Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2015. Том 56, № 6

УДК 512.540+510.5

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЧТИ c–ПРОСТЫХ КОЛЕЦ

А. Н. Хисамиев

Аннотация. Построено семейство почти c-простых колец, в наследственно конечной надстройке над которыми существуют универсальные Σ-функции.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.617

Ключевые слова: наследственно конечное допустимое множество, универсальная Σ-функция, почти c-простая модель, кольцо.

В настоящее время общепризнанно, что одним из важных обобщений понятия вычислимости является Σ-определимость (обобщенная вычислимость) в допустимых множествах. Это обобщение дало возможность исследовать проблемы вычислимости над произвольными алгебраическими системами, например, над полем вещественных чисел. Наиболее важные результаты по теории вычислимости в допустимых множествах приведены в монографии Ю. Л. Ершова [1].

В [2, 3] понятие Σ-определимости позволило сформулировать новую концепцию теоретического программирования, так называемое семантическое программирование, в которой программа является одновременно своей же спецификацией, а исполнение ее сводится к проверке истинности утверждения на алгебраической системе.

Одним из принципиальных результатов классической теории вычислимости является существование универсальной частично вычислимой функции. Как известно (см. [1]), в любом допустимом множестве конечной сигнатуры существует универсальный Σ-предикат, но это неверно для Σ-функций. В [4] построена модель $\mathfrak{M}$ такая, что в наследственно конечном допустимом множестве $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ не существует универсальной Σ-функции. Поэтому представляет интерес нахождение условия на модель $\mathfrak{M}$ для существования универсальной Σ-функции в наследственно конечной надстройке $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ над $\mathfrak{M}$. Отметим, что существование универсальной Σ-функции дает возможность в семантическом программировании получить универсальный язык программирования для Σ-функций на основе Σ-программ. В [1] доказано, что если $\mathfrak{M}$ — модель разрешимой и модельно полной теории, то в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ существует универсальная Σ-функция. В [5–7] для одного класса K моделей найдены необходимые и достаточные условия существования универсальной Σ-функции в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M} \in K$. В [8] установлено, что наследственно конечная списочная надстройка $\mathbb{HW}(\mathbb{R}_{\exp})$ над полем вещественных чисел с экспонентой удовлетворяет свойству униформизации, и как следствие получено существование универсальной

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–860.2014.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта АНФ_а № 13–01–91001).

Σ-функции в такой надстройке. Справедливость свойства униформизации для наследственно конечных настроек $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ и $\mathbb{HF}(\mathbb{Q}_p)$ над полями вещественных и p-адических показана в [9, 10]. В [11] построена абелева группа без кручения A такая, что в $\mathbb{HF}(A)$ не существует универсальной Σ-функции. В [12, 13] введено понятие Σ-ограниченной модели и получено необходимое и достаточное условие существования универсальной Σ-функции в наследственно конечной надстройке над такой моделью. Доказано, что любой линейный порядок, алгебра Ершова и абелева p-группа являются Σ-ограниченными моделями и в наследственно конечных надстройках над ними существуют универсальные Σ-функции. В [14] построено дерево T высоты 4 такое, что в $\mathbb{HF}(T)$ не существует универсальной Σ-функции. В [15, 16] введено понятие Σ-однородной модели и получено необходимое и достаточное условие существования универсальной Σ-функции в наследственно конечном допустимом множестве над такой моделью. Построено семейство Σ-однородных колец, в наследственно конечном допустимом множестве над которыми существуют универсальные Σ-функции. Приведен пример Σ-однородного кольца, над которым отсутствует универсальная Σ-функция.

В [17] введено понятие c-простой теории, а в [18] — понятие почти c-простой модели и доказано существование универсальной Σ-функции в наследственно конечной надстройке над такой моделью. Построены семейства почти c-простых деревьев и эквивалентностей.

В данной статье построено семейство почти c-простых колец.

Мы придерживаемся терминологии и обозначений по допустимым множествам монографии [1], по кольцам — [19, 20] и статьи [18].

Пусть дана модель $\mathfrak{M}$ конечной сигнатуры σ_0 и для каждого конечного подмножества $M_0 \subseteq M$ существует однозначно определенное конечное подмножество $[M_0] \subseteq M$ такое, что $M_0 \subseteq [M_0]$ и $[[M_0]] = [M_0]$. Множество $[M_0]$ называется *замыканием множества* M_0. Если $[M_0] = M_0$, то M_0 назовем *замкнутым множеством.*

Приведем определение почти c-простой модели из [18].

Определение 1. Пусть для модели $\mathfrak{M}$ конечной сигнатуры σ_0 и ее подмодели $\mathfrak{N} \leq \mathfrak{M}$ справедливы следующие условия.

1. $\mathfrak{N}$ — модель c-простой теории T, и ее носитель N является Σ-подмножеством в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

2. В $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ существуют Σ-формулы без параметров, определяющие Δ-предикат $\mathfrak{B} \subseteq \mathscr{P}_\omega(N) \times \mathscr{P}_\omega(N)$, для которого справедливо

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(x, y \cup z) \ \&\ x \subseteq y,\ x \subseteq z \to \mathfrak{B}(x, y) \ \&\ \mathfrak{B}(x, z).$$

3. Модель $\mathfrak{M}$ локально вложима в $\mathfrak{N}$.

Пусть $A \subseteq M$, $B \subseteq N$ и $\alpha : A \to B$ — изоморфизм. Тогда

(a) если A замкнуто, то для любого конечного $A^1 \supseteq A$ существует вложение $\psi : A^1 \to \mathfrak{N}$, продолжающее α, такое, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(B, \psi A^1)$;

(b) пусть вложения $\varphi^\varepsilon : A^\varepsilon \to \mathfrak{N}$, $A^\varepsilon \supseteq A$, $\varepsilon < 2$, продолжают α и $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(B, \varphi^\varepsilon A^\varepsilon)$. Тогда существует вложение $\psi : (A^0 \cup A^1) \to \mathfrak{N}$, продолжающее α, для которого $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(B, \psi(A^0 \cup A^1))$;

(c) для любого $B^1 \supseteq B$ такого, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(B, B^1)$, существует вложение $\psi : B^1 \to \mathfrak{M}$, продолжающее α^{-1}.

Тогда $\mathfrak{M}$ назовем *почти* c-*простой* моделью.

В [18] доказана

Теорема 1. *В наследственно конечной надстройке $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ над почти c-простой моделью $\mathfrak{M}$ существует универсальная Σ-функция.*

Введем следующий класс колец.

Для любого конечного множества $\pi = \{p_0, \dots, p_{n-1}\}$ простых чисел определим кольцо F_π следующим равенством:

$$F_\pi = C^\omega_{p_0^{\alpha_0}} \oplus \dots \oplus C^\omega_{p_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}, \tag{1}$$

где $C_{p_i^{\alpha_i}}$ — поле степени $\alpha_i < \omega$ характеристики p_i, $C^\omega_{p_i^{\alpha_i}}$ — прямая сумма ω копий поля $C_{p_i^{\alpha_i}}$, $i < n$.

Покажем, что кольцо F_π является моделью некоторой c-простой теории T_π. Для каждого $i < n$ зафиксируем неприводимый полином $f_i(x) = x^{\alpha_i - 1} + m_1 x^{\alpha_i - 2} + \dots + m_{\alpha_i - 1}$ над простым полем C_{p_i} степени α_i. Пусть $\nu_i \rightleftharpoons p_i^{\alpha_i}$, $F_{\nu_i} \rightleftharpoons C^\omega_{\nu_i}$. Если $a_0, \dots, a_{k-1} \in F_\pi$, то через $(a_0, \dots, a_{k-1})$ обозначим подкольцо, порожденное $a_0, \dots, a_{k-1}$.

Лемма 1. *Для любого элемента $a \in F_{\nu_i}$ существуют последовательность элементов $b_0, \dots, b_{q-1} \in F_{\nu_i}$, $q \le \nu_i$, и натуральные числа $r_0, \dots, r_{q-1}$, $0 \le r_k < \nu_i$, $k < q$, такие, что*

$$a = b_0^{r_0} + \dots + b_{q-1}^{r_{q-1}}, \tag{2}$$

где

$$b_k^0 = 0, \quad (b_k) \cong C_{\nu_i}, \quad f_i(b_k) = 0, \quad (b_0, \dots, b_{q-1}) = (b_0) \oplus \dots \oplus (b_{q-1}). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть

$$F_{\nu_i} = (a_0) \oplus \dots \oplus (a_s) \oplus \dots, \tag{4}$$

где $(a_s) \cong C_{\nu_i}$, $f_i(a_s) = 0$, $(a_s) = \{0, a_s, \dots, a_s^{\nu_i - 1}\}$.

Тогда найдутся такие натуральные числа m и $e_0, \dots, e_{m-1}$, $e_k < \nu_i$, $e_{m-1} \ne 0$, что

$$a = a_0^{e_0} + \dots + a_{m-1}^{e_{m-1}}. \tag{5}$$

Пусть последовательность попарно различных чисел $e_{k_0}, \dots, e_{k_{q-1}}$ такова, что для любого $s < m$ существует $j < q$, для которого верно $e_s = e_{k_j}$. Ясно, что $q \le \nu_i$. Пусть $e_{s_0}, \dots, e_{s_{p-1}}$ — все числа из последовательности $e_0, \dots, e_{m-1}$, равные e_{k_j}. Определим элемент

$$b_j = a_{s_0} + \dots + a_{s_{p-1}}. \tag{6}$$

Очевидно, что $(b_j) \cong C_{\nu_i}$, $f_i(b_j) = 0$. Отсюда и из (4) получим (3), а из (5), (6) — $a = b_0^{e_{k_0}} + \dots + b_{q-1}^{e_{k_{q-1}}}$, откуда при $r_j = e_{k_j}$ следует (2). Лемма доказана. □

Замечание 1. В лемме 1 можно считать, что $q = \nu_i$.

Следствие 1. *Для любого элемента $a \in F_\pi$ существуют последовательности элементов $\vec{a}_0, \dots, \vec{a}_{n-1}$ и чисел $\vec{r}_0, \dots, \vec{r}_{n-1}$ такие, что $\vec{a}_i = \langle a_{i,0}, \dots, a_{i,\nu_i - 1} \rangle \in F^{<\omega}_{\nu_i}$, $\vec{r}_i = \langle r_{i,0}, \dots, r_{i,\nu_i - 1} \rangle$, $r_{i,e} < \nu_i$, $i < n$, $e < \nu_i$,*

$$(\vec{a}_0, \dots, \vec{a}_{n-1}) = \bigoplus \{(a_{i,e}) \mid i < n,\ e < \nu_i\}, \quad (a_{i,e}) \cong C_{\nu_i}, \quad f_i(a_{i,e}) = 0, \tag{7}$$

$$a = \sum \{a_{i,e}^{r_{i,e}} \mid i < n,\ e < \nu_i\}. \tag{8}$$

Действительно, из (1) следует, что

$$a = a_0 + \dots + a_{n-1}, \quad a_i \in F_{\nu_i}. \tag{9}$$

По лемме 1 и замечанию 1 для любого $i < n$ найдутся последовательности элементов $\vec{a}_i = \langle a_{i,0}, \dots, a_{i,\nu_i - 1} \rangle \in F^{<\omega}_{\nu_i}$ и чисел $\vec{r}_i = \langle r_{i,0}, \dots, r_{i,\nu_i - 1} \rangle$, $r_{i,e} < \nu_i$, такие, что $a_i = a_{i,0}^{r_{i,e}} + \dots + a_{i,\nu_i - 1}^{r_{i,\nu_i - 1}}$, $(\vec{a}_i) = (a_{i,0}) \oplus \dots \oplus (a_{i,\nu_i - 1})$. Отсюда и из (9) получим (7), (8). □

Следствие 2. *Пусть даны элементы $a_0, \ldots, a_{s-1} \in F_\pi$. Тогда существуют последовательности элементов $\vec{a}_i = \langle a_{i,0}, \ldots, a_{i,\lambda_i-1}\rangle \in F_{\nu_i}^{<\omega}$, $\lambda_i = s\nu_i$, $i < n$, такие, что*

$$(\vec{a}_i) = \bigoplus_{e<\lambda_i}(a_{i,e}), \quad (a_{i,e}) \cong C_{\nu_i}, \quad f_i(a_{i,e}) = 0, \tag{10}$$

$$a_k \in (\vec{a}_0) \oplus \cdots \oplus (\vec{a}_{n-1}), \quad k < s. \tag{11}$$

Доказательство проведем индукцией по s. При $s = 1$ (10), (11) справедливы по следствию 1. Пусть для $k = s$ верны (10), (11) и $F_{s-1} = (\vec{a}_0)\oplus\cdots\oplus(\vec{a}_{s-1})$. Тогда из (1) следует, что найдется кольцо $G_s \cong F_\pi$ такое, что

$$F_\pi = F_{s-1} \oplus G_s. \tag{12}$$

Отсюда вытекает, что

$$a_s = b_s + c_s \tag{13}$$

для некоторых элементов $b_s \in F_{s-1}$ и $c_s \in G_s$. По следствию 1 существуют последовательности $\vec{c}_0, \ldots, \vec{c}_{n-1}$ такие, что

$$\vec{c}_i = \left\langle c_{i,0}, \ldots, c_{i,\nu_i-1}\right\rangle \in F_{\nu_i}^{<\omega},$$

$$(\vec{c}_i) = \bigoplus_{e<\nu_i}(c_{i,e}), \quad (c_{i,e}) \cong C_{\nu_i}, \quad f_i(c_{i,e}) = 0, \tag{14}$$

$$c_s \in (\vec{c}_0) \oplus \cdots \oplus (\vec{c}_{n-1}). \tag{15}$$

Для любого $i < n$ положим

$$a^1_{i,e} = \begin{cases} a_{i,e}, & e < s\nu_i, \\ c_{i,r}, & e = s\nu_i + r,\ r < \nu_i, \end{cases} \qquad \bar{a}^1_i = \left\langle a^1_{i,e} \mid e < (s+1)\nu_i\right\rangle.$$

Легко проверить, что из (12)–(15) следует справедливость (10), (11) при $k = s+1$ и $\vec{a}_i = \vec{a}^1_i$. $\square$

Из доказательства следствия 2 вытекает

Замечание 2. Если для элементов $a_0, \ldots, a_{s-1} \in F_\pi$ и последовательностей $\vec{a}_i = \vec{a}_{s,i}$ справедливо следствие 2, то для любого элемента $a_s \in F_\pi$ существуют последовательности $\vec{c}_i = \langle c_{i,0}, \ldots, c_{i,\nu_i-1}\rangle \in F_{\nu_i}^{<\omega}$ такие, что для элементов $a_0, \ldots, a_s$ и последовательностей $\vec{a}_{s+1,i} = \langle \vec{a}_{s,i}, \vec{c}_i\rangle$ также справедливо это следствие.

Для дальнейшего нам нужны следующие формулы:

$$D_s(\vec{y}_0, \ldots, \vec{y}_{n-1}) \rightleftharpoons \bigwedge_{i<n} \exists y_{i,0} \ldots \exists y_{i,\lambda_i-1}\Big(\vec{y}_i = \langle y_{i,0}, \ldots, y_{i,\lambda_i-1}\rangle$$

$$\& \bigwedge_{e<\lambda_i} ((y_{i,e}) \cong C_{\nu_i} \& f_i(y_{i,e}) = 0)\Big) \& (\vec{y}_0, \ldots, \vec{y}_{n-1}) = \bigoplus\{(y_{i,e}) \mid i < n,\ e < \lambda_i\},$$

где $\lambda_i = s\nu_i$, $s \in \omega$,

$$\mathfrak{A}_s(x_0, \ldots, x_{s-1}, \vec{y}_0, \ldots, \vec{y}_{n-1}) = D_s(\vec{y}_0, \ldots, \vec{y}_{n-1}) \& \bigwedge_{k<s} x_k \in (\vec{y}_0, \ldots, \vec{y}_{n-1}),$$

$$\mathfrak{B}_s = \forall x_0 \ldots \forall x_{s-1} \exists \vec{y}_0 \ldots \exists \vec{y}_{n-1} \mathfrak{A}_s(x_0, \ldots, x_{s-1}, \vec{y}_0, \ldots, \vec{y}_{n-1}),$$

$$\mathfrak{C}_s = \forall x_0 \dots \forall x_{s-1} \forall x_s \forall \vec{y}_0 \dots \forall \vec{y}_{n-1} \Big(\mathfrak{A}_s(x_0, \dots, x_{s-1}, \vec{y}_0, \dots, \vec{y}_{n-1}) \\ \to \exists \vec{z}_0 \dots \exists \vec{z}_{n-1} \exists \vec{u}_0 \dots \exists \vec{u}_{n-1} \Big(D_1(\vec{z}_0, \dots, \vec{z}_{n-1}) \& \bigwedge_{i<n} (\vec{u}_i = \langle \vec{y}_i, \vec{z}_i \rangle \\ \& (\vec{u}_i) = (\vec{y}_i) \oplus (\vec{z}_i)) \& (\vec{u}_0, \dots, \vec{u}_{n-1}) = \bigoplus_{i<n} (\vec{u}_i) \& x_s \in (\vec{u}_0, \dots, \vec{u}_{n-1}) \Big) \Big).$$

Пусть для любых $k < s$, $i < n$ даны последовательности натуральных чисел $\vec{\beta}_{i,k} = \langle \beta_{i,k,0}, \dots, \beta_{i,k,\lambda_i-1} \rangle$ такие, что $\lambda_i = s\nu_i$, $\beta_{i,k,e} < \nu_i$, $e < \lambda_i$, и $\vec{\beta}_k = \langle \vec{\beta}_{0,k}, \dots, \vec{\beta}_{n-1,k} \rangle$,

$$\vec{\beta} = \langle \vec{\beta}_0, \dots, \vec{\beta}_{s-1} \rangle. \tag{16}$$

По числу s и последовательности $\vec{\beta}$ определим формулу

$$\Phi_{s,\vec{\beta}}(x_0, \dots, x_{s-1}) = \exists \vec{y}_0 \dots \exists \vec{y}_{n-1} D_s(\vec{y}_0, \dots, \vec{y}_{n-1}) \\ \& \bigwedge_{k<s} \Big(x_k = \sum_{i<n} \big(y_{i,0}^{\beta_{i,k,0}} + \dots + y_{i,\lambda_i-1}^{\beta_{i,k,\lambda_i-1}} \big) \Big).$$

Определим по кольцу F_π теорию T_π сигнатуры $\sigma = \langle +, \cdot, 0 \rangle$, заданную следующими аксиомами:

(1) аксиомы коммутативного и ассоциативного кольца;

(2_s) $\exists \vec{y}_0 \dots \exists \vec{y}_{n-1} D_s(\vec{y}_0, \dots, \vec{y}_{n-1})$;

(3_s) $\mathfrak{B}_s$;

(4_s) $\mathfrak{C}_s$,

где $s \in \omega$.

Покажем, что теория T_π c-проста и кольцо F_π является ее счетной моделью.

Лемма 2. *Пусть даны две счетные модели A^ε, $\varepsilon < 2$, теории T_π и последовательности $\vec{a}^\varepsilon = \langle a_0^\varepsilon, \dots, a_{s-1}^\varepsilon \rangle$ элементов модели A^ε такие, что*

$$A^\varepsilon \models \Phi_{s,\vec{\beta}}(a_0^\varepsilon, \dots, a_{s-1}^\varepsilon), \tag{17}$$

где последовательность $\vec{\beta}$ определена в (16). Тогда существует изоморфизм $\varphi : A^0 \to A^1$ такой, что $\varphi \vec{a}^0 = \vec{a}^1$.

Доказательство. Пусть $A^\varepsilon = \{0, a_0^\varepsilon, a_1^\varepsilon, \dots, a_r^\varepsilon, \dots\}$, $r \in \omega$. В силу (17) существуют такие последовательности $\vec{y}_{\varepsilon,0}, \dots, \vec{y}_{\varepsilon,n-1}$ элементов A^ε, что $\vec{y}_{\varepsilon,i} = \langle y_{\varepsilon,i,0}, \dots, y_{\varepsilon,i,\lambda_i-1} \rangle$, $(y_{\varepsilon,i,e}) \cong C_{\nu_i}$, $f_i(y_{\varepsilon,i,e}) = 0$, $(\vec{y}_{\varepsilon,0}, \dots, \vec{y}_{\varepsilon,n-1}) = \oplus \{ (y_{\varepsilon,i,e}) \mid i < n,\ e < \lambda_i \}$, $a_k^\varepsilon = \sum\limits_{i<n} \big(y_{\varepsilon,i,0}^{\beta_{i,k,0}} + \dots + y_{\varepsilon,i,\lambda_i-1}^{\beta_{i,k,\lambda_i-1}} \big)$ для любого $k < s$. Отсюда следует, что существует изоморфизм $\varphi_0 : Y_{0,0} \to Y_{1,0}$, $\varphi_0(\vec{a}^0) = \vec{a}^1$, где $Y_{\varepsilon,0} = (\vec{y}_{\varepsilon,0}, \dots, \vec{y}_{\varepsilon,n-1})$. Пусть p^0, q^0 — наименьшие индексы такие, что $a_{p^0}^0 \notin Y_{0,0}$, $a_{q^0}^1 \notin Y_{1,0}$. В силу справедливости аксиомы $\mathfrak{C}_s$ в кольцах A^ε найдутся последовательности $\vec{b}_{\varepsilon,i} = \langle b_{\varepsilon,i,0}, \dots, b_{\varepsilon,i,\nu_i-1} \rangle$ элементов A^ε такие, что $Y_{\varepsilon,1} \rightleftharpoons (Y_{\varepsilon,0}, \vec{b}_{\varepsilon,0}, \dots, \vec{b}_{\varepsilon,n-1}) = (Y_{\varepsilon,0}) \oplus (\vec{b}_{\varepsilon,0}) \oplus \dots \oplus (\vec{b}_{\varepsilon,n-1})$, $(\vec{b}_{\varepsilon,i}) = \oplus \{ (b_{\varepsilon,i,e}) \mid i < n,\ e < \nu_i \}$, $(b_{\varepsilon,i,e}) \cong C_{\nu_i}$, $f_i(b_{\varepsilon,i,e}) = 0$, и $a_{p^0}^0 \in Y_{0,1}$, $a_{q^0}^1 \in Y_{1,1}$.

Отсюда следует, что изоморфизм φ_0 можно продолжить до изоморфизма $\varphi_1 : Y_{0,1} \to Y_{1,1}$. Пусть $\varphi_1^{-1}(a_{q^0}^1) = a_{r_1}^0$. Пусть $a_{p^1}^0$, $a_{q^1}^1$ — наименьшие индексы такие, что $a_{p^1}^0 \notin Y_{0,1}$, $a_{q^1}^1 \notin Y_{1,1}$. Тогда аналогично предыдущему можно найти такие кольца $Y_{\varepsilon,2}$ и изоморфизм $\varphi_2 : Y_{0,2} \to Y_{1,2}$, что $a_{p^1}^0 \in Y_{0,2}$, $a_{q^1}^1 \in Y_{1,2}$. Пусть $\varphi_2(a_{p^1}^0) = a_{r_2}^1$.

Продолжая таким образом, получим последовательность изоморфизмов φ_n, $n \in \omega$, которые однозначно определяют требуемый изоморфизм $\varphi : A^0 \to A^1$. □

Теорема 2. *Любая полная формула $\Phi(x_0, \ldots, x_{s-1})$ сигнатуры σ со свободными переменными $x_0, \ldots, x_{s-1}$, совместная с теорией T_π, эквивалентна (относительно T_π) некоторой формуле вида $\Phi_{s,\vec{\beta}}(x_0, \ldots, x_{s-1})$.*

Доказательство. Сначала установим, что для любой последовательности $\vec{\beta}$ из (16) формула $\Phi_{s,\vec{\beta}}(\vec{x})$ полна, где $\vec{x} = \langle x_0, \ldots, x_{s-1}\rangle$. Допустим противное. Тогда существует формула $\mathfrak{A}(\vec{x})$ такая, что $T_\pi, \Phi_{s,\vec{\beta}}(\vec{x}), \mathfrak{A}(\vec{x})$ и $T_\pi, \Phi_{s,\vec{\beta}}(\vec{x})$, $\neg\mathfrak{A}(\vec{x})$ совместны. Следовательно, существуют счетные модели $\mathfrak{M}^\varepsilon$, $\varepsilon < 2$, теории T_π и последовательности $\vec{a}^\varepsilon$ элементов модели $\mathfrak{M}$ такие, что справедливы $\mathfrak{M}^0 \models \Phi_{s,\vec{\beta}}(\vec{a}^0)\&\mathfrak{A}(\vec{a}^0)$ и $\mathfrak{M}^1 \models \Phi_{s,\vec{\beta}}(\vec{a}^1)\&\neg\mathfrak{A}(\vec{a}^1)$. По лемме 2 существует изоморфизм $\varphi : \mathfrak{M}^0 \to \mathfrak{M}^1$ такой, что $\varphi\vec{a}^0 = \vec{a}^1$. Тогда $\mathfrak{M}^1 \models \mathfrak{A}(\vec{a}^1)\&\neg\mathfrak{A}(\vec{a}^1)$, что невозможно, т. е. формула $\Phi_{s,\vec{\beta}}$ полна.

Пусть теперь дана полная формула $\Phi(\vec{x})$, совместная с теорией T_π. Тогда существуют счетная модель $\mathfrak{M}$ теории T_π и последовательность элементов $\vec{a}$ модели $\mathfrak{M}$ такая, что

$$\mathfrak{M} \models \Phi(\vec{a}). \tag{18}$$

По следствию 2 существуют последовательности элементов $\vec{a}_i = \langle a_{i,0}, \ldots, a_{i,\lambda_i-1}\rangle$ и последовательности $\vec{\beta}_{i,k}$ натуральных чисел, $i < n$, $k < s$, такие, что $\mathfrak{M} \models \Phi_{s,\vec{\beta}}(\vec{a})$, где последовательность $\vec{\beta}$ определена по последовательностям $\vec{\beta}_{i,k}$ так же, как в (16). Отсюда и из (18) в силу полноты формул $\Phi(\vec{x})$, $\Phi_{s,\vec{\beta}}(\vec{x})$ получим, что формула $\Phi(\vec{x})$ эквивалентна формуле $\Phi_{s,\vec{\beta}}(\vec{x})$. Теорема доказана. □

Следствие 3. *Для любого $s \in \omega$ множество R_s полных формул сигнатуры σ со свободными переменными $x_0, \ldots, x_{s-1}$, совместных с теорией T_π, конечно и последовательность $\langle R_s \mid s \in \omega\rangle$ сильно вычислима.*

Действительно, по теореме 2 существует взаимно однозначное соответствие между множеством R_s и конечным множеством T_s всех последовательностей $\vec{\beta}$, определенных в (16). По любой последовательности $\vec{\beta} \in T_s$ равномерно по $\vec{\beta}$ эффективно и однозначно определяется формула $\Phi_{s,\vec{\beta}}$. Отсюда и из сильной вычислимости последовательности $\langle T_s \mid s \in \omega\rangle$ получим требуемое. □

Теорема 3. *Теория T_π счетно категорична, модельно полна и разрешима.*

Доказательство. 1. Счетная категоричность теории T_π вытекает из следствия 3 и теоремы 2.3.13 в [21].

2. Докажем модельную полноту. Согласно критерию Робинсона [21] теория T_π модельно полна, если для любых счетных моделей $A \subseteq B$ теории T_π и любой конечной подмодели $B_0 = \{a_0, \ldots, a_{s-1}, b_0, \ldots, b_{t-1}\}$, где $a_i \in A$, $b_j \in B \setminus A$, $i < s$, $j < t$, существует изоморфное вложение $\varphi : B_0 \to A$, тождественное на $A \cap B_0$. Существование такого вложения следует из леммы 2. Стало быть, теория T_π модельно полна.

3. Установим разрешимость. Так как теория T_π счетно категорична, она полна. Отсюда и вычислимо перечислимой аксиоматизируемости теории T_π получим ее разрешимость. Теорема доказана. □

Из теорем 2, 3 вытекает

Следствие 4. *Теория T_π c-проста, и кольцо F_π является ее счетной моделью.*

Действительно, легко проверить, что все аксиомы теории T_π истинны на кольце F_π. $\square$

Рассмотрим следующее расширение класса колец вида F_π. Пусть $\gamma_{i,0},\dots,\gamma_{i,n_i-1}$ — все собственные делители числа α_i, $\gamma_{i,k}<\alpha_i$, $k<n_i$, $i<n$, и для любых i,k определен ординал $\delta_{i,k}\le\omega$. По ним определим кольцо

$$G=\bigoplus_{i<n}\big(C_{p_i^{\gamma_{i,0}}}^{\delta_{i,0}}\oplus\dots\oplus C_{p_i^{\gamma_{i,n_i-1}}}^{\delta_{i,n_i-1}}\big).$$

Введем класс колец вида $F=G\oplus F_\pi$.

Покажем, что существует универсальная Σ-функция в наследственно конечной надстройке над такими кольцами, несмотря на то, что не всякое кольцо данного класса является моделью c-простой теории.

Теорема 4. *Кольцо $G\oplus F_\pi$ почти c-простое.*

Доказательство состоит в проверке справедливости условий 1–3 определения почти c-простой модели для кольца $F=G\oplus F_\pi$.

1. По следствию 4 кольцо F_π — c-простая модель. Пусть

$$\Phi(x)\rightleftharpoons x\subset F\&\bigwedge_{i<n}\Big(\exists r_i<|x|\exists x_{i,0}\in x\dots\exists x_{i,r_i-1}\in x$$
$$\bigwedge_{e<r_i}((x_{i,e})\cong C_{\nu_i}\&f_i(x_{i,e})=0)\Big)\&x=\oplus\{(x_{i,e})\mid i<n,\ e<r_i\}.\qquad(19)$$

Отсюда и из следствия 1 имеем эквивалентность

$$a\in F_\pi\Leftrightarrow\mathbb{HF}(F)\models((a=0\vee\exists x(\Phi(x)\ \&\ a\in x)),$$

т. е. основное множество кольца F_π является Σ-подмножеством в $\mathbb{HF}(F)$, поэтому условие 1 справедливо.

Для доказательства справедливости остальных условий сначала определим операцию замыкания в кольце F. Для этого нужны следующие леммы.

Лемма 3. *Пусть для подкольца $F_0\subseteq F$ и элемента $a\in F\setminus F_0$ справедливы следующие условия:*

a) *F_0 — прямая сумма полей степени γ_i характеристики p_i, где $i\in I_0$, $I_0\subseteq\{0,1,\dots,n-1\}$;*

b) *(a) — поле степени γ_k характеристики p_k.*

Тогда справедливо

$$F_0\cap(a)=0.\qquad(20)$$

Доказательство. Допустим противное, т. е. найдется $a_0\in F_0\cap(a)$, $a_0\ne 0$. Отсюда следует, что (a_0) — собственное подполе (a), т. е. $(a_0)\ne(a)$. С другой стороны, так как $a_0\in F_0$, то (a_0) — подполе некоторого поля $(b)\subseteq F_0$ степени γ_k характеристики p_k. Пусть e — единица поля (a_0). Тогда уравнение $x^{p_k^{\gamma_k}-1}=e$ имеет более $p_k^{\gamma_k}-1$ решений в кольце с единицей e, порожденном элементами a и b, что невозможно. $\square$

Следствие 5. *Если для подкольца $F_0 \subseteq F$ и элемента $a \in F \setminus F_0$ справедливы условия леммы 3, то*
$$F = F_0 \oplus (a) \oplus H \tag{21}$$
для некоторого подкольца $H \subseteq F$.

Доказательство. По лемме 3 имеем $(F_0, a) = F_0 \oplus (a) \rightleftharpoons F_1$.

Пусть A — множество всех элементов $a \in F \setminus F_1$ таких, что (a) — максимальное поле в F. На этом множестве введем некоторый вполне упорядоченный порядок. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots\}$, где $a_i < a_j$ при $i < j$. Тогда для подкольца F_1 и элемента a_1 справедливы условия леммы 3, поэтому существует подкольцо $F_2 = F_1 \oplus (a_1)$. Пусть k_2 — наименьшее число такое, что $a_{k_2} \notin F_2$. Тогда аналогично определим подкольцо $F_3 = F_2 \oplus (a_{k_2})$.

Продолжая таким образом, получим подкольцо $F' = F_0 \oplus (a) \oplus (a_{k_1}) \oplus (a_{k_2}) \oplus \dots$, где $k_1 \rightleftharpoons 1$. Докажем, что
$$F' = F. \tag{22}$$

Допустим, что $F' \neq F$ и $a \in F \setminus F'$. Тогда найдутся такие элементы $c_0, \dots, c_{r-1}$, что (c_i) — максимальное поле в F и $a = c_0^{s_0} + \dots + c_{r-1}^{s_r - 1}$. Так как $a \notin F'$, для некоторого $k < r$ верно $c_k \notin F'$. Тогда для некоторого s справедливо $a_s = c_k$ и $c_k \in F'$. Полученное противоречие доказывает (22). Положив $H = \oplus\{a_{k_i} \mid i < \omega\}$, приходим к (21). $\square$

Для любого конечного подмножества $A \subseteq F$ через $[A]_F$ обозначим наименьшее подкольцо такое, что

a) $A \subseteq [A]_F$;

b) $F = [A]_F \oplus F_0$ для некоторого подкольца F_0.

Лемма 4. *Для любого конечного подмножества $A \subseteq F$ замыкание $[A]_F$ определяется однозначно по A.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. существуют подкольца
$$A_\varepsilon = \oplus\{(a_{\varepsilon,i,e}) \mid i < n_\varepsilon,\ e < r_{\varepsilon,i} - 1\}, \tag{23}$$
где $n_\varepsilon \leq n$, $(a_{\varepsilon,i,e}) \cong C_{\nu_{\varepsilon,i}}$, $f_i(a_{\varepsilon,i,e}) = 0$, и $A_\varepsilon = [A]_F$, $A_0 \neq A_1$.

Отсюда и из (23) следует, что для некоторых $i_1 < n_1$, $e_1 < r_{1,i_1}$ справедливо $c_1 \rightleftharpoons a_{1,i_1,e_1} \notin A_0$. Отсюда по следствию 5 имеем $F = A_0 \oplus (c_1) \oplus H$. Следовательно, по определению замыкания $[A]_F$ подмножества A существует $a \in A$ такой, что $a = a_0 + c' + h$, где $a_0 \in A_0$, $c' \in (c_1) \setminus \{0\}$, $h \in H$. С другой стороны, так как $a \in A$, то $a \in A_0$, поэтому по лемме 3 верно $c' = 0$. Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Из этой леммы и следствия 5 вытекает

Следствие 6. *Для любого конечного подмножества $A \subseteq F$ однозначно с точностью до изоморфизма определяется кольцо A^* такое, что*
$$F = [A]_F \oplus A^*.$$

Замечание 3. Так как $F = G \oplus F_\pi$, из доказательств лемм 3, 4 и следствий 5, 6 вытекает, что они остаются верными при замене F на F_π и $[B]_F$ на $[B]_{F_\pi}$ для любого конечного $B \subseteq F_\pi$.

Из определения колец F_π и F легко следует

Замечание 4. Для любых конечных подмножеств $x \subseteq F$ и $y \subseteq F_\pi$ существует вложение $\beta : x \to y^*$, где $F_\pi = [y]_{F_\pi} \oplus y^*$. Это же верно при замене F на F_π и F_π на F.

Перейдем к доказательству справедливости условий 2, 3.

2. Из лемм 3, 4 и следствий 5, 6 по замечанию 3 имеет место следующая эквивалентность:

$$y = [x]_{F_\pi} \Leftrightarrow x \subseteq F_\pi \& x \subseteq y \& \Phi(y) \& \forall z \subseteq y (z \neq y \& \Phi(z) \to x \not\subseteq z), \qquad (24)$$

где $\Phi(x)$ — Δ-предикат, определенный в (19). Отсюда следует, что 2-местный предикат $y = [x]_{F_\pi}$ является Δ-предикатом в $\mathbb{HF}(F_\pi)$. Формулу из правой части (24) обозначим через $\mathfrak{B}_0(x, y)$.

Определим требуемый предикат $\mathfrak{B}$, положив

$$\mathfrak{B}(x, y) = x \subseteq y \& \exists z \exists u \forall y_0 \in y \exists x_0 \in (x \cup \{0\}) \exists u_0 \in u$$
$$(\mathfrak{B}_0(x, z) \& u \subseteq F_\pi \& z \cap u = 0 \& y_0 = x_0 + u_0).$$

Отсюда следует, что для $\mathfrak{B}$

$$\mathbb{HF}(F_\pi) \models \mathfrak{B}(x, y) \& \mathfrak{B}(x, z) \leftrightarrow x \subseteq y, x \subseteq z \& \mathfrak{B}(x, y \cup z).$$

Так как в F_π справедлива эквивалентность

$$\neg\mathfrak{B}(x, y) \Leftrightarrow x \not\subseteq y \vee \exists y_0 \in y \setminus x \exists z (\mathfrak{B}_0(x, z) \& y_0 \in z),$$

то $\mathfrak{B}$ — Δ-предикат в $\mathbb{HF}(F_\pi)$, т. е. условие 2 доказано.

Пусть $A \subseteq F$, $B \subseteq F_\pi$, $|A|, |B| < \omega$ и $\alpha : A \to B$ — изоморфизм.

(3a) Допустим, что A замкнуто, $A \subseteq A^1 \subseteq F$, $|A^1| < \omega$. Докажем, существование вложения $\psi : A^1 \to F_\pi$ такого, что $\mathbb{HF}(F_\pi) \models \mathfrak{B}(B, \psi A^1)$ и $\psi \restriction A = \alpha$.

Так как $A = [A]_F$, по следствию 6 и замечанию 3 имеем $F = A \oplus A^*$, $F_\pi = [B]_{F_\pi} \oplus B^*$. Пусть C — проекция A^1 на A^*. По замечанию 4 существует изоморфное вложение $\beta : C \to B^*$. Тогда α и β однозначно определяют требуемое вложение $\psi : A^1 \to F_\pi$. Справедливость условия (3a) доказана.

(3b) Для доказательства справедливости условия (3b) нужна

Лемма 5. *Пусть даны конечные подмножества $A \subseteq F$, $B \subseteq F_\pi$ и изоморфизм*

$$\alpha : A \to B. \qquad (25)$$

Тогда для любого вложения $\varphi : [A]_F \to F_\pi$, продолжающего α, верно $\varphi[A]_F \subseteq [B]_F$.

Доказательство. Допустим противное, т. е. существует вложение $\varphi : [A]_F \to F_\pi$, продолжающее α, и

$$\varphi[A]_F \not\subseteq [B]_{F_\pi}. \qquad (26)$$

Пусть $[A]_F = (a_0) \oplus \dots \oplus (a_{m-1})$, где (a_k) — некоторые поля, $k < m$. Отсюда и (26) следует, что найдется $k_0 < m$ такое, что

$$\varphi a_{k_0} \notin [B]_{F_\pi}. \qquad (27)$$

По определению $[A]_F$ существует элемент $a \in A$ такой, что $a = a_0^{\gamma_0} + \dots + a_{k_0}^{\gamma_{k_0}} + \dots + a_{m-1}^{\gamma_{m-1}}$, где $a_{k_0}^{\gamma_{k_0}} \neq 0$. Отсюда и из (27) вытекает, что $\varphi a \notin [B]_{F_\pi}$. Это противоречит (25), так как φ продолжает α. $\square$

Перейдем к доказательству справедливости условия (3b). Пусть даны вложения $\varphi^\varepsilon : A^\varepsilon \to F_\pi$, $A^\varepsilon \supseteq A$, $\varepsilon < 2$, продолжающие $\alpha : A \to B$, и

$$\mathbb{HF}(F_\pi) \models \mathfrak{B}(B, \varphi^\varepsilon A^\varepsilon). \tag{28}$$

Докажем, что существует вложение $\psi : A^0 \cup A^1 \to F_\pi$, продолжающее α, и $\mathbb{HF}(F_\pi) \models \mathfrak{B}(B, \psi(A^0 \cup A^1))$. Из (28) и следствия 6 вытекает существование конечного подмножества $C^\varepsilon \subseteq F_\pi$, для которого $[B]_{F_\pi} \cap C^\varepsilon = 0$, и для любого элемента $a^\varepsilon \in A^\varepsilon$ найдутся $b^\varepsilon \in B$ и $c^\varepsilon \in C^\varepsilon$ такие, что $\varphi^\varepsilon a^\varepsilon = b^\varepsilon + c^\varepsilon$, где $\varepsilon < 2$. Докажем, что если $a^\varepsilon \in A^\varepsilon \setminus A$, то $a^\varepsilon \notin [A]_F$. Действительно, допустим противное, т. е. $a^\varepsilon \in [A]_F$. Тогда в силу леммы 5 имеем $\varphi^\varepsilon a^\varepsilon \in [B]_{F_\pi}$. Так как φ^ε продолжает α, то $\varphi^\varepsilon a^\varepsilon \in [B]_{F_\pi} \setminus B$. Это противоречит (28).

Таким образом, для некоторого конечного подмножества $D^\varepsilon \subseteq A^\varepsilon$ справедливы $A^\varepsilon = A \cup D^\varepsilon$, $D^\varepsilon \cap [A]_F = 0$. По следствию 6 имеем $F = [A]_F \oplus A^*$, $F^* = [B]_F \oplus B^*$.

Пусть проекция D^ε на A^* есть подмножество $E^\varepsilon \subseteq A^\varepsilon$. По замечанию 4 существует вложение $\beta : E^0 \cup E^1 \to B^*$. Вложения α и β однозначно определяют требуемое вложение $\psi : A^0 \cup A^1 \to F_\pi$. Справедливость условия (3b) доказана.

(3c) Пусть дано конечное подмножество $C \subseteq F_\pi$ такое, что

$$B \subseteq C, \quad \mathbb{HF}(F_\pi) \models \mathfrak{B}(B, C). \tag{29}$$

Докажем, что существует вложение $\psi : C \to F$, продолжающее α^{-1}. Покажем, что

$$[B]_{F_\pi} \cap C = B. \tag{30}$$

Пусть $x \in [B]_{F_\pi} \cap C$. Из (29) следует, что для некоторого подмножества $D \subseteq F_\pi$ выполнено

$$[B]_{F_\pi} \cap D = 0 \tag{31}$$

и для любого элемента $x \in C$ существуют $x_b \in B$, $x_d \in D$ такие, что

$$x = x_b + x_d. \tag{32}$$

Отсюда если $x \notin B$, то $x_d \neq 0$, поэтому $x \notin [B]_{F_\pi}$, т. е. (30) справедливо. Из (31) по следствию 6 и замечанию 3 имеем $F_\pi = [B]_{F_\pi} \oplus B^*$. Пусть E — проекция D на B^*. Отсюда и из (32) имеем $C \subseteq [B]_{F_\pi} \oplus E$. По следствию 6 $F = [A]_F \oplus A^*$. По замечанию 4 существует вложение $\beta : E \to A^*$. Вложения α^{-1} и β однозначно определяют требуемое вложение $\psi : C \to F$. Справедливость условия (3c) и тем самым теорема 4 доказаны. $\square$

Из теорем 1 и 4 вытекает

Следствие 7. *В наследственно конечном допустимом множестве $\mathbb{HF}(G \oplus F_\pi)$ над кольцом $G \oplus F_\pi$ существует универсальная Σ-функция.*

В заключение автор выражает сердечную благодарность С. С. Гончарову за постановку задачи и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л.* Определимость и вычислимость. 2-е изд. М.: Экономика, 2000.
2. *Гончаров С. С., Свириденко Д. И.* Математические основы семантического программирования // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 6. С. 1324–1328.
3. *Ershov Yu. L., Goncharov S. S., Sviridenko D. I.* Semantic programming. Information processing // Proc. IFIP 10th World comput. congr. Dublin: Elsevier Sci., 1986. V. 10. P. 1093–1100.

4. *Руднев В. А.* Об универсальной рекурсивной функции на допустимых множествах // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 4. С. 425–436.
5. *Морозов А. С., Пузаренко В. Г.* О Σ-подмножествах натуральных чисел // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 3. С. 291–320.
6. *Калимулин И. Ш., Пузаренко В. Г.* О принципах вычислимости на допустимых множествах // Мат. тр. 2004. Т. 7, № 2. С. 35–72.
7. *Пузаренко В. Г.* К вычислимости на специальных моделях // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 1. С. 185–208.
8. *Александрова С. А.* Проблема униформизации для Σ-предикатов в наследственно конечной списочной надстройке над полем действительных чисел с экспонентой // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, № 1. С. 3–14.
9. *Коровина М. В.* Об универсальной рекурсивной функции и абстрактных машинах на вещественных числах со списочной надстройкой. Структурные алгоритмические свойства вычислимости // Вычислительные системы. Новосибирск, 1996. Вып. 156. С. 24–43.
10. *Стукачев А. И.* Теорема об униформизации в наследственно конечных надстройках. Обобщенная вычислимость и определимость // Вычислительные системы. Новосибирск, 1998. Вып. 161. С. 3–14.
11. *Хисамиев А. Н.* О Σ-подмножествах натуральных чисел над абелевыми группами // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 45, № 3. С. 695–706.
12. *Хисамиев А. Н.* Σ-ограниченные алгебраические системы и универсальные функции. I // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 1. С. 217–235.
13. *Хисамиев А. Н.* Σ-ограниченные алгебраические системы и универсальные функции. II // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 676–693.
14. *Хисамиев А. Н.* Об универсальной Σ-функции над деревом // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 687–690.
15. *Хисамиев А. Н.* Σ-однородные алгебраические системы и Σ-функции. I // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 5. С. 659–684.
16. *Хисамиев А. Н.* Σ-однородные алгебраические системы и Σ-функции. II // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 1. С. 129–147.
17. *Ershov Yu. L., Puzarenko V. G., Stukachev A. I.* $\mathbb{HF}$-computability // Computability in context. Computation and logic in the real world (S. B. Cooper and A. Sorbi (eds.)). London: World Sci., 2011. P. 169–242.
18. *Хисамиев А. Н.* Универсальные функции и почти c-простые модели // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 3. С. 663–681.
19. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. СПб.: Лань, 2004.
20. *Ершов Ю. Л.* Кратно нормированные поля. Новосибирск: Науч. книга, 2000.
21. *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.

Статья поступила 21 июня 2013 г., окончательный вариант — 18 сентября 2014 г.

Хисамиев Асылхан Назифович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
hisamiev@math.nsc.ru