}_1$$

спектр понимается как

$$\sigma(S):=\mathbb{C}\setminus\{\lambda\in\mathbb{C}\setminus\sigma(H_{22}):S(\lambda)\ \text{биективен в}\ \mathscr{H}_0\oplus\mathscr{H}_1\}.$$

Пусть σ — замыкание множество точек $\lambda\in\mathbb{C}$, для которых уравнение $\Delta(p;\lambda)=0$ имеет решение хотя бы для одной $p\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$.

Тогда (см. [23]) для существенного спектра оператора H имеет место равенство

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H)=\sigma\cup[2m,2M]. \tag{3}$$

Докажем некоторые свойства оператор-функции $S(\cdot)$, определенной в $\mathbb{C}\setminus[2m,2M]$.

Следующие два свойства устанавливают связь между дискретным и существенным спектрами операторов H и $S(\lambda)$.

Свойство 1. *Число $\lambda\in\mathbb{C}\setminus[2m,2M]$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда оператор $S(\lambda)$ имеет собственное значение, равное нулю, и их кратности совпадают.*

Доказательство. Пусть $\lambda\in\mathbb{C}\setminus[2m,2M]$ — собственное значение оператора H и $F=(f_0,f_1,f_2)\in\mathscr{H}$ — соответствующая собственная вектор-функция. Тогда f_0, f_1 и f_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} (H_{00}-\lambda)f_0+H_{01}f_1=0, \\ H_{01}^*f_0+(H_{11}-\lambda)f_1+H_{12}f_2=0, \\ H_{12}^*f_1+(H_{22}-\lambda)f_2=0. \end{cases} \tag{4}$$

Так как $\lambda\in\mathbb{C}\setminus[2m,2M]$, из второго уравнений системы (4) для f_2 имеем

$$f_2=-(H_{22}-\lambda)^{-1}H_{12}^*f_1. \tag{5}$$

Подставляя выражения (5) для f_2 в первое уравнение системы (4), заключаем, что система уравнений (4) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда уравнение $S(\lambda)f=0$ имеет нетривиальное решение $f:=(f_0,f_1)\in\mathscr{H}_0\oplus\mathscr{H}_1$. Более того, линейные подпространства, порожденные решениями системы уравнений (4), и уравнения $S(\lambda)f=0$ имеют одинаковые размерности. Свойство 1 доказано.

Из доказательства свойства 1 видно, что если $f=(f_0,f_1)$ является собственной вектор-функцией, соответствующей нулевому собственному значению оператора $S(\lambda)$, то $F=(f_0,f_1,f_2)$ — собственная вектор-функция, соответствующая собственному значению λ оператора H, где f_2 определена по формуле (5).

Свойство 2. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [2m, 2M]$. *Тогда* $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(H) \Longleftrightarrow 0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(S(\lambda))$.

Доказательство. Сначала описываем существенный спектр оператора $S(\lambda)$. Очевидно, что при каждом $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [2m, 2M]$ ядро интегрального оператора $K(\lambda)$ ограничено в $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$ и, следовательно, этот оператор компактен. Тогда, учитывая одномерность операторов $S_{00}(\lambda)$ и H_{01}, из теоремы Вейля о существенном спектре получим, что существенный спектр $\sigma_{\mathrm{ess}}(S(\lambda))$ оператора $S(\lambda)$ совпадает со спектром оператора $S_{11}^0(\lambda)$, т. е. $\sigma_{\mathrm{ess}}(S(\lambda)) = \sigma\big(S_{11}^0(\lambda)\big)$. Из кусочной непрерывности функции $\Delta(\cdot\,;\lambda)$ при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [2m, 2M]$ на компактном множестве $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ следует, что

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(S(\lambda)) = \overline{\mathrm{Ran}(\Delta(\cdot\,;\lambda))}. \tag{6}$$

Пусть $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(H) \setminus [2m, 2M]$. Тогда в силу равенства (3) имеем $\lambda_0 \in \sigma \setminus [2m, 2M]$. Из определения множества σ вытекает существование последовательности точек $\{p_n\} \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta(p_n\,;\lambda_0) = 0$. Учитывая (6), имеем $0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(S(\lambda_0))$.

Пусть $0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(S(\lambda_1))$ для некоторого $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus [2m, 2M]$. Тогда в силу (6) найдется последовательность точек $\{q_n\} \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta(q_n;\lambda_1) = 0$. Из определения множества σ вытекает, что $\lambda_1 \in \sigma \subset \sigma_{\mathrm{ess}}(H)$. Свойство 2 доказано.

Из свойств 1 и 2 вытекают

Следствие 1. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [2m, 2M]$. *Тогда* $\lambda \in \rho(H) \Longleftrightarrow 0 \in \rho(S(\lambda))$.

Следствие 2. *Пусть* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus [2m, 2M]$. *Если* $(\lambda_0, \lambda_0 + \gamma) \subset \rho(H)$ *(соответственно* $(\lambda_0 - \gamma, \lambda_0) \subset \rho(H)$*) при некотором* $\gamma > 0$*, то существует число* $\delta = \delta(\gamma) > 0$ *такое, что* $(0, \delta) \in \rho(S(\lambda_0))$ *(соответственно* $(-\delta, 0) \in \rho(S(\lambda_0))$*).*

Так как $w_1(\cdot)$ кусочно непрерывна и ограничена на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, существуют области непрерывности $D_i \subset \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, $i = 1, \dots, n$ $(n \in \mathbb{N})$, такие, что $D_i \cap D_j = \varnothing$, $i \neq j$, и $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{D}_i$. При этом для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ функция $w_1(\cdot)$ ограничена на $\overline{D}_i$. Следовательно, при каждом $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [2m, 2M]$ функция $\Delta(\cdot\,;\lambda)$ также кусочно непрерывна и ограничена на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$. Если положить

$$\Delta_i(p;\lambda) := \Delta(p;\lambda), \quad p \in D_i,\ i = 1, \dots, n,$$

то в силу равенства (6) имеем

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(S(\lambda)) = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\mathrm{Ran}(\Delta_i(\cdot\,;\lambda))},$$

т. е. существенный спектр оператора $S(\lambda)$ может имеет лакуну.

Для удобства читателя приведем следующий пример на вычисление существенного спектра оператора $S(\lambda)$.

Пример. Пусть $\mathrm{d} = 1$. Разобьем множество $\mathbb{T}$ на три части: $\mathbb{T} = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, где

$$D_1 = [-\pi/2, \pi/2], \quad D_2 = (-\pi, -\pi/2), \quad D_3 = (\pi/2, \pi].$$

Рассмотрим следующие функции: $v_1(x) \equiv 1$, $w_2(x) = 2 - \cos(x)$ и

$$w_1(x) = \begin{cases} a - \cos(x) & \text{при } x \in D_1, \\ 1 - \cos(x) & \text{при } x \in D_2 \cup D_3. \end{cases}$$

Здесь $a \in \mathbb{R}$. Видно, что функция $w_1(\cdot)$ непрерывна на каждом из множеств D_i, $i = 1,2,3$. Более того, если $a \neq 1$, то она имеет разрыв первого рода в точке $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$, т. е. кусочно непрерывна и ограничена на $\mathbb{T}$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [2,6]$. Используя определение функции $\Delta_i(\cdot\,;\lambda)$, $i = 1,2,3$, и свойства косинуса, легко можно показать, что

$$\overline{\operatorname{Ran}(\Delta_1(\cdot\,;\lambda))} = \left[a - 1 - \lambda - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{dt}{3-\cos(t)-\lambda}, a - \lambda - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{dt}{4-\cos(t)-\lambda}\right],$$

$$\overline{\operatorname{Ran}(\Delta_i(\cdot\,;\lambda))} = \left[1 - \lambda - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{dt}{4-\cos(t)-\lambda}, 2 - \lambda - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{dt}{5-\cos(t)-\lambda}\right], \quad i = 2,3.$$

Положим

$$a_\lambda := 3 + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{dt}{3-\cos(t)-\lambda} - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{dt}{5-\cos(t)-\lambda}.$$

Тогда при всех $a > a_\lambda$ существенный спектр оператора $S(\lambda)$ имеет лакуну, равную

$$\left(2 - \lambda - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{dt}{5-\cos(t)-\lambda}, a - 1 - \lambda - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{dt}{3-\cos(t)-\lambda}\right).$$

Пусть B — ограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, и $\mathscr{H}_B(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, — подпространство пространства $\mathscr{H}$, элементы которого удовлетворяют условию $(Bf,f) > \gamma\|f\|$, $f \neq 0$.

Положим

$$n(\gamma, B) := \sup_{\mathscr{H}_B(\gamma)} \dim \mathscr{H}_B(\gamma).$$

Число $n(\gamma,B)$ равно бесконечности, если $\gamma < \max \sigma_{\mathrm{ess}}(B)$, и если число $n(\gamma,B)$ конечно, то оно равно числу собственных значений (с учетом кратности) оператора B, больших, чем γ.

Обозначим через $N_{(\alpha,\beta)}(B)$ число собственных значений оператора B (с учетом кратности), лежащих на $(\alpha,\beta) \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(B)$. Для $f = (f_0, f_1)$, $g = (g_0, g_1) \in \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1$ положим

$$\langle f, g\rangle := (f_0, g_0)_0 + (f_1, g_1)_1.$$

Пусть $E_{\min} := \min \sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ и $E_{\max} := \max \sigma_{\mathrm{ess}}(H)$. Из определения множества σ видно, что для любых $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ и $\lambda < E_{\min}$ справедливо неравенство $\Delta(p;\lambda) > 0$. Отсюда следует, что для таких λ имеет место включение $\sigma_{\mathrm{ess}}(S(\lambda)) \subset (0, +\infty)$.

Свойство 3. *Для любого $\lambda < E_{\min}$ имеет место равенство*

$$N_{(-\infty,\lambda)}(H) = N_{(-\infty,0)}(S(\lambda)).$$

Доказательство. Для любого $\lambda < E_{\min}$ оператор $H_{22} - \lambda$ положителен и обратим, поэтому существует квадратный корень $(R_{22}(\lambda))^{1/2}$ резольвенты оператора H_{22}.

Пусть $V(\lambda)$, $\lambda < E_{\min}$, есть блочно-операторная (3×3)-матрица в $\mathscr{H}$ с элементами

$$V_{00}(\lambda) := H_{00} - \lambda I_0, \quad V_{01}(\lambda) := H_{01}, \quad V_{02}(\lambda) = 0,$$

$$V_{10}(\lambda) := H_{10}, \quad V_{11}(\lambda) := H_{11} - \lambda I_1, \quad V_{12}(\lambda) := H_{12}(R_{22}(\lambda))^{1/2},$$
$$V_{20}(\lambda) = 0, \quad V_{21}(\lambda) := (R_{22}(\lambda))^{1/2} H_{12}^*, \quad V_{22}(\lambda) := I_2.$$

Простые вычисления показывают, что неравенство $(HF, F)_{\mathscr{H}} < \lambda(F, F)_{\mathscr{H}}$, $F = (f_0, f_1, f_2) \in \mathscr{H}$, выполняется тогда и только тогда, когда $(V(\lambda)G, G)_{\mathscr{H}} < 0$, $G = (f_0, f_1, (H_{22} - \lambda I_2)^{1/2} f_2)$. Отсюда следует, что

$$N_{(-\infty,\lambda)}(H) = N_{(-\infty,0)}(V(\lambda)). \tag{7}$$

Пусть $f = (f_0, f_1) \in \mathscr{H}_{-S(\lambda)}(0)$, т. е. $\langle S(\lambda)f, f\rangle < 0$. Тогда для любого

$$G := (f_0, f_1, -V_{21}(\lambda)f_1) \in \mathscr{H}$$

имеем

$$(V(\lambda)G, G)_{\mathscr{H}} = \langle S(\lambda)f, f\rangle < 0.$$

Следовательно, $G \in \mathscr{H}_{-V(\lambda)}(0)$, поэтому

$$N_{(-\infty,0)}(S(\lambda)) \le N_{(-\infty,0)}(V(\lambda)). \tag{8}$$

Для любых $f = (f_0, f_1) \in \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1$ и $F = (f_0, f_1, f_2) \in \mathscr{H}$ имеет место равенство

$$\langle S(\lambda)f, f\rangle = (V(\lambda)F, F)_{\mathscr{H}} - (V_{12}(\lambda)V_{21}(\lambda)f_1, f_1)_1 \\ - (V_{21}(\lambda)f_1, f_2)_2 - (V_{12}(\lambda)f_2, f_1)_1 - (f_2, f_2)_2.$$

При этом если $F = (f_0, f_1, f_2) \in \mathscr{H}_{-V(\lambda)}(0)$, то

$$\langle S(\lambda)f, f\rangle = (V(\lambda)F, F)_{\mathscr{H}} - \|f_2 + V_{21}f_1\|^2 < 0,$$

т. е. $f \in \mathscr{H}_{-S(\lambda)}(0)$. Таким образом,

$$N_{(-\infty,0)}(V(\lambda)) \le N_{(-\infty,0)}(S(\lambda)). \tag{9}$$

Неравенства (8), (9) и равенство (7) завершают доказательство свойства 3.

Очевидно, что для любых $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ и $\lambda > E_{\max}$ имеет место неравенство $\Delta(p; \lambda) < 0$. Поэтому для таких λ верно включение $\sigma_{\mathrm{ess}}(S(\lambda)) \subset (-\infty, 0)$.

Следующее свойство доказывается аналогично.

Свойство 3′. *Для любого $\lambda > E_{\max}$ имеет место равенство*

$$N_{(\lambda,\infty)}(H) = N_{(0,\infty)}(S(\lambda)).$$

3. Аналог уравнения Фаддеева для собственных вектор-функций оператора $S(\lambda)$. Основные свойства

Данный раздел посвящен построению симметризованного аналога уравнения Фаддеева для собственных функций оператора $S(\lambda)$ и доказательству его основных свойств.

Для любого $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [2m, 2M]$ определим

$$\theta_\lambda := \begin{cases} 1, & \lambda < 2m, \\ -1, & \lambda > 2M. \end{cases}$$

Прежде чем построить аналог уравнения Фаддеева, надо показать положительность оператора $\theta_\lambda K(\lambda)$ при каждом $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [2m, 2M]$.

Лемма 1. *При каждом фиксированном $\lambda \in \mathbb{R}\setminus[2m,2M]$ оператор $\theta_\lambda K(\lambda)$ положительный и его положительный квадратный корень $[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}$ имеет вид*

$$([\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2} f_1)(p) = \int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \widetilde{K}(\lambda; p,t) f_1(t)\,dt, \quad f_1 \in \mathscr{H}_1,$$

где через $\widetilde{K}(\lambda;\cdot,\cdot)$ формально обозначено ядро оператора $[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}$, и является квадратично-интегрируемой функцией на $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$.

Доказательство. Сначала докажем положительность интегрального оператора $\theta_\lambda K(\lambda)$. Для этого, учитывая равенство

$$\frac{\pi}{2x^2y^2(x^2+y^2)} = \int\limits_0^\infty \frac{d\xi}{(x^4+\xi^2)(y^4+\xi^2)}$$

и неравенство

$$\theta_\lambda[w_2(p)-\lambda/2] > 0, \quad p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}},\ \lambda \in \mathbb{R}\setminus[2m,2M],$$

ядро $K(\lambda;\cdot,\cdot)$ оператора $K(\lambda)$ представим в виде

$$K(\lambda;p,t) = \theta_\lambda \frac{v_1(p)v_1(t)}{\pi}[w_2(p)-\lambda/2][w_2(t)-\lambda/2] \\ \times \int\limits_0^\infty \frac{d\xi}{([w_2(p)-\lambda/2]^2+\xi^2)([w_2(t)-\lambda/2]^2+\xi^2)}.$$

Пользуясь теоремой Фубини, квадратичную форму $(\theta_\lambda K(\lambda)f_1,f_1)_1$, $f_1 \in L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ запишем в виде

$$(\theta_\lambda K(\lambda)f_1,f_1)_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \left|\int\limits_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v_1(t)[w_2(t)-\lambda/2]f_1(t)\,dt}{[w_2(t)-\lambda/2]^2+\xi^2}\right|^2 d\xi.$$

Следовательно, $\theta_\lambda K(\lambda) \geq 0$ при каждом фиксированном $\lambda \in \mathbb{R}\setminus[2m,2M]$.

Из положительности оператора $\theta_\lambda K(\lambda)$ следует, что каждое нетривиальное собственное значение $E_j(\lambda)$ оператора $\theta_\lambda K(\lambda)$ положительно. В силу теоремы Гильберта — Шмидта [24] имеем разложение

$$\theta_\lambda K(\lambda) = \sum_j E_j(\lambda)(\varphi_j,\cdot)_1\,\varphi_j$$

с условием $\sum\limits_j E_j(\lambda) < \infty$; здесь φ_j – собственный вектор оператора $\theta_\lambda K(\lambda)$, соответствующий собственному значению $E_j(\lambda)$. Пусть $[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}$ есть положительный корень оператора $\theta_\lambda K(\lambda)$. Тогда

$$[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2} = \sum_j \sqrt{E_j(\lambda)}(\varphi_j,\cdot)_1\,\varphi_j.$$

В силу условия $\sum\limits_j E_j(\lambda) < \infty$ оператор $[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}$ является оператором Гильберта — Шмидта. Значит, ядро $\widetilde{K}(\lambda;\cdot,\cdot)$ интегрального оператора $[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}$ квадратично интегрируемо. Лемма 1 доказана.

Пусть $R_{11}^0(\lambda;z) := \big(S_{11}^0(\lambda) - zI_1\big)^{-1}$. В исследованиях дискретного спектра оператора $S(\lambda)$ основную роль играет компактный (симметризованный) оператор $T(\lambda;z)$, $z \in \mathbb{C}\setminus\sigma\big(S_{11}^0(\lambda)\big)$, действующий в $\mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1$ как блочно-операторная (2×2)-матрица

$$T(\lambda;z) := \begin{pmatrix} T_{00}(\lambda;z) & T_{01}(\lambda;z) \\ T_{10}(\lambda;z) & T_{11}(\lambda;z) \end{pmatrix},$$

где матричные элементы $T_{ij}(\lambda;z) : \mathscr{H}_j \to \mathscr{H}_i$, $i,j = 0,1$, определяются по формулам

$$T_{00}(\lambda;z) := I_0 + \theta_\lambda\big[zI_0 - S_{00}(\lambda) + H_{01}R_{11}^0(\lambda;z)H_{01}^*\big],$$
$$T_{01}(\lambda;z) := -H_{01}R_{11}^0(\lambda;z)[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2},$$
$$T_{10}(\lambda;z) := -[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}R_{11}^0(\lambda;z)H_{01}^*,$$
$$T_{11}(\lambda;z) := \theta_\lambda[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}R_{11}^0(\lambda;z)[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}.$$

Следующая лемма отражает известный принцип Бирмана — Швингера и устанавливает связь между собственными значениями операторов $S(\lambda)$ и $T(\lambda;z)$.

Лемма 2. *Число $z_\lambda \in \mathbb{C}\setminus\sigma\big(S_{11}^0(\lambda)\big)$ является собственным значением оператора $S(\lambda)$ тогда и только тогда, когда компактный оператор $T(\lambda;z_\lambda)$ имеет собственное значение, равное единице, причем кратности собственных значений z_λ и 1 совпадают.*

Доказательство. Пусть $z_\lambda \in \mathbb{C}\setminus\sigma\big(S_{11}^0(\lambda)\big)$ — собственное значение оператора $S(\lambda)$, и пусть $f = (f_0, f_1) \in \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1$ — соответствующая собственная вектор-функция. Тогда f_0 и f_1 удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} (S_{00}(\lambda) - z_\lambda I_0)f_0 + H_{01}f_1 = 0, \\ H_{01}^*f_0 + \big(S_{11}^0(\lambda) - z_\lambda I_1\big)f_1 - K(\lambda)f_1 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Так как $z_\lambda \in \mathbb{C}\setminus\sigma\big(S_{11}^0(\lambda)\big)$, из второго уравнения системы (10) для f_1 имеем

$$f_1 = R_{11}^0(\lambda;z_\lambda)K(\lambda)f_1 - R_{11}^0(\lambda;z_\lambda)H_{01}^*f_0. \tag{11}$$

Далее, найдем действие оператора $[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}$ на функцию f_1:

$$[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}f_1 = [\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}R_{11}^0(\lambda;z_\lambda)K(\lambda)f_1 - [\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}R_{11}^0(\lambda;z_\lambda)H_{01}^*f_0.$$

Обозначая $\tilde f_1 := [\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}f_1$, из последнего имеем

$$\tilde f_1 = \theta_\lambda[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}R_{11}^0(\lambda;z_\lambda)[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}\tilde f_1 - [\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}R_{11}^0(\lambda;z_\lambda)H_{01}^*f_0. \tag{12}$$

Затем равенство (11) запишем в виде

$$f_1 = \theta_\lambda R_{11}^0(\lambda;z_\lambda)[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}\tilde f_1 - R_{11}^0(\lambda;z_\lambda)H_{01}^*f_0. \tag{13}$$

Подставляя полученное новое выражение (13) для f_1 в первое уравнение системы (10), заключаем, что система уравнений (10) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\begin{cases} \big(S_{00}(\lambda) - z_\lambda I_0 - H_{01}R_{11}^0(\lambda;z_\lambda)H_{01}^*\big)f_0 + \theta_\lambda H_{01}R_{11}^0(\lambda;z_\lambda)[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}\tilde f_1 = 0, \\ [\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}R_{11}^0(\lambda;z_\lambda)H_{01}^*f_0 + \big(I_1 - \theta_\lambda[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}R_{11}^0(\lambda;z_\lambda)[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}\big)\tilde f_1 = 0 \end{cases}$$

или уравнение $\Phi - T(\lambda;z_\lambda)\Phi = 0$, $\Phi = (f_0, \tilde f_1) \in \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1$, имеет ненулевое решение. При этом эквивалентность уравнения $\Phi - T(\lambda;z_\lambda)\Phi = 0$ и последней системы уравнений устанавливается умножением его первого уравнения на θ_λ с учетом $\theta_\lambda^2 = 1$. Легко проверить, что количество линейно независимых векторов, являющихся решениями системы уравнений (10) и уравнения $\Phi - T(\lambda; z_\lambda)\Phi = 0$, совпадают. Следовательно, кратности собственных значений z_λ и 1 для операторов $S(\lambda)$ и $T(\lambda; z_\lambda)$ соответственно совпадают. Лемма 2 доказана.

Замечание. Уравнение $T(\lambda; z)\Phi = \Phi$ представляет собой аналог уравнения Фаддеева для собственных вектор-функций оператора $S(\lambda)$.

Замечание. Следует отметить, что оператор-функция $T(\lambda; \cdot)$ не монотонна, поэтому метод, использованный в [25], не применим при доказательстве основных результатов нашей работы.

По определению оператор-функция $T(\lambda; \cdot)$ аналитическая в $\mathbb{C} \setminus \sigma\big(S_{11}^0(\lambda)\big)$, при этом для каждого фиксированного $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma\big(S_{11}^0(\lambda)\big)$ оператор $T(\lambda; z)$ принадлежит классу операторов со следом. Действительно, в силу леммы 1 оператор $K^{1/2}(\lambda)$ является оператором Гильберта — Шмидта. Так как оператор $R_{11}^0(\lambda; z)$ ограничен, $T_{11}(\lambda; z)$ принадлежит классу операторов со следом. Далее, из одномерности операторов $T_{00}(\lambda; z)$, $T_{01}(\lambda; z)$ и $T_{10}(\lambda; z)$ вытекает, что $T(\lambda; z)$ является оператором со следом при каждом фиксированном $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma\big(S_{11}^0(\lambda)\big)$. Поэтому детерминант $D_\lambda(\gamma, z) := \det[I - \gamma^{-1}T(\lambda; z)]$ оператора $I - \gamma^{-1}T(\lambda; z)$ хорошо определен и аналитичен при $\gamma \neq 0$, где $I := \operatorname{diag}\{I_0, I_1\}$. Из теоремы XIII.105 в [24] вытекает

Лемма 3. *Число $E_\lambda(z) \neq 0$ является собственным значением оператора $T(\lambda; z)$ при $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma\big(S_{11}^0(\lambda)\big)$ тогда и только тогда, когда $D_\lambda(E_\lambda(z), z) = 0$.*

Из лемм 2 и 3 следует

Лемма 4. *Число $z_\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma\big(S_{11}^0(\lambda)\big)$ является собственным значением оператора $S(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $D_\lambda(1, z_\lambda) = 0$.*

Отметим, что оператор $T(\lambda; z)$ определен при каждом $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma\big(S_{11}^0(\lambda)\big)$.

Лемма 5. *Если число $E_\lambda(z) \neq 0$ является собственным значением оператора $T(\lambda; z)$ при некотором $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma\big(S_{11}^0(\lambda)\big)$, то z вещественно.*

Доказательство. Пусть $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1) \in \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1$ — нормированная собственная вектор-функция, соответствующая собственному значению $E_\lambda(z) \neq 0$ оператора $T(\lambda; z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma\big(S_{11}^0(\lambda)\big)$. Выделяя вещественную и мнимую части функции $(\Delta(p; \lambda) - z)^{-1}$, представим оператор $R_{11}^0(\lambda; z)$ в виде $R_{11}^0(\lambda; z) = \widehat{R}_{11}^0(\lambda; z) + i \operatorname{Im} z \cdot \widetilde{R}_{11}^0(\lambda; z)$, где $\widehat{R}_{11}^0(\lambda; z)$, $\widetilde{R}_{11}^0(\lambda; z)$ — операторы умножения на функции

$$\frac{\Delta(p; \lambda) - \operatorname{Re} z}{[\Delta(p; \lambda) - \operatorname{Re} z]^2 + (\operatorname{Im} z)^2}, \quad \frac{1}{[\Delta(p; \lambda) - \operatorname{Re} z]^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$$

соответственно. Поэтому оператор $T(\lambda; z)$ можно записать через самосопряженные операторы $\widehat{T}(\lambda; z)$ и $\widetilde{T}(\lambda; z)$ в виде $T(\lambda; z) = \widehat{T}(\lambda; z) + i \operatorname{Im} z \cdot \widetilde{T}(\lambda; z)$, где операторы $\widehat{T}(\lambda; z)$ и $\widetilde{T}(\lambda; z)$ действуют по формулам

$$\widehat{T}(\lambda; z) := \begin{pmatrix} \widehat{T}_{00}(\lambda; z) & \widehat{T}_{01}(\lambda; z) \\ \widehat{T}_{10}(\lambda; z) & \widehat{T}_{11}(\lambda; z) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{T}(\lambda; z) := \begin{pmatrix} \widetilde{T}_{00}(\lambda; z) & \widetilde{T}_{01}(\lambda; z) \\ \widetilde{T}_{10}(\lambda; z) & \widetilde{T}_{11}(\lambda; z) \end{pmatrix},$$

где элементы $\widehat{T}_{ij}(\lambda; z)$, $\widetilde{T}_{ij}(\lambda; z) : \mathscr{H}_j \to \mathscr{H}_i$, $i, j = 0, 1$, определены следующим образом:

$$\widehat{T}_{00}(\lambda; z) := I_0 + \theta_\lambda\big[(\operatorname{Re} z)I_0 - S_{00}(\lambda) + H_{01}R_{11}^0(\lambda; z)H_{01}^*\big],$$

$$\widehat{T}_{01}(\lambda;z) := -H_{01}\widehat{R}^0_{11}(\lambda;z)[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2},$$
$$\widehat{T}_{10}(\lambda;z) := -[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}\widehat{R}^0_{11}(\lambda;z)H^*_{01},$$
$$\widehat{T}_{11}(\lambda;z) := \theta_\lambda[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}\widehat{R}^0_{11}(\lambda;z)[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2},$$
$$\widetilde{T}_{00}(\lambda;z) := \theta_\lambda\big(I_0 + H_{01}\widetilde{R}^0_{11}(\lambda;z)H^*_{01}\big),$$
$$\widetilde{T}_{01}(\lambda;z) := -H_{01}\widetilde{R}^0_{11}(\lambda;z)[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2},$$
$$\widetilde{T}_{10}(\lambda;z) := -[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}\widetilde{R}^0_{11}(\lambda;z)H^*_{01},$$
$$\widetilde{T}_{11}(\lambda;z) := \theta_\lambda[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}\widetilde{R}^0_{11}(\lambda;z)[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}.$$

Умножая скалярно равенство $E_\lambda(z)\Phi = \widehat{T}(\lambda;z)\Phi + i\operatorname{Im} z\cdot\widetilde{T}(\lambda;z)\Phi$ на вектор Φ и учитывая самосопряженность операторов $T(\lambda;z)$, $\widehat{T}(\lambda;z)$, $\widetilde{T}(\lambda;z)$, получим

$$\langle\widetilde{T}(\lambda;z)\Phi,\Phi\rangle\operatorname{Im} z = 0. \tag{14}$$

Покажем, что $\operatorname{Im} z = 0$. Так как $\|\Phi\| = 1$, возможно два случая: $\varphi_0 = 0$ или $\varphi_0 \neq 0$. Пусть $\varphi_0 = 0$. Тогда $\|\Phi\| = \|\varphi_1\| = 1$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned}\langle\widetilde{T}(\lambda;z)\Phi,\Phi\rangle &= \theta_\lambda\big([\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}\widetilde{R}^0_{11}(\lambda;z)[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}\varphi_1,\varphi_1\big)_1\\ &= \theta_\lambda\big(\widetilde{R}^0_{11}(\lambda;z)[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}\varphi_1,[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}\varphi_1\big)_1 \neq 0.\end{aligned}$$

Из определения оператора $\widetilde{R}^0_{11}(\lambda;z)$ следует, что

$$\big(\widetilde{R}^0_{11}(\lambda;z)[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}\varphi_1,[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}\varphi_1\big)_1 = 0$$

тогда и только тогда, когда $[\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}\varphi_1 = 0$. Это противоречит тому, что $E_\lambda(z) \neq 0$ — собственное значение оператора $T(\lambda;z)$.

Пусть $\varphi_0 \neq 0$. В результате простых вычислений имеем

$$\begin{aligned}\langle\widetilde{T}(\lambda;z)\Phi,\Phi\rangle &= \theta_\lambda|\varphi_0|^2 + \theta_\lambda\big(\widetilde{R}^0_{11}(\lambda;z)\phi_0,\phi_0\big)_1\\ &\quad - 2\operatorname{Re}\big(\widetilde{R}^0_{11}(\lambda;z)\phi_1,\phi_0\big)_1 + \theta_\lambda\big(\widetilde{R}^0_{11}(\lambda;z)\phi_1,\phi_1\big)_1\\ &= \theta_\lambda|\varphi_0|^2 + \int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{\{\theta_\lambda|\phi_0(p)|^2 + \theta_\lambda|\phi_1(p)|^2 - 2\operatorname{Re}(\phi_1(p)\overline{\phi_0(p)})\}}{[\Delta(p;\lambda)-\operatorname{Re} z]^2 + (\operatorname{Im} z)^2}\,dp.\end{aligned}$$

Положим

$$\phi_0 := H^*_{01}\varphi_0, \quad \phi_1 := [\theta_\lambda K(\lambda)]^{1/2}\varphi_1,$$
$$\hat{\phi}_j(p) := \operatorname{Re}(\phi_j(p)), \quad \tilde{\phi}_j(p) := \operatorname{Im}(\phi_j(p)), \quad j = 0,1.$$

Тогда, пользуясь соотношениями

$$|\phi_0(p)|^2+|\phi_1(p)|^2\pm 2\operatorname{Re}(\phi_1(p)\overline{\phi_0(p)}) = (|\hat{\phi}_0(p)|\pm|\hat{\phi}_1(p)|)^2+(|\tilde{\phi}_0(p)|\pm|\tilde{\phi}_1(p)|)^2, \tag{15}$$

получим следующие оценки:

1) если $\lambda < 2m$, то

$$\langle\widetilde{T}(\lambda;z)\Phi,\Phi\rangle = |\varphi_0|^2 + \int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{\{|\phi_0(p)|^2 + |\phi_1(p)|^2 - 2\operatorname{Re}(\phi_1(p)\overline{\phi_0(p)})\}}{[\Delta(p;\lambda)-\operatorname{Re} z]^2 + (\operatorname{Im} z)^2}\,dp \geq |\varphi_0|^2 > 0;$$

2) если $\lambda > 2M$, то

$$\langle\widetilde{T}(\lambda;z)\Phi,\Phi\rangle = -|\varphi_0|^2 - \int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{\{|\phi_0(p)|^2 + |\phi_1(p)|^2 + 2\operatorname{Re}(\phi_1(p)\overline{\phi_0(p)})\}}{[\Delta(p;\lambda)-\operatorname{Re} z]^2 + (\operatorname{Im} z)^2}\,dp \leq -|\varphi_0|^2 < 0.$$

Здесь надо отметить, что в обоих случаях в силу соотношения (15) подынтегральные функции неотрицательны. Таким образом, $\langle\widetilde{T}(\lambda;z)\Phi,\Phi\rangle \neq 0$. Поэтому из равенства (14) получим $\operatorname{Im} z = 0$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Число $z_\lambda \in \mathbb{C}\setminus\sigma\big(S_{11}^0(\lambda)\big)$ является регулярной точкой оператора $S(\lambda)$ тогда и только тогда, когда функция $n(1, T(\lambda;\cdot))$ непрерывна в точке $z = z_\lambda$.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $z = z_\lambda$ — регулярная точка оператора $S(\lambda)$. Тогда из леммы 2 вытекает, что оператор $I - T(\lambda; z_\lambda)$ обратим. Из непрерывности оператор-функции $\gamma^{-1}T(\lambda; z)$ по $(\gamma, z) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}\setminus\sigma\big(S_{11}^0(\lambda)\big)$ и компактности $T(\lambda; z)$ вытекает, что оператор $I-\gamma^{-1}T(\lambda; z)$ обратим при всех (γ, z), лежащих в некоторой окрестности точки $(1, z_\lambda)$. Поэтому для некоторого $\rho > 0$ получаем $\sigma(T(\lambda; z)) \cap (1-\rho, 1+\rho) = \varnothing$ при всех $z \in [z_\lambda - \rho, z_\lambda + \rho]$. Отсюда по определению функции $n(a, T(\lambda;\cdot))$ для всех ξ и $\delta \in [0, z_\lambda + \rho)$ имеем

$$n(1 \pm \delta, T(\lambda; z_\lambda \pm \xi)) = n(1, T(\lambda; z_\lambda \pm \xi)).$$

Далее, пользуясь неравенством Вейля [26]

$$n(a_1 + a_2, A_1 + A_2) \le n(a_1, A_1) + n(a_2, A_2) \tag{16}$$

для суммы компактных операторов и для любых положительных a_1 и a_2, для некоторого $\eta_0 \in (0, \delta)$ и всех малых $\xi > 0$ получаем

$$\begin{aligned} n(1+\eta_0, T(\lambda; z_\lambda \pm \xi)) &\le n(1, T(\lambda; z_\lambda \pm \xi)) \\ &\quad + n(\eta_0, T(\lambda; z_\lambda \pm \xi) - T(\lambda; z_\lambda)) = n(1, T(\lambda; z_\lambda)). \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично, доказываем, что при малых $\xi > 0$ имеет место равенство

$$n(1, T(\lambda; z_\lambda \pm \xi)) = n(1, T(\lambda; z_\lambda)).$$

Это и означает непрерывность функции $n(1, T(\lambda;\cdot))$ в точке $z = z_\lambda$.

Достаточность. Предположим обратное. Пусть функция $n(1, T(\lambda;\cdot))$ непрерывна в точке $z = z_\lambda$, а z_λ — собственное значение оператора $S(\lambda)$.

Рассуждая, как выше, и используя неравенство Вейля (16), получаем, что для некоторого $\delta_0 > 0$, $c_0 = c_0(\delta_0) > 0$ и для всех $\varepsilon \in [-c_0, c_0]$ выполняются равенства

$$n(1, T(\lambda; z_\lambda)) = n(1+\delta_0, T(\lambda; z_\lambda)) = n(1+\delta_0/4, T(\lambda; z_\lambda + \varepsilon)). \tag{17}$$

В силу леммы 4 имеем $D_\lambda(1, z_\lambda) = 0$. Пусть Γ_δ — граница комплексной δ-окрестности $U_\delta(z_\lambda)$ точки z_λ. При этом в силу малости δ для всех $z \in \Gamma_\delta$ имеет место $D_\lambda(1, z_\lambda) \ne 0$. Положим

$$d_\lambda := \min_{z\in\Gamma_\delta} |D_\lambda(1, z)|, \quad \psi_\varepsilon(z) := D_\lambda(1+\varepsilon, z) - D_\lambda(1, z).$$

Поскольку функция $D_\lambda(\cdot,\cdot)$ непрерывна, существует число $\rho = \rho(\delta) > 0$ такое, что для всех $\varepsilon \in [-\rho, \rho]$ и $z \in \Gamma_\delta$ выполняется неравенство $|\psi_\varepsilon(z)| < d_\lambda$. Таким образом, для каждого фиксированного $\varepsilon \in [-\rho, \rho]$ функции $D_\lambda(1,\cdot)$ и $\psi_\varepsilon(\cdot)$, определенные на $\overline{U_\delta(z_\lambda)}$, удовлетворяют условиям теоремы Руше. Поэтому количества нулей функций $D_\lambda(1,\cdot)$ и $D_\lambda(1+\varepsilon,\cdot)$, лежащих в $U_\delta(z_\lambda)$, совпадают. Пусть $D_\lambda(1+\varepsilon, z_\lambda(\varepsilon)) = 0$, $\varepsilon > 0$, при некотором $z_\lambda(\varepsilon) \in U_\delta(z_\lambda)$. Здесь $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} z_\lambda(\varepsilon) = z_\lambda$. В силу леммы 4 для всех $\varepsilon \in (0, \rho')$ число $1+\varepsilon$ есть собственное значение оператора $T(\lambda; z_\lambda(\varepsilon))$, поэтому с учетом леммы 5 число $z_\lambda(\varepsilon)$ вещественное. Отсюда и из (17) для всех $\varepsilon \in (0, \rho')$ имеем

$$\begin{aligned} n(1, T(\lambda; z_\lambda(\varepsilon))) - n(1, T(\lambda; z_\lambda)) &\ge n(1+\varepsilon/2, T(\lambda; z_\lambda(\varepsilon))) - n(1, T(\lambda; z_\lambda)) \\ &\ge 1 + n(1+\delta_0/4, T(\lambda; z_\lambda(\varepsilon))) - n(1, T(\lambda; z_\lambda)) = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $n(1, T(\lambda; z_\lambda)) \ne \lim\limits_{\varepsilon\to 0} n(1, T(\lambda; z_\lambda(\varepsilon)))$, т. е. функция $n(1, T(\lambda;\cdot))$ не является непрерывной в точке $z = z_\lambda$, что противоречит нашему предположению. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть $z_\lambda \in \sigma_{\mathrm{disc}}(S(\lambda))$. Тогда для всех малых $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что имеют место равенства*

$$\operatorname{card}\{z \in U_\delta(z_\lambda) : D_\lambda(1+\varepsilon, z) = 0\} = \operatorname{card}\{z \in U_\delta(z_\lambda) : D_\lambda(1-\varepsilon, z) = 0\} \\ = \operatorname{card}\{z \in U_\delta(z_\lambda) : D_\lambda(1, z) = 0\},$$

где $\operatorname{card} M$ *— мощность множества* M.

Доказательство. Если $z_\lambda \in \sigma_{\mathrm{disc}}(S(\lambda))$, то $D_\lambda(1, z_\lambda) = 0$ в силу леммы 4. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что $D_\lambda(1, z_\lambda) \neq 0$ для всех $z \in \Gamma_\delta$. В этом случае, как уже показано в ходе доказательства достаточности леммы 6, для малых $\rho > 0$ число нулей функции $D_\lambda(1, \cdot)$, лежащих в $U_\delta(z_\lambda)$, и число нулей функции $D_\lambda(1+\varepsilon, \cdot) = \psi_\varepsilon(\cdot) + D_\lambda(1, \cdot)$, лежащих в $U_\delta(z_\lambda)$, совпадают при каждом $\varepsilon \in [-\rho, \rho]$. Лемма 7 доказана.

4. Формула для нахождения кратности собственных значений оператора $S(\lambda)$ и обсуждение условий конечности его дискретного спектра

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Число $z_\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma\big(S^0_{11}(\lambda)\big)$ является собственным значением оператора $S(\lambda)$ тогда и только тогда, когда функция $n(1, T(\lambda; \cdot))$ имеет разрыв в точке $z = z_\lambda$. При этом кратность k_λ собственного значения z_λ определяется по формуле*

$$k_\lambda = \lim_{\xi \to +0} [n(1, T(\lambda; z_\lambda + \xi)) - n(1, T(\lambda; z_\lambda))] + \lim_{\xi \to +0} [n(1, T(\lambda; z_\lambda - \xi)) - n(1, T(\lambda; z_\lambda))].$$

Доказательство. Из леммы 6 автоматически вытекает, что число $z_\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma\big(S^0_{11}(\lambda)\big)$ является собственным значением оператора $S(\lambda)$ тогда и только тогда, когда функция $n(1, T(\lambda; \cdot))$ имеет разрыв в точке $z = z_\lambda$.

Пусть z_λ — k_λ-кратное собственное значение оператора $S(\lambda)$. Докажем формулу

$$k_\lambda = \lim_{\xi \to +0} [n(1, T(\lambda; z_\lambda + \xi)) + n(1, T(\lambda; z_\lambda - \xi)) - 2n(1, T(\lambda; z_\lambda))]. \tag{18}$$

Так как $T(\lambda; z_\lambda)$ — компактный оператор, найдется число $\eta_0 > 0$ такое, что $n(1, T(\lambda; z_\lambda)) = n(1+\eta_0, T(\lambda; z_\lambda))$. Отсюда и из неравенства Вейля (16) вытекает, что для малых $|\xi|$ выполняется неравенство

$$n(1+\eta_0, T(\lambda; z_\lambda)) \leq n(1, T(\lambda; z_\lambda + \xi)) + n(\eta_0, T(\lambda; z_\lambda) - T(\lambda; z_\lambda + \xi)) \\ = n(1, T(\lambda; z_\lambda + \xi)),$$

т. е. $n(1, T(\lambda; z_\lambda)) \leq n(1, T(\lambda; z_\lambda + \xi))$, поэтому правая часть равенства (18) неотрицательна.

В силу леммы 2 число $E_\lambda(z_\lambda) = 1$ является k_λ-кратным собственным значением оператора $T(\lambda; z_\lambda)$. Функция $T(\lambda; z)\Phi$ — векторнозначная аналитическая функция переменной z вблизи точки $z = z_\lambda$ для всякого $\Phi \in \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1$. Поэтому по теореме XII.13 из [24] оператор $T(\lambda; z)$ имеет в точности k_λ собственных значений $E^{(1)}_\lambda(z), \dots, E^{(k_\lambda)}_\lambda(z)$ (с учетом кратности) в окрестности точки $z = z_\lambda$. В силу леммы 5 если $E^{(1)}_\lambda(z), \dots, E^{(k_\lambda)}_\lambda(z)$ являются вещественными числами, то z также вещественное число. Пусть число $\delta > 0$ таково, что для всех

$i \in \{1, \ldots, k_\lambda\}$ имеет место включение $E_\lambda^{(i)}(z_\lambda + \xi) \in (1-\delta, 1+\delta)$ при $\xi \in (-c_\delta, c_\delta)$ с некоторой константой $c_\delta > 0$. Поскольку кратность нуля определителя $D_\lambda(1, z)$ в точке $z = z_\lambda$ не меньше геометрической кратности собственного значения 1 оператора $T(\lambda; z)$, по лемме 7 имеем

$$\operatorname{card}\{z \in (-c_\delta, c_\delta) : D_\lambda(1 \pm \varepsilon, z) = 0\} = \operatorname{card}\{z \in (-c_\delta, c_\delta) : D_\lambda(1, z) = 0\} = k_\lambda + s,$$

где s — некоторое неотрицательное целое число. Отсюда

$$\operatorname{card}\{i : \gamma_i(\lambda; z) = 1 - \varepsilon\} = \operatorname{card}\{i : \gamma_i(\lambda; z) = 1 + \varepsilon\} = k_\lambda.$$

Учитывая, что $E_\lambda^{(i)}(z) \neq 1$ при $z \neq z_\lambda$ и $E_\lambda^{(i)}(z_\lambda) = 1$, разобьем множество $\{1, \ldots, k_\lambda\}$ на следующие непересекающиеся множества:

$$\{M_\lambda \nearrow\} := \bigl\{i : E_\lambda^{(i)}(z_\lambda - c_\delta) < E_\lambda^{(i)}(z_\lambda) < E_\lambda^{(i)}(z_\lambda + c_\delta)\bigr\},$$

$$\{M_\lambda \searrow\} := \bigl\{i : E_\lambda^{(i)}(z_\lambda - c_\delta) > E_\lambda^{(i)}(z_\lambda) > E_\lambda^{(i)}(z_\lambda + c_\delta)\bigr\}.$$

Легко проверить, что

$$\operatorname{card}\bigl\{i : E_\lambda^{(i)}(z_\lambda + \xi) > 1,\ \xi \in (0, c_\delta)\bigr\} = \operatorname{card}\{M_\lambda \nearrow\},$$

$$\operatorname{card}\bigl\{i : E_\lambda^{(i)}(z_\lambda - \xi) > 1,\ \xi \in (0, c_\delta)\bigr\} = \operatorname{card}\{M_\lambda \searrow\}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{card}\bigl\{i : E_\lambda^{(i)}(z_\lambda + \xi) > 1,\ \xi \in (0, c_\delta)\bigr\} + \operatorname{card}\bigl\{i : E_\lambda^{(i)}(z_\lambda - \xi) > 1,\ \xi \in (0, c_\delta)\bigr\} = k_\lambda.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{card}\bigl\{i : E_\lambda^{(i)}(z_\lambda + \xi) > 1,\ \xi \in (0, c_\delta)\bigr\} = n(1, T(\lambda; z_\lambda + \xi)) - n(1 + \delta/2, T(\lambda; z_\lambda + \xi)),$$

$$\operatorname{card}\bigl\{i : E_\lambda^{(i)}(z_\lambda - \xi) > 1,\ \xi \in (0, c_\delta)\bigr\} = n(1, T(\lambda; z_\lambda - \xi)) - n(1 + \delta/2, T(\lambda; z_\lambda - \xi)).$$

Из этих соотношений, учитывая равенства

$$n(1 + \delta/2, T(\lambda; z_\lambda - \xi)) = n(1 + \delta/2, T(\lambda; z_\lambda + \xi)) = n(1, T(\lambda; z_\lambda))$$

при $|\xi| < c_\delta$, получим равенство (18). Теорема 1 доказана.

Замечание. В [25] доказано, что для кратности k_λ собственного значения z_λ оператора $S_{11}(\lambda)$ имеет место равенство

$$k_\lambda = \lim_{\xi \to +0} n(1, T_{11}(\lambda; z_\lambda + \xi)) - n(1, T_{11}(\lambda; z_\lambda)).$$

Приведем два следствия теоремы 1.

Следствие 1. *Для любого $[a, b] \subset \mathbb{R} \setminus \sigma\bigl(S_{11}^0(\lambda)\bigr)$ верно равенство*

$$N_{(a,b)}(S(\lambda)) = \bigvee_a^b (n(1, T(\lambda; \cdot))),$$

где $\bigvee_a^b (f)$ — полная вариация функции f на интервале (a, b). При этом из монотонности функции $n(1, T(\lambda; \cdot))$ в полуоси $\bigl(-\infty, \min \sigma\bigl(S_{11}^0(\lambda)\bigr)\bigr)$ имеем

$$N_{(-\infty,z)}(S(\lambda)) = n(1, T(\lambda; z)), \quad z < \min \sigma\bigl(S_{11}^0(\lambda)\bigr). \tag{19}$$

Доказательство. Пусть оператор $S(\lambda)$ не имеет собственных значений на интервале (α,β), где $(\alpha,\beta)\cap\sigma\big(S_{11}^0(\lambda)\big)=\varnothing$, другими словами, $N_{(\alpha,\beta)}(S(\lambda))=0$. Тогда по лемме 6 имеем $n(1,T(\lambda;\zeta))=\mathrm{const}$ для всех $\zeta\in(\alpha,\beta)$. Отсюда $\bigvee\limits_{\alpha}^{\beta}(n(1,T(\lambda;\cdot)))=0$. Пусть

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(S(\lambda))\cap(\alpha_n,\beta_n)=\big\{z_\lambda^{(n)}\big\},\quad \sigma_{\mathrm{disc}}(S(\lambda))\cap(\alpha,\beta)=\bigcup_n\big\{z_\lambda^{(n)}\big\}.$$

Тогда

$$N_{(\alpha,\beta)}(S(\lambda))=\sum_n k_\lambda^{(n)},$$

где $k_\lambda^{(n)}$ — кратность собственного значения $z_\lambda^{(n)}$. Из теоремы 1 следует, что

$$\sum_n k_\lambda^{(n)}=\sum_n\Big\{\lim_{\varepsilon\to+0}\Big[n\big(1,T\big(\lambda;z_\lambda^{(n)}+\varepsilon\big)\big)-n\big(1,T\big(\lambda;z_\lambda^{(n)}\big)\big)\Big]$$

$$+\lim_{\varepsilon\to+0}\Big[n\big(1,T\big(\lambda;z_\lambda^{(n)}-\varepsilon\big)\big)-n\big(1,T\big(\lambda;z_\lambda^{(n)}\big)\big)\Big]\Big\}=\bigvee_{\alpha}^{\beta}(n(1,T(\lambda;\cdot))),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. В [25] показано, что для каждого сегмента $[a,b]\subset\mathbb{R}\backslash\sigma_{\mathrm{ess}}(S_{11}(\lambda))$ справедливо равенство

$$N_{(a,b)}(S_{11}(\lambda))=n(1,T_{11}(\lambda;b))-n(1,T_{11}(\lambda;a)).$$

Так как операторы $S_{00}(\lambda)$ и H_{01} одномерны, применяя теорему 9.3.3 из [27], получим $N_{(a,b)}(S(\lambda))\le N_{(a,b)}(S_{11}(\lambda))+2$.

Следствие 2. *Пусть $(a,b)\subset\mathbb{R}\setminus\sigma\big(S_{11}^0(\lambda)\big)$ и оператор-функция $T(\lambda;z)$ при $z\to a+0$ и $z\to b-0$ сходится равномерно к некоторым операторам $T(\lambda;a)$ и $T(\lambda;b)$ соответственно. Тогда оператор $S(\lambda)$ на интервале (a,b) может иметь лишь конечное число собственных значений.*

Доказательство. Операторы $T(\lambda;a)$ и $T(\lambda;b)$ компактны, следовательно, при $\zeta=a$ и $\zeta=b$ для некоторого $\delta>0$ имеет место равенство $n(1,T(\lambda;\zeta))=n(1+\delta,T(\lambda;\zeta))$. В силу непрерывности функции $\|T(\lambda;\cdot)\|$ существует $\varepsilon>0$ такое, что $\|T(\lambda;a)-T(\lambda;z)\|<\delta$ при $z\in[a,a+\varepsilon]$ и $\|T(\lambda;b)-T(\lambda;z)\|<\delta$ при $z\in[b-\varepsilon,b]$. Поэтому из неравенства Вейля (16) имеем

$$n(1,T(\lambda;a))=n(1+\delta,T(\lambda;a))\le n(1,T(\lambda;z)),\quad z\in[a,a+\varepsilon],$$

$$n(1,T(\lambda;b))=n(1+\delta,T(\lambda;b))\le n(1,T(\lambda;z)),\quad z\in[b-\varepsilon,b],$$

т. е. функция $n(1,T(\lambda;\cdot))$ монотонна на промежутках $(a,a+\varepsilon)$ и $(b-\varepsilon,b)$. Отсюда

$$\bigvee_{a}^{a+\varepsilon}(n(1,T(\lambda;\cdot)))=n(1,T(\lambda;a+\varepsilon))-n(1,T(\lambda;a))<\infty,$$

$$\bigvee_{b-\varepsilon}^{b}(n(1,T(\lambda;\cdot)))=n(1,T(\lambda;b))-n(1,T(\lambda;b-\varepsilon))<\infty.$$

Таким образом, учитывая следствие 1, получаем конечность числа собственных значений $S(\lambda)$, лежащих на множестве $(a,a+\varepsilon)\cup(b-\varepsilon,b)$. Из аналитичности функции $D_\lambda(1,\cdot)$ в некоторой комплексной окрестности отрезка $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ получаем конечность множества

$$\{z \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon] : D_\lambda(1,z) = 0\}.$$

Следовательно, по лемме 4 число собственных значений $S(\lambda)$, лежащих на сегменте $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, конечно. Следствие 2 доказано.

Выводы. 1. Для кратности k_λ собственного значения λ оператора H имеет место равенство

$$k_\lambda = \lim_{\xi\to+0}[n(1,T(\lambda;\xi)) - n(1,T(\lambda;0))] + \lim_{\xi\to+0}[n(1,T(\lambda;-\xi)) - n(1,T(\lambda;0))].$$

2. В силу свойства 3 и равенства (19) получим

$$N_{(-\infty,\lambda)}(H) = n(1,T(\lambda;0)), \quad \lambda < E_{\min}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hübner M., Spohn H.* Spectral properties of the spin-boson Hamiltonian // Ann. Inst. Henri Poincaré. 1995. V. 62, N 3. P. 289–323.
2. *Minlos R. A., Spohn H.* The three-body problem in radioactive decay: the case of one atom and at most two photons // Topics in statistical and theoretical physics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. P. 159–193. (Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2; V. 177).
3. *Mogilner A. I.* Hamiltonians in solid state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: problems and results // Adv. Sov. Math. 1991. V. 5. P. 139–194.
4. *Фридрихс К. О.* Возмущения спектра операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1972.
5. *Malishev V. A., Minlos R. A.* Linear infinite-particle operators. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. (Transl. Math. Monogr.; V. 143).
6. *Lifschitz A. E.* Magnetohydrodynamic and spectral theory. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1989. (Dev. Electromagn. Theory Appl.; V. 4).
7. *Thaller B.* The Dirac equation. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1992.
8. *Feynman R. P.* Statistical mechanics: a set of lectures (2nd ed.). Reading, MA: Addison-Wesley, 1998.
9. *Tretter C.* Spectral theory of block operator matrices and applications. London: Imperial College Press, 2008.
10. *Schur I.* Über potenzreihen, die im innern des einheitskreises beschränkt sint // J. Reine Angew. Math. 1917. V. 147. P. 205–232.
11. *Haynsworth E. V.* Determination of the inertia of a partitioned Hermitian matrix // Linear Algebra Appl. 1968. V. 1, N 1. P. 73–81.
12. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения // Мат. сб. 1947. Т. 20. С. 365–404.
13. *Zhang F.* The Schur complement and its applications. New York: Springer-Verl., 2005. (Numer. Methods Algorithms; V. 4).
14. *Bart H., Gohberg I. C., Kaashoek M. A., Ran A. C. V.* Schur complements and state space realizations // Linear Algebra Appl. 2005. V. 399. P. 203–224.
15. *Nagel R.* Well-posedness and positivity for systems of linear evolution equations // Conf. Sem. Mat. Univ. Bari. 1985. V. 203. P. 1–29.
16. *Nagel R.* The spectrum of unbounded operator matrices with non-diagonal domain // J. Func. Anal. 1990. V. 89, N 2. P. 291–302.
17. *Atkinson F. V., Langer H., Menniken R., Shkalikov A. A.* The essential spectrum of some matrix operators // Math. Nachr. 1994. V. 167. P. 5–20.
18. *Лакаев С. Н.* Некоторые спектральные свойства модели Фридрихса // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1986. Т. 11. С. 210–223.
19. *Болдригини К., Минлос Р. А., Пеллегринотти А.* Случайные блуждания в случайной (флуктуирующей) среде // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62, № 4. С. 27–76.

20. *Лакштанов Е. Л., Минлос Р. А.* Спектр двухчастичных связанных состояний трансфер-матриц гиббсовских полей (уединенное связанное состояние) // Функцион. анализ и его прил. 2004. Т. 38, № 3. С. 52–69.

21. *Акчурин Э. Р.* О спектральных свойствах обобщенной модели Фридрихса // Теорет. и мат. физика. 2010. Т. 163, № 1. С. 17–33.

22. *Motovilov A. K., Sandhas W., Belyaev Y. B.* Perturbation of a lattice spectral band by a nearby resonance // J. Math. Phys. 2001. V. 42. P. 2490–2506.

23. *Лакаев С. Н., Расулов Т. Х.* Модель в теории возмущений существенного спектра многочастичных операторов // Мат. заметки. 2003. Т. 73, № 4. С. 556–564.

24. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.

25. *Муминов М. Э.* О выражение числа собственных значений модели Фридрихса // Мат. заметки. 2007. Т. 82, № 1. С. 75–83.

26. *Sobolev A. V.* The Efimov effect. Discrete spectrum asymptotics // Commun. Math. Phys. 1993. V. 156. P. 101–126.

27. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.

Статья поступила 28 октября 2014 г.

Муминов Мухиддин Эшкобилович
Universiti Teknologi Malaysia,
Faculty of Science,
81310 Skudai, Malaysia
mmuminov@mail.ru

Расулов Тулкин Хусенович
Бухарский гос. университет,
физико-математический факультет,
Бухара 200100, Узбекистан
rth@mail.ru