Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2016. Том 57, № 1

УДК 512.554.38

3–ФИЛИФОРМНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛЕЙБНИЦА МАКСИМАЛЬНОЙ ДЛИНЫ

Л. М. Камачо, Э. М. Каньете, Х. Р. Гомес, Б. А. Омиров

Аннотация. Завершено описание 3-филиформных алгебр Лейбница максимальной длины. Изучены когомологические свойства алгебр максимальной длины. Использованы результаты Кабесаса и Пастора [1], конструкция подходящего однородного базиса в рассматриваемой связной градуировке и вычислительные методы из программного обеспечения «Математика».

DOI 10.17377/smzh.2016.57.104

Ключевые слова: алгебра Ли, алгебра Лейбница, нильпотентность, естественная градуировка, характеристическая последовательность, p-филиформная алгебра, максимальная длина, когомология.

1. Введение

Алгебры Лейбница были определены Блохом в 1965 г., назвавшим их D-*алгебрами* ввиду их связи с дифференцированиями. Эти алгебры были введены как обобщение алгебр Ли в [2]. Позднее благодаря новой когомологической точке зрения Лодэя [3] они стали исследоваться в работах Аюпова, Касаса и др. [4, 5]. В когомологической теории существует важное семейство алгебр Лейбница — алгебры с максимальной длиной градуировки. Замечательный факт разложимости алгебры в прямую сумму подпространств размерности 1 упрощает вычисление дифференцирований, поскольку они индуцируют соответствующую градуировку группы когомологий.

Основной целью данной статьи является продолжение изучения p-филиформных алгебр Лейбница максимальной длины. Эти алгебры играют в последние годы главную роль в классификационной теории и в геометрических, аналитических и физических приложениях.

В [1, 4, 6] получена классификация p-филиформных алгебр Лейбница максимальной длины при $0 \leq p \leq 2$. Более того, завершена классификация квазифилиформных алгебр Лейбница максимальной длины [7]. В настоящей работе дана классификация 3-филиформных алгебр Лейбница максимальной длины, у которых ассоциированные естественно градуированные алгебры являются нелиевыми алгебрами Лейбница. Кроме того, в разд. 3 проведен анализ пространства дифференцирований и первой группы когомологий полученных алгебр. Мы ограничиваемся данным подсемейством, так как классификация

This work was supported by Ministerio de Economía y Competitividad (Spain), grant MTM2013–43687–P (European FEDER support included) and by PNPD/2009–CAPES (Brazil).

3-филиформных алгебр Лейбница максимальной длины, у которых ассоциированные естественно градуированные алгебры являются алгебрами Ли, уже получена в [8].

Напомним, что алгебра $\mathscr{L}$ над полем F называется *алгеброй Лейбница*, если она удовлетворяет тождеству Лейбница:

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y], \quad x,y,z \in \mathscr{L},$$

где $[-,-]$ означает умножение в $\mathscr{L}$.

Рассмотрим произвольную n-мерную алгебру Лейбница $\mathscr{L}$ над полем F. Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — базис $\mathscr{L}$. Тогда с точностью до изоморфизма $\mathscr{L}$ определяется правилом умножения базисных элементов, а именно

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ij}^k e_k,$$

где γ_{ij}^k — структурные константы. Следовательно, зафиксировав базис, можем рассматривать каждую алгебру размерности n над полем F как точку в n^3-мерном пространстве структурных констант, наделенном топологией Зарисского.

Далее будут рассматриваться только конечномерные алгебры Лейбница над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пусть $\mathscr{L}$ — алгебра Лейбница. Тогда $\mathscr{L}$ естественно фильтрована при помощи убывающей центральной последовательности $\mathscr{L}^1 = \mathscr{L}$, $\mathscr{L}^{k+1} = [\mathscr{L}^k, \mathscr{L}]$, где $k \geq 1$. Таким образом, нильпотентная алгебра $\mathscr{L}$ имеет ниль-индекс s, если s — минимальное целое такое, что $\mathscr{L}^s \neq \{0\}$ и $\mathscr{L}^{s+1} = \{0\}$.

Алгебра Лейбница $\mathscr{L}$ $\mathbb{Z}$-градуирована, если $\mathscr{L} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V_i$, где $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ для любых $i,j \in \mathbb{Z}$. Градуировка называется *конечной*, если число ненулевых пространств V_i конечно.

Будем говорить, что $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра Лейбница $\mathscr{L}$ допускает *связную градуировку*, если $\mathscr{L} = V_{k_1} \oplus V_{k_1+1} \oplus \dots \oplus V_{k_1+t}$ и $V_{k_1+i} \neq \langle 0 \rangle$ для любого i $(0 \leq i \leq t)$.

Определим естественно градуированные алгебры следующим образом.

Определение 1.1. Пусть $\mathscr{L}_i = \mathscr{L}^i / \mathscr{L}^{i+1}$, $1 \leq i \leq k$, и $\operatorname{gr} \mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_2 \oplus \dots \oplus \mathscr{L}_k$. Тогда $[\mathscr{L}_i, \mathscr{L}_j] \subseteq \mathscr{L}_{i+j}$ и получается градуированная алгебра $\operatorname{gr} \mathscr{L}$. Если $\operatorname{gr} \mathscr{L}$ и $\mathscr{L}$ изоморфны, то говорят, что $\mathscr{L}$ — *естественно градуированная алгебра.* При этом градуировку называют *естественной.*

Определение 1.2. Число $l(\oplus\mathscr{L}) = l(V_{k_1} \oplus V_{k_1+1} \oplus \dots \oplus V_{k_1+t}) = t+1$, где $\oplus\mathscr{L}$ — связная градуировка, называется *длиной градуировки.* Градуировка $\oplus\mathscr{L}$ имеет максимальную длину, если $l(\oplus\mathscr{L}) = \dim(\mathscr{L})$.

Определим длину алгебры $\mathscr{L}$ следующим образом:

$$l(\mathscr{L}) = \max\{l(\oplus\mathscr{L}) : \oplus\mathscr{L} = V_{k_1} \oplus \dots \oplus V_{k_t} \text{ — естественная градуировка}\}.$$

Алгебра $\mathscr{L}$ называется *алгеброй максимальной длины*, если $l(\mathscr{L}) = \dim(\mathscr{L})$. Множество $R(\mathscr{L}) = \{x \in \mathscr{L} : [y,x] = 0 \ \forall y \in \mathscr{L}\}$ называется *правым аннулятором* $\mathscr{L}$. Оператор $R_x : \mathscr{L} \to \mathscr{L}$ такой, что $R_x(y) = [y,x]$ для любого $y \in \mathscr{L}$, будем называть *оператором правого умножения*, множество $\operatorname{Cent}(\mathscr{L}) = \{z \in \mathscr{L} : [x,z] = [z,x] = 0 \ \forall x \in \mathscr{L}\}$ — *центром* $\mathscr{L}$.

Пусть x — нильпотентный элемент из $\mathscr{L} \setminus \mathscr{L}^2$. Для нильпотентного оператора R_x определим убывающую последовательность $C(x) = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$, состоящую из порядков клеток Жордана оператора R_x. В множестве таких последовательностей рассмотрим лексикографический порядок, т. е. $C(x) = (n_1, n_2, \ldots, n_k) < C(y) = (m_1, m_2, \ldots, m_s)$ тогда и только тогда, когда существует $i \in \mathbb{N}$ такой, что $n_j = m_j$ для любых $j < i$ и $n_i < m_i$.

Определение 1.3. Последовательность $C(\mathscr{L}) = \max C(x)_{x \in \mathscr{L} \setminus \mathscr{L}^2}$ называется *характеристической последовательностью алгебры* $\mathscr{L}$.

Пусть $\mathscr{L}$ — n-мерная нильпотентная алгебра Лейбница и p — неотрицательное целое число ($p < n$).

Определение 1.4. Алгебра Лейбница $\mathscr{L}$ называется *p-филиформной*, если $C(\mathscr{L}) = (n-p, \underbrace{1, \ldots, 1}_{p})$. Если $p = 0$, то $\mathscr{L}$ называется *нуль-филиформной*, а если $p = 1$ — *филиформной*.

Следовательно, алгебра с характеристической последовательностью $(n-2, 1, 1)$ называется 2-*филиформной*, тогда как нильпотентная алгебра нильиндекса $n-2$ называется *квази-филиформной*. Заметим, что в случае алгебр Ли оба определения совпадают.

Определение 1.5. Линейное преобразование d алгебры Лейбница $\mathscr{L}$ называется *дифференцированием* $\mathscr{L}$, если

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)] \quad \text{для любых } x, y \in \mathscr{L}.$$

Обозначим множество всех дифференцирований $\mathscr{L}$ через $\mathrm{Der}(\mathscr{L})$.

Ясно, что R_x является дифференцированием для любого $x \in \mathscr{L}$. Дифференцирования этого вида называются *внутренними*. Подобно случаю алгебр Ли множество всех внутренних дифференцирований образует идеал алгебры $\mathrm{Der}(\mathscr{L})$.

Так как алгебра $\mathbb{Z}$-градуирована, т. е. $\mathscr{L} = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{Z}} V_i$, эта градуировка индуцирует градуировку алгебры $\mathrm{Der}(\mathscr{L}) = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{Z}} W_i$:

$$W_i = \{d_i \in \mathrm{Der}(\mathscr{L}) : d_i(x) \in V_{i+j} \text{ для любого } x \in V_j\}.$$

Легко проверить, что для n-мерной алгебры максимальной длины $\mathrm{Der}(\mathscr{L}) = W_{-n} \oplus \cdots \oplus W_n$ (см. [9]). Дополнительную информацию можно найти при определении групп когомологий алгебр Лейбница в [10].

В данной статье используется следующая техника: мы применяем расширения естественно градуированных алгебр Лейбница, используя естественные градуировки. При этом можно выделить два случая: естественно градуированные алгебры Ли и естественно градуированные нелиевы алгебры. Изучение первого случая завершено в [8], поэтому опишем результаты, полученные во втором случае. Следует заметить, что все 3-филиформные алгебры Лейбница могут быть получены как расширения естественно градуированных 3-филиформных алгебр Лейбница. Действительно, естественно градуированная 3-филиформная алгебра Лейбница допускает одну из следующих структур: нерасщепляемая 3-филиформная алгебра Лейбница; нуль-филиформная алгебра Лейбница $\oplus\mathbb{C}^3$; филиформная алгебра Лейбница $\oplus\mathbb{C}^2$ и 2-филиформная алгебра Лейбница $\oplus\mathbb{C}$. В настоящей статье нерасщепляемый 3-филиформный случай рассматривается в п. 2.1. П. 2.2 посвящен изучению расширений естественно градуированных p-филиформных алгебр Лейбница $\oplus\mathbb{C}^{3-p}$ при $0 \leq p \leq 2$. Далее рассматривается случай однородного базиса, который допускает ассоциированная градуировка максимальной длины. В заключение используем программное обеспечение *Математика*, а также свойства градуировки и нильпотентность для получения либо противоречия, либо классификации.

Поясним понятие расширения, используемое в этой работе. Мы называем *расширением алгебры* естественное обобщение структурных констант алгебры, использующее информацию о ее естественной ассоциированной градуировке. Другими словами, пусть N — естественно градуированная алгебра, у которой естественная градуировка — это $N_1 \oplus \cdots \oplus N_t$, и пусть умножение в N относительно базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ определяется правилом $[e_i, e_j] = \sum a_{ij}^k e_k$ при $e_k \in N_{i+j}$. Тогда N имеет ассоциированную алгебру $\widetilde{N}$ с умножением относительно базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$, определенным правилом $[e_i, e_j] = \sum a_{ij}^k e_k + b_{ij}^s e_s$ при $e_s \in N_s$ и $s > i + j$. По этой причине обычно говорим, что N — *скелетон алгебры* $\widetilde{N}$.

Подчеркнем тот факт, что использование компьютерных программ полезно для получения нашей классификации. Такие программы применяются в статье для небольшой фиксированной размерности. Далее обобщаем полученные результаты и доказываем по индукции общие результаты для произвольной фиксированной размерности. Алгоритмы программ могут быть найдены на сайте http://personal.us.es/jrgomez.

2. 3-Филиформные нелиевы алгебры Лейбница максимальной длины

В данном разделе продолжаем классифицировать p-филиформные алгебры Лейбница максимальной длины. Изучение филиформного и 2-филиформного случаев сделано в [6], поэтому сосредоточимся на случае 3-филиформных алгебр Лейбница. Для получения классификации выделим два случая: расщепляемый и нерасщепляемый. Будем говорить, что алгебра $\mathscr{L}$ *расщепляема*, если она может быть представлена в виде $\mathscr{L} = \bigoplus \mathscr{L}_i$, где $\mathscr{L}_i$ — подалгебры в $\mathscr{L}$. В противном случае алгебра называется *нерасщепляемой*.

В данном разделе будут использоваться две программы: проверки тождества Лейбница и проверки изоморфизма. Первая представлена в [11], вторая — в [12]. Кроме того, мы добавили некоторые подпрограммы для проверки изоморфизма двух алгебр в случае, когда одна из них зависит от параметра. Программа выдает значения параметра, при которых алгебры изоморфны.

2.1. Нерасщепляемый случай. Ограничимся классификацией 3-филиформных алгебр Лейбница максимальной длины, которые являются расширением естественно градуированных нелиевых нерасщепляемых алгебр Лейбница.

Заметим, что лиев случай полностью изучен в [8]. Можно заметить, что в этом случае не существует нерасщепляемых 3-филиформных алгебр Лейбница максимальной длины.

Во-первых, напомним классификацию естественно градуированных 3-филиформных нелиевых алгебр Лейбница [13].

Теорема 2.1. *Пусть $\mathscr{L}$ — комплексная n-мерная нерасщепляемая естественно градуированная 3-филиформная нелиева алгебра Лейбница, где $n \geq 7$.*

Тогда существует базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-3}, f_1, f_2, f_3\}$ *в* $\mathscr{L}$ *такой, что* $\mathscr{L}$ *изоморфна*

$$L^1: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4, \\ [e_1, f_1] = f_3, \\ [e_i, f_2] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4. \end{cases}$$

Теорема 2.2. *Пусть* $\mathscr{L}$ *— комплексная* n*-мерная* ($n \ge 7$) *нерасщепляемая 3-филиформная алгебра Лейбница, у которой естественно градуированная ассоциированная алгебра является нерасщепляемой нелиевой 3-филиформной алгеброй Лейбница. Тогда* $l(\mathscr{L}) < n$.

Доказательство. Естественная градуировка в L^1 такова: $\mathscr{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathscr{L}_{n-3}$, где $\mathscr{L}_1 = \langle e_1, f_1, f_2 \rangle$, $\mathscr{L}_2 = \langle e_2, f_3 \rangle$ и $\mathscr{L}_i = \langle e_i \rangle$ при $3 \le i \le n-3$. Изучим длину ее расширения, которое обозначим через $\widetilde{L}^1$.

Заметим, что $\{e_2, e_3, \ldots, e_{n-3}, f_3\}$ — идеал в $R(L^1)$ и $e_{n-3} \in \mathrm{Cent}(L^1)$. Заменив базис: $e_1' = e_1$, $e_{i+1}' = [e_i', e_1']$ при $1 \le i \le n-4$, $f_1' = f_1$ и $f_2' = f_2$, можем записать таблицу умножения в $\widetilde{L}^1$ в виде

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-4, \\ [e_1, f_1] = f_3 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3}, \\ [e_i, f_2] = e_{i+1} + (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-3}, & 1 \le i \le n-4, \\ [f_i, e_1] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3}, & 1 \le i \le 2, \\ [f_3, e_1] = (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-3}, \\ [f_i, f_j] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3}, & 1 \le i, j \le 2, \\ [f_3, f_i] = (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-3}, & 1 \le i \le 2, \\ [e_i, f_1] = (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-3}, & 2 \le i \le n-5, \end{cases}$$

где $(*)$ означает соответствующие коэффициенты в произведениях. Основным инструментом доказательства является построение однородного базиса с порождающими

$$\tilde{x}_s = e_1 + \sum_{i=2}^{n-3} a_i e_i + \sum_{j=1}^{3} a_{n-3+j} f_j, \quad \tilde{x}_t = f_1 + \sum_{i=1}^{n-3} b_i e_i + \sum_{j=2}^{3} b_{n-3+j} f_j,$$

$$\tilde{x}_u = f_2 + \sum_{i=1}^{n-3} c_i e_i + \sum_{j=1, j\ne 2}^{3} c_{n-3+j} f_j.$$

Произведения порождающих $\widetilde{L}^1$ могут быть определены в новом базисе следующим образом:

$$[\tilde{x}_s, \tilde{x}_s] = (1 + a_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + a_{n-2} f_3,$$

$$[\tilde{x}_t, \tilde{x}_t] = b_1(b_1 + b_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + b_1 f_3,$$

$$[\tilde{x}_u, \tilde{x}_u] = c_1(1 + c_1)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + c_1 c_{n-2} f_3,$$

$$[\tilde{x}_s, \tilde{x}_t] = (b_1 + b_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + f_3,$$

$$[\tilde{x}_t, \tilde{x}_s] = b_1(1 + a_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + b_1 a_{n-2} f_3,$$

$$[\tilde{x}_s, \tilde{x}_u] = (1 + c_1)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + c_{n-2} f_3,$$

$$[\tilde{x}_u, \tilde{x}_s] = c_1(1 + a_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + c_1 a_{n-2} f_3,$$

$$[\tilde{x}_t, \tilde{x}_u] = b_1(1+c_1)e_2 + (*)e_3 + \dots + (*)e_{n-3} + b_1 c_{n-2} f_3,$$

$$[\tilde{x}_u, \tilde{x}_t] = c_1(b_1+b_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \dots + (*)e_{n-3} + c_1 f_3.$$

Поскольку $\tilde{x}_s, \tilde{x}_t, \tilde{x}_u$ линейно независимы, $\det \begin{pmatrix} 1 & a_{n-2} & a_{n-1} \\ b_1 & 1 & b_{n-1} \\ c_1 & c_{n-2} & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$

Случай 1. Если $1 + a_{n-1} \neq 0$, то имеем следующие подслучаи.

Случай 1.1. Если $[\tilde{x}_s, \tilde{x}_s]$ и $[\tilde{x}_s, \tilde{x}_t]$ линейно независимы, то берем однородный базис $y_1 = \tilde{x}_s$, $y_i = [y_{i-1}, y_1]$ при $2 \leq i \leq n-3$, $z_1 = \tilde{x}_t$, $z_2 = \tilde{x}_u$ и $z_3 = [\tilde{x}_s, \tilde{x}_t] = [y_1, z_1]$, где

$$[\underbrace{[\tilde{x}_s, \tilde{x}_s], \dots, \tilde{x}_s}_{\text{i-раз}}] = (1+a_{n-1})^{i-1} e_i + (*)e_{i+1} + \dots + (*)e_{n-3} \quad \text{при } 3 \leq i \leq n-3,$$

получая градуировку $V_{k_s} \oplus V_{2k_s} \oplus \dots \oplus V_{(n-3)k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_u} \oplus V_{k_s+k_t}$. Предположим, что градуировка имеет максимальную длину. Тогда k_s, k_t, k_u попарно различны. Достаточно рассмотреть произведения $[z_2, y_1]$ и $[y_1, z_2]$, чтобы опровергнуть максимальность длины градуировки. Рассмотрим $[z_2, y_1] = [\tilde{x}_u, \tilde{x}_s] = c_1[\tilde{x}_s, \tilde{x}_s] = c_1 y_2$. Так как $[z_2, y_1] \in V_{k_s+k_u}$, $y_2 \in V_{2k_s}$ и $k_s \neq k_u$, то $c_1 = 0$.

С другой стороны,

$$\begin{aligned}[y_1, z_2] &= (1+c_1)e_2 + (*)e_3 + \dots + (*)e_{n-3} + c_{n-2} f_3 \\ &= e_2 + (*)e_3 + \dots + (*)e_{n-3} + c_{n-2} f_3 = A y_2\end{aligned}$$

при $A \neq 0$. Также имеем $[y_1, z_2] \in V_{k_s+k_u}$ и $y_2 \in V_{2k_s}$, откуда $k_u = k_s$, что противоречит гипотезе о максимальности длины. Следовательно, в данном подслучае не существует алгебры с градуировкой максимальной длины.

Случай 1.2. Если $[\tilde{x}_s, \tilde{x}_s]$ и $[\tilde{x}_s, \tilde{x}_t]$ линейно зависимы, то, используя $[\tilde{x}_s, \tilde{x}_s] \neq 0$, $[\tilde{x}_s, \tilde{x}_t] \neq 0$ и $V_{2k_s} = V_{k_s+k_t}$, получаем $k_s = k_t$; противоречие.

Случай 2. $1 + a_{n-1} = 0$.

Случай 2.1. $1 + c_1 \neq 0$.

Случай 2.1.1. Если $[\tilde{x}_s, \tilde{x}_t]$ и $[\tilde{x}_s, \tilde{x}_u]$ линейно независимы, то возьмем новый базис

$$y_1 = \tilde{x}_s,\ z_1 = \tilde{x}_t,\ z_2 = \tilde{x}_u,\ y_2 = [\tilde{x}_s, \tilde{x}_u] = [y_1, z_2],\ y_i = [y_{i-1}, z_2]$$

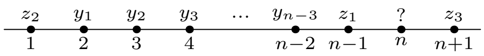
при $3 \leq i \leq n-3$ и $z_3 = [\tilde{x}_s, \tilde{x}_t] = [y_1, z_1]$, где

$$y_{i+1} = [[\tilde{x}_s, \underbrace{\tilde{x}_u], \dots, \tilde{x}_u}_{i\text{-раз}}] = (1+c_1)^i e_{i+1} + \dots + (*)e_{n-3}$$

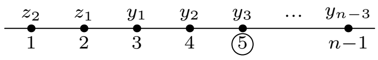
при $2 \leq i \leq n-4$, дающий следующую градуировку максимальной длины: $V_{k_s} \oplus V_{k_s+k_u} \oplus V_{k_s+2k_u} \oplus \dots \oplus V_{k_s+(n-4)k_u} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_u} \oplus V_{k_t+k_s}$.

Чтобы доказать отсутствие алгебры с градуировкой максимальной длины, в данном подслучае достаточно изучить значения k_u, k_t и k_s, при которых предыдущая градуировка имеет максимальную длину. Из свойств градуировки легко следует, что градуировка связна тогда и только тогда, когда $k_u = \pm 1$. Без ограничения общности можно предполагать, что $k_u = 1$. Исследуем значения k_t и k_s.

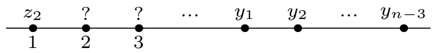
Случай (a). $k_s > 0$.



Подслучай (a.1)



Подслучай (a.2)



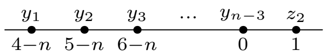
Подслучай (a.3)

Подслучай (a.1). $k_s = 2$. При данных предположениях имеем $k_t = n - 1$, $V_{k_t+k_s} = V_{n+1}$ и $V_n = \langle 0\rangle$. Следовательно, рассматриваемая градуировка несвязна.

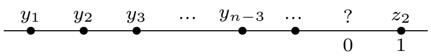
Подслучай (a.2). $k_s = 3$. Тогда $k_t = 2$ и $V_{k_t+k_s} = V_5 = \langle z_3, y_3\rangle$, т. е. длина градуировки не максимальна.

Подслучай (a.3). $k_s > 3$. Существует некоторое V_p при $2 \le p \le k_s$ такое, что $V_p = \langle 0\rangle$; противоречие со связностью градуировки.

Случай (b). $k_s < 0$.



Подслучай (b.1)



Подслучай (b.2)

Подслучай (b.1). $k_s = 4-n$. Из условий и связности имеем либо $k_t = 3-n$, либо $k_t = 2$. Если $k_t = 3-n$, то $V_{k_t+k_s} = V_{7-2n}$. Так как $n \ge 7$, то V_{7-2n} нулевое и градуировка несвязна. С другой стороны, если $k_t = 2$, то $V_{k_t+k_s} = V_{6-n} = \langle y_3, z_3\rangle$, что противоречит предположению о максимальности длины.

Подслучай (b.2). $k_s \ne 4-n$. Этот подслучай никогда не дает градуировку максимальной длины, так как V_0 всегда нулевое ($z_1 \notin V_0$).

Случай 2.1.2. Если $[\tilde{x}_s, \tilde{x}_t]$ и $[\tilde{x}_s, \tilde{x}_u]$ линейно зависимы, то аналогично случаю 1.2 получаем противоречие.

Случай 2.2. Если $1 + c_1 = 0$, то невозможно построить базис, так как все произведения порождающих могут быть записаны следующим образом:

$$
\begin{gathered}
[\tilde{x}_s, \tilde{x}_s] = (*)e_3 + \dots + (*)e_{n-3} + a_{n-2}f_3,\\
[\tilde{x}_t, \tilde{x}_t] = b_1[\tilde{x}_s, \tilde{x}_t] = (*)e_3 + \dots + (*)e_{n-3} + b_1a_{n-2}f_3,\\
[\tilde{x}_u, \tilde{x}_u] = c_1[\tilde{x}_s, \tilde{x}_u] = (*)e_3 + \dots + (*)e_{n-3} + c_1c_{n-2}f_3,\\
[\tilde{x}_s, \tilde{x}_t] = (*)e_3 + \dots + (*)e_{n-3} + f_3,\\
[\tilde{x}_t, \tilde{x}_s] = b_1[\tilde{x}_s, \tilde{x}_s] = (*)e_3 + \dots + (*)e_{n-3} + b_1a_{n-2}f_3,\\
[\tilde{x}_s, \tilde{x}_u] = (*)e_3 + \dots + (*)e_{n-3} + c_{n-2}f_3,\\
[\tilde{x}_u, \tilde{x}_s] = c_1[\tilde{x}_s, \tilde{x}_s] = (*)e_3 + \dots + (*)e_{n-3} + c_1a_{n-2}f_3,\\
[\tilde{x}_t, \tilde{x}_u] = b_1[\tilde{x}_s, \tilde{x}_u] = (*)e_3 + \dots + (*)e_{n-3} + b_1c_{n-2}f_3,\\
[\tilde{x}_u, \tilde{x}_t] = c_1[\tilde{x}_s, \tilde{x}_t] = (*)e_3 + \dots + (*)e_{n-3} + c_1f_3,
\end{gathered}
$$

т. е. y_2 не может быть порожден в данном случае. □

2.2. Расщепляемый случай. Изучим 3-филиформные алгебры Лейбница максимальной длины, у которых естественно градуированные алгебры расщепляемы. В частности, рассмотрим нестандартные семейства.

Определение 2.1. Пусть $\mathscr{L}$ — расщепляемая алгебра максимальной длины и k — целое число такое, что $\mathscr{L} = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k$. Алгебра $\mathscr{L}$ называется *стандартной*, если N_1, N_2, ..., N_k являются алгебрами максимальной длины. В противном случае $\mathscr{L}$ называется *нестандартной*.

Пример 2.2. Список стандартных 3-филиформных алгебр Лейбница максимальной длины состоит из следующих алгебр: нуль-филиформные алгебры Лейбница максимальной длины $\oplus\mathbb{C}^3$, филиформные алгебры Лейбница максимальной длины $\oplus\mathbb{C}^2$ и 2-филиформные алгебры Лейбница максимальной длины $\oplus\mathbb{C}$. Эти алгебры изучены в [4, 6].

Принимая во внимание предыдущий пример, сведем изучение к нестандартным семействам, т. е. изучим расширения естественно градуированных филиформных нелиевых алгебр Лейбница $\oplus\mathbb{C}^2$ и естественно градуированных 2-филиформных нелиевых алгебр Лейбница $\oplus\mathbb{C}$. Заметим, что нуль-филиформный случай не рассматривается, так как его расширение всегда дает стандартную алгебру. Лиев случай изучен в [8], где классификация представлена в виде следующей теоремы.

Теорема 2.3. *Пусть $\mathscr{L}$ — $(n+1)$-мерная нестандартная 3-филиформная алгебра Лейбница, у которой ассоциированная естественно градуированная алгебра является алгеброй Ли. Тогда n нечетно и алгебра $\mathscr{L}$ изоморфна алгебре Ли максимальной длины*:

$$N: \begin{cases} [e_{i-1}, e_0] = e_i, \quad 2 \le i \le n-2, \\ [e_{n-3}, e_1] = -e_{n-1}, \\ [e_{n-4}, e_2] = e_{n-1}, \\ [e_i, e_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} e_{n-1}, \quad 3 \le i \le \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor, \\ [f_1, e_0] = e_{n-1}. \end{cases}$$

2.3. 2-Филиформный случай. Кабесас, Камачо и Родригэс получили классификацию естественно градуированных 2-филиформных нелиевых алгебр Лейбница [4]. Они доказали, что с точностью до изоморфизма существуют две такие алгебры, которые при этом нерасщепляемы. Эти алгебры определяются следующими таблицами умножения:

$$KF_4: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 1 \le i \le n-3, \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n + \alpha_3 e_3 + \dots + \alpha_{n-2} e_{n-2}, \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4 + \dots + \beta_{n-2} e_{n-2}, \\ [e_i, e_{n-1}] = \beta_{i,i+2} e_{i+2} + \beta_{i,i+3} e_{i+3} + \dots + \beta_{i,n-2} e_{n-2}, \quad 2 \le i \le n-4, \\ [e_n, e_{n-1}] = \gamma_4 e_4 + \dots + \gamma_{n-2} e_{n-2}; \end{cases}$$

$$KF_5: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 1 \le i \le n-3, \\ [e_1, e_{n-1}] = e_2 + e_n + \alpha_3 e_3 + \dots + \alpha_{n-2} e_{n-2}, \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4 + \dots + \beta_{n-2} e_{n-2}, \\ [e_i, e_{n-1}] = e_{i+1} + \beta_{i,i+2} e_{i+2} + \beta_{i,i+3} e_{i+3} + \dots + \beta_{i,n-2} e_{n-2}, \quad 2 \le i \le n-4, \\ [e_n, e_{n-1}] = \gamma_4 e_4 + \dots + \gamma_{n-2} e_{n-2}. \end{cases}$$

Из этой классификации вытекает

Теорема 2.4. *Пусть $\mathscr{L}$ — $(n+1)$-мерная 3-филиформная нелиева алгебра Лейбница максимальной длины, у которой ассоциированной естественно градуированной алгеброй является $KF_4 \oplus \mathbb{C}$. Тогда $\mathscr{L}$ изоморфна либо M, либо одной из алгебр семейства $M^{1,\alpha}$:*

$$M: \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, & 1 \le i \le n-3, \\ [y_1, y_{n-1}] = y_n, & \\ [z_1, y_{n-1}] = y_{n-2}, & \end{cases} \qquad M^{1,\alpha}: \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, & 1 \le i \le n-3, \\ [y_1, y_{n-1}] = y_n, & \\ [y_{n-1}, z_1] = y_{n-2}, & \\ [z_1, y_{n-1}] = \alpha y_{n-2}, & \alpha \in \mathbb{C}, \end{cases}$$

при этом у данных алгебр градуировка максимальной длины следующая: $V_{-1} \oplus V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_{n-1}$, $V_{-1} = \langle y_{n-1} \rangle$, $V_0 = \langle y_n \rangle$, $V_i = \langle y_i \rangle$ при $1 \le i \le n-2$ и $V_{n-1} = \langle z_1 \rangle$.

Доказательство. Расширение $KF_4 \oplus \mathbb{C}$ при помощи естественной градуировки таковы:

$$\widetilde{\mathscr{L}}: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1} + (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 1 \le i \le n-3, \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = (*)e_3 \cdots + (*)e_{n-2}, & \\ [e_i, e_{n-1}] = (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 2 \le i \le n-4, \\ [e_n, e_{n-1}] = (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \\ [e_i, f_1] = (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 1 \le i \le n-4, \\ [e_{n-1}, f_1] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \\ [e_n, f_1] = (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \\ [f_1, e_i] = (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 1 \le i \le n-4, \\ [f_1, e_{n-1}] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \\ [f_1, e_n] = (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \\ [f_1, f_1] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \end{cases}$$

где $(*)$ означает соответствующие коэффициенты в произведениях. Получим однородный базис, рассматривая порождающие

$$\tilde{x}_s = e_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i e_i + b_1 f_1, \quad \tilde{x}_t = e_{n-1} + \sum_{i=1, i \ne n-1}^{n} A_i e_i + B_1 f_1, \quad \tilde{x}_u = f_1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Рассмотрим следующие произведения, которые будут очень полезны в дальнейшем доказательстве:

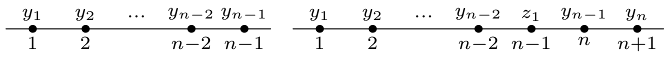
$$[\tilde{x}_s, \tilde{x}_s] = e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + a_{n-1}e_n,$$

$$[\tilde{x}_s, \tilde{x}_t] = A_1 e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + e_n,$$

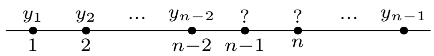
$$[\underbrace{[\tilde{x}_s, \tilde{x}_s], \ldots, \tilde{x}_s}_{i\text{-раз}}] = e_i + (*)e_{i+1} + \cdots + (*)e_{n-2} \text{ при } 3 \le i \le n-2.$$

Возьмем однородный базис $y_1 = \tilde{x}_s$, $y_i = [y_{i-1}, y_1]$ при $2 \le i \le n-2$, $y_{n-1} = \tilde{x}_t$, $y_n = [y_1, y_{n-1}]$, $z_1 = \tilde{x}_u$ и ассоциированную градуировку максимальной длины $V_{k_s} \oplus V_{2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{(n-2)k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_u}$. Эта градуировка связна тогда и только тогда, когда $k_s = \pm 1$. Без ограничения общности можно предполагать, что $k_s = 1$ (случай $k_s = -1$ аналогичен). Продолжим доказательство изучением всевозможных значений k_t и k_u для градуировки максимальной длины.

Случай 1. Если $k_t > 0$, то имеем следующие возможности:



Подслучай 1.1 Подслучай 1.2



Подслучай 1.3

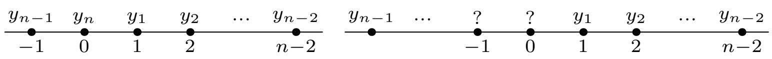
Подслучай 1.1. $k_t = n-1$. Из связности градуировки получаем $k_u = 0$ или $k_u = n+1$, но $k_u = 0$, что невозможно, так как $z_1 \in V_{k_u}$ и z_1 порождающий. Если $k_u = n+1$, то $[y_i, z_1] \in V_{n+1+i} = \langle 0 \rangle$, $[z_1, y_i] \in V_{n+1+i} = \langle 0 \rangle$ при $1 \le i \le n-2$. Более того, $[z_1, y_{n-1}]$ и $[y_{n-1}, z_1]$ принадлежат $V_{2n} = \langle 0 \rangle$. С другой стороны, $[z_1, y_n]$, $[y_n, z_1] \in V_{2n+1} = \langle 0 \rangle$ и $[z_1, z_1] \in V_{2n+2} = \langle 0 \rangle$. Тогда $z_1 \in \mathrm{Cent}(\widetilde{\mathscr{L}})$, что дает стандартную алгебру.

Подслучай 1.2. $k_t = n$. Рассуждая аналогично предыдущему, легко проверить, что $[y_i, z_1] = [z_1, y_i] = 0$ при $3 \le i \le n$, так как эти произведения лежат в $V_{n-1+i} = \langle 0 \rangle$. Более того, $[z_1, y_1], [y_1, z_1] \in V_n = \langle y_{n-1} \rangle$, что невозможно, поскольку y_{n-1} порождающий в $y_{n-1} \in \widetilde{\mathscr{L}} \backslash \widetilde{\mathscr{L}}^2$, в то время как $[z_1, y_1], [y_1, z_1] \in \widetilde{\mathscr{L}}^2$.

Так как $y_2 \in R(\widetilde{\mathscr{L}})$, из тождества Лейбница следует $[z_1, y_2] = [y_2, z_1] = 0$. В итоге, поскольку $[z_1, z_1] \in V_{2n-2} = \langle 0 \rangle$, приходим к заключению, что $z_1 \in \mathrm{Cent}(\widetilde{\mathscr{L}})$. Таким образом, полученная алгебра стандартна.

Подслучай 1.3. $k_t > n$. Градуировка несвязна, потому что либо $V_{n-1} = \langle 0 \rangle$, либо $V_n = \langle 0 \rangle$.

Случай 2. Если $k_t < 0$, то выделяем подслучаи:



Подслучай 2.1 Подслучай 2.2

Подслучай 2.1. Если $k_t = -1$, то из связности градуировки следует, что или $k_u = -2$, или $k_u = n-1$. В первом случае докажем, что полученная алгебра стандартна, так как $z_1 \in \mathrm{Cent}(\widetilde{\mathscr{L}})$. Из свойств градуировки имеем $[y_i, z_1], [z_1, y_i] \in V_{i-2} = \langle y_{i-2} \rangle$ при $2 \le i \le n-2$, но из таблицы умножения в $\widetilde{\mathscr{L}}$ известно, что $[y_i, z_1] = \alpha_1 e_{i+1} + (*)e_{i+2} + \dots + (*)e_{n-2}$ и $[z_1, y_i] = (*)e_{i+2} + \dots + (*)e_{n-2}$. Следовательно, $[y_i, z_1] = 0$ и $[z_1, y_i] = 0$ при $2 \le i \le n-2$. С другой стороны, $[y_1, z_1], [z_1, y_1] \in V_{-1} = \langle y_{n-1} \rangle$, что невозможно, так как y_{n-1} является порождающим в $\widetilde{\mathscr{L}}$. Окончательно поскольку $[z_1, y_{n-1}], [y_{n-1}, z_1] \in V_{-3} = \langle 0 \rangle$ и $y_n \in \mathrm{Cent}(\widetilde{\mathscr{L}})$, то $z_1 \in \mathrm{Cent}(\widetilde{\mathscr{L}})$, а потому алгебра стандартна.

Если $k_u = n-1$, то $[z_1, y_i] = [y_i, z_1] = 0$ при $1 \le i \le n-2$ в силу того, что они принадлежат $V_{n-1+i} = \langle 0 \rangle$, и $[z_1, z_1] = 0$, что следует из включения $[z_1, z_1] \in V_{2n-2} = \langle 0 \rangle$. Более того, так как $y_n \in \mathrm{Cent}(\widetilde{\mathscr{L}})$, то $[z_1, y_n] = [y_n, z_1] = 0$. С другой стороны, ввиду свойств градуировки можем написать $[z_1, y_{n-1}] = \alpha y_{n-2}$ и $[y_{n-1}, z_1] = \beta y_{n-2}$. Благодаря включениям $\{y_2, y_3, \dots, y_{n-2}\} \in R(\widetilde{\mathscr{L}})$, $y_n \in \mathrm{Cent}(\widetilde{\mathscr{L}})$ и вычислениям, проведенным выше, достаточно найти произведения $[y_{n-2}, y_1]$, $[y_{n-1}, y_1]$ и $[y_i, y_{n-1}]$ при $2 \le i \le n-1$, чтобы узнать таблицу умножения $\widetilde{\mathscr{L}}$ в однородном базисе.

Из свойств градуировки ясно, что $[y_{n-2}, y_1] \in V_{n-1} = \langle z_1 \rangle$. Тем не менее из определения убывающей центральной последовательности имеем $[y_{n-2}, y_1] \in \widetilde{\mathscr{L}}^2$ и $z_1 \in \widetilde{\mathscr{L}} \setminus \widetilde{\mathscr{L}}^2$. Следовательно, $[y_{n-2}, y_1] = 0$. Из тех же рассуждений получаем $[y_1, y_{n-2}] = 0$. Кроме того, $[y_{n-1}, y_{n-1}] = 0$, поскольку $[y_{n-1}, y_{n-1}] \in V_{-2} = \langle 0 \rangle$.

Помимо этого можно доказать, что $[y_3, y_{n-1}] \in V_2 = \langle y_2 \rangle$, и, используя умножение в $\widetilde{\mathscr{L}}$, можно записать $[y_3, y_{n-1}] = A_1 e_4 + (*) e_5 + \dots + e_{n-2} = A_1 y_4$. Таким образом, $A_1 = 0$ и $[y_3, y_{n-1}] = 0$, так как если $A_1 \neq 0$, то $V_2 \supseteq [y_3, y_{n-1}] = A_1 y_4 \in V_4$, что противоречит предположению о максимальности длины градуировки. Аналогично получаем $[y_{n-1}, y_3] = 0$. Наконец, в силу того, что $[y_{n-1}, y_1] = A_1 e_2 + (*) e_3 + \dots + (*) e_{n-2} + A_1 a_{n-1} e_n = (*) e_3 + \dots + (*) e_{n-2}$ и $[y_{n-1}, y_1] \in V_0 = \langle y_n \rangle$, имеем $[y_{n-1}, y_1] = 0$.

Суммируя, получаем умножение в алгебре максимальной длины:

$$\widetilde{\mathscr{L}} : \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, & 1 \le i \le n-3, \\ [y_1, y_{n-1}] = y_n, & \\ [y_i, y_{n-1}] = \gamma_i y_{i-1}, & 2 \le i \le n-2, \\ [z_1, y_{n-1}] = \alpha y_{n-2}, & \\ [y_{n-1}, z_1] = \beta y_{n-2}. & \end{cases}$$

В итоге, используя программу проверки тождества Лейбница, легко доказать, что $\gamma_i = 0$ при $2 \le i \le n-2$. Рассматривая размерность $R(\mathscr{L})$, предполагаем, что $\beta = 0$ или $\beta = 1$. С одной стороны, если $\beta = 0$, то необходимо, чтобы $\alpha \neq 0$, и, используя тривиальную замену базиса, можно взять $\alpha = 1$. Это приводит к M. С другой стороны ($\beta = 1$), используя программу об изоморфизме, получаем семейство $M^{1,\alpha}$, где $\alpha \in \mathbb{C}$.

Подслучай 2.2. $k_t \neq -1$. Рассуждая, как в предыдущем случае, получаем только стандартные алгебры или несвязные градуировки. $\square$

Теорема 2.5. *Пусть $\mathscr{L}$ — $(n+1)$-мерная 3-филиформная нелиева алгебра Лейбница с ассоциированной естественно градуированной алгеброй $KF_5 \oplus \mathbb{C}$. Тогда $l(\mathscr{L}) \le n$.*

Доказательство проводится с использованием рассуждений, примененных в предыдущей теореме: выбираем однородный базис и ассоциированную максимальную градуировку, используем свойства градуировки и те же программы. $\square$

2.4. Филиформный случай. В [4] Ш. А. Аюпов и Б. А. Омиров получили классификацию естественно градуированных филиформных нелиевых алгебр Лейбница произвольной размерности. Они доказали, что с точностью до изоморфизма существуют три алгебры в каждой размерности n. Мы рассмотрим только одну, так как любая из остальных — это либо расщепляемая алгебра, либо алгебра Ли:

$$NGF_1 : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, & \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-1. \end{cases}$$

Расширяя $NGF_1 \oplus \mathbb{C}^2$ при помощи естественной градуировки, получаем следующий результат.

Теорема 2.6. *Пусть $\mathscr{L}$ — $(n+2)$-мерная 3-филиформная нелиева алгебра Лейбница максимальной длины, у которой ассоциированная естественно градуированная алгебра — это $NGF_1 \oplus \mathbb{C}^2$ при $n \geq 8$. Тогда $l(\mathscr{L}) \leq n+1$.*

Доказательство. Как и в предыдущих доказательствах, сначала рассмотрим расширение алгебры $NGF_1 \oplus \mathbb{C}^2$, используя естественную градуировку, а далее получим однородный базис от порождающих

$$\tilde{x}_s = e_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i e_i + b_1 f_1 + b_2 f_2, \quad \tilde{x}_t = e_2 + \sum_{i=1, i\neq 2}^{n} A_i e_i + B_1 f_1 + B_2 f_2,$$

$$\tilde{x}_u = f_1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \beta_2 f_2, \quad \tilde{x}_v = f_2 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i + \mu_1 f_1.$$

Основные произведения данных порождающих таковы:

$$\begin{cases} [\tilde{x}_s, \tilde{x}_s] & = (1+a_2)e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, \\ [\tilde{x}_t, \tilde{x}_s] & = (1+A_1)e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, \\ [\tilde{x}_u, \tilde{x}_s] & = (\alpha_1+\alpha_2)e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, \\ [\tilde{x}_v, \tilde{x}_s] & = (\gamma_1+\gamma_2)e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}; \end{cases} \tag{1}$$

остальные произведения линейно зависимы от выписанных выше.

На следующем шаге предполагаем, что ассоциированная градуировка относительно данного базиса имеет максимальную длину.

Случай 1. Если $1+a_2 \neq 0$, то возьмем базис $y_1 = \tilde{x}_s$, $y_2 = \tilde{x}_t$, $y_3 = [y_1, y_1]$, $y_i = [y_{i-1}, y_1]$ при $4 \leq i \leq n$, $z_1 = \tilde{x}_u$ и $z_2 = \tilde{x}_v$, а ассоциированная градуировка $V_{k_s} \oplus V_{2k_s} \oplus V_{(n-1)k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_u} \oplus V_{k_v}$ имеет максимальную длину. Заметим, что

$$[\underbrace{[\tilde{x}_s, \tilde{x}_s], \ldots, \tilde{x}_s}_{i\text{-раз}}] = (1+a_2)e_{i+1} + (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, \quad 2 \leq i \leq n-1. \tag{2}$$

Из (1) и (2) заключаем, что $[y_2, y_1]$ линейно зависим от y_3. Из свойств градуировки вытекает, что $[y_2, y_1] \in V_{k_t+k_s}$ и $y_3 \in V_{2k_s}$. В итоге из максимальности длины получаем, что $k_s \neq k_t$. Эти факты влекут, что $[y_2, y_1] = 0$, откуда $A_1 = -1$ (см. (1)). С другой стороны, $[y_1, y_2] = A_1(1+a_2)e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2} = -y_3$, $[y_1, y_2] \in V_{k_s+k_t}$ и $y_3 \in V_{2k_s}$. Тогда $V_{k_s+k_t} = V_{2k_s}$, а потому $k_s = k_t$, что невозможно. Стало быть, в данном случае не существует алгебры максимальной длины.

Случай 2. Если $1+a_2 = 0$, то надо выделить три случая.

Подслучай 2.1. Если $A_1 = 0$, то возьмем новый базис $y_1 = x_s$, $y_2 = x_t$, $y_i = [y_{i-1}, y_1]$ при $3 \leq i \leq n$, $z_1 = x_u$ и $z_2 = x_v$. Ассоциированная градуировка максимальной длины такова: $V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-2)k_s} \oplus V_{k_u} \oplus V_{k_v}$.

Рассмотрев всевозможные произведения в новом базисе, получим следующую таблицу умножения:

$$\begin{cases} [y_1, y_1] = y_3, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1, \\ [y_i, y_2] = P_i y_{i+4}, \quad 2 \leq i \leq n-4, \\ [y_i, z_1] = Q_i y_{i+2}, \quad 2 \leq i \leq n-2, \\ [y_i, z_2] = R_i y_{i+3}, \quad 2 \leq i \leq n-3. \end{cases}$$

Используя индукцию по i и тождество Лейбница по $[[y_i, y_1], y_2]$, $[[y_i, y_1], z_1]$ и $[[y_i, y_1], z_2]$, получаем $P_i = Q_i = R_i = 0$ при $i \geq 3$ соответственно. Более того, применяя программу проверки тождества Лейбница, выводим $A_2 = B_2 = D_2 = 0$ (дальнейшие детали см. на сайте: http://personal.us.es/jrgomez). Следовательно, полученная алгебра стандартна.

Подслучай 2.2. Если $A_1 \neq 0$ и $A_1 \neq -1$, то можно взять предыдущий однородный базис. Получаем противоречие с максимальностью длины, рассматривая произведение $[y_2, y_2]$. Из умножения в $\widetilde{\mathscr{L}}$ имеем $[y_2, y_2] = A_1(A_1 + 1)e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2} = A_1 y_3$. Поскольку предположили, что $A_1 \neq 0$, $[y_2, y_2] \in V_{2k_t}$ и $y_3 \in V_{k_t+2k_s}$, то $k_s = k_t$; противоречие.

Подслучай 2.3. Если $A_1 \neq 0$ и $A_1 = -1$, то, так как $\tilde{x}_u$ и $\tilde{x}_v$ играют симметричную роль, можно предполагать, что $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. В противном случае невозможно построить однородный базис, порожденный $\tilde{x}_u$, $\tilde{x}_t$, $\tilde{x}_u$ и $\tilde{x}_v$. Следовательно, выбираем базис $y_1 = x_s$, $y_2 = x_u$, $y_i = [y_{i-1}, y_1]$ при $3 \leq i \leq n$, $z_1 = x_t$ и $z_2 = x_v$.

Если $\alpha_1 \neq 0$, то $[y_2, y_2] = [\tilde{x}_u, \tilde{x}_u] = \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2} = \tau y_3 \neq 0$. Так как $[y_2, y_2] \in V_{2k_u}$, $y_3 \in V_{k_t+k_s}$ и $\tau \neq 0$, то $k_t = k_s$, что невозможно, поскольку это противоречит максимальности длины. Следовательно, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$ и $[\tilde{x}_u, \tilde{x}_t] = -\alpha_2 e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}$; противоречие. $\square$

3. Применения алгебр максимальной длины

Как упоминалось во введении, алгебры максимальной длины позволяют проще изучать некоторые когомологические свойства такие, как пространство дифференцирований и первую группу когомологий (см. [10]).

Отметим несколько когомологических свойств, полученных с использованием программы о дифференцированиях, позволяющей найти базис пространства дифференцирований алгебры максимальной длины. На этой основе изучение когомологий может быть легко проведено с привлечением рассуждений, аналогичных представленным в [3, 4, 9, 10, 14–17]. Как и в других программах, получаем правило умножения для фиксированной размерности (детали см. в [12]). Далее обобщаем полученные результаты, доказывая по индукции результаты для произвольной фиксированной размерности.

Предложение 3.1. (1) $\dim(\mathrm{Der}(N)) = 3\frac{n-1}{2} + 7$,
(2) $\dim(\mathrm{Der}(M)) = n + 6$,
(3) $\dim(\mathrm{Der}(M^{1,\alpha})) = n + 5$.

Доказательство использует программу о дифференцированиях, и вычисления представлены с объяснением на сайте http://personal.us.es/jrgomez. $\square$

Следствие 3.2. (1) $\dim(\mathscr{H}^1(N, N)) = \frac{n+19}{2}$,
(2) $\dim(\mathscr{H}^1(M, M)) = n + 4$,
(3) $\dim(\mathscr{H}^1(M^{1,\alpha}, M^{1,\alpha})) = n + 2$.

Доказательство использует характеризацию

$$H^1(\mathscr{L}, \mathscr{L}) = \mathrm{Der}(\mathscr{L}) / \mathrm{Inn}(\mathscr{L}),$$

где $\mathrm{Inn}(\mathscr{L})$ означает множество внутренних дифференцирований $\mathscr{L}$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cabezas J. M., Pastor E.* Naturally graded p-filiform Lie algebras in arbitrary finite dimension // J. Lie Theory. 2005. V. 15. P. 379–391.
2. *Блох А.* Об одном обобщении понятия алгебры Ли // Докл. АН СССР. 1965. Т. 165, № 3. С. 471–473.
3. *Loday J. L.* Cyclic homology. Berlin: Springer-Verl., 1992.
4. *Аюпов Ш. А., Омиров Б. А.* О некоторых классах нильпотентных алгебр Лейбница // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 1. С. 18–29.
5. *Casas J. M., Ladra M.* Non-abelian tensor product of Leibniz algebras and an exact sequence in Leibniz homology // Commun. Algebra. 2003. V. 31, N 9. P. 4639–4646.
6. *Cabezas J. M., Camacho L. M., Rodríguez I. M.* On filiform and 2-filiform Leibniz algebras of maximum length // J. Lie Theory. 2008. V. 18. P. 335–350.
7. *Камачо Л. М., Каньете Е. М., Гомес Х. Р., Омиров Б. А.* Квази-филиформные алгебры Лейбница максимальной длины // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 1058–1073.
8. *Camacho L. M., Cañete E. M., Gómez J. R., Omirov B. A.* 3-Filiform Leibniz algebras of maximum length, whose naturally graded algebras are Lie algebras // Linear Multilinear Algebra. 2011. V. 59, N 9. P. 1039–1059.
9. *Омиров Б. А.* О дифференцированиях филиформных алгебр Лейбница // Мат. заметки. 2005. Т. 77, № 5. С. 733–742.
10. *Loday J. L., Pirashvili T.* Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology // Math. Ann. 1993. V. 296, N 1. P. 139–158.
11. *Camacho L. M., Gómez J. R., González A. J., Omirov B. A.* Naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras // J. Symb. Computation. 2009. V. 44, N 5. P. 527–539.
12. *Cañete E. M.* Algebras de Leibniz de longitud maxima: PhD Thesis. Universidad de Sevilla, 2012. (http://www.educacion.es/teseo).
13. *Camacho L. M., Gómez J. R., González A. J., Omirov B. A.* The classification of naturally graded p-filiform Leibniz algebras // Commun. Algebra. 2011. V. 39, N 1. P. 153–163.
14. *Dzhumadil'daev A. S.* Cohomologies of colour Leibniz algebras: pre-simplicial approach // Lie theory and its applications in physics. III (Clausthal, 1999). River Edge, NJ: World Sci. Publ., 2000. P. 124–136.
15. *Feigin B. L., Fuks D. B.* Cohomology of Lie groups and Lie algebras. II // Encycl. Math. Sci. Berlin: Springer-Verl., 2000. V. 21. P. 125–223.
16. *Gómez J. R., Jiménez-Merchán A., Reyes J.* Maximum length filiform Lie algebras // Extracta Math. 2001. V. 16, N 3. P. 405–421.
17. *Vergne M.* Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la varieté des algèbres de Lie nilpotentes // Bull. Soc. Math. France. 1970. V. 98. P. 81–116.

Статья поступила 14 марта 2014 г.

Luisa M. Camacho (Камачо Луиса Мария),
Elisa M. Cañete (Каньете Элиса Молеро),
José R. Gómez (Гомес Хосе Рамон)
Dpto. Matemática Aplicada I,
Universidad de Sevilla,
Avda. Reina Mercedes, s/n. 41012 Sevilla, Spain
lcamacho@us.es, elisacamol@us.es, jrgomez@us.es

Омиров Бахром Абдазович
Институт математики и информационных технологий АН Узбекистана,
ул. Ф. Ходжаева, 29, Ташкент 100125, Узбекистан
omirovb@mail.ru