Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2015. Том 56, № 5

УДК 517.54+517.518.17

СВОЙСТВО МОРФИЗМА СУБЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ГРУППЕ ПОВОРОТОВ–СДВИГОВ

М. В. Трямкин

Аннотация. Устанавливается свойство морфизма субэллиптических уравнений для отображений с ограниченным искажением, область определения которых лежит в группе поворотов-сдвигов, а область значений — в группе Гейзенберга. В качестве следствия показано, что всякое непостоянное локально ограниченное отображение с ограниченным искажением, области определения и значений которого лежат в группе поворотов-сдвигов, непрерывно, открыто и дискретно.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.516

Ключевые слова: группа поворотов-сдвигов, отображение с ограниченным искажением, горизонтальная дифференциальная форма, формула коплощади, формула замены переменной.

§ 1. Введение

В 60-е гг. прошлого века Ю. Г. Решетняк заложил основы теории отображений с ограниченным искажением в евклидовых пространствах (см. [1]). Пусть Ω — область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ класса Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если выполняется неравенство $|Df(x)|^n \leq KJ(x,f)$ для п. в. $x \in \Omega$, где $K \geq 1$ — постоянная, $Df(x)$ — матрица Якоби отображения f в точке x, $|Df(x)|$ и $J(x,f)$ — ее операторная норма и якобиан соответственно. Ю. Г. Решетняк установил, что рассматриваемые отображения, если они отличны от постоянных, можно переопределить на множестве нулевой меры так, чтобы они стали непрерывными, открытыми и дискретными [1, гл. 2, § 6]. Фундаментальную роль в доказательстве этих свойств играет свойство морфизма решений некоторых эллиптических уравнений [1, гл. 2, теорема 5.1]: если $f : \Omega \to \Omega'$ — отображение с ограниченным искажением, где Ω, Ω' суть открытые множества в $\mathbb{R}^n$, и функция $v \in C^2(\Omega')$ является решением уравнения

$$\operatorname{div}(|\nabla v(y)|^{n-2}\nabla v(y)) = 0,$$

то композиция $u = v \circ f$ служит обобщенным решением уравнения

$$\operatorname{div} \mathscr{A}(x, \nabla u(x)) = 0,$$

где $\mathscr{A}(x,\xi) = \langle \theta(x)\xi, \xi\rangle^{(n-2)/2}\theta(x)\xi$. Здесь угловые скобки обозначают скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, а θ — матричная функция, определенная почти всюду в Ω следующим образом:

$$\theta(x) = \begin{cases} (Df(x)^*Df(x))^{-1}J(x,f)^{2/n}, & \text{если } J(x,f) \neq 0, \\ \mathrm{Id}, & \text{если } J(x,f) = 0. \end{cases}$$

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029).

В свою очередь, само свойство морфизма устанавливается на основе того факта, что для дифференциальных форм ω степени $n-1$ справедливо соотношение

$$d(f^{\#}\omega) = f^{\#}d\omega, \tag{1}$$

где внешний дифференциал d понимается в смысле распределений. В евклидовых пространствах равенство (1) доказывается с помощью аппроксимации f гладкими отображениями (см., например, [2, 3]).

Проблемы, возникшие в теории дифференциальных уравнений в частных производных, естественным образом привели к задачам субримановой геометрии. Те же самые задачи возникли в геометрической теории управления, робототехнике, нейробиологии и др. Почти одновременно с этими задачами стали изучаться вопросы геометрического анализа на субримановых структурах (см. [4–7]).

Отметим несколько работ, посвященных изучению отображений с ограниченным искажением на субримановых многообразиях. Авторы статьи [8] исследовали упомянутые отображения на группах Карно, однако определение класса Соболева, которое они использовали, не может считаться естественным: в [8] требуется, чтобы компоненты отображения имели обобщенные производные вдоль негоризонтальных векторных полей. Н. С. Даирбеков (см., например, [9, 10]) на основе подхода Ю. Г. Решетняка получил основные топологические свойства отображений с ограниченным искажением на группе Гейзенберга. В работе [11] показано, что доказательство соотношения (1) на группах Карно ведет к нежелательным последствиям: гладкие отображения, аппроксимирующие f, не сохраняют горизонтальную структуру. В связи с этим возникла необходимость в выработке нового подхода к проверке равенства (1).

В [12] С. К. Водопьянов предложил новую идею доказательства соотношения (1) на двухступенчатых группах Карно. Метод, разработанный в [12], основан на рафинированном использовании формулы замены переменной с топологической степенью и позволяет установить (1), не используя аппроксимацию f гладкими функциями.

В настоящей работе с использованием подхода, развитого в [12], доказано равенство (1) и из него выведено свойство морфизма для отображений с ограниченным искажением на группе поворотов-сдвигов, которая входит в список трехмерных групп Ли, наделенных левоинвариантной субримановой структурой (см. [13]). Эта группа находит приложение, например, в задачах моделирования восприятия изображений зрительной системой человека (см. [14, 15]).

В теореме 1 мы формулируем свойство морфизма для отображений с ограниченным искажением $f : \Omega \to \mathbb{H}^1$, где $\Omega \subset \mathcal{RT}$. В теореме 2 при условии локальной ограниченности показано, что отображение с ограниченным искажением $F : \Omega \to \mathcal{RT}$ непрерывно, открыто и дискретно.

Автор благодарен профессору С. К. Водопьянову за постановку задачу и постоянное внимание к работе, а также признателен Д. В. Исангуловой, которая прочла первоначальный вариант рукописи и сделала ряд замечаний, способствовавших улучшению текста. Автор благодарен К. Фасслеру за указание на работу [16].

§ 2. Предварительные сведения

Группа поворотов-сдвигов $\mathcal{RT}$ — это совокупность точек в $\mathbb{R}^3$ с групповой операцией

$$(x_1, y_1, \theta_1) \cdot (x_2, y_2, \theta_2) = (x_1 + x_2 \cos\theta_1 - y_2 \sin\theta_1, y_1 + x_2 \sin\theta_1 + y_2 \cos\theta_1, \theta_1 + \theta_2).$$

Легко видеть, что точка $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ служит единицей группы $\mathcal{RT}$.

Замечание 1. Под группой поворотов-сдвигов в литературе также понимают группу $SE(2)$ движений евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, сохраняющих ориентацию. Последняя диффеоморфна $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$. Определенная выше группа $\mathcal{RT}$ является универсальной накрывающей группы $SE(2)$.

Базисные левоинвариантные векторные поля имеют вид

$$\begin{aligned} X_1(g) &= (l_g)_*(\mathbf{0}) \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_2(g) &= (l_g)_*(\mathbf{0}) \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ X_3(g) &= (l_g)_*(\mathbf{0}) \left\langle \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = -\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $g = (x, y, \theta) \in \mathcal{RT}$, $l_g : \mathcal{RT} \ni g' \mapsto g \cdot g'$ — левый сдвиг на элемент g, $(l_g)_*(\mathbf{0}) : T_{\mathbf{0}}\mathcal{RT} \to T_g\mathcal{RT}$ — риманов дифференциал отображения l_g в единице группы. Из (2) следует, что справедливы следующие коммутационные соотношения:

$$[X_1, X_2] = -X_3, \quad [X_3, X_2] = X_1, \quad [X_1, X_3] = 0. \tag{3}$$

Равенства (3) означают, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ левоинвариантных векторных полей группы поворотов-сдвигов представляется в виде $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, где $\mathfrak{g}_1 = \operatorname{span}\{X_1, X_2\}$, $\mathfrak{g}_2 = \operatorname{span}\{X_3\}$.

Зададим в касательном пространстве к единице группы скалярное произведение $\mathbf{g}_{\mathbf{0}} : T_{\mathbf{0}}\mathcal{RT} \times T_{\mathbf{0}}\mathcal{RT} \to \mathbb{R}$, полагая $\mathbf{g}_{\mathbf{0}}(X_i(\mathbf{0}), X_j(\mathbf{0})) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. Чтобы получить левоинвариантную риманову метрику $\mathbf{g}_g : T_g\mathcal{RT} \times T_g\mathcal{RT} \to \mathbb{R}$, $g \in \mathcal{RT}$, на всей группе, «разнесем» это скалярное произведение согласно правилу

$$\mathbf{g}_g((l_g)_*(\mathbf{0})\langle X_i(\mathbf{0})\rangle, (l_g)_*(\mathbf{0})\langle X_j(\mathbf{0})\rangle) = \mathbf{g}_{\mathbf{0}}(X_i(\mathbf{0}), X_j(\mathbf{0})), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

т. е. $\mathbf{g}_g(X_i(g), X_j(g)) = \delta_{ij}$. Теперь можно задать на группе поворотов-сдвигов субриманову структуру: алгебра $\mathfrak{g}_1$ определяет вполне неголономное распределение $H\mathcal{RT}$ в касательном расслоении $T\mathcal{RT}$ со слоями[1)] $H_g\mathcal{RT} = \operatorname{span}\{X_1(g), X_2(g)\}$, $g \in \mathcal{RT}$, а соответствие $g \mapsto \mathbf{g}_g$, которое каждой точке $g \in \mathcal{RT}$ сопоставляет скалярное произведение в касательном пространстве к этой точке, определяет левоинвариантную риманову метрику в распределении $H\mathcal{RT}$. Группа $\mathcal{RT}$, наделенная указанной субримановой структурой, является пространством Карно — Каратеодори (см., например, [17, разд. 1]). Для скалярного произведения используем стандартное обозначение $\langle \cdot, \cdot \rangle$. *Расстояние Карно — Каратеодори* $d_c(g, g')$ между точками $g, g' \in \mathcal{RT}$ определяется как точная нижняя грань длин всех горизонтальных кривых, соединяющих точки g, g'. Абсолютно непрерывная кривая называется *горизонтальной*, если ее касательный

[1)] Подрасслоение $H\mathcal{RT}$ называется также *горизонтальным*, а слой $H_g\mathcal{RT}$ — *горизонтальным касательным пространством в точке* g.

вектор почти всюду принадлежит горизонтальному подрасслоению. Метрика Карно — Каратеодори левоинвариантна, т. е. $d_c(g, g') = d_c(\mathbf{0}, g^{-1}g')$. Пользуясь формулой для подсчета хаусдорфовой размерности пространства Карно — Каратеодори относительно метрики d_c (см. [17, теорема 3.1; 18, теорема 2]), получаем, что для группы поворотов-сдвигов хаусдорфова размерность равна $\dim \mathfrak{g}_1 + 2\dim \mathfrak{g}_2 = 4$. Определим также субриманову квазиметрику $d_2(g', g) = \max\{(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^{1/2}, |\xi_3|^{1/2}\}$, где $g' = \exp(\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3)(g)$. Использование этой квазиметрики обусловлено тем, что в формуле коплощади [19, теорема 6.1], которая играет важную роль в доказательстве одного из утверждений настоящей статьи, фигурирует мера Хаусдорфа, определенная относительно d_2. Через $\operatorname{Box}_2(g, r)$ обозначим множество $\{g' \in \mathcal{RT} : d_2(g', g) < r\}$.

Замечание 2. Положим $d_\infty(g', g) = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|, |\xi_3|^{1/2}\}$. В силу [17, теорема 2.8] величины d_∞ и d_c локально эквивалентны, т. е. в некоторой ограниченной окрестности $U \subset \mathcal{RT}$ точки g справедливо соотношение $c_1 d_\infty(g', g'') \le d_c(g', g'') \le c_2 d_\infty(g', g'')$ для всех $g', g'' \in U$ с некоторыми постоянными $0 < c_1 \le c_2 < \infty$, не зависящими от g', g''. Легко видеть из определений, что квазиметрики d_∞ и d_2 также локально эквивалентны. Следовательно, квазиметрика d_2 локально эквивалентна метрике d_c.

Через $\mathscr{H}_e^N$ обозначим N-мерную меру Хаусдорфа, определенную стандартным образом (см., например, [20, гл. 2, п. 2.1]) относительно евклидовой метрики. Сферическую меру Хаусдорфа $\mathscr{H}_{sr}^\nu(A)$, $\nu > 0$, $A \subset \mathcal{RT}$, относительно субримановой квазиметрики d_2 определим по формуле (см. [19, определение 3.12])

$$\mathscr{H}_{sr}^\nu(A) = \omega_\nu \lim_{\delta\to 0} \inf\Big\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^\nu \mid \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{Box}_2(g_i, r_i) \supset A,\ g_i \in A,\ 0 < r_i \le \delta\Big\},$$

где ω_ν — нормирующий множитель, зависящий только от показателя размерности ν. Обратим внимание на отличие от стандартного определения сферической меры: в нашем случае центры g_i «шаров» $\operatorname{Box}_2(g_i, r_i)$, покрывающих множество A, принадлежат этому множеству.

Замечание 3. Как известно (см., например, [21,гл. VII, § 1, п. 2, теорема 1]), на локально компактной группе Ли существует единственная с точностью до постоянного множителя лево- (соответственно право-)инвариантная мера (так называемая левая (соответственно правая) мера Хаара). Это значит, что на группе поворотов-сдвигов не возникает трудностей с выбором адекватной меры: в частности, меры $\mathscr{H}_{sr}^4$ и $\mathscr{H}_e^3$ пропорциональны, поскольку обе левоинвариантны.

Пусть Ω — область в $\mathcal{RT}$. Функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *принадлежит пространству Соболева* $W_p^1(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, если $u \in L_p(\Omega)$ и существуют обобщенные производные $X_1 u$, $X_2 u$ вдоль горизонтальных векторных полей, принадлежащие классу $L_p(\Omega)$. Пишем $u \in W_{p,\mathrm{loc}}^1(\Omega)$, если $u \in W_p^1(U)$ для всякой области $U \Subset \Omega$, где $U \Subset \Omega$ означает, что $\overline{U} \subset \Omega$ и множество $\overline{U}$ компактно. Локально суммируемая функция $X_i u : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *обобщенной производной* функции u вдоль векторного поля X_i, если $\int\limits_\Omega X_i u\, \varphi\, d\mathscr{H}_{sr}^4 = -\int\limits_\Omega u\, X_i^* \varphi\, d\mathscr{H}_{sr}^4$ для любой пробной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Здесь X_i^* — формально сопряженный к X_i оператор, определенный правилом

$$\int\limits_\Omega X_i \eta\, \vartheta\, d\mathscr{H}_{sr}^4 = \int\limits_\Omega \eta\, X_i^* \vartheta\, d\mathscr{H}_{sr}^4$$

для всех $\eta, \vartheta \in C_0^\infty(\Omega)$. Легко видеть, что на группе поворотов-сдвигов $X_i^* = X_i$. Для гладкой функции u (или имеющей обобщенные производные вдоль полей X_1, X_2) определим горизонтальный градиент $\nabla_h u = (X_1 u)X_1 + (X_2 u)X_2$ и его длину $|\nabla_h u| = \langle \nabla_h u, \nabla_h u\rangle^{1/2} = \sqrt{(X_1 u)^2 + (X_2 u)^2}$. Пусть в области $\Omega \subset \mathcal{RT}$ определено векторное поле $X = u_1 X_1 + u_2 X_2$. Если $u_1, u_2 \in C^1(\Omega)$, то горизонтальная дивергенция поля X определяется как $\operatorname{div}_h X = X_1 u_1 + X_2 u_2$. Если коэффициенты u_1, u_2 локально интегрируемы на Ω, то *горизонтальной дивергенцией поля X в смысле распределений* называется локально интегрируемая функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\int\limits_{\Omega} \langle X, \nabla_h \varphi\rangle \, dX_1 \wedge dX_2 \wedge dX_3 = -\int\limits_{\Omega} u\varphi \, dX_1 \wedge dX_2 \wedge dX_3 \tag{4}$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Здесь и далее dX_1, dX_2 и dX_3 — это 1-формы, двойственные к полям X_1, X_2 и X_3. Для дивергенции в смысле распределений также используем обозначение $\operatorname{div}_h X$, которое оправдано, поскольку обычная горизонтальная дивергенция гладкого векторного поля будет в то же время и дивергенцией в смысле распределений.

Следующее определение, сформулированное для общего случая многообразий Карно[2)], можно найти, например, в [22, определение 6.1]. Если Ω — область в пространстве $\mathbb{R}^n$, то эта формулировка совпадает с определением классов Соболева, которое дано Ю. Г. Решетняком в [23].

Определение 1. Пусть $\Omega \subset \mathcal{RT}$ — область, $(\mathbb{X}, r)$ — полное метрическое пространство. Отображение $f : \Omega \to \mathbb{X}$ *принадлежит классу Соболева* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{X})$, если выполнены следующие условия:

(A) функция $[f]_z : \Omega \ni x \mapsto r(f(x), z)$ принадлежит пространству $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ для всякого $z \in \mathbb{X}$;

(B) семейство функций $\nabla_h([f]_z)_{z\in\mathbb{X}}$ имеет мажоранту в $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, т. е. существует функция $h \in L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, не зависящая от z, такая, что $|\nabla_h([f]_z)(x)| \le h(x)$ для п. в. $x \in \Omega$.

В настоящей работе роль пространства $\mathbb{X}$ будет играть либо группа $\mathcal{RT}$, либо группа Гейзенберга $\mathbb{H}^1$. Однако удобнее пользоваться другим определением, которое «почти» эквивалентно определению 1 (см. замечание 5).

Определение 2. Пусть $\Omega \subset \mathcal{RT}$ — область, $1 \le p < \infty$, $\mathbb{G}$ — группа $\mathcal{RT}$ или $\mathbb{H}^1$. Отображение $f : \Omega \to \mathbb{G}$ *принадлежит классу Соболева* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{G})$, если выполнены следующие условия:

(a) $d_{\mathbb{G}}(\mathbf{0}, f(g)) \in L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, где $d_{\mathbb{G}}$ — метрика Карно — Каратеодори на группе $\mathbb{G}$;

(b) $f \in \mathrm{ACL}(\Omega)$, т. е. для всякой области $U \Subset \Omega$ и каждого слоения Γ_i, определенного левоинвариантным векторным полем X_i, $i = 1, 2$, ограничение $f : \gamma \cap U \to \mathbb{G}$ абсолютно непрерывно для $d\gamma$-почти всех кривых $\gamma \in \Gamma_i$, где $\gamma(t) = \exp(tX_i)(g)$, $g \in U$;

(c) производная $X_i f(g) = \frac{d}{dt} f(\exp tX_i(g))|_{t=0}$, $i = 1, 2$, которая существует почти всюду в Ω, лежит в горизонтальном пространстве $H_{f(g)}\mathbb{G}$ и в классе $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

[2)] Локальная группа многообразия Карно — это группа Карно, в то время как локальная группа пространства Карно — Каратеодори является лишь нильпотентной и градуированной. Группа поворотов-сдвигов — это многообразие Карно, поскольку ее локальной группой служит группа Гейзенберга.

Замечание 4. Мера $d\gamma$ на слоении Γ_i в п. (b) определяется как внутреннее произведение $X_i \lrcorner (dX_1 \wedge dX_2 \wedge dX_3)$ горизонтального векторного поля X_i и формы объема на группе $\mathcal{RT}$. Требование п. (c) принадлежности производных вдоль горизонтальных векторных полей горизонтальному подрасслоению называется также условием (*слабой*) *контактности.* Подчеркнем, что в определении 2 не предполагается существование (хотя бы в каком-нибудь смысле) производной вдоль третьего, вертикального, векторного поля X_3.

Замечание 5. Если отображение удовлетворяет определению 2, то оно также удовлетворяет определению 1. В свою очередь, отображение класса Соболева в смысле определения 1 можно изменить на множестве нулевой меры так, что для него будут справедливы пункты определения 2. Указанные взаимоотношения между определениями 1 и 2 установлены, например, в [24, предложения 4.1, 4.2]. Несмотря на то, что в [24] классы Соболева рассматриваются на группах Карно, доказательства утверждений [24, утверждения 4.1, 4.2] с очевидными изменениями переносятся на случай группы поворотов-сдвигов.

Отображение $f \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{G})$ *аппроксимативно hc-дифференцируемо* почти всюду (см., например, [22, теорема 6.1] или [25, предложение 1.1]). Последнее означает, что для почти каждой точки $g \in \Omega$ существует горизонтальный гомоморфизм $Df(g) : \mathscr{G}^g \to \mathscr{G}^{f(g)}$ локальных групп Карно такой, что для любого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathscr{H}^4_{sr}(\{g' \in B(g,r) \cap \Omega : d_{\mathbb{G}}(f(g'), Df(g)[g']) > \varepsilon d_c(g,g')\})}{\mathscr{H}^4_{sr}(B(g,r))} = 0,$$

где $B(g,r)$ — шар с центром в точке g радиуса r в метрике d_c. Отметим, что для п. в. $g \in \Omega$ соответствие $X_i(g) \mapsto X_i f(g)$, $i = 1, 2$, которое задает линейное отображение $D_h f(g) : H_g\mathcal{RT} \to H_{f(g)}\mathbb{G}$, порождает гомоморфизм $\widetilde{\exp}^{-1} \circ Df(g) \circ \exp : V \to \widetilde{V}$ алгебр Ли V и $\widetilde{V}$ локальных групп Карно $\mathscr{G}^g$ и $\mathscr{G}^{f(g)}$ соответственно, который для краткости также будем обозначать символом $Df(g) : V \to \widetilde{V}$. Символы $\exp$ и $\widetilde{\exp}$ обозначают экспоненциальные отображения $\exp : V \to \mathscr{G}^g$ и $\widetilde{\exp} : \widetilde{V} \to \mathscr{G}^{f(g)}$.

Через $\widehat{X}^g_i$, $i = 1, 2, 3$, обозначаем нильпотентизированные векторные поля, порождающие алгебру V локальной группы Карно $\mathscr{G}^g$, $g \in \mathcal{RT}$. Если $u = \exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{3} u_i \widehat{X}^g_i\Bigr)(g) \in \mathscr{G}^g$ и $v = \exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{3} v_i \widehat{X}^g_i\Bigr)(g) \in \mathscr{G}^g$, то групповая операция в $\mathscr{G}^g$ задается по формуле Кемпбелла — Хаусдорфа

$$u \cdot v = \exp\left(\sum_{i=1}^{3} v_i \widehat{X}^g_i\right) \circ \exp\left(\sum_{i=1}^{3} u_i \widehat{X}^g_i\right)(g).$$

Легко видеть, что точка g является единичным элементом группы $\mathscr{G}^g$. Как обычно, посредством отображения $\widehat{X}^g_i \mapsto \widehat{X}^g_i(g)$ будем отождествлять V и $T_g\mathscr{G}^g$. Напомним, что $\widehat{X}^g_i(g) = X_i(g)$. Таким образом, $T_g\mathscr{G}^g = T_g\mathcal{RT}$, поэтому можно рассматривать линейное отображение $Df(g) : T_g\mathcal{RT} \to T_{f(g)}\mathbb{H}^1$.

Замечание 6. Более подробную информацию о локальных группах Карно, их горизонтальном гомоморфизме, hc-дифференцируемости и нильпотентизированных полях можно найти в работах [19, 22, 25–27].

Определение 3. Отображение $f : \Omega \to \mathbb{G}$, $\Omega \subset \mathcal{RT}$ — область, $\mathbb{G}$ — группа $\mathcal{RT}$ или $\mathbb{H}^1$, называется *отображением с ограниченным искажением*, если выполнены следующие условия:

(i) $f \in W^1_{4,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{G})$;
(ii) $|D_h f(g)|^4 \le K \det Df(g)$ для п. в. $g \in \Omega$ и некоторой постоянной $K < \infty$.

§ 3. Свойство морфизма и его следствия

Здесь существенным образом используем результаты из [12]. Их непосредственное применение к задаче установления свойства морфизма для отображения $F : \Omega \to \mathcal{RT}$, $\Omega \subset \mathcal{RT}$, вызывает трудности, поскольку не удается проверить [12, предложение 2.11], где устанавливаются свойства проекций в образе отображения F. Этот образ лежит в группе поворотов-сдвигов, которая в отличие от групп Карно не допускает введения структуры однородных растяжений. Чтобы обойти это препятствие, установим свойство морфизма для отображения $f : \Omega \to \mathbb{H}^1$, $\Omega \subset \mathcal{RT}$, образ которого лежит в группе Гейзенберга. Причина выбора этой группы будет указана ниже.

Напомним, что *группой Гейзенберга* $\mathbb{H}^1$ называется пространство $\mathbb{R}^3$, снабженное групповой операцией

$$(a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, c_1 + c_2 - 2b_1a_2 + 2a_1b_2).$$

Единицу $(0, 0, 0)$ группы $\mathbb{H}^1$, как и на $\mathcal{RT}$, обозначим через $\mathbf{0}$.

Левоинвариантные векторные поля выписываются следующим образом:

$$A = \frac{\partial}{\partial a} + 2b\frac{\partial}{\partial c}, \quad B = \frac{\partial}{\partial b} - 2a\frac{\partial}{\partial c}, \quad C = \frac{\partial}{\partial c}. \tag{5}$$

Единственное нетривиальное коммутационное соотношение имеет вид $[A, B] = -4C$. Алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ левоинвариантных векторных полей распадается на сумму $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_1 \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_2$, где $\tilde{\mathfrak{g}}_1 = \operatorname{span}\{A, B\}$, $\tilde{\mathfrak{g}}_2 = \operatorname{span}\{C\}$. Введем скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$, относительно которого поля A, B, C ортонормальны, и определим на группе Гейзенберга расстояние Карно — Каратеодори $\tilde{d}_c$. Через dA, dB и dC обозначим дифференциальные 1-формы, двойственные к полям A, B и C. Для гладкой функции u (или имеющей обобщенные производные вдоль полей A, B) определим горизонтальный градиент $\nabla_h u = (Au)A + (Bu)B$ и его длину $|\nabla_h u| = \langle \nabla_h u, \nabla_h u \rangle^{1/2} = \sqrt{(Au)^2 + (Bu)^2}$. Пусть в области $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{H}^1$ определено векторное поле $X = u_1 A + u_2 B$. Если $u_1, u_2 \in C^1(\widetilde{\Omega})$, то горизонтальная дивергенция поля X определяется как $\operatorname{div}_h X = Au_1 + Bu_2$. Свойство морфизма формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $f : \Omega \to \widetilde{\Omega}$ — отображение с ограниченным искажением области $\Omega \subset \mathcal{RT}$ в открытое множество $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{H}^1$. Предположим, что $w : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ — C^2-гладкое решение в $\widetilde{\Omega}$ уравнения*

$$\operatorname{div}_h(|\nabla_h w(q)|^2 \nabla_h w(q)) = 0. \tag{6}$$

Тогда композиция $w_f = w \circ f$ есть решение в области Ω уравнения

$$\operatorname{div}_h \mathscr{A}(g, \nabla_h w_f(g)) = 0, \tag{7}$$

где горизонтальная дивергенция понимается в смысле распределений (см. (4)), $\mathscr{A}(g, \xi) = \langle G(g)\xi, \xi \rangle G(g)\xi$, а (2×2)-матрица $G(g)$ имеет вид

$$G(g) = \begin{cases} (\det Df(g))^{1/2}(D_h f(g)^* D_h f(g))^{-1}, & \text{если } \det Df(g) \ne 0, \\ \mathrm{Id}, & \text{если } \det Df(g) = 0. \end{cases}$$

В теореме 1 участвуют матрицы $D_hf(g)$ и $Df(g)$. Найдем их явные формы. Выпишем сначала матрицу $D_hf(g)$ горизонтального аппроксимативного hc-дифференциала в базисах $\widehat{X}_1^g(g)=X_1(g)$, $\widehat{X}_2^g(g)=X_2(g)$ и $A(q)$, $B(q)$, где $q=f(g)$. Используя (5), для производной вдоль горизонтального векторного поля X_1 при п. в. $g\in\Omega$ получаем

$$\begin{aligned}&X_1f(g)=X_1f_1(g)\frac{\partial}{\partial a}+X_1f_2(g)\frac{\partial}{\partial b}+X_1f_3(g)\frac{\partial}{\partial c}\\&=X_1f_1(g)(A(q)-2f_2(g)C(q))+X_1f_2(g)(B(q)+2f_1(g)C(q))+X_1f_3(g)C(f(q))\\&=X_1f_1(g)A(q)+X_1f_2(g)B(q)+(2f_1(g)X_1f_2(g)-2f_2(g)X_1f_1(g)+X_1f_3(g))C(q).\end{aligned}$$

Для производной вдоль поля X_2 аналогично имеем

$$\begin{aligned}X_2f(g)&=X_2f_1(g)A(q)+X_2f_2(g)B(q)\\&\quad+(2f_1(g)X_2f_2(g)-2f_2(g)X_2f_1(g)+X_2f_3(g))C(q).\end{aligned}$$

Условие контактности в п. (c) определения 2 влечет равенства

$$2f_1(g)X_1f_2(g)-2f_2(g)X_1f_1(g)+X_1f_3(g)=0,$$

$$2f_1(g)X_2f_2(g)-2f_2(g)X_2f_1(g)+X_2f_3(g)=0.$$

Таким образом, матрица горизонтального аппроксимативного hc-дифференциала выписывается в виде

$$D_hf(g)=\begin{pmatrix}X_1f_1(g)&X_2f_1(g)\\X_1f_2(g)&X_2f_2(g)\end{pmatrix}.$$

Теперь продолжим это линейное отображение до гомоморфизма $Df(g)$ алгебр Ли локальных групп Карно $\mathscr{G}^g$ и $\mathscr{G}^{f(g)}$. Принимая во внимание (3) и [22, теорема 1.1(2)], получаем, что коммутационные соотношения для нильпотентизированных полей имеют вид

$$\big[\widehat{X}_1^g,\widehat{X}_2^g\big]=-\widehat{X}_3^g,\quad \big[\widehat{X}_3^g,\widehat{X}_2^g\big]=0,\quad \big[\widehat{X}_1^g,\widehat{X}_3^g\big]=0.$$

Учитывая их, а также коммутационные соотношения $[A,B]=-4C$, $[A,C]=[B,C]=0$ на группе Гейзенберга, приходим к выводу, что гомоморфизм нильпотентных градуированных алгебр локальных групп Карно осуществляет линейное отображение

$$Df(g)=\begin{pmatrix}X_1f_1(g)&X_2f_1(g)&0\\X_1f_2(g)&X_2f_2(g)&0\\0&0&4\det D_hf(g)\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Как известно, в обосновании теоремы 1 ключевую роль играет соотношение, по форме совпадающее с равенством (1), но записанное для так называемых горизонтальных дифференциальных форм. Прежде чем сформулировать соответствующее утверждение, дадим несколько определений.

Горизонтальными дифференциальными формами на группе Гейзенберга называются формы вида

$$\omega_1(q)=u_1(q)\,dB\wedge dC-u_2(q)\,dA\wedge dC,\quad \omega_2(q)=u_3(q)\,dA\wedge dB\wedge dC. \tag{9}$$

где u_1, u_2, u_3 — измеримые функции. Эти формы обращаются в нуль на горизонтальном касательном пространстве, чем и объясняется их название.

Определение 4. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{H}^1$ — отображение класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{H}^1)$, $p \geq 1$, $\Omega \subset \mathcal{RT}$ — область. Для форм вида (9) с коэффициентами, определенными на $f(\Omega)$, операция *переноса* задается следующим образом:

$$f^{\#}\omega_1(g)(\xi_1, \xi_2) = \omega(f(g))(Df(g)\langle\xi_1\rangle, Df(g)\langle\xi_2\rangle),$$

$$f^{\#}\omega_2(g)(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \omega(f(g))(Df(g)\langle\xi_1\rangle, Df(g)\langle\xi_2\rangle, Df(g)\langle\xi_3\rangle)$$

для п. в. $g \in \Omega$ и $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in T_g\mathcal{RT}$.

Пусть D — открытое множество в $\mathbb{H}^1$ или $\mathcal{RT}$ и ω — дифференциальная 2-форма с локально интегрируемыми на D коэффициентами. Дифференциальная 3-форма η называется *внешним дифференциалом формы ω в смысле распределений*, если равенство $\int\limits_D \varphi\eta = -\int\limits_D d\varphi \wedge \omega$ выполняется для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(D)$. Легко проверить, что для формы с гладкими коэффициентами ее обычный дифференциал является также и дифференциалом в смысле распределений.

В § 4 покажем, что справедливо следующее утверждение, обобщающее равенство (1) на случай рассматриваемых нами отображений.

Предложение 1. *Предположим, что $f : \Omega \to \mathbb{H}^1$ — отображение класса $W^1_{4,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{H}^1)$, $\Omega \subset \mathcal{RT}$ — область. Пусть $U : \mathbb{H}^1 \to \mathbb{R}^2$ — векторное поле $U = (u_1, u_2) \in C^1$ такое, что $\operatorname{div}_h U = Au_1 + Bu_2$ ограничено на $\mathbb{H}^1$, и задана горизонтальная дифференциальная форма костепени один*

$$\omega(q) = u_1(q)\, dB \wedge dC - u_2(q)\, dA \wedge dC.$$

Тогда справедливо равенство $d(f^{\#}\omega) = f^{\#}d\omega$, где внешний дифференциал d понимается в смысле распределений.

Из сформулированного предложения традиционным способом выводится теорема 1. Важным обстоятельством является тот факт, что решениями уравнения (6) служат координатные функции a, b, c, а также C^2-гладкая сингулярная функция $\ln\|q\|$, $q = (a, b, c) \in \mathbb{H}^1$, где $\|q\| = ((a^2 + b^2)^2 + 16c^2)^{1/4}$ (см., например, [28, теорема 2] или [10, предложение 5.6]). Следовательно, теорема 1 говорит о том, что для отображения с ограниченным искажением f координатные функции $f_i(g)$, $i = 1, 2, 3$, и функция $\ln\|f(g)\|$ суть решения уравнения (7). Отсюда по схеме, предложенной Ю. Г. Решетняком в [1], получаем следующее

Предложение 2. *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{H}^1$ — непостоянное отображение с ограниченным искажением, $\Omega \subset \mathcal{RT}$ — область. Тогда f непрерывно, открыто и дискретно.*

Из этого утверждения выведем топологические свойства непостоянных отображений с ограниченным искажением на группе поворотов-сдвигов, удовлетворяющих условию локальной ограниченности.

Определение 5. Отображение $F : \Omega \to \mathcal{RT}$, $\Omega \subset \mathcal{RT}$ — область, называется *локально ограниченным*, если для всякой подобласти $\Omega' \Subset \Omega$ ее образ $F(\Omega')$ есть ограниченное множество.

Теорема 2. *Пусть $F : \Omega \to \mathcal{RT}$ — непостоянное локально ограниченное отображение с ограниченным искажением, $\Omega \subset \mathcal{RT}$ — область. Тогда F непрерывно и открыто; оно дискретно на всякой подобласти $\Omega' \Subset \Omega$.*

Прежде чем доказать эту теорему, поясним, почему выбрана группа Гейзенберга в теореме 1 и предложении 1 в качестве области значений. Выбор продиктован тем, что справедлива

Лемма 1 [16]. *Отображение $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) : \mathcal{RT} \to \mathbb{H}^1$, задаваемое формулой*

$$\psi(x, y, \theta) = (-x\cos\theta - y\sin\theta, \theta, 4x\sin\theta - 4y\cos\theta - 2x\theta\cos\theta - 2y\theta\sin\theta), \quad (10)$$

является контактным диффеоморфизмом.

Замечание 7. Контактность означает здесь, что $\psi_* \mathfrak{g}_1 = \tilde{\mathfrak{g}}_1$.

Выпишем нужный нам ниже риманов дифференциал отображения (10) в базисах $X_1(g)$, $X_2(g)$, $X_3(g)$, $A(\psi(g))$, $B(\psi(g))$, $C(\psi(g))$. Для этого проделаем ряд вычислений, учитывая (2), (5), (10). Из равенств

$$X_1\psi_1(g) = -\cos^2\theta - \sin^2\theta = -1, \quad X_1\psi_2(g) = 0,$$

$$X_1\psi_3(g) = \cos\theta(4\sin\theta - 2\theta\cos\theta) + \sin\theta(-4\cos\theta - 2\theta\sin\theta) = -2\theta$$

получаем, что

$$X_1\psi(g) = -\frac{\partial}{\partial a} - 2\theta\frac{\partial}{\partial c} = -A(\psi(g)).$$

Далее,

$$X_2\psi_1(g) = x\sin\theta - y\cos\theta, \quad X_2\psi_2(g) = 1,$$

$$X_3\psi_2(g) = 2x\cos\theta + 2y\sin\theta + 2x\theta\sin\theta - 2y\theta\cos\theta,$$

поэтому

$$X_2\psi(g) = (x\sin\theta - y\cos\theta)\left(\frac{\partial}{\partial a} + 2\theta\frac{\partial}{\partial c}\right) + \frac{\partial}{\partial b} - 2(-x\cos\theta - y\sin\theta)\frac{\partial}{\partial c}$$
$$= (x\sin\theta - y\cos\theta)A(\psi(g)) + B(\psi(g)).$$

Наконец,

$$X_3\psi_1 = \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta = 0, \quad X_3\psi_2 = 0,$$

$$X_3\psi_3 = -\sin\theta(4\sin\theta - 2\theta\cos\theta) + \cos\theta(-4\cos\theta - 2\theta\sin\theta) = -4,$$

откуда

$$X_3\psi(g) = -4\frac{\partial}{\partial c} = -4C(\psi(g)).$$

Таким образом,

$$\psi_*(g) = \begin{pmatrix} -1 & x\sin\theta - y\cos\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Замечание 8. Вспоминая вид матрицы (8) аппроксимативного hc-дифференциала, заключаем, что матрица $D\psi(g)$ совпадает с (11).

Доказательству теоремы 2 предпошлем следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть $F : \Omega \to \mathcal{RT}$ — локально ограниченное отображение класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathcal{RT})$, $p \geq 1$, $\Omega \subset \mathcal{RT}$ — область. Тогда отображение $f = \psi \circ F : \Omega \to \mathbb{H}^1$, где ψ — отображение* (10), *принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{H}^1)$.*

Доказательство. Согласно определению 2 нужно проверить три пункта.
(a) $\tilde{d}_c(\mathbf{0}, f(g)) \in L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Пусть $\Omega' \Subset \Omega$. В силу локальной ограниченности F множество $\overline{F(\Omega')}$ компактно. Поскольку ψ — гладкое контактное отображение, ψ локально липшицево относительно соответствующих субримановых метрик. Следовательно, для

компакта $K = \overline{F(\Omega')} \cup \{\mathbf{0}\}$ найдется постоянная $C = C(K)$ такая, что для всех $g \in \Omega'$
$$\tilde{d}_c(\mathbf{0}, \psi(F(g))) = \tilde{d}_c(\psi(\mathbf{0}), \psi(F(g))) \le C d_c(\mathbf{0}, F(g)).$$
Так как $F \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathcal{RT})$, в силу п. (a) определения 2 имеем $d_c(\mathbf{0}, F(g)) \in L_p(\Omega')$. Учитывая последнее неравенство, получаем $\tilde{d}_c(\mathbf{0}, \psi(F(g))) \in L_p(\Omega')$.

(b) $f \in \mathrm{ACL}(\Omega)$.

В самом деле, так как отображение ψ гладкое и в силу п. (b) определения 2 $F \in \mathrm{ACL}(\Omega)$, то $\psi \circ F \in \mathrm{ACL}(\Omega)$.

(c) производная $X_i f(g) = \frac{d}{dt} f(\exp tX_i(g))|_{t=0}$, $i = 1, 2$, которая существует почти всюду в Ω, лежит в горизонтальном пространстве $H_{f(g)}\mathbb{H}^1$ и в классе $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Поскольку $f = \psi \circ F \in \mathrm{ACL}(\Omega)$, производные отображения $\psi \circ F$ вычисляются по классическому правилу дифференцирования композиции. Таким образом, для п. в. $g \in \Omega$ имеем $X_i f(g) = D\psi(F(g)) X_i F(g)$, где $X_i F(g) = \{X_i F_k(g)\}_{k=1}^3$ — вектор-столбец из производных компонент отображения F. Согласно п. (c) определения 2 векторы $X_i F(g)$, $i = 1, 2$, лежат в $H_{F(g)}\mathcal{RT}$. Так как ψ — контактное отображение, векторы $X_i f(g)$ лежат в $H_{f(g)}\mathbb{H}^1$, $i = 1, 2$.

Далее, пусть $\Omega' \Subset \Omega$. Из предыдущих рассуждений получаем, что при п. в. $g \in \Omega'$, $i = 1, 2$,
$$X_i f(g) = \begin{pmatrix} X_i F_1(g) + (F_1(g) \sin F_3(g) - F_2(g) \cos F_3(g)) X_i F_2(g) \\ X_i F_2(g) \\ -4 X_i F_3(g) \end{pmatrix}.$$
Принимая во внимание локальную ограниченность отображения F, ограниченность синуса и косинуса, а также п. (c) определения 2 (т. е. $X_i F \in L_p(\Omega')$), выводим $X_i f \in L_p(\Omega')$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Пусть $\Omega' \Subset \Omega$. Покажем, что $f = \psi \circ F : \Omega' \to \mathbb{H}^1$, где ψ — отображение (10), является отображением с ограниченным искажением. Для этого проверим пункты определения 3. П. (i) выполнен в силу леммы 2. Для проверки п. (ii) сначала отметим, что норма матрицы горизонтального hc-дифференциала отображения ψ в точке $F(g)$ равна
$$|D_h \psi(F(g))| = \frac{\sqrt{2 + \alpha^2 + |\alpha|\sqrt{\alpha^2 + 4}}}{\sqrt{2}},$$
где $\alpha = F_1(g) \sin F_3(g) - F_2(g) \cos F_3(g)$. В силу локальной ограниченности F найдется такая постоянная $C = C(\Omega')$, что $|D_h \psi(F(g))|^4 \le C$ на Ω'. Так как отображение F имеет ограниченное искажение, для п. в. $g \in \Omega'$
$$|D_h(\psi \circ F)(g)|^4 \le |D_h \psi(F(g))|^4 \cdot |D_h F(g)|^4 \le CK \det DF(g),$$
что завершает проверку п. (ii).

Итак, отображение $f : \Omega' \to \mathbb{H}^1$ согласно предложению 2 непрерывно, открыто и дискретно. Поскольку ψ^{-1} — диффеоморфизм, отображение $F = \psi^{-1} \circ f$ будет также непрерывным, открытым и дискретным на подобласти $\Omega' \Subset \Omega$. Легко видеть, что и на всей области Ω оно тоже непрерывно и открыто. Действительно, если $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность точек области Ω, сходящаяся к $g \in \Omega$, то она ограничена, т. е. $\{g_n\}_{n=1}^\infty \cup \{g\} \subset \Omega'$ для некоторой подобласти $\Omega' \Subset \Omega$. Так как F на Ω' непрерывно, $F(g_n) \to F(g)$, $n \to \infty$. Тем самым установлена непрерывность отображения $F : \Omega \to \mathcal{RT}$. Чтобы показать его открытость, фиксируем открытое множество $U \subset \Omega$. Без ограничения общности можно считать, что оно связное. Пусть $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ — исчерпание области Ω подобластями $\Omega_n \Subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $U_n = U \cap \Omega_n \Subset \Omega$. Так как F открыто на U_n для всякого n, множество $F(U) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F(U_n)$ открыто. $\square$

§ 4. О доказательстве предложения 1

Предложение 1 будет доказано, если мы покажем (см. [12, лемма 2.8]), что отображение $f : \Omega \to \mathbb{H}^1$ класса $W^1_{4,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{H}^1)$, $\Omega \subset \mathcal{RT}$ — область, удовлетворяет равенству

$$\int\limits_{\Omega} (A_{1k} X_1 \varphi + A_{2k} X_2 \varphi)\, d\mathscr{H}^4_{sr} = 0, \quad k = 1, 2, \tag{12}$$

для любой функции $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ класса $C_0^\infty(\Omega)$. Здесь $A_{jk} = A_{jk}(g)$ — это элемент матрицы $\operatorname{ad} Df(g) = [A_{jk}(g)]_{j,k=1,2,3}$, присоединенной к матрице $Df(g)$ аппроксимативного hc-дифференциала:

$$Df(g) \cdot \operatorname{ad} Df(g) = \det Df(g) \cdot \mathrm{Id}\,.$$

Равенство (12) в евклидовых пространствах и на группе Гейзенберга можно установить, аппроксимируя f гладкими отображениями (см. [1, 8]). Однако, как сказано во введении, уже на произвольных двухступенчатых группах Карно этот подход не работает. Воспользуемся новым методом, который был развит С. К. Водопьяновым в [12] без применения техники аппроксимаций. Этот метод основан на использовании формулы замены переменной в интеграле, которая справедлива, если отображение, осуществляющее замену, непрерывно, дифференцируемо почти всюду и обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина. Однако эта формула применяется опосредованно, поскольку принадлежность отображения f классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{H}^1)$ с «предельным» показателем $p = 4$ не гарантирует упомянутых свойств. Чтобы обойти эти трудности, в [12] используется прием понижения размерности, а сама формула устанавливается на подмногообразии коразмерности один.

Наша цель — показать, что рассуждения из [12], носящие весьма общий характер, применимы и в том случае, когда область определения отображения f лежит в группе $\mathcal{RT}$.

В соотношении (12) функция $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ принадлежит классу $C_0^\infty(\Omega)$, где Ω — область в группе $\mathcal{RT}$. Обозначим через Z множество критических точек $\{g \in \Omega \mid \nabla\varphi(g) = 0\}$, где $\nabla\varphi = \nabla_h \varphi + X_3\varphi X_3$ — «полный» градиент функции φ. Согласно теореме Сарда имеем $\mathscr{H}^1_e(\varphi(Z)) = 0$ и, следовательно, для п. в. $t \in \varphi(\Omega)$ поверхность уровня $\varphi^{-1}(t)$ является непустым замкнутым (т. е. компактным без края) многообразием коразмерности один. Для каждого $t \in \varphi(\Omega) \setminus \varphi(Z)$ в силу компактности $\varphi^{-1}(t)$ найдутся $\alpha_t, \beta_t \in \mathbb{R}$ такие, что

$$0 < \alpha_t \le |\nabla\varphi(g)|^{-1} \le \beta_t \quad \text{для всех } g \in \varphi^{-1}(t). \tag{13}$$

Пусть $\chi = \{g \in \Omega \mid \nabla_h \varphi(g) = 0\}$ — множество характеристических точек. Если $t \in \varphi(\Omega) \setminus \varphi(Z)$, то ввиду [19, теорема 4.1]

$$\mathscr{H}^3_{sr}(\chi \cap \varphi^{-1}(t)) = 0 \tag{14}$$

и по [29, 30]

$$\mathscr{H}^2_e(\chi \cap \varphi^{-1}(t)) = 0. \tag{15}$$

Перейти на подмногообразие коразмерности один удается благодаря формуле коплощади, которая доказана для многообразий Карно и гладких контактных отображений в [19, теорема 6.1]. Выпишем эту формулу для нашего частного случая.

Формула коплощади. *Пусть $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ — функция класса $C_0^\infty(\Omega)$ на области $\Omega \subset \mathcal{RT}$. Тогда справедливо равенство*

$$\int\limits_{\Omega} \Phi(g)|\nabla_h\varphi(g)|\, d\mathscr{H}^4_{sr}(g) = C_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\varphi^{-1}(t)} \Phi(g')\, d\mathscr{H}^3_{sr}(g'),$$

где $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ — функция такая, что произведение $\Phi(g)|\nabla_h\varphi(g)|$ интегрируемо, а постоянная C_1 зависит только от показателей размерности.

Нам также понадобится связь между мерами на поверхности уровня. Она сформулирована в [19, теорема 3.17] и в наших установках выглядит следующим образом.

Предложение 3. *Пусть $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ — функция класса $C_0^\infty(\Omega)$ на области $\Omega \subset \mathcal{RT}$ и $t \in \varphi(\Omega) \setminus \varphi(Z)$. Если $g \in \varphi^{-1}(t) \setminus \chi$, то*

$$D_{\mathscr{H}^2_e}\mathscr{H}^3_{sr}(g) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r\to 0} \frac{\mathscr{H}^3_{sr}(\mathrm{Box}_2(g,r) \cap \varphi^{-1}(t))}{\mathscr{H}^2_e(B_e(g,r) \cap \varphi^{-1}(t))} = C_2 \frac{|\nabla_h\varphi(g)|}{|\nabla\varphi(g)|},$$

где $B_e(g,r)$ — шар в евклидовой метрике и C_2 — постоянная, зависящая только от показателей размерности.

Формула коплощади и предложение 3 дают для (12) соотношение

$$\int\limits_{\Omega} (A_{1k}X_1\varphi + A_{2k}X_2\varphi)\, d\mathscr{H}^4_{sr}$$
$$= C_1C_2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\varphi^{-1}(t)} \frac{A_{1k}X_1\varphi + A_{2k}X_2\varphi}{|\nabla\varphi|}\, d\mathscr{H}^2_e = 0, \quad k = 1, 2.$$

Последнее равенство будет доказано, если для связной компоненты $M \subset \varphi^{-1}(t)$, $t \in \varphi(\Omega) \setminus \varphi(Z)$, покажем, что

$$\int\limits_M (\nu_1(g)A_{1k}(g) + \nu_2(g)A_{2k}(g))\, d\mathscr{H}^2_e = \int\limits_M A_{1k}\, dX_2 \wedge dX_3 + A_{2k}\, dX_1 \wedge dX_3 = 0, \tag{16}$$

где $\nu_j(g) = |\nabla\varphi(g)|^{-1}X_j\varphi(g)$, $j = 1, 2$, суть горизонтальные компоненты вектора единичной нормали к M в точке g.

Пусть T_gM — касательное пространство к M, рассматриваемое как подпространство в $T_g\mathcal{RT}$. Обозначим $\mathrm{Box}^g_2(g,r) = \{g' \in \mathscr{G}^g \mid d^g_2(g', g) < r\}$, где d^g_2 — квазиметрика в локальной группе $\mathscr{G}^g$. Поскольку (см. [27, лемма 2.1.26]) для достаточно малых по модулю коэффициентов a_i имеем

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{3} a_iX_i\right)(g) = \exp\left(\sum_{i=1}^{3} a_i\widehat{X}^g_i\right)(g), \tag{17}$$

найдется $r(g)$ такое, что $\mathrm{Box}_2(g,r) = \mathrm{Box}^g_2(g,r)$ при $r < r(g)$. Это позволяет придать для достаточно малых r смысл множеству $P_r = \mathrm{Box}_2(g,r) \cap T_gM$, так как экспоненциальное отображение $\exp : V \to \mathscr{G}^g$ позволяет трактовать векторы из T_gM как элементы множества $\mathrm{Box}_2^g(g,r) = \mathrm{Box}_2(g,r)$, $r < r(g)$. Напомним, что мы отождествляем V и $T_g\mathscr{G}^g = T_g\mathcal{RT}$. Пусть $Df(g)|_{T_gM} : T_gM \to T_{f(g)}\mathbb{H}^1$ — ограничение отображения $Df(g) : T_g\mathcal{RT} \to T_{f(g)}\mathbb{H}^1$ на T_gM. Введем также проекцию $\mathrm{Pr}_{q,k} : T_q\mathbb{H}^1 \to T_{q,k}\mathbb{H}^1$, полагая $\mathrm{Pr}_{q,k}(aA(q) + bB(q) + cC(q))$ равным $bB(q) + cC(q)$ при $k = 1$ и $aA(q) + cC(q)$ при $k = 2$. Здесь $T_{q,k}\mathbb{H}^1 = \{v \in T_q\mathbb{H}^1 \mid v = \mathrm{Pr}_{q,k}(v)\}$.

Под действием линейного отображения

$$\mathrm{Pr}_{f(g),k} \circ Df(g)|_{T_gM} : T_gM \to T_{f(g),k}\mathbb{H}^1$$

форма $\omega_1 = dB \wedge dC$ или $\omega_2 = dA \wedge dC$ переносится таким образом (см. в [12] равенство (2.18)):

$$(\mathrm{Pr}_{f(g),k} \circ Df(g)|_{T_gM})^{\#}\omega_k = A_{1k}\, dX_2 \wedge dX_3 + A_{2k}\, dX_1 \wedge dX_3 \\ = \det(\mathrm{Pr}_{f(g),k} \circ Df(g)|_{T_gM})\, dV, \quad (18)$$

где dV — форма объема на M. Справедливо также соотношение (см., например, [20, п. 3.3.1, лемма 1])

$$|\det(\mathrm{Pr}_{f(g),k} \circ Df(g)|_{T_gM})| = \lim_{r\to 0} \frac{\mathscr{H}_e^2((\mathrm{Pr}_{f(g),k} \circ Df(g))(P_r))}{\mathscr{H}_e^2(P_r)}. \quad (19)$$

Следуя [12], рассмотрим проектирование в образе отображения f, т. е. в группе Гейзенберга. Фиксируем точку $q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{H}^1$. Обозначим $\mathbb{H}^1_{q,1} = \{(q_1, b, c) \in \mathbb{H}^1 \mid b, c \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{H}^1_{q,2} = \{(a, q_2, c) \in \mathbb{H}^1 \mid a, c \in \mathbb{R}\}$. Определим отображение $\mathbf{Pr}_k : \mathbb{H}^1 \to \mathbb{H}^1_{\mathbf{0},k}$, $k = 1, 2$, полагая

$$\mathbf{Pr}_1((a,b,c)) = (a,b,c) \cdot \exp(-aA)(\mathbf{0}) = (0, b, c + 2ab),$$

$$\mathbf{Pr}_2((a,b,c)) = (a,b,c) \cdot \exp(-bB)(\mathbf{0}) = (a, 0, c - 2ab).$$

Приведем свойства введенных проекций, которые немедленно следуют из [12, предложение 2.11], где рассматривался случай общих групп Карно.

Предложение 4. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *для всякой точки $q \in \mathbb{H}^1$ риманов дифференциал отображения $l_q \circ \mathbf{Pr}_q$ в $\mathbf{0}$ равен $\mathrm{Pr}_{q,k}$, где l_q — левый сдвиг на элемент q;*

(2) $\mathscr{H}^3_{sr}(\mathbf{Pr}_k(A)) \le C_0 \mathscr{H}^3_{sr}(A)$ *для всякого $\mathscr{H}^3_{sr}$-измеримого множества $A \subset \mathbb{H}^1$, где постоянная C_0 не зависит от A.*

Далее показываем, что отображение $f|_M$ обладает всеми свойствами, необходимыми для вывода формулы замены переменной. Наши рассуждения следуют аргументам, предложенным С. К. Водопьяновым для доказательства [12, предложение 2.12]. Мы лишь модифицируем их таким образом, чтобы они работали и на группе поворотов-сдвигов.

Предложение 5. *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{H}^1$ — отображение класса $W^1_{4,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{H}^1)$, $\Omega \subset \mathcal{RT}$ — область. Для п. в. $t \in \varphi(\Omega)$ отображение $f : M \to \mathbb{H}^1$ обладает следующими свойствами*

(i) *отображение $f : M \to \mathbb{H}^1$ можно изменить на множестве $\mathscr{H}^3_{sr}$-меры нуль так, чтобы оно стало непрерывным;*

(ii) *$f : M \to \mathbb{H}^1$ обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина;*

(iii) $\overline{\lim\limits_{g'\to g, g'\in M}} \frac{\tilde{d}_c(f(g'), f(g))}{d_c(g', g)} < \infty$ *для $\mathscr{H}^3_{sr}$-п. в. точек $g \in M$;*

(iv) *f дифференцируемо для $\mathscr{H}^3_{sr}$-п. в. $g \in M$ в следующем смысле:*

$$\tilde{d}_c(f(g'), Df(g)[g']) = o(d_c(g', g)) \quad \text{при } M \cap \mathscr{G}^g \ni g' \to g;$$

(v) *для $\mathscr{H}^3_{sr}$-п. в. $g \in M$ справедливо равенство, где $M_r = \mathrm{Box}_2(g, r) \cap M$:*

$$|\det(\mathrm{Pr}_{f(g),k} \circ Df(g)|_{T_gM})| = \lim_{r\to 0} \frac{\mathscr{H}^2_e(\mathrm{Pr}_{f(g),k} \circ Df(g))(P_r)}{\mathscr{H}^2_e(P_r)}$$
$$= \lim_{r\to 0} \frac{\mathscr{H}^2_e(f(g)(\mathbf{Pr}_k \circ Df(g))(M_r))}{\mathscr{H}^2_e(M_r)};$$

(vi) *для $\mathscr{H}^3_{sr}$-п. в. $g \in M$*

$$J(g, \mathbf{Pr}_k \circ f|_M) \overset{\text{def}}{=} \lim_{r\to 0} \frac{\mathscr{H}^3_{sr}((\mathbf{Pr}_k \circ f)(M_r))}{\mathscr{H}^3_{sr}(M_r)} = \frac{|\det(\mathrm{Pr}_{f(g),k} \circ Df(g)|_{T_gM})|}{\sqrt{\nu_1^2(g) + \nu_2^2(g)}};$$

(vii) *для отображения $\mathbf{Pr}_k \circ f : M \to \mathbb{H}^1_{\mathbf{0},k}$ справедлива формула замены переменной:*

$$\int\limits_M u(g) J(g, \mathbf{Pr}_k \circ f|_M)\, d\mathscr{H}^3_{sr}(g) = \int\limits_{\mathbb{H}^1_{\mathbf{0},k}} \Big(\sum_{g \in f^{-1}(q)} u(g) \Big)\, d\mathscr{H}^3_{sr}(q),$$

где $u : M \to \mathbb{R}$ — измеримая функция такая, что $u(g)J(g, \mathbf{Pr}_k \circ f|_M)$ интегрируемо на M относительно меры $\mathscr{H}^3_{sr}$.

Доказательство. (i) Шаг I. Согласно п. (A) определения 1 для фиксированного $q \in \mathbb{H}^1$ имеем $\tilde{d}_c(q, f(\cdot)) \in W^1_{4,\mathrm{loc}}(\Omega)$. В силу [22, предложение 6.1] для компактного множества $\mathcal{O} = \mathrm{spt}\,\varphi \subset \Omega$ найдутся множество $S \subset \mathcal{O}$ нулевой $\mathscr{H}^4_{sr}$-меры и неотрицательная функция $\mu \in L_4(\mathcal{O})$ такие, что поточечная оценка

$$|\tilde{d}_c(q, f(g)) - \tilde{d}_c(q, f(g'))| \le d_c(g, g')(\mu(g) + \mu(g')) \tag{20}$$

выполняется для всех $g, g' \in \mathcal{O} \setminus S$.

Чтобы установить п. (i), воспользуемся результатами из [31], а именно утверждением [31, теорема 8.7], которое представляет собой теорему вложения для класса функций, введенных в [31, определение 8.1]. Далее проверяем условия этого утверждения.

Шаг II. Фиксируем $t \in \varphi(\Omega) \setminus \varphi(Z)$. Пусть M — связная компонента множества $\varphi^{-1}(t)$. Покажем, что функция $\tilde{d}_c(q, f(\cdot))$, ограниченная на поверхность M, удовлетворяет определению [31, определение 8.1]: существуют функция $\mu_M \in L_4(M)$ и множество S_M нулевой $\mathscr{H}^2_e$-меры такие, что неравенство

$$|\tilde{d}_c(q, f(g)) - \tilde{d}_c(q, f(g'))| \le d_c(g, g')(\mu_M(g) + \mu_M(g')) \tag{21}$$

справедливо для всех $g, g' \in M \setminus S_M$ относительно меры $\mathscr{H}^2_e$.

Ниже для множества $A \subset \Omega$ через I_A обозначим индикатор этого множества (если $g \in A$, то $I_A(g) = 1$, если $g \notin A$, то $I_A(g) = 0$).

Можно положить $S_M = M \cap S$. Действительно, взяв в формуле коплощади $\Phi = I_S$, получим, что $\int\limits_{\varphi^{-1}(t)\cap S} d\mathscr{H}^3_{sr} = 0$ для п. в. $t \in \varphi^{-1}(\Omega)$. Можно считать, что последнее равенство верно для фиксированного выше t. В силу предложения 3 и соотношения (15) имеем

$$0 = \int\limits_{\varphi^{-1}(t)\cap S} d\mathscr{H}^3_{sr}(g) = \int\limits_{\varphi^{-1}(t)\cap S} \frac{|\nabla_h \varphi(g)|}{|\nabla \varphi(g)|}\, d\mathscr{H}^2_e(g),$$

откуда, учитывая (15) и (13), выводим, что $\mathscr{H}_e^2(\varphi^{-1}(t)\cap S)=0$.

Перейдем к функции μ_M. Так как $\mu\in L_4(\mathcal{O})$, по формуле коплощади

$$\infty > \int\limits_{\Omega} I_{\mathcal{O}}(g)\frac{\mu^4(g)}{|\nabla_h\varphi(g)|}|\nabla_h\varphi(g)|\,d\mathscr{H}_{sr}^4 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\varphi^{-1}(t)} I_{\mathcal{O}}(g')\frac{\mu^4(g')}{|\nabla_h\varphi(g')|}\,d\mathscr{H}_{sr}^3.$$

Следовательно, принимая во внимание предложение 3 и (13)–(15), можно считать, что для фиксированного выше t

$$\infty > \int\limits_{\varphi^{-1}(t)} \frac{\mu^4(g')}{|\nabla\varphi(g')|}\,d\mathscr{H}_e^2(g') \ge \alpha_t \int\limits_{\varphi^{-1}(t)} \mu^4(g')\,d\mathscr{H}_e^2(g').$$

Таким образом, в качестве функции μ_M следует взять ограничение $\mu|_M$ функции μ на поверхность M.

Шаг III. В [31, теорема 8.7] требуется, чтобы мера $\mathscr{H}_e^2$ на поверхности M удовлетворяла следующей оценке снизу: для фиксированного шара B_0 с центром на M и постоянных $s,\gamma>0$, $\sigma\ge 1$ выполнено $\mathscr{H}_e^2(M\cap B)\ge\gamma r^s$ для любого шара $B\subset B_0$ с центром на M радиуса r. Покажем, что эта оценка имеет место.

Фиксируем $g\in M$. Так как группа поворотов-сдвигов — это пространство Карно — Каратеодори глубины 2, согласно (1.16) в [32, теорема 1.3] найдутся постоянные $\gamma_1=\gamma_1(\Omega_t,g)>0$, $R_0=R_0(\Omega_t,g)>0$ такие, что для $0<r<R_0$

$$P_X(\Omega_t;B(g,r)) \ge \gamma_1\frac{\mathscr{H}_e^3(B(g,r))}{r}, \tag{22}$$

где $\Omega_t=\{g'\in\mathcal{RT}\mid\varphi(g')<t\}$, а $P_X(\Omega_t;B(g,r))$ — так называемый X-периметр множества Ω_t относительно шара $B(g,r)$, для которого справедливо двойное неравенство (см. соотношения (1.7) и (1.8) в [32])

$$\gamma_2^{-1}\int\limits_{M\cap B(g,r)} |\nabla_h\varphi|\,d\mathscr{H}_e^2 \le P_X(\Omega_t;B(g,r)) \le \gamma_2\int\limits_{M\cap B(g,r)} |\nabla_h\varphi|\,d\mathscr{H}_e^2, \tag{23}$$

где $\gamma_2=\gamma_2(\Omega_t)>0$. В силу теоремы Ball-Box (см., например, [17, следствие 2.2]) найдется $r_0>0$ такое, что для $0<r<r_0$

$$\gamma_3^{-1}r^4 \le \mathscr{H}_e^3(B(g,r)) \le \gamma_3 r^4, \tag{24}$$

где постоянная $\gamma_3>0$ не зависит от r. Используя (13) и (22)–(24), для $0<r<R=\min\{R_0,r_0\}$ получаем

$$\gamma_2\alpha_t^{-1}\mathscr{H}_e^2(B(g,r)\cap M) \ge \gamma_2\int\limits_{M\cap B(g,r)} |\nabla\varphi|\,d\mathscr{H}_e^2 \ge \gamma_2\int\limits_{M\cap B(g,r)} |\nabla_h\varphi|\,d\mathscr{H}_e^2 \ge \gamma_1\frac{\gamma_3^{-1}r^4}{r},$$

откуда

$$\mathscr{H}_e^2(B(g,r)\cap M) \ge \gamma r^3, \tag{25}$$

где $\gamma=\alpha_t\gamma_1\gamma_2^{-1}\gamma_3^{-1}$.

Шаг IV. Результаты предыдущих шагов позволяют применить п. (3) теоремы 8.7 из [31] (положим $q=f(g)$ в (21)), откуда выводим, что отображение

$f : M \to \mathbb{H}^1$ можно переопределить на множестве нулевой $\mathscr{H}_e^2$-меры так, чтобы оно удовлетворяло неравенству

$$\tilde{d}_c(f(g), f(g')) \le C d_c(g, g')^{1/4} \Bigg(\int\limits_{M \cap B(g,2r)} \mu^4 \, d\mathscr{H}_e^2 \Bigg)^{1/4} \tag{26}$$

для всех $g \in M$ и $g' \in B(g, r) \cap M$, где $r \in (0, R/2)$, и некоторой постоянной C, которую можно считать зависящей только от M, поскольку γ_1 и R_0, как сказано в [32, теорема 1.3], непрерывно зависят от $g \in M$, а M компактно.

Из (26) вытекает непрерывность (и даже гёльдеровость) отображения $f : M \to \mathbb{H}^1$.

(ii) Шаг I. Пусть $A \subset M$ и $\mathscr{H}_{sr}^3(A) = 0$. В силу компактности M можно считать, что множество A содержится в шаре $B(g, R/4)$ с центром $g \in M$, где R определено на шаге III п. (i). Взяв достаточно малое $\varepsilon > 0$, подберем открытое в $\mathcal{RT}$ множество U со следующими свойствами: $A \subset U$, $\overline{U}$ — компактное множество в $B(g, R/2)$, $\mathscr{H}_{sr}^3(U \cap M) < \varepsilon$.

Группа поворотов-сдвигов, рассматриваемая как метрическое пространство с расстоянием d_c и мерой $\mathscr{H}_{sr}^4$, является пространством однородного типа, поскольку в силу [17, предложение 2.2], замечаний 2 и 3 мера $\mathscr{H}_{sr}^4$ согласована с метрикой d_c через условие удвоения. В упомянутых пространствах справедлива лемма Уитни о покрытии (см. [33, (1.67)], где в формулировке речь идет об однородных группах, однако из доказательства видно, что нужны лишь свойства метрики и условие удвоения). Применяя ее, получаем, что существует последовательность точек $\{g_i \in U\}_{i\in\mathbb{N}}$ и чисел $\{r_i > 0\}_{i\in\mathbb{N}}$ таких, что

(W1) $U = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} B(g_i, r_i)$;

(W2) $B(g_i, 5r_i) \subset U$ для всех $i \in \mathbb{N}$;

(W3) $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} I_{B(g_i,5r_i)}(g') \le Q$ для любой точки $g' \in U$, где постоянная Q зависит только от структурных констант метрического пространства $\big(\mathcal{RT}, d_c, \mathscr{H}_{sr}^4\big)$.

Отметим, что $5r_i < R$, поскольку $B(g_i, 5r_i) \subset U \subset B(g, R/2)$.

Шаг II. Построим шары, покрывающие множество A, центры которых принадлежат A. Для этого рассмотрим шары $B(g_i, r_i)$ такие, что $B(g_i, r_i) \cap A \ne \varnothing$. Возьмем любую точку $g_i' \in B(g_i, r_i) \cap A$. Шары $B(g_i', 2r_i)$ покрывают множество A, так как согласно неравенству треугольника $B(g_i, r_i) \subset B(g_i', 2r_i)$. Используя (26) и (25), получаем оценку на диаметр образа шара:

$$(\operatorname{diam} f(B(g_i', 2r_i) \cap M))^3 \le C_1 \mathscr{H}_e^2(B(g_i', 2r_i) \cap M)^{1/4} \Bigg(\int\limits_{M \cap B(g_i', 4r_i)} \mu^4 \, d\mathscr{H}_e^2 \Bigg)^{3/4},$$

где постоянная C_1 не зависит от шаров $B(g_i', 2r_i)$.

Шаг III. Установим равенство $\mathscr{H}_c^3(f(A)) = 0$, которое равносильно следующему соотношению для вместимости по Хаусдорфу: $\mathscr{H}_{c,\infty}^3(f(A)) = 0$. Индекс «$c$» означает, что мера и вместимость, которые рассматриваются на подмножествах группы Гейзенберга, вычисляются относительно метрики $\tilde{d}_c$. Справедлива цепочка неравенств, где постоянные C_2 и C_3 снова не зависят от шаров:

$$\mathscr{H}^3_{c,\infty}(f(A)) \le C_1 \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^2_e(B(g'_i, 2r_i)\cap M)^{1/4}\Biggl(\int\limits_{M\cap B(g'_i,4r_i)} \mu^4\, d\mathscr{H}^2_e\Biggr)^{3/4}$$

$$\le C_2 \sum_{i\in\mathbb{N}} \int\limits_{M\cap B(g'_i,4ri)} (1+\mu^4)\, d\mathscr{H}^2_e \le C_3 \int\limits_{M\cap U} (1+\mu^4)\frac{|\nabla\varphi|}{|\nabla_h\varphi|}\, d\mathscr{H}^3_{sr}.$$

В этой цепочке первое неравенство вытекает из оценки шага II, второе получено с помощью неравенства Юнга $ab \le a^p/p + b^{p'}/p'$ с показателями $p = 4, p' = 4/3$, третье следует из включения $B(g'_i, 4r_i) \subset B(g_i, 5r_i)$, п. (W3) и предложения 3.

Для завершения доказательства осталось в неравенстве $\mathscr{H}^3_{sr}(U\cap M) < \varepsilon$ устремить ε к нулю.

(iii) Если $g \in M\setminus\chi$, то согласно [19, теорема 3.11(II)]

$$\mathscr{H}^2_e(\mathrm{Box}_2(g,r)\cap M) = C_1\frac{|\nabla\varphi(g)|}{|\nabla_h\varphi(g)|} r^3(1+o(1)) \quad \text{при } r\to 0,$$

где $o(1)\to 0$ равномерно по $g\in\mathcal{U}\Subset\mathcal{RT}$, а постоянная C_1 зависит только от показателей размерности. С учетом замечания 2 отсюда следует, что мера $\mathscr{H}^2_e$ удовлетворяет условию удвоения для шаров с достаточно малыми радиусами:

$$\mathscr{H}^2_e(B(g,2r)\cap M) \le C_2\mathscr{H}^2_e(B(g,r)\cap M)$$

при $0 < r < r_1$ и $g\in\mathcal{K}$, где $\mathcal{K}\subset M\setminus\chi$ — компактное множество. Это позволяет применить теорему Лебега [34, следствие 3], установленную в [34] для метрических пространств однородного типа: для $\mathscr{H}^2_e$-п. в. $g\in M\setminus\chi$

$$\varlimsup_{g'\to g,\, g'\in M} \frac{\tilde d_c(f(g'), f(g))}{d_c(g', g)}$$

$$\le C_3\Biggl(\varlimsup_{g'\to g,\, g'\in M} \frac{1}{\mathscr{H}^2_e(B(g',2r)\cap M)} \int\limits_{M\cap B(g',2r)} \mu^4\, d\mathscr{H}^2_e\Biggr) < \infty,$$

где первое неравенство следует из (25), (26). Для завершения доказательства осталось вспомнить (15) и предложение 3.

(iv) Шаг I. Из [22, предложение 6.2] следует, что $\mathcal{O} = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} T_i$, где $\mathcal{O} = \operatorname{spt}\varphi \subset \Omega$, $\mathscr{H}^4_{sr}(T_0) = 0$, и $f : T_i \to \mathbb{H}^1$ липшицево для каждого $i \ge 1$. Согласно [22, теорема 4.1] отображение $f : T_i \to \mathbb{H}^1$ hc-дифференцируемо п. в. на T_i, т. е. для $\mathscr{H}^4_{sr}$-п. в. $g\in T_i$ существует (горизонтальный) гомоморфизм $Df(g) : \mathscr{G}^g \to \mathscr{G}^{f(g)}$ локальных групп Карно такой, что

$$\tilde d_c(f(g'), Df(g)[g']) = o(d_c(g, g')) \quad \text{при } T_i\cap\mathscr{G}^g \ni g' \to g.$$

Шаг II. Обозначим $\Sigma = \bigl\{g\in M \mid \varlimsup\limits_{g'\to g,\, g'\in M} \frac{\tilde d_c(f(g'),f(g))}{d_c(g',g)} = \infty\bigr\}$. Из п. (iii) следует, что $\mathscr{H}^3_{sr}(\Sigma) = 0$. П. (iii) означает также, что каждая точка $g\in M\setminus\Sigma$ принадлежит множествам

$$A_k = \left\{ g\in M \mid \frac{\tilde d_c(f(g), f(g'))}{d_c(g, g')} \le k \quad \forall g'\in B(g, k^{-1})\cap M \right\}, \quad k\in\mathbb{N},$$

начиная с некоторого $k_0(g)$. Легко видеть, что $A_k \subset A_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Фиксируем $k \in \mathbb{N}$ и представим A_k с точностью до множества нулевой $\mathscr{H}^3_{sr}$-меры как объединение дизъюнктного набора непустых множеств $A_{k,1} \subset B\big(g^k_1, r_1\big)$, $A_{k,2} \subset B\big(g^k_2, r_2\big), \dots$, где $g^k_j \in A_k$ и $r_j < (2k)^{-1}$ для всех $j \in \mathbb{N}$, т. е. $A_k = Z_k \cup \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} A_{k,j}$, где $\mathscr{H}^3_{sr}(Z_k) = 0$. Тогда ограничение $f_{k,j} = f|_{A_{k,j}}$ удовлетворяет условию Липшица для всех j и продолжается по непрерывности до отображения $\bar{f}_{k,j} : \overline{A}_{k,j} \to \mathbb{H}^1$.

Шаг III. Проверим корректность этого продолжения: если $(M\setminus\Sigma)\cap(\overline{A}_{k,j} \setminus A_{k,j}) \neq \varnothing$, то $\bar{f}_{k,j} : (E \setminus \Sigma) \cap \overline{A}_{k,j} \to \mathbb{H}^1$ совпадает с $f : (E \setminus \Sigma) \cap \overline{A}_{k,j} \to \mathbb{H}^1$. Пусть $g \in (M \setminus \Sigma) \cap (\overline{A}_{k,j} \setminus A_{k,j})$. Тогда $g \in A_l$ для некоторого $l > k$, откуда $A_l \cap B(g, l^{-1}) \supset A_{k,j} \cap B(g, l^{-1})$, поэтому

$$f(g) = \lim_{g'\to g,\, g'\in A_l} f(g') = \lim_{g'\to g,\, g'\in A_{k,j}} f(g') = \bar{f}_{k,j}(g).$$

Шаг IV. Фиксируем $i \geq 1$. Пусть $g \in (M \setminus \Sigma) \cap \overline{A}_{k,j} \cap T_i$ — точка hc-дифференцируемости липшицева отображения $\bar{f}_{k,j} : \overline{A}_{k,j} \cap T_i \to \mathbb{H}^1$ и точка $\mathscr{H}^3_{sr}$-плотности[3)] множества $\overline{A}_{k,j} \cap T_i$. Утверждение п. (iv) будет установлено, если покажем, что g — точка hc-дифференцируемости отображения $f : M \to \mathbb{H}^1$.

По определению $A_{k,j}$ неравенство $\tilde{d}_c(f_{k,j}(g''), f_{k,j}(g')) \leq k d_c(g'', g')$ выполняется для всех $g'' \in A_{k,j}$ и $g' \in B(g'', k^{-1}) \cap M$. Продолжив это неравенство на $\overline{A}_{k,j}$ по непрерывности, получим, что

$$\tilde{d}_c(\bar{f}_{k,j}(g''), f_{k,j}(g')) \leq k d_c(g'', g')$$

для всех $g'' \in \overline{A}_{k,j} \cap T_i$ и всех $g' \in B(g'', k^{-1}) \cap M$.

Шаг V. Поскольку g — точка $\mathscr{H}^3_{sr}$-плотности множества $\overline{A}_{k,j}\cap T_i$, для точки $g' \in M \cap \mathscr{G}^g$ ввиду [22, свойство 2.1] найдется точка $g'' \in \overline{A}_{k,j} \cap T_i$ такая, что

$$d_c(g'', g') = o(d_c(g, g')) \quad \text{при } g' \to g.$$

Обозначим hc-дифференциал отображения $\bar{f}_{k,j}$ в точке g через $L = Df(g)$. В достаточно малой окрестности точки g имеем

$$\begin{aligned}\tilde{d}_c(f(g'), Lg') &\leq \tilde{d}_c(f_{k,j}(g'), \bar{f}_{k,j}(g'')) + \tilde{d}_c(\bar{f}_{k,j}(g''), Lg'') + \tilde{d}_c(Lg'', Lg')\\ &\leq k d_c(g', g'') + o(d_c(g, g'')) + \tilde{d}_c(Lg'', Lg') = o(d_c(g, g')) + \tilde{d}_c(Lg'', Lg').\end{aligned}$$

П. (iv) будет установлен, если покажем, что

$$\tilde{d}_c(Lg', Lg'') = o(d_c(g, g')) \quad \text{при } g' \to g.$$

Согласно локальной аппроксимационной теореме (см., например, [17, теорема 2.7]) имеем

$$\tilde{d}_c(Lg', Lg'') = \tilde{d}^{f(g)}_c(Lg', Lg'') + o(\tilde{d}^{f(g)}_c(f(g), Lg')) \quad \text{при } g' \to g. \tag{27}$$

[3)] Относительно меры $\mathscr{H}^3_{sr}$ почти каждая точка множества $((M \setminus \Sigma) \cap \overline{A}_{k,j} \cap T_i) \setminus \chi$ является точкой плотности, поскольку на любой компактной части этого множества мера удовлетворяет условию удвоения. В силу (14) $\mathscr{H}^3_{sr}$-почти все точки множества $(M \setminus \Sigma) \cap \overline{A}_{k,j} \cap T_i$ являются его точками плотности.

Оценим первое слагаемое в этом равенстве. Ввиду однородности гомоморфизма L относительно растяжений на локальных группах Карно, а также его непрерывности[4)], при $g' \neq g''$ получаем

$$\frac{\tilde{d}_c^{f(g)}(Lg', Lg'')}{d_c^g(g', g'')} \leq \sup_{u \neq v} \frac{\tilde{d}_c^{f(g)}(Lu, Lv)}{d_c^g(u, v)}$$
$$= \sup_{w \neq \mathbf{0}} \frac{\tilde{d}_c^{f(g)}(\mathbf{0}, Lw)}{d_c^g(\mathbf{0}, w)} = \sup_{d_c^g(\mathbf{0}, w)=1} \tilde{d}_c^{f(g)}(\mathbf{0}, Lw) = C < \infty.$$

По локальной аппроксимационной теореме

$$d_c^g(g', g'') = d_c(g', g'') + o(d_c(g, g')) \quad \text{при } g' \to g.$$

Таким образом,

$$\tilde{d}_c^{f(g)}(Lg', Lg'') \leq C d_c^g(g', g'') = C d_c(g', g'') + o(d_c(g, g')) = o(d_c(g, g')) \quad \text{при } g' \to g.$$

Перейдем ко второму слагаемому в (27). Из неравенства треугольника и определения hc-дифференцируемости выводим

$$\tilde{d}_c^{f(g)}(f(g), Lg') \leq \tilde{d}_c^{f(g)}(f(g), f(g')) + \tilde{d}_c^{f(g)}(f(g'), Lg')$$
$$= \tilde{d}_c^{f(g)}(f(g), f(g')) + o(d_c(g, g')) \quad \text{при } g' \to g.$$

Локальная аппроксимационная теорема и липшицевость f на $\overline{A}_{k,j} \cap T_i$ дают

$$\tilde{d}_c^{f(g)}(f(g), f(g')) = \tilde{d}_c(f(g), f(g')) + o(\tilde{d}_c(f(g), f(g')))$$
$$\leq k d_c(g, g') + o(d_c(g, g')) \quad \text{при } g' \to g.$$

Следовательно,

$$o\big(\tilde{d}_c^{f(g)}(f(g), Lg')\big) = o(d_c(g, g')) \quad \text{при } g' \to g.$$

(v) Благодаря левым сдвигам можно считать, что $g = \mathbf{0}$ — это точка дифференцируемости (в смысле п. (iv)) отображения f. Напомним, что $T_{\mathbf{0}}M$ рассматриваем как подпространство в $T_{\mathbf{0}}\mathcal{RT} = T_{\mathbf{0}}\mathscr{G}^{\mathbf{0}}$. Пусть вектор $\xi = \sum\limits_{i=1}^{3} \xi_i \widehat{X}_i^{\mathbf{0}}(\mathbf{0}) = \sum\limits_{i=1}^{3} \xi_i X_i(\mathbf{0})$ принадлежит множеству $T_{\mathbf{0}}M \cap \mathrm{Box}_2(\mathbf{0}, r)$, где r мало настолько, что выполняется равенство (17). Тогда $\Xi = \exp\bigg(\sum\limits_{i=1}^{3} \xi_i \widehat{X}_i^{\mathbf{0}}\bigg)(\mathbf{0})$ является элементом группы $\mathscr{G}^{\mathbf{0}}$. Подчеркнем, что точка Ξ не обязательно попадает на поверхность M. В результате возникает «зазор» между множествами $Df(\mathbf{0})(P_r)$ и $Df(\mathbf{0})(M_r)$, где $P_r = T_{\mathbf{0}}M \cap \mathrm{Box}_2(0, r)$ и $M_r = M \cap \mathrm{Box}_2(0, r)$. Напомним снова, что символ $Df(\mathbf{0})$ обозначает как гомоморфизм локальных групп Карно $\mathscr{G}^{\mathbf{0}}$ и $\mathscr{G}^{f(\mathbf{0})}$, так и линейное отображение пространств $T_{\mathbf{0}}\mathcal{RT}$ и $T_{f(\mathbf{0})}\mathbb{H}^1$. В этом пункте покажем, что этот «зазор» незначителен.

Положим $|\Xi| = d_2^{\mathbf{0}}(\mathbf{0}, \Xi) = \max\{(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^{1/2}, |\xi_3|^{1/2}\}$. Тогда $|\xi_1| = O(|\Xi|)$, $|\xi_2| = O(|\Xi|)$, $|\xi_3| = O(|\Xi|^2)$ при $|\Xi| \to 0$. Пусть $e : T_{\mathbf{0}}M \to M$ — экспоненциальное отображение касательной плоскости $T_{\mathbf{0}}M$ на поверхность M. При $|\Xi| \to 0$ имеем

$$e(\xi) = \exp\big((\xi_1 + o(|\Xi|))\widehat{X}_1^{\mathbf{0}} + (\xi_2 + o(|\Xi|))\widehat{X}_2^{\mathbf{0}} + (\xi_3 + o(|\Xi|^2))\widehat{X}_3^{\mathbf{0}}\big)(\mathbf{0}).$$

[4)] Напомним, что гомоморфизм групп Ли предполагается непрерывным.

Ввиду (8) матрица $Df(\mathbf{0})$ имеет вид

$$Df(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 \\ \delta_3 & \delta_4 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_5 \end{pmatrix}.$$

Для определенности примем $k = 1$. Тогда

$$\mathrm{Pr}_{f(\mathbf{0}),1}\, Df(\mathbf{0})[\Xi] = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_3\xi_1 + \delta_4\xi_2 \\ \delta_5\xi_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Pr}_{f(\mathbf{0}),1}\, Df(\mathbf{0})[e(\xi)] = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_3\xi_1 + \delta_4\xi_2 + o(|\Xi|) \\ \delta_5\xi_3 + o(|\Xi|^2) \end{pmatrix}.$$

Отсюда выводим, что расстояние между этими элементами группы Гейзенберга удовлетворяет оценке

$$\tilde{d}_2(\mathrm{Pr}_{f(\mathbf{0}),1}\, Df(\mathbf{0})[\Xi], \mathrm{Pr}_{f(\mathbf{0}),1}\, Df(\mathbf{0})[e(\xi)]) = o(|\Xi|) \quad \text{при } |\Xi| \to 0,$$

из которой следует, что

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathscr{H}_e^2(\mathrm{Pr}_{f(\mathbf{0}),1} \circ Df(\mathbf{0}))(P_r)}{\mathscr{H}_e^2(P_r)} = \lim_{r\to 0} \frac{\mathscr{H}_e^2(\mathrm{Pr}_{f(\mathbf{0}),1} \circ Df(\mathbf{0}))(M_r)}{\mathscr{H}_e^2(M_r)},$$

поскольку риманова метрика мажорируется субримановой. Согласно п. (1) предложения 4 риманов дифференциал отображения $l_{f(\mathbf{0})} \circ \mathbf{Pr}_1$ в $\mathbf{0}$ равен $\mathbf{Pr}_{f(\mathbf{0}),1}$, следовательно,

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathscr{H}_e^2(\mathrm{Pr}_{f(\mathbf{0}),1} \circ Df(\mathbf{0}))(M_r)}{\mathscr{H}_e^2(M_r)} = \lim_{r\to 0} \frac{\mathscr{H}_e^2(f(\mathbf{0})(\mathbf{Pr}_1 \circ Df(\mathbf{0}))(M_r))}{\mathscr{H}_e^2(M_r)}.$$

Для завершения доказательства осталось вспомнить равенство (19).

(vi) Шаг I. Фиксируем точку $g \in M$. Можно считать, что в ней конечен предел из п. (iii), значит, для некоторого $k > 0$ справедливо неравенство $\tilde{d}_c(f(g), f(g')) \le k d_c(g', g)$ для всех $g' \in B(g, 1/k) \cap M$, откуда

$$\tilde{d}_c(f(g), f(g')) = O(d_c(g, g')) \quad \text{при } B(g, 1/k) \cap M \ni g' \to g. \tag{28}$$

Также можно полагать, что g — точка дифференцируемости в смысле п. (iv), т. е.

$$\tilde{d}_c(f(g'), Df(g)[g']) = o(d_c(g, g')) \quad \text{при } \mathscr{G}^g \cap M \ni g' \to g. \tag{29}$$

Из неравенства треугольника и (28), (29) следует, что в достаточно малой окрестности точки g

$$\tilde{d}_c(f(g), Df(g)[g']) = O(d_c(g, g')) \quad \text{при } M \ni g' \to g. \tag{30}$$

Легко убедиться непосредственным вычислением (как в п. (v)), что соотношение (29) при наличии оценок (28), (30) влечет равенство

$$\tilde{d}_c(\mathbf{Pr}_k(f(g')), \mathbf{Pr}_k(Df(g)[g'])) = o(d_c(g, g')) \quad \text{при } M \ni g' \to g,$$

из которого следует, что

$$\mathscr{H}_{sr}^3((\mathbf{Pr}_k \circ f)(M_r)) = (1 + o(1))\mathscr{H}_{sr}^3(\mathbf{Pr}_k(Df(g)(M_r))) \quad \text{при } r \to 0, \tag{31}$$

поскольку в точках дифференцируемости (в смысле п. (iv)) отображения f имеем

$$\mathscr{H}^3_{sr}(f(M_r)) = (1+o(1))\mathscr{H}^3_{sr}(Df(g)(M_r)) \quad \text{при } r \to 0.$$

Шаг II. Если $A \subset \mathbb{H}^1_{q,k}$, то $\mathscr{H}^3_{sr}(A) = C_2\mathscr{H}^2_e(A)$, где C_2 — постоянная из предложения 3. В самом деле, пусть для определенности $k=1$. Тогда в предложении 3 следует положить $\varphi((a,b,c)) = a$, $(a,b,c) \in \mathbb{H}^1$. Получим $\nabla_h\varphi((a,b,c)) = \nabla\varphi((a,b,c)) = A(a,b,c)$.

Сделаем еще одно наблюдение: если $q' \in \mathbb{H}^1_{\mathbf{0},k}$ и $q \in \mathbb{H}^1$, то, как легко видеть, $q\cdot q' \in \mathbb{H}^1_{q,k}$.

Шаг III. С учетом (31), инвариантности субримановой меры относительно левого сдвига, шага II, предложения 3 и п. (v) получаем

$$J(g, \mathbf{Pr}_k \circ f|_M) = \lim_{r\to 0}\frac{\mathscr{H}^3_{sr}((\mathbf{Pr}_k \circ f)(M_r))}{\mathscr{H}^3_{sr}(M_r)} = \lim_{r\to 0}\frac{\mathscr{H}^3_{sr}(\mathbf{Pr}_k(Df(g)(M_r)))}{\mathscr{H}^3_{sr}(M_r)}$$
$$= \lim_{r\to 0}\frac{\mathscr{H}^3_{sr}(f(g)\,\mathbf{Pr}_k(Df(g)(M_r)))}{\mathscr{H}^3_{sr}(M_r)} = \lim_{r\to 0}\frac{C_2\mathscr{H}^2_e(f(g)\,\mathbf{Pr}_k(Df(g)(M_r)))}{C_2\sqrt{\nu_1^2(g)+\nu_2^2(g)}\mathscr{H}^2_e(M_r)}$$
$$= \frac{|\det(\mathbf{Pr}_{f(g),k} \circ Df(g)|_{T_gM})|}{\sqrt{\nu_1^2(g)+\nu_2^2(g)}}.$$

(vii) Согласно п. (ii) настоящего утверждения и п. (2) предложения 4 отображение $\mathbf{Pr}_k \circ f|_M : M \to \mathbb{H}^1_{\mathbf{0},k}$ обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина. Кроме того, оно непрерывно, а искажение меры получено в п. (vi). Это позволяет стандартными рассуждениями получить формулу замены переменной. $\square$

Равенство (12) будет установлено, если проделаем вычисления, вполне аналогичные тем, которые проведены в цепочке равенств (2.29) в [12]. Пп. (vi) и (vii) предложения 5 вместе с соотношениями (16) и (18) приводят к выкладке:

$$\int\limits_M (\nu_1(g)A_{1k}(g) + \nu_2(g)A_{2k}(g))\,d\mathscr{H}^2_e(g) = \int\limits_M \frac{\det(\mathrm{Pr}_{f(g),k} \circ Df(g)|_{T_gM})}{\sqrt{\nu_1^2(g)+\nu_2^2(g)}}\,d\mathscr{H}^3_{sr}(g)$$
$$= \int\limits_M J(g, \mathbf{Pr}_k \circ f|_M)\,\mathrm{sign}(\det(\mathrm{Pr}_{f(g),k} \circ Df(g)|_{T_gM}))\,d\mathscr{H}^3_{sr}(g)$$
$$= \int\limits_{\mathbb{H}^1_{\mathbf{0},k}} \sum_{g\in f^{-1}(q)} \mathrm{sign}(\det(\mathrm{Pr}_{f(g),k} \circ Df(g)|_{T_gM}))\,d\mathscr{H}^3_{sr}(q)$$
$$= \int\limits_{\mathbb{H}^1_{\mathbf{0},k}} \deg(q, \mathbf{Pr}_k \circ f|_M)\,d\mathscr{H}^3_{sr}(q) = 0,$$

где последнее равенство следует из того, что отображение $\mathbf{Pr}_k \circ f|_M : M \to \mathbb{H}^1_{\mathbf{0},k}$ гомотопно постоянному, поэтому его топологическая степень равна 0.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
2. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 3. С. 629–658.
3. *Bojarski B., Iwaniec T.* Analytic foundations of the theory of quasiconformal mappings in $\mathbf{R}^n$ // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Math. 1983. V. 8, N 2. P. 257–324.

4. *Mostow G. D.* Strong rigidity of locally symmetric spaces. Princeton, NJ.: Princeton Univ. Press, 1973. (Ann. Math. Studies; № 78).
5. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. of Math. 1989. V. 129, N 2. P. 1–60.
6. *Korányi A., Reimann H. M.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. 1995. V. 111, N 1. P. 1–87.
7. *Водопьянов С. К.* Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1269–1295.
8. *Heinonen J., Holopainen I.* Quasiregular maps on Carnot groups // J. Geom. Anal. 1997. V. 7, N 1. P. 109–148.
9. *Даирбеков Н. С.* Свойство морфизма для отображений с ограниченным искажением на группе Гейзенберга // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 811–823.
10. *Даирбеков Н. С.* Отображения с ограниченным искажением на группах Гейзенберга // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 3. С. 567–590.
11. *Dairbekov N. S.* Mappings with bounded distortion of two-step Carnot groups // Proceedings on Analysis and Geometry (S. K. Vodopyanov, ed.). Novosibirsk: Sobolev Inst. Press, 2000. P. 122–155.
12. *Vodopyanov S. K.* Foundations of the theory of mappings with bounded distortion on Carnot groups // Contemp. Math. 2007. V. 424. P. 303–344.
13. *Agrachev A., Barilari D.* Sub-Riemannian structures on 3D Lie groups // J. Dynam. Control Systems. 2012. V. 18, N 1. P. 21–44.
14. *Citti G., Sarti A.* A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space // J. Math. Imaging Vis. 2006. V. 24, N 3. P. 307–326.
15. *Hladky R., Pauls S.* Minimal surfaces in the roto-translation group with applications to a neuro-biological image completion model // J. Math. Imaging Vis. 2010. V. 36, N 1. P. 1–27.
16. *Fässler K., Koskela P., Le Donne E.* Nonexistence of quasiconformal maps between certain metric measure spaces // International Mathematics Research Notices. 2014. http://imrn.oxfordjournals.org/content/early/2014/09/20/imrn.rnu153.full.pdf+html.
17. *Basalaev S. G., Vodopyanov S. K.* Approximate differentiability of mappings of Carnot–Caratheodory spaces // Eurasian Math. J. 2013. V. 4, N 2. P. 10–48.
18. *Mitchell J.* On Carnot–Caratheodory metrics // J. Differ. Geom. 1985. V. 21. P. 35–45.
19. *Karmanova M., Vodopyanov S.* Coarea formula for smooth contact mappings of Carnot — Caratheodory spaces // Acta Appl. Math. 2013. V. 128. P. 67–111.
20. *Гариепи Р., Эванс Л.* Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск: Науч. книга, 2002.
21. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. М.: Наука, 1970.
22. *Vodopyanov S. K.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // Contemp. Math. 2007. V. 424. P. 247–301.
23. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.
24. *Vodop'yanov S. K.* $\mathcal{P}$-Differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Proceedings on Analysis and Geometry (S. K. Vodopyanov, ed.). Novosibirsk: Sobolev Institute Press, 2000. P. 603–670.
25. *Водопьянов С. К., Исангулова Д. В.* Дифференцируемость отображений пространств Карно — Каратеодори в топологии Соболева и BV-топологии // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 46–67.
26. *Водопьянов С. К.* Дифференцируемость отображений в геометрии многообразий Карно // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 251–271.
27. *Karmanova M., Vodop'yanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas // Analysis and mathematical physics, trends in mathematics. Basel/Switzerland: Birkhäuser-Verl., 2009. P. 233–335.
28. *Kaplan A.* Fundamental solutions for a class of hypoelliptic PDE generated by composition of quadratic forms // Trans. Amer. Math. Soc. 1980. V. 258, N 1. P. 147–153.
29. *Derridj M.* Un probléme aux limites pour une classe d'opérateurs du second ordre hypoelliptiques // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 1971. V. 21, N 4. P. 99–148.
30. *Derridj M.* Sur un théorème de traces // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 1972. V. 22, N 2. P. 73–83.
31. *Hajłasz P.* Sobolev spaces on metric-measure spaces // Contemp. Math. 2003. V. 338. P. 173–218.

32. *Capogna L., Garofalo N.* Ahlfors type estimates for perimeter measures in Carnot — Carathéodory spaces // J. Geom. Anal. 2006. V. 16, N 4. P. 455–497.

33. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton NJ.: Princeton Univ. Press, 1982. (Mathematical Notes; V. 28).

34. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Функции множества и их приложения в теории пространств Лебега и Соболева. I // Мат. тр. 2003. Т. 6, № 2. С. 14–65.

Статья поступила 19 декабря 2013 г., окончательный вариант — 1 июня 2015 г.

Трямкин Максим Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
maxtryamkin@yandex.ru