Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2016. Том 57, № 2

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫМ ВЛОЖЕНИЕМ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП

А. Ф. Васильев,
Т. И. Васильева, А. С. Вегера

Аннотация. Для множества простых чисел π и наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ изучены свойства класса групп G, у которых единичная подгруппа и все силовские p-подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны (K-$\mathfrak{F}$-субнормальны) в G для любого p из π. Установлено, что такой класс является наследственной насыщенной формацией, и найден ее максимальный внутренний локальный экран. Получены критерии принадлежности группы наследственной насыщенной формации в терминах ее формационно субнормальных силовских подгрупп.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.203

Ключевые слова: конечная группа, силовская подгруппа, формация, наследственная насыщенная формация, $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа, K-$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа, локальный экран.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Хорошо известно, что группа нильпотентна тогда и только тогда, когда любая ее силовская подгруппа субнормальна в ней. В 1969 г. Хоукс [1] обобщил понятие субнормальности, введя определение $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы в разрешимой группе. В 1978 г. Л. А. Шеметков в [2] распространил данное понятие на произвольные конечные группы.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*субнормальной* в G (обозначается через H $\mathfrak{F}$-$\mathrm{sn}\, G$), если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \dots < H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \dots, n$.

В случае, когда $\mathfrak{F}$ совпадает с классом $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп, всякая $\mathfrak{N}$-субнормальная подгруппа субнормальна, обратное утверждение в общем случае неверно. Однако в разрешимых группах эти понятия эквивалентны.

Еще одно обобщение субнормальности предложил в 1978 г. Кегель [3], введя понятие $\mathfrak{F}$-достижимой (K-$\mathfrak{F}$-субнормальной согласно [4, разд. 6.1]) подгруппы.

Подгруппа H группы G называется K-$\mathfrak{F}$-*субнормальной* в G (обозначается через H K-$\mathfrak{F}$-$\mathrm{sn}\, G$), если существует цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = G$ такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \dots, n$.

Отметим, что субнормальная подгруппа K-$\mathfrak{F}$-субнормальна в любой группе, обратное утверждение верно не всегда. Для случая $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ понятия субнормальной и K-$\mathfrak{N}$-субнормальной подгрупп эквивалентны.

Свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных и К-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп и их приложения активно изучались в различных направлениях и нашли отражение в многочисленных работах (в частности, в [5–12] и монографиях [4, 13]).

В [5] было начато рассмотрение следующей общей задачи.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Изучить влияние $\mathfrak{F}$-субнормальных (К-$\mathfrak{F}$-*субнормальных*) *силовских подгрупп на строение всей группы.*

Определение. Для некоторого множества простых чисел π и непустой формации $\mathfrak{F}$ введем классы групп: $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ — класс всех групп G, у которых 1 $\mathfrak{F}$-$\mathrm{sn}\,G$ и Q $\mathfrak{F}$-$\mathrm{sn}\,G$ для любой силовской q-подгруппы Q из G, где $q \in \pi \cap \pi(G)$, $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$ — класс всех групп G, у которых Q К-$\mathfrak{F}$-$\mathrm{sn}\,G$ для любой силовской q-подгруппы Q из G, где $q \in \pi \cap \pi(G)$.

По определению $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ содержит все π'-группы G, у которых 1 $\mathfrak{F}$-$\mathrm{sn}\,G$, и $\mathfrak{G}_{\pi'} \subseteq \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$.

В случае, когда $\pi = \mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, будем использовать обозначения $\mathrm{W}\mathfrak{F}$ и $\overline{\mathrm{W}}\mathfrak{F}$ вместо $\mathrm{W}_\mathbb{P}\mathfrak{F}$ и $\overline{\mathrm{W}}_\mathbb{P}\mathfrak{F}$ соответственно.

В [8] исследовался класс всех групп G, у которых $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и все силовские подгруппы являются $\mathfrak{F}$-субнормальными в G. В частности, для наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ было доказано, что такой класс групп образует наследственную насыщенную формацию. Также в классе разрешимых групп было установлено ее локальное задание. Легко заметить, что данный класс групп совпадает с $\mathrm{W}\mathfrak{F}$.

В [6, 14, 15] аналогичные результаты получены для класса всех групп, у которых все силовские подгруппы группы К-$\mathfrak{F}$-субнормальны, т. е. для класса групп $\overline{\mathrm{W}}\mathfrak{F}$.

В [16, 17] введены определения $\mathbb{P}$-субнормальной и К-$\mathbb{P}$-субнормальной подгрупп, которые для формации $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп являются обобщениями понятий $\mathfrak{U}$-субнормальной и К-$\mathfrak{U}$-субнормальной подгрупп соответственно.

Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-*субнормальной в* G, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \cdots < H_{n-1} < H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для любого $i = 1, \dots, n$.

Подгруппа H группы G называется К-$\mathbb{P}$-*субнормальной в* G, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$ такая, что либо H_{i-1} нормальна в H_i, либо $|H_i : H_{i-1}|$ есть простое число для любого $i = 1, \dots, n$.

В любой группе всякая $\mathfrak{U}$-субнормальная подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна, а для разрешимых групп имеет место и обратное утверждение. Однако в общем случае оно неверно. Понятие К-$\mathbb{P}$-субнормальной подгруппы шире, чем понятие $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппы. Каждая К-$\mathfrak{U}$-субнормальная в G подгруппа К-$\mathbb{P}$-субнормальна в G. В общем случае обратное утверждение не выполняется. Например, в знакопеременной группе A_5 степени 5 силовская 2-подгруппа К-$\mathbb{P}$-субнормальна, но не К-$\mathfrak{U}$-субнормальна. В разрешимой группе понятия $\mathfrak{U}$-субнормальной, $\mathbb{P}$-субнормальной, К-$\mathbb{P}$-субнормальной и К-$\mathfrak{U}$-субнормальной подгрупп эквивалентны [17, лемма 3.4].

В [16] исследовался класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ всех групп, у которых любая силовская подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна в G. В частности, было установлено, что $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ состоит из разрешимых групп, является наследственной насыщенной формацией, и найдено ее локальное задание. Из разрешимости групп из $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ следует, что $\mathrm{W}\mathfrak{U} = \mathrm{w}\mathfrak{U} = \overline{\mathrm{W}}\mathfrak{U}$.

Важность изучения классов $\mathrm{W}\mathfrak{U}$ и $\overline{\mathrm{W}}\mathfrak{U}$ подчеркнута работами [16–20], где исследовались их свойства и приложения для изучения произведений групп.

В [17] был рассмотрен класс $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{U}$ всех групп, у которых все силовские p-подгруппы K-$\mathbb{P}$-субнормальны для p из некоторого множества простых чисел π. В частности, установлены некоторые свойства класса групп $\overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{U}$ для множества $\pi = \mathbb{P} \setminus \{r\}$, r — простое число. Из отмеченных выше свойств K-$\mathfrak{U}$-субнормальных и K-$\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп вытекает, что $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{U} \subseteq \overline{\mathrm{w}}_\pi\mathfrak{U}$.

В связи с полученными результатами возникает естественная

Проблема 1. *Для множества простых чисел π и непустой формации $\mathfrak{F}$ установить свойства и связь классов групп $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ и $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$.*

Заметим, что в общем случае $\mathrm{W}\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}$. Например, для формации $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп существуют несверхразрешимые группы, у которых все силовские подгруппы $\mathfrak{U}$-субнормальны (см. пример из [16]). В [9] построены серии наследственных насыщенных формаций $\mathfrak{F}$, совпадающих с формацией всех групп, у которой все силовские подгруппы K-$\mathfrak{F}$-субнормальны. В связи с этим возникает

Проблема 2. *Найти условия, при которых $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ и $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.*

Настоящая работа посвящена решению проблем 1 и 2.

1. Предварительные сведения

В настоящей работе используются стандартные обозначения и определения. Необходимые сведения из теории групп и теории формаций можно найти в [2, 4, 21].

Через $\mathbb{P}$ обозначается множество всех простых чисел, π — подмножество из $\mathbb{P}$, $\pi' = \mathbb{P}\setminus\pi$. Пусть G — группа, $p \in \mathbb{P}$. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка G, $O_p(G)$ — наибольшая нормальная p-подгруппа G, $O_\pi(G)$ — наибольшая нормальная π-подгруппа G, $\mathrm{Syl}_p(G)$ — множество всех силовских p-подгрупп G, $F_p(G)$ — p-нильпотентный радикал G, т. е. наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа G, Z_p — циклическая группа порядка p и 1 — единичная подгруппа.

В следующей лемме собраны известные свойства силовских подгрупп.

Лемма 1.1 [21, гл. A, теорема 6.4]. *Пусть G — группа и $p \in \mathbb{P}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *пусть $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и $N \trianglelefteq G$, тогда $P\cap N \in \mathrm{Syl}_p(N)$ и $PN/N \in \mathrm{Syl}_p(G/N)$;*

2) *если $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$, и $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, то $N_1P \cap N_2P = (N_1 \cap N_2)P$;*

3) *пусть $\{p_1, \dots , p_r\}$ — множество всех простых делителей $|G|$ и $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ для $i = 1, \dots , r$, тогда $G = \langle P_1, \dots , P_r\rangle$.*

Лемма 1.2 [21, гл. A, теорема 9.2 (e)]. *Пусть G — группа. Если $N \trianglelefteq G$, то $\Phi(N) \le \Phi(G)$ и $\Phi(G)N/N \le \Phi(G/N)$, и если $N \le \Phi(G)$, то $\Phi(G/N) = \Phi(G)/N$.*

Напомним, что *цоколем* группы G называется подгруппа $\mathrm{Soc}(G)$, являющаяся произведением всех минимальных нормальных подгрупп группы G.

Через $\widetilde{F}(G)$ обозначается такая подгруппа группы G [2, с. 79], что $\Phi(G) \le \widetilde{F}(G)$ и $\widetilde{F}(G)/\Phi(G) = \mathrm{Soc}(G/\Phi(G))$.

Приведем некоторые свойства подгруппы $\widetilde{F}(G)$ [22, 23].

Лемма 1.3. *Пусть N — нормальная подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $N \leq \Phi(G)$, то $\widetilde{F}(G/N) = \widetilde{F}(G)/N$;*
2) *$\widetilde{F}(N) \leq \widetilde{F}(G)$;*
3) *$\widetilde{F}(G)N/N \leq \widetilde{F}(G/N)$;*
4) *$F^*(G) \leq \widetilde{F}(G)$.*

Лемма 1.4 [2, лемма 3.9]. *Если H/K — главный фактор группы G и $p \in \pi(H/K)$, то $G/C_G(H/K)$ не содержит неединичных нормальных p-подгрупп, причем $F_p(G) \leq C_G(H/K)$.*

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп. Через $\pi(\mathfrak{X})$ обозначается множество всех простых делителей порядков групп, принадлежащих $\mathfrak{X}$; $\mathfrak{X}_\pi$ — класс всех π-групп, принадлежащих $\mathfrak{X}$; $\mathfrak{X}_p = \mathfrak{X}_\pi$ для $\pi = \{p\}$.

Будем использовать следующие обозначения: $\mathfrak{G}$ — класс всех групп, $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп, $\mathfrak{A}$ — класс всех абелевых групп.

Минимальной не $\mathfrak{X}$-группой называется группа G такая, что $G \notin \mathfrak{X}$, а каждая собственная подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{X}$. Множество всех минимальных не $\mathfrak{X}$-групп будем обозначать через $\mathscr{M}(\mathfrak{X})$. Минимальная не $\mathfrak{N}$-группа называется *группой Шмидта*.

Произведением классов групп $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс групп $\mathfrak{X}\mathfrak{H} = (G \mid$ группа G имеет нормальную подгруппу $N \in \mathfrak{X}$ такую, что $G/N \in \mathfrak{H})$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если 1) $\mathfrak{F}$ — гомоморф, т. е. из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$ следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$, и 2) из $N_i \trianglelefteq G$ и $G/N_i \in \mathfrak{F}$ $(i = 1, 2)$ вытекает, что $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *наследственной*, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит все ее подгруппы. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-*корадикал* группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа из G, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Функция $f : \mathbb{P} \to \{$формации$\}$ называется *локальным экраном*. Через $LF(f)$ обозначим класс всех групп G, у которых $G/C_G(H/K) \in f(p)$ для любого главного фактора H/K и каждого $p \in \pi(H/K)$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *локальной*, если существует локальный экран f такой, что $\mathfrak{F} = LF(f)$.

Экран f формации $\mathfrak{F}$ называется *внутренним*, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого простого p. Внутренний экран f формации $\mathfrak{F}$ называется *максимальным внутренним*, если для любого ее внутреннего экрана h имеет место включение $h(p) \subseteq f(p)$ для любого простого p.

Лемма 1.5 [4, с. 95]. *Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — формации, $\pi(\mathfrak{F}_1) = \pi_1$, $\pi(\mathfrak{F}_2) = \pi_2$ и $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$. Тогда $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 = (G \in \mathfrak{G} \mid G = O_{\pi_1}(G) \times O_{\pi_2}(G)$, где $O_{\pi_1}(G) \in \mathfrak{F}_1$ и $O_{\pi_2}(G) \in \mathfrak{F}_2)$ — формация. Более того, если $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — наследственные насыщенные формации, то $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ также наследственная насыщенная формация.*

Сформулируем лемму 3.12 из [2] для локальных экранов.

Лемма 1.6. *Пусть f_1 и f_2 — внутренние локальные экраны формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{N}_p f_1(p) = \mathfrak{N}_p f_2(p)$ для любого простого p.*

Лемма 1.7 [2, лемма 4.5]. *Пусть f — локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Группа G тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{F}$, когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.*

Лемма 1.8. *Пусть $\mathfrak{F}_i = LF(f_i)$, где f_i — локальный экран формации $\mathfrak{F}_i$ $(i = 1, 2)$. Если $f_1(p) \subseteq f_2(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$, то $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}_1$. Тогда по лемме 1.7 $G/F_p(G) \in f_1(p)$ для любого $p \in \pi(G)$. Так как по условию $f_1(p) \subseteq f_2(p)$, то $G/F_p(G) \in f_2(p)$ для любого $p \in \pi(G)$. Тогда по лемме 1.7 $G \in \mathfrak{F}_2$. $\square$

Лемма 1.9. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — наследственные насыщенные формации, $\mathfrak{X} \backslash \mathfrak{F} \neq \varnothing$ и G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{X} \backslash \mathfrak{F}$. Тогда $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$, $\Phi(G) = 1$, G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $N = G^{\mathfrak{F}} = \widetilde{F}(G)$.*

Доказательство. Из наследственности $\mathfrak{X}$ и выбора G следует, что $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$.

Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Тогда из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{X}$ и $|G/\Phi(G)| < |G|$ заключаем, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Из насыщенности $\mathfrak{F}$ вытекает, что $G \in \mathfrak{F}$; противоречие. Итак, $\Phi(G) = 1$.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Предположим, что существует минимальная нормальная подгруппа K группы G и $K \neq N$. Тогда $G/N \in \mathfrak{X}$ и $G/K \in \mathfrak{X}$. Из выбора G следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$ и $G/K \in \mathfrak{F}$. Так как $N \cap K = 1$ и $\mathfrak{F}$ — формация, заключаем, что $G/(N \cap K) \simeq G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{F}$ получаем, что $G^{\mathfrak{F}} = N = \widetilde{F}(G)$. $\square$

2. Свойства обобщенно субнормальных подгрупп

В настоящем разделе приводятся известные свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных и K-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп. В дальнейшем в работе $\mathfrak{F}$ обозначает непустую формацию.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, H и K — подгруппы группы G и $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если H $\mathfrak{F}$-sn G (H K-$\mathfrak{F}$-sn G), то HN/N $\mathfrak{F}$-sn G/N (HN/N K-$\mathfrak{F}$-sn G/N);*

2) *если $N \leq H$ и H/N $\mathfrak{F}$-sn G/N (H/N K-$\mathfrak{F}$-sn G/N), то H $\mathfrak{F}$-sn G (H K-$\mathfrak{F}$-sn G);*

3) *если H $\mathfrak{F}$-sn G (H K-$\mathfrak{F}$-sn G), то HN $\mathfrak{F}$-sn G (HN K-$\mathfrak{F}$-sn G);*

4) *если H $\mathfrak{F}$-sn K (H K-$\mathfrak{F}$-sn K) и K $\mathfrak{F}$-sn G (K K-$\mathfrak{F}$-sn G), то H $\mathfrak{F}$-sn G (H K-$\mathfrak{F}$-sn G);*

5) *если все композиционные факторы G принадлежат $\mathfrak{F}$, то всякая субнормальная подгруппа G $\mathfrak{F}$-субнормальна;*

6) *пусть p — простое число и G — p-группа; если $Z_p \in \mathfrak{F}$, то в G все подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны.*

Лемма 2.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, $H \leq G$ и $M \leq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если H $\mathfrak{F}$-sn G (H K-$\mathfrak{F}$-sn G), то $H \cap M$ $\mathfrak{F}$-sn M ($H \cap M$ K-$\mathfrak{F}$-sn M);*

2) *если H $\mathfrak{F}$-sn G и M $\mathfrak{F}$-sn G (H K-$\mathfrak{F}$-sn G и M K-$\mathfrak{F}$-sn G), то $H \cap M$ $\mathfrak{F}$-sn G ($H \cap M$ K-$\mathfrak{F}$-sn G);*

3) *если $G^{\mathfrak{F}} \leq H$, то H $\mathfrak{F}$-sn G (H K-$\mathfrak{F}$-sn G);*

4) *если H $\mathfrak{F}$-sn G (H K-$\mathfrak{F}$-sn G), то H^x $\mathfrak{F}$-sn G (H^x K-$\mathfrak{F}$-sn G) для любого $x \in G$.*

Лемма 2.3 [12, лемма 2.3]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, H K-$\mathfrak{F}$-sn G, p — простое число и $p \notin \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $O_p(H) \leq O_p(G)$.*

Лемма 2.4 [12, лемма 2.4]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Если $G = AB$, где A — π-подгруппа и A K-$\mathfrak{F}$-sn G, B — π'-подгруппа, то $A \trianglelefteq G$.*

Лемма 2.5 [12, лемма 2.7]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация и $G = H\widetilde{F}(G)$, где $H \in \mathfrak{F}$ и H $\mathfrak{F}$-sn G. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

Лемма 2.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и G — группа. Если 1 $\mathfrak{F}$-sn G, то $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Пусть $p \in \pi(G)$. Для любой $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ по п. 1 леммы 2.2 имеем 1 $\mathfrak{F}$-sn P. Тогда $P^{\mathfrak{F}}$ содержится в максимальной подгруппе M группы P. Поэтому $P/M \simeq Z_p \in \mathfrak{F}$. Значит, $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. □

3. Классы групп $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ и $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$

В настоящем разделе исследуются свойства и связь классов групп $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ и $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если π_1 — множество простых чисел и $\pi \subseteq \pi_1$, то $\mathrm{W}_{\pi_1}\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ и $\overline{\mathrm{W}}_{\pi_1}\mathfrak{F} \subseteq \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$;*
2) *$\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{W}\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F} \subseteq \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$ и $\pi(\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F})$;*
3) *$\mathfrak{N}_{\pi\cap\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{N}_\pi \subseteq \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$;*
4) *$\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F} = \mathrm{W}_{\pi\cap\pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{F}$;*
5) *$\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ и $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$ — наследственные формации;*
6) *$\mathrm{W}_\pi(\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}) = \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ и $\overline{\mathrm{W}}_\pi(\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}) = \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$;*
7) *если $\mathfrak{H}$ — наследственная формация и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{W}_\pi\mathfrak{H}$ и $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F} \subseteq \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{H}$.*

Доказательство. 1. Пусть $G \in \mathrm{W}_{\pi_1}\mathfrak{F}$ ($G \in \overline{\mathrm{W}}_{\pi_1}\mathfrak{F}$), $q \in \pi \cap \pi(G)$ и Q — любая силовская q-подгруппа из G. Так как $q \in \pi_1 \cap \pi(G)$, то Q $\mathfrak{F}$-sn G (соответственно Q K-$\mathfrak{F}$-sn G). Значит, $\mathrm{W}_{\pi_1}\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ (соответственно $\overline{\mathrm{W}}_{\pi_1}\mathfrak{F} \subseteq \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$).

2. Из п. 3 леммы 2.2 следует, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{W}\mathfrak{F}$. Ввиду п. 1 теоремы и определений $\mathfrak{F}$-субнормальной и K-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгрупп $\mathrm{W}\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F} \subseteq \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$. Из $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ и леммы 2.6 заключаем, что $\pi(\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F})$.

3. Пусть $G \in \mathfrak{N}_{\pi\cap\pi(\mathfrak{F})}$. Заметим, что $Z_p \in \mathfrak{F}$ для любого $p \in \pi \cap \pi(\mathfrak{F})$. Тогда по п. 5 леммы 2.1 $G \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{N}_{\pi\cap\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$.

Если $G \in \mathfrak{N}_\pi$, то любая силовская подгруппа группы G нормальна, а значит, K-$\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Поэтому $G \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$.

4. Из п. 1 теоремы следует, что $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{W}_{\pi\cap\pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{F}$.

Пусть $G \in \mathrm{W}_{\pi\cap\pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{F}$. По п. 2 теоремы $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $\pi \cap \pi(\mathfrak{F}) \cap \pi(G) = \pi \cap \pi(G)$. Следовательно, в группе G любая силовская q-подгруппа, где $q \in \pi \cap \pi(G)$, $\mathfrak{F}$-субнормальна. Это означает, что $G \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$. Итак, $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F} = \mathrm{W}_{\pi\cap\pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{F}$.

5. Докажем наследственность $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$. Рассмотрим группу $G \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$ и произвольную подгруппу H из G. Пусть $q \in \pi \cap \pi(H)$. По теореме Силова силовская q-подгруппа S из H содержится в некоторой силовской q-подгруппе Q группы G. Из Q K-$\mathfrak{F}$-sn G по утверждению 1 леммы 2.2 следует K-$\mathfrak{F}$-субнормальность $H \cap Q = S$ в H. Значит, $H \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$. Наследственность класса групп $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ доказывается аналогично. Заметим, что если $G \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ и $H \leq G$, то из 1 $\mathfrak{F}$-sn G по утверждению 1 леммы 2.2 следует, что 1 $\mathfrak{F}$-sn H.

Докажем, что $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$ — гомоморф. Пусть $G \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$, $N \trianglelefteq G$ и $p \in \pi \cap \pi(G/N)$. Рассмотрим $P/N \in \mathrm{Syl}_p(G/N)$. Фактор-группа P/N равна HN/N для некоторой силовской p-подгруппы H группы G. Из $G \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$ следует, что H K-$\mathfrak{F}$-sn G. Тогда по утверждению 1 леммы 2.1 $P/N = HN/N$ K-$\mathfrak{F}$-sn G/N. Поэтому $G/N \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$. Итак, $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$ — гомоморф. Аналогично доказывается, что $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ — гомоморф. При этом ввиду п. 1 леммы 2.1 если $G \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то из 1 $\mathfrak{F}$-sn G следует, что $1 \simeq N/N$ $\mathfrak{F}$-sn G/N.

Теперь покажем, что $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$ замкнут относительно подпрямых произведений. Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что в G существуют нормальные подгруппы N_1 и N_2, для которых $G/N_1 \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$, $G/N_2 \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$, а $G/N_1 \cap N_2 \notin \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $N_1 \cap N_2 = 1$. Рассмотрим произвольную силовскую p-подгруппу R группы G, где $p \in \pi \cap \pi(G)$. Так как RN_i/N_i — силовская p-подгруппа в G/N_i и $G/N_i \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$, то RN_i/N_i K-$\mathfrak{F}$-sn G/N_i, $i = 1, 2$. По п. 2 леммы 2.1 RN_i K-$\mathfrak{F}$-sn G, $i = 1, 2$. Ввиду утверждения 2 леммы 1.1 и утверждения 2 леммы 2.2 $RN_1 \cap RN_2 = R(N_1 \cap N_2) = R$ K-$\mathfrak{F}$-sn G. Отсюда и из п. 4 леммы 2.2 получаем, что $G/N_1 \cap N_2 \simeq G \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G. Итак, $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$ замкнут относительно подпрямых произведений.

Аналогично доказывается, что класс групп $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ замкнут относительно подпрямых произведений. Заметим, что при $G/N_i \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ $(i = 1, 2)$ имеем $1 \simeq N_1 \cap N_2/N_1 \cap N_2$ $\mathfrak{F}$-sn $G/N_1 \cap N_2$. Итак, $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$ и $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ — наследственные формации.

6. Пусть $\mathfrak{X} = \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}_1 = \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$. Из утверждения 5 теоремы следует, что $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}_1$ — наследственные формации. Тогда по п. 2 теоремы $\mathfrak{X} \subseteq \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathrm{W}_\pi\mathfrak{X}_1$. Пусть G — группа наименьшего порядка из $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{X}$. Пусть $p \in \pi \cap \pi(G)$ и $Q \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Ввиду п. 3 теоремы $G \neq Q$. Так как $G \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{X}$, в G найдется подгруппа M такая, что $Q \leq M$ и либо $G^{\mathfrak{X}} \leq M$, либо $M \trianglelefteq G$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в M. По утверждению 5 теоремы $G/N \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{X}$. Из $|G/N| < |G|$ следует, что $G/N \in \mathfrak{X}$. Поэтому QN/N K-$\mathfrak{F}$-sn G/N. Отсюда QN K-$\mathfrak{F}$-sn G ввиду утверждения 2 леммы 2.1. Из наследственности $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{X}$ и $G \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{X}$ вытекает, что $QN \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{X}$. Так как $QN \neq G$, имеем $QN \in \mathfrak{X}$. Поскольку $\mathfrak{X} = \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$, $Q \in \mathrm{Syl}_p(QN)$ и $p \in \pi \cap \pi(QN)$, то Q K-$\mathfrak{F}$-sn QN. По утверждению 4 леммы 2.1 Q K-$\mathfrak{F}$-sn G. Получили, что $G \in \mathfrak{X}$. Это противоречит выбору G. Значит, $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$. Итак, $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$.

Аналогично доказывается, что если G — группа наименьшего порядка из $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{X}_1 \setminus \mathfrak{X}_1$, $p \in \pi \cap \pi(G)$ и $Q \in \mathrm{Syl}_p(G)$, то Q $\mathfrak{F}$-sn G. Так как $G \notin \mathfrak{X}_1$, 1 не $\mathfrak{F}$-субнормальна в G и G — π'-группа. Из $G \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{X}_1$ следует, что 1 $\mathfrak{X}_1$-sn G. Поэтому $G^{\mathfrak{X}_1} \leq M_1$, где M_1 — некоторая максимальная подгруппа группы G. Тогда из $G/G^{\mathfrak{X}_1} \in \mathfrak{X}_1$ получаем, что $1 \simeq G^{\mathfrak{X}_1}/G^{\mathfrak{X}_1}$ $\mathfrak{F}$-sn $G/G^{\mathfrak{X}_1}$. По п. 2 леммы 2.1 $G^{\mathfrak{X}_1}$ $\mathfrak{F}$-sn G. Поскольку $|G^{\mathfrak{X}_1}| < |G|$, то $G^{\mathfrak{X}_1} \in \mathfrak{X}_1$. Тогда 1 $\mathfrak{F}$-sn $G^{\mathfrak{X}_1}$. По п. 4 леммы 2.1 единичная подгруппа 1 $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Получили противоречие. Значит, $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_1$ и $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_1$.

Утверждение 7 следует из определения классов $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ и $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$, а также определений $\mathfrak{F}$-субнормальной и K-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгрупп. □

Лемма 3.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, $G \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$ и $\pi(G) \subseteq \pi \cap \pi(\mathfrak{F})$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *каждый композиционный фактор группы G принадлежит $\mathfrak{F}$;*

2) $G \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$.

Доказательство. 1. Пусть H/K — произвольный композиционный фактор группы $G \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$. Из утверждения 5 теоремы 3.1 следует, что $H \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$. Так как $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$ — гомоморф, $H/K \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$. Пусть $P/K \in \mathrm{Syl}_p(H/K)$, где $p \in \pi$. Если $P/K = H/K$, то H/K — простая примарная группа. Это означает, что $|H/K| = p$. При этом $\pi(H/K) \subseteq \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Поэтому $H/K \in \mathfrak{F}$. Пусть теперь $P/K \neq H/K$. Поскольку P/K K-$\mathfrak{F}$-sn H/K и H/K — простая группа, в H/K найдется максимальная подгруппа M/K такая, что $(H/K)^{\mathfrak{F}} \leq M/K$. Из $(H/K)^{\mathfrak{F}} \lhd H/K$ заключаем, что $(H/K)^{\mathfrak{F}} = 1$. Следовательно, $H/K \in \mathfrak{F}$.

2. Следует из п. 1 и определения класса групп $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$. $\square$

Теорема 3.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi\cup\pi(\mathfrak{F})} \supseteq \mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})} \times \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$;

2) если $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$, то $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi = \mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})} \times \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$.

Доказательство. 1. Пусть $G \in \mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})} \times \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$. Тогда $G = A \times B$, где $A \in \mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})}$ и $B \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$. Рассмотрим произвольную силовскую p-подгруппу $P \in G$, где $p \in \pi$. Если $P \leq A$, то из нильпотентности A следует, что $P \trianglelefteq A$. Так как $A \trianglelefteq G$, то P K-$\mathfrak{F}$-sn G. Пусть $P \leq B$. Из $B \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ вытекает, что P $\mathfrak{F}$-sn B. Отсюда и из $B \trianglelefteq G$ заключаем, что P K-$\mathfrak{F}$-sn G. Таким образом, $G \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$. Заметим также, что $G \in \mathfrak{G}_{\pi\cup\pi(\mathfrak{F})}$. Итак, $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi\cup\pi(\mathfrak{F})} \supseteq \mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})} \times \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$.

2. Пусть $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$. По утверждению 1 теоремы $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi \supseteq \mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})} \times \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$. Обозначим $\tau = \pi \setminus \pi(\mathfrak{F})$.

Пусть $G \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$. Рассмотрим произвольную силовскую p-подгруппу P группы G, где $p \in \tau$. Тогда по лемме 2.3 $P = O_p(P) \leq O_p(G)$. Поэтому $P = O_p(G) \trianglelefteq G$. Если $\tau \cap \pi(G) = \{p_1, \dots, p_n\}$ и $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$, $i = 1, \dots, n$, то произведение $A = P_1P_2 \dots P_n$ является нормальной нильпотентной подгруппой группы G. Ясно, что $|A|$ и $|G : A|$ взаимно просты, поэтому A — холлова подгруппа группы G и $A \in \mathfrak{N}_\tau$.

По теореме Шура — Цассенхауза подгруппа A имеет дополнение в G, т. е. существует подгруппа B порядка $|G : A|$ такая, что $G = AB$ и $A \cap B = 1$. Пусть Q — силовская подгруппа из B. Рассмотрим подгруппу QA. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и $G \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$, по п. 5 теоремы 3.1 $QA \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$. Поэтому Q K-$\mathfrak{F}$-sn QA. По лемме 2.4 $Q \trianglelefteq QA$. Это означает, что $A \leq N_G(Q)$. Пусть $\{q_1, \dots, q_m\}$ — полное множество простых делителей $|B|$ и $Q_i \in \mathrm{Syl}_{q_i}(B)$, $i = 1, \dots, m$. По п. 3 леммы 1.1 $B = \langle Q_1, \dots, Q_m\rangle$. Из $A \leq N_G(Q_i)$ для $i = 1, \dots, m$ заключаем, что $A \leq N_G(B)$. Тогда $G = AB \leq N_G(B)$. Поэтому $B \trianglelefteq G$. Так как $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$ — наследственная формация и $G \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$, имеем $B \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$. Из $\pi(B) \subseteq \pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$ по п. 2 леммы 3.2 заключаем, что $B \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$. Итак, $G \in \mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})} \times \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$. Равенство $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi = \mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})} \times \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ доказано. $\square$

Следствие 3.3.1 [15, теорема 2.2]. *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, то $\overline{\mathrm{W}}\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\pi'} \times \mathrm{W}\mathfrak{F}$.*

Следствие 3.3.2. *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$, то $\overline{\mathrm{W}}\mathfrak{F} = \mathrm{W}\mathfrak{F}$.*

Заметим, что условие $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$ в п. 2 теоремы 3.3 существенно. Например, пусть $\pi = \{7\}$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}$, где $\pi(\mathfrak{F}) = \{2, 3, 5, 7\}$, и $G = A_5$ — знакопеременная группа на пяти символах. Тогда $G \in \overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$. Из $G = G^{\mathfrak{F}}$ следует, что $G \notin \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$.

Установим насыщенность и локальное задание формации $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$.

Теорема 3.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация и $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ является наследственной насыщенной формацией.*

Доказательство. По п. 5 теоремы 3.1 $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ — наследственная формация.

Докажем насыщенность $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$. Предположим противное. Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что $G/\Phi(G) \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ и $G \notin \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа G. Из $\Phi(G)N/N \leq \Phi(G/N)$ и $G/\Phi(G) \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ следует, что $(G/N)/\Phi(G/N) \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$. Ввиду выбора G получаем, что $G/N \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$. Так как $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ — формация, N является единственной минимальной нормальной подгруппой G и $N \leq \Phi(G)$. Таким образом, N — p-группа для некоторого простого p и $O_{p'}(G) = 1$.

Заметим, что 1 $\mathfrak{F}$-$\mathrm{sn}\, G$. Действительно, из $G/N \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ следует, что $1 \simeq N/N$ $\mathfrak{F}$-$\mathrm{sn}\, G/N$. По лемме 2.6 $\pi(G/N) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. По п. 2 леммы 2.1 N $\mathfrak{F}$-$\mathrm{sn}\, G$. При этом $N \leq \Phi(G)$. Тогда $\pi(G) = \pi(G/N)$ и $N \in \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$. По п. 3 леммы 2.2 и п. 4 леммы 2.1 для единичной подгруппы будет 1 $\mathfrak{F}$-$\mathrm{sn}\, G$.

Из определения класса групп $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ следует, что G не является π'-группой.

Пусть Q — произвольная силовская q-подгруппа G для $q \in \pi \cap \pi(G)$. Из $G/N \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ и п. 2 леммы 2.1 вытекает, что QN $\mathfrak{F}$-$\mathrm{sn}\, G$. Пусть $A = Q\widetilde{F}(G)$. Заметим, что нормальная в $A/\Phi(G)$ подгруппа $\widetilde{F}(G)/\Phi(G)$ квазинильпотентна. По [24, гл. X, теорема 13.10] и п. 4 леммы 1.3 $\widetilde{F}(G)/\Phi(G) \leq F^*(A/\Phi(G)) \leq \widetilde{F}(A/\Phi(G))$. Тогда $A/\Phi(G) = (Q\Phi(G)/\Phi(G))\widetilde{F}(A/\Phi(G))$. По лемме 2.5 $A/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Тогда A действует f-стабильно на $\widetilde{F}(G)/\Phi(G)$ для максимального внутреннего локального экрана f формации $\mathfrak{F}$. Из $O_{p'}(G) = 1$ и [2, теорема 9.18] следует, что A действует f-стабильно на $\Phi(G)$. Таким образом, $A \in \mathfrak{F}$. Значит, Q $\mathfrak{F}$-$\mathrm{sn}\, QN$, следовательно, Q $\mathfrak{F}$-$\mathrm{sn}\, G$. Итак, $G \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$. Получили противоречие. □

В случае, когда $\pi = \mathbb{P}$ и $\pi = \varnothing$, получаются следующие результаты соответственно.

Следствие 3.4.1 [8, теорема B]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация. Тогда $\mathrm{W}\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация.*

Следствие 3.4.2. *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, то класс групп с $\mathfrak{F}$-субнормальной единичной подгруппой является наследственной насыщенной формацией.*

Определение 3.5. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, h — ее максимальный внутренний локальный экран и $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Для любого простого p положим $h^*_\pi(p) = (G \mid 1$ $\mathfrak{F}$-$\mathrm{sn}\, G$, Q $\mathfrak{F}$-$\mathrm{sn}\, G$ и $Q \in h(p)$ для любой $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ и $q \in \pi \cap \pi(G))$.

Если $\pi = \mathbb{P}$, то вместо $h^*_{\mathbb{P}}(p)$ будем писать $h^*(p)$.

Прямая проверка определений показывает, что $h^*_\pi(p)$ — формация (наследственная формация, если $\mathfrak{F}$ — наследственная локальная формация).

Напомним, что ввиду теоремы Гашюца, Любезедер, Шмида [21, гл. IV, теорема 4.6] формация насыщенна тогда и только тогда, когда она локальна.

Теорема 3.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, h — ее максимальный внутренний локальный экран и $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F} = LF(f)$, где f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ такой, что*

$$f(p) = \begin{cases} h^*_\pi(p), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{F}), \\ \varnothing, & \text{если } p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X} = LF(f)$. Отметим, что $f(p)$ и $\mathfrak{X}$ являются наследственными формациями. По теореме 3.4 класс групп $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ является наследственной насыщенной формацией. Заметим, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Покажем, что $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{X}$.

1. Докажем, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathfrak{X}\backslash\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F} \neq \varnothing$. Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{X} \setminus \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$. По лемме 1.9 группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $N = G^{\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}}$, $\Phi(G) = 1$ и G — минимальная не $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$-группа.

Пусть N — неабелева подгруппа, тогда $C_G(N) = 1$. Из $G/C_G(N) \simeq G \in f(p)$ для любого $p \in \pi(N)$ следует, что $G \in h^*_\pi(p) \subseteq \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$; противоречие. Значит, N — элементарная абелева p-группа для некоторого простого p. Заметим, что $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $N = C_G(N)$. Так как $\Phi(G) = 1$, в группе G найдется максимальная подгруппа M такая, что $M \cap N = 1$ и $G = MN$. Из $G/N = G/C_G(N) \in f(p) = h^*_\pi(p)$ вытекает, что 1 $\mathfrak{F}\text{-sn}\,G$ и G не является π'-группой.

Пусть P — произвольная силовская q-подгруппа группы G, $q \in \pi \cap \pi(G)$. Предположим, что $PN < G$. Так как PN/N $\mathfrak{F}\text{-sn}\,G/N$, по п. 2 леммы 2.1 PN $\mathfrak{F}\text{-sn}\,G$. Из $G \in \mathscr{M}(\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F})$ получаем, что $PN \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$. Тогда P $\mathfrak{F}\text{-sn}\,PN$. Отсюда по п. 4 леммы 2.1 P $\mathfrak{F}\text{-sn}\,G$. Следовательно, $G \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$; противоречие. Стало быть, $G = NP$ для некоторой силовской q-подгруппы P группы G, $q \in \pi$. Поэтому M — силовская q-подгруппа G. Тогда $G/C_G(N) = G/N \simeq M \in h(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку $N = G^{\mathfrak{F}}$, то G действует f-центрально на $G^{\mathfrak{F}}$. Таким образом, $G \in \mathfrak{F} \subseteq \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$. Получили противоречие. Значит, $\mathfrak{X}\backslash\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F} = \varnothing$.

2. Докажем, что $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Предположим, что $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}\backslash\mathfrak{X} \neq \varnothing$. Выберем группу G наименьшего порядка из $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}\backslash\mathfrak{X}$. По лемме 1.9 группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $N = G^{\mathfrak{X}} = \widetilde{F}(G)$, $\Phi(G) = 1$ и G — минимальная не $\mathfrak{X}$-группа.

Если G — π'-группа, то из $G \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ следует, что $G \in h^*_\pi(p)$ для любого $p \in \pi(G)$. Тогда $G \in f(p)$, а значит, $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$. По лемме 1.4 $G \in \mathfrak{X}$; противоречие.

Пусть P — произвольная силовская q-подгруппа G, $q \in \pi \cap \pi(G)$. Предположим, что $PN = G$. Из $G \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ и леммы 2.5 следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Следовательно, $PN < G$.

Предположим, что N абелева. Тогда N — элементарная абелева p-подгруппа для некоторого простого p, $G = MN$, где M — максимальная подгруппа группы G, и $M \cap N = 1$. Заметим, что $M \in \mathscr{M}(f(p))$. Так как $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, то $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, $M \in \mathscr{M}(h^*_\pi(p))$. Рассмотрим силовскую q-подгруппу Q группы M, $q \in \pi \cap \pi(M)$. Если $q \neq p$, то из $Q \in h^*_\pi(p)$ следует, что $Q \in h(p)$. Если $q = p$, то $Q \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$. Это означает, что $M \notin \mathscr{M}(f(p))$; противоречие.

Таким образом, N — неабелева минимальная нормальная подгруппа G. Обозначим $R = PN$. Так как $R \neq G$, то $R \in \mathfrak{X}$. Рассмотрим группу $D = \cap\, C_R(H/K)$, где H/K пробегает все R-главные факторы группы N. Из $C_D(N) \leq C_G(N) = 1$ вытекает, что D можно рассматривать как некоторую группу автоморфизмов группы N, действующую тождественно на всех R-главных факторах группы N. По [2, теорема 9.8] группа D нильпотентна. При этом $D \trianglelefteq R$. Поэтому $D \cap N = 1$ и $D \leq C_R(N) \leq C_G(N) = 1$. Тогда $R/D \simeq R \in f(p)$ для любого $p \in \pi(N)$. Так как $R = PN$, силовская подгруппа P принадлежит $h(p)$. Из $G \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ заключаем, что 1 $\mathfrak{F}\text{-sn}\,G$ и P $\mathfrak{F}\text{-sn}\,G$. Тогда $G \simeq G/C_G(N) \in f(p)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{X}$. Получили противоречие. Значит, $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}\backslash\mathfrak{X} = \varnothing$. Итак,

$\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{X}$.

Ясно, что f — внутренний экран $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{N}_p f(p) = f(p)$. Пусть $G \in \mathfrak{N}_p f(p)$, $p \in \mathbb{P}$. Обозначим $L = O_p(G)$. Тогда $G/L \in f(p) \neq \varnothing$. Поэтому $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $G/L \in h^*_\pi(p)$. Значит, L/L $\mathfrak{F}$-sn G/L. Из п. 2 леммы 2.1 и $L \in \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что 1 $\mathfrak{F}$-sn G.

Пусть $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ и $q \in \pi \cap \pi(G)$. Тогда $QL/L \in h(p)$ и QL/L $\mathfrak{F}$-sn G/L. Отсюда вытекает, что $Q \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$ и QL $\mathfrak{F}$-sn G. Если $q = p$, то Q $\mathfrak{F}$-sn G. Если $q \neq p$, то по лемме 1.7 $QL \in \mathfrak{F}$. По п. 4 леммы 2.1 Q $\mathfrak{F}$-sn G. Значит, $G \in h^*_\pi(p) = f(p)$. Отсюда и из $f(p) \subseteq \mathfrak{N}_p f(p)$ получаем равенство $\mathfrak{N}_p f(p) = f(p)$.

Ввиду леммы 1.6 f — максимальный внутренний локальный экран $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$. □

Следствие 3.6.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, h — ее максимальный внутренний локальный экран и $\pi \subseteq \pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$. Тогда $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F} = LF(h^*_\pi)$, где h^*_π — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$.*

Следствие 3.6.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, h — ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда $\mathrm{W}\mathfrak{F} = LF(f)$, где f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathrm{W}\mathfrak{F}$ такой, что*

$$f(p) = \begin{cases} h^*(p), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{F}), \\ \varnothing, & \text{если } p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Следствие 3.6.3. *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, h — ее максимальный внутренний локальный экран и $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$, то $\mathrm{W}\mathfrak{F} = LF(h^*)$, где h^* — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathrm{W}\mathfrak{F}$.*

Согласно [21, гл. IV, пример 3.4(f)] формация $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп имеет внутренний локальный экран f такой, что $f(p) = \mathfrak{A}(p-1)$ — класс всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$, для любого простого p. Ввиду леммы 1.6 формация $\mathfrak{U}$ имеет максимальный внутренний локальный экран h такой, что $h(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$. В [16] найден локальный экран формации $\mathrm{w}\mathfrak{U}$, который не является максимальным внутренним. Используя теорему 3.6, нетрудно найти максимальный внутренний локальный экран формации $\mathrm{w}\mathfrak{U}$.

Следствие 3.6.4. *Формация $\mathrm{w}\mathfrak{U} = \mathrm{W}\mathfrak{U} = \overline{\mathrm{W}}\mathfrak{U}$ имеет максимальный внутренний локальный экран h^* такой, что $h^*(p) = (G \mid Q$ $\mathbb{P}$-субнормальна в G и $Q \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$ для всякой силовской подгруппы Q группы $G)$ для любого простого p.*

Теорема 3.7. *Если $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$, то $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$ — наследственная насыщенная формация.*

Доказательство. По теореме 3.3 $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi = \mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})} \times \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$. Заметим, что $\mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})}$ — наследственная насыщенная формация. Согласно теореме 3.4 $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация. Тогда по лемме 1.5 $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$ является наследственной насыщенной формацией. □

Следствие 3.7.1 [15, следствие 2.3]. *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, то $\overline{\mathrm{W}}\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация.*

Теорема 3.8. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, h — ее максимальный внутренний локальный экран и $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$. Тогда $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi =$*

$LF(g)$, где g — максимальный внутренний локальный экран формации $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}\cap\mathfrak{G}_\pi$ такой, что

$$g(p)=\begin{cases} h^*_\pi(p), & \text{если } p\in\pi(\mathfrak{F}),\\ \mathfrak{N}_p, & \text{если } p\in\pi\setminus\pi(\mathfrak{F}),\\ \varnothing, & \text{если } p\in\mathbb{P}\setminus(\pi\cup\pi(\mathfrak{F})).\end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}=LF(g)$. Докажем, что $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}\cap\mathfrak{G}_\pi=\mathfrak{X}$. Заметим, что $g(p)$ и $\mathfrak{X}$ — наследственные формации.

1. Установим, что $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}\cap\mathfrak{G}_\pi\subseteq\mathfrak{X}$. Напомним: $\mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})}=LF(f_1)$, где

$$f_1(p)=\begin{cases} \mathfrak{N}_p, & \text{если } p\in\pi\setminus\pi(\mathfrak{F}),\\ \varnothing, & \text{если } p\in\mathbb{P}\setminus(\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})).\end{cases}$$

По теореме 3.6 $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}=LF(f)$, где

$$f(p)=\begin{cases} h^*_\pi(p), & \text{если } p\in\pi(\mathfrak{F}),\\ \varnothing, & \text{если } p\in\mathbb{P}\setminus\pi(\mathfrak{F}).\end{cases}$$

Так как $f_1(p)\subseteq g(p)$ и $f(p)\subseteq g(p)$ для любого простого p, согласно лемме 1.8 $\mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})}\subseteq\mathfrak{X}$ и $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}$. Поскольку любая формация замкнута относительно прямых произведений, $\mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})}\times\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}$. По п. 2 теоремы 3.3 $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}\cap\mathfrak{G}_\pi\subseteq\mathfrak{X}$.

2. Докажем, что $\mathfrak{X}\subseteq\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}\cap\mathfrak{G}_\pi$. Предположим, что $\mathfrak{X}\setminus(\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}\cap\mathfrak{G}_\pi)\neq\varnothing$. Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{X}\setminus(\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}\cap\mathfrak{G}_\pi)$. По лемме 1.9 группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N, $G/N\in\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}\cap\mathfrak{G}_\pi$ и $\Phi(G)=1$.

Пусть N — абелева группа. Тогда N является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого p и $N=C_G(N)$. Из $G\in\mathfrak{X}$ следует, что $G/C_G(N)\in g(p)$. Поэтому $p\notin\mathbb{P}\setminus(\pi\cap\pi(\mathfrak{F}))$. Если $p\in\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})$, то $G/C_G(N)\in g(p)=\mathfrak{N}_p$. Тогда $G\in\mathfrak{N}_p\subseteq\mathfrak{N}_{\pi\setminus\pi(\mathfrak{F})}$ и согласно п. 2 теоремы 3.3 $G\in\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}\cap\mathfrak{G}_\pi$; противоречие. Если $p\in\pi(\mathfrak{F})$, то $G/C_G(N)=G/N\in g(p)=h^*_\pi(p)=f(p)$, где f — максимальный внутренний локальный экран $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$. Отсюда $G\in\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ и $G\in\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}\cap\mathfrak{G}_\pi$; противоречие.

Таким образом, N — неабелева минимальная нормальная подгруппа G и $C_G(N)=1$. Отсюда и из $G/C_G(N)\simeq G\in g(p)\neq\varnothing$ для любого $p\in\pi(N)$ заключаем, что $p\in\pi(\mathfrak{F})$. Поэтому $g(p)=h^*_\pi(p)$ и $G\in h^*_\pi(p)\subseteq\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$. Значит, $G\in\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}\cap\mathfrak{G}_\pi$. Получили противоречие. Итак, $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}\cap\mathfrak{G}_\pi=\mathfrak{X}$.

Заметим, что $\mathfrak{N}_pg(p)=g(p)$ и ввиду п. 2 теоремы 3.3 $g(p)\subseteq\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}\cap\mathfrak{G}_\pi$ для любого простого p. Из леммы 1.6 следует, что g — максимальный внутренний локальный экран $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}\cap\mathfrak{G}_\pi$. □

Следствие 3.8.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, h — ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда $\overline{\mathrm{W}}\mathfrak{F}=LF(g)$, где g — максимальный внутренний локальный экран формации $\overline{\mathrm{W}}\mathfrak{F}$ такой, что*

$$g(p)=\begin{cases} h^*(p), & \text{если } p\in\pi(\mathfrak{F}),\\ \mathfrak{N}_p, & \text{если } p\in\mathbb{P}\setminus\pi(\mathfrak{F}).\end{cases}$$

В разрешимом случае отсюда получается [15, теорема 3.5]

Замечание 3.9. Вопрос о насыщенности формации $\overline{\mathrm{W}}_\pi\mathfrak{F}$ и ее локальном задании в общем случае остается открытым.

Теорема 3.6 позволяет строить новые примеры насыщенных формаций.

Предложение 3.10. *Пусть $\mathscr{A}$ — формация всех разрешимых групп с абелевыми силовскими подгруппами. Тогда* $\mathrm{W}(\mathfrak{NA}) = \overline{\mathrm{W}}(\mathfrak{NA}) = \mathfrak{N}\mathscr{A}$.

Доказательство. Ввиду [2, гл. 1, разд. 4, п. 10] формация $\mathfrak{NA}$ имеет максимальный внутренний локальный экран h такой, что $h(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}$ для любого простого p, и формация $\mathfrak{N}\mathscr{A}$ имеет максимальный внутренний локальный экран h_1 такой, что $h_1(p) = \mathfrak{N}_p\mathscr{A}$ для любого простого p. По следствию 3.6.3 $\mathrm{W}(\mathfrak{NA}) = LF(h^*)$, где h^* — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathrm{W}(\mathfrak{NA})$ такой, что $h^*(p) = (G \mid Q\ \mathfrak{NA}\text{-sn}\, G$ и $Q \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}$ для любой силовской подгруппы Q группы $G)$. Предположим, что $h^*(p) \neq h_1(p)$ для некоторого простого p.

Пусть G — группа наименьшего порядка из $h^*(p) \setminus h_1(p)$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа из G. Группа G разрешима. Поэтому N — r-группа для некоторого простого r. Так как $h^*(p)$ и $h_1(p)$ — формации, $G/N \in h_1(p)$ и N — единственная минимальная нормальная подгруппа из G. Поэтому $N \leq F(G)$ и $F(G)$ — r-группа. Ясно, что $r \neq p$. Пусть $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$. Из $G \in h^*(p)$ следует, что $Q\ \mathfrak{NA}\text{-sn}\, G$ и $Q \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}$.

Если $q \neq p$, то $Q \in \mathfrak{A}$. Допустим, что $q = p$. Рассмотрим подгруппу $R = F(G)Q$. Если $R \neq G$, то из наследственности $h^*(p)$ и выбора G вытекает, что $R \in h_1(p)$. Из $O_p(R) = 1$ заключаем, что $R \in \mathscr{A}$. Поэтому $Q \in \mathfrak{A}$. Значит, $G \in \mathscr{A} \subseteq \mathfrak{N}\mathscr{A} = h_1(p)$. Это противоречит выбору G. Предположим, что $R = G$. По лемме 2.5 $G \in \mathfrak{NA}$. Тогда коммутант G' принадлежит $\mathfrak{N}$. Отсюда $G' \leq F(G)$. Тогда $Q \simeq QG'/G' \in \mathfrak{A}$. Следовательно, $G \in \mathscr{A} \subseteq \mathfrak{N}\mathscr{A} = h_1(p)$. Это противоречит выбору G. Итак, доказано, что $h^*(p) \subseteq h_1(p)$.

Пусть теперь G — группа наименьшего порядка из $h_1(p) \setminus h^*(p)$. Из $G \in \mathfrak{N}_p\mathscr{A}$ следует, что в G найдется нормальная подгруппа K такая, что $K \in \mathfrak{N}_p$ и $G/K \in \mathscr{A}$. Из выбора G заключаем, что $K \neq G$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа из G. Так как $h^*(p)$ и $h_1(p)$ — формации, из выбора G вытекает, что $G/N \in h^*(p)$ и N — единственная минимальная нормальная подгруппа из G. Тогда $N \leq K$. Пусть $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$.

Пусть $q \neq p$. Из $G/K \in \mathscr{A}$ получаем, что $Q \simeq QK/K \in \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}$. Из $G/N \in h^*(p)$ заключаем, что $QN/N\ \mathfrak{NA}\text{-sn}\, G/N$. По п. 2 леммы 2.1 $QN\ \mathfrak{NA}\text{-sn}\, G$. Если $QN \neq G$, то по выбору G следует, что $QN \in h^*(p)$. Тогда $Q\ \mathfrak{NA}\text{-sn}\, QN$ и по п. 4 леммы 2.1 $Q\ \mathfrak{NA}\text{-sn}\, G$. Если $QN = G$, то $G \in \mathfrak{NA}$. Поэтому $Q\ \mathfrak{NA}\text{-sn}\, G$.

Пусть $q = p$. Из $G/N \in h^*(p)$ вытекает, что $Q/N\ \mathfrak{NA}\text{-sn}\, G/N$ и $Q/N \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}$. По п. 2 леммы 2.1 $Q\ \mathfrak{NA}\text{-sn}\, G$. Из $\mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$ имеем $Q \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}$. Таким образом, $G \in h^*(p)$. Получили противоречие с выбором G. Значит, $h_1(p) \subseteq h^*(p)$.

Итак, $h^*(p) = h_1(p)$ для любого простого p. Отсюда и из следствия 3.3.2 заключаем, что $\overline{\mathrm{W}}(\mathfrak{NA}) = \mathrm{W}(\mathfrak{NA}) = \mathfrak{N}\mathscr{A}$. □

4. Формации $\mathfrak{F}$, для которых $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$

Настоящий раздел посвящен исследованию проблемы 2.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация и $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда и только тогда $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, когда для любой минимальной не $\mathfrak{F}$-группы G фактор-группа $G/\widetilde{F}(G)$ является либо единичной, либо p-группой для некоторого $p \in \pi$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ и G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Если $\pi(G) \not\subseteq \pi(\mathfrak{F})$, то G является группой простого порядка ввиду наследственности $\mathfrak{F}$. Поэтому утверждение теоремы выполняется.

Предположим, что $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$.

Допустим вначале, что $\Phi(G) = 1$. В этом случае в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N и $\widetilde{F}(G) = \mathrm{Soc}(G) = N$. Можно считать, что $N \neq G$. Из $N \in \mathfrak{F}$ следует, что 1 $\mathfrak{F}$-$\mathrm{sn}\, N$. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{F} = \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ заключаем, что 1 $\mathfrak{F}$-$\mathrm{sn}\, G$. Пусть P — произвольная силовская p-подгруппа группы G, где $p \in \pi \cap \pi(G)$. Заметим, что PN/N $\mathfrak{F}$-$\mathrm{sn}\, G/N$. Тогда из п. 2 леммы 2.1 следует, что PN $\mathfrak{F}$-$\mathrm{sn}\, G$. Предположим, что $PN < G$. Так как $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$, имеем $PN \in \mathfrak{F}$. Поэтому P $\mathfrak{F}$-$\mathrm{sn}\, PN$. По утверждению 4 леммы 2.1 подгруппа P $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Тогда $G \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, $G = PN$ для некоторой силовской p-подгруппы P. Тогда $G/\widetilde{F}(G) \simeq P/P \cap N$ — p-группа для $p \in \pi \cap \pi(G)$.

Пусть $\Phi(G) \neq 1$. Ввиду насыщенности $\mathfrak{F}$ и $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$ заключаем, что $G/\Phi(G) \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$. Согласно п. 1 леммы 1.3 $\widetilde{F}(G)/\Phi(G) = \widetilde{F}(G/\Phi(G))$. Так как $\Phi(G/\Phi(G)) = 1$, по доказанному выше $G/\widetilde{F}(G) \simeq G/\Phi(G)/\widetilde{F}(G/\Phi(G))$ является либо единичной, либо p-группой для некоторого $p \in \pi$. Необходимость доказана.

Пусть для любой группы $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$ фактор-группа $G/\widetilde{F}(G)$ является либо единичной, либо p-группой для некоторого $p \in \pi$. Докажем, что $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. По п. 2 теоремы 3.1 $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$.

Предположим, что $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F} \neq \varnothing$. Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}$. По теореме 3.4 $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ является наследственной насыщенной формацией. По лемме 1.9 $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$, в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N, при этом $N = G^{\mathfrak{F}} = \widetilde{F}(G)$. Из $G \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$ следует, что $G \neq \widetilde{F}(G)$. По условию $G/\widetilde{F}(G) = G/N$ — p-группа для некоторого $p \in \pi$. Тогда в G существует силовская p-подгруппа P такая, что $PN/N = G/N$. Поэтому $PN = G$. Так как $G \in \mathrm{W}_\pi\mathfrak{F}$, то P $\mathfrak{F}$-$\mathrm{sn}\, G$ и $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Тогда в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $P \leq M$ и $N = G^{\mathfrak{F}} \leq M$. Это означает, что $G = PN \leq M < G$. Получили противоречие. Итак, $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Достаточность доказана. $\square$

Напомним, что группа G называется *примарной*, если $|G| = p^k$, где p — некоторое простое число, k — неотрицательное целое число.

Следствие 4.1.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация. Тогда и только тогда $\mathrm{W}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, когда для любой минимальной не $\mathfrak{F}$-группы G фактор-группа $G/\widetilde{F}(G)$ является примарной группой.*

Следствие 4.1.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация и $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$. Тогда и только тогда $\mathrm{W}\mathfrak{F} = \mathfrak{F} = \overline{\mathrm{W}}\mathfrak{F}$, когда для любой минимальной не $\mathfrak{F}$-группы G фактор-группа $G/\widetilde{F}(G)$ является примарной группой.*

Напомним, что *формацией Шеметкова* называется формация $\mathfrak{F}$, у которой любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой простого порядка, либо группой Шмидта.

Следствие 4.1.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация Шеметкова. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда любая ее силовская подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

Напомним, что $\mathfrak{F}$ называется *решеточной формацией* (см., например, [4, разд. 6.3]), если множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп в любой группе. Для решеточной формации $\mathfrak{F}$ из строения минимальных не $\mathfrak{F}$-групп [25, теорема 2] получается следующий результат.

Следствие 4.1.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная решеточная формация. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда любая ее силовская подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

Для множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ обозначим через I любое подмножество из $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп, π_i и π_j — некоторые множества простых чисел. Обозначим $\mathfrak{F} = \bigcap\limits_{(i,j)\in I} \mathfrak{X}_{\pi_i}\mathfrak{X}_{\pi_j}$, где (i,j) пробегает все пары из I.

Лемма 4.2. *Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}\mathfrak{X}$ — наследственная локальная формация и*

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{(i,j)\in I} \mathfrak{X}_{\pi_i}\mathfrak{X}_{\pi_j}.$$

Тогда для любой минимальной не $\mathfrak{F}$-группы G фактор-группа $G/\widetilde{F}(G)$ является примарной группой.

Доказательство. Пусть $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$. Тогда очевидно, что $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{X}_{\pi_i}\mathfrak{X}_{\pi_j})$ для некоторой пары $(i,j) \in I$. Обозначим $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}_{\pi_i}\mathfrak{X}_{\pi_j}$. Ввиду $\widetilde{F}(G)/\Phi(G) = \widetilde{F}(G/\Phi(G))$ достаточно доказать утверждение леммы для $\Phi(G) = 1$. Можно считать, что $G \neq \widetilde{F}(G)$. Тогда в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N такая, что $G/N \in \mathfrak{H}$, $N = \widetilde{F}(G)$ и $G = NM$ для некоторой максимальной подгруппы M группы G. Если $i = j$ или $N \in \mathfrak{X}_{\pi_i}$, то утверждение леммы выполняется. Пусть $i \neq j$ и $N \notin \mathfrak{X}_{\pi_i}$. Тогда ясно, что $N \in \mathfrak{X}_{\pi_j}$.

Предположим, что $G \neq NQ$ для любой $Q \in \mathrm{Syl}_q(M)$. Легко показать, что $O_{\pi_i}(R) = 1$ для $R = QN$. Из $R \in \mathfrak{H}$ следует, что $R \in \mathfrak{X}_{\pi_j}$. Поэтому $M \in \mathfrak{X}_{\pi_j}$. Но тогда из $G/N \in \mathfrak{X}_{\pi_j}$ заключаем, что $G \in \mathfrak{X}_{\pi_j}\mathfrak{X}_{\pi_j} = \mathfrak{X}_{\pi_j} \subseteq \mathfrak{H}$; противоречие.

Таким, образом, $G = NQ$, и утверждение леммы выполняется. $\square$

Следствие 4.1.5 [9]. *Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}\mathfrak{X}$ — наследственная локальная формация, и пусть*

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{(i,j)\in I} \mathfrak{X}_{\pi_i}\mathfrak{X}_{\pi_j}.$$

Группа G ($\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$) тогда и только тогда принадлежит формации $\mathfrak{F}$, когда любая силовская подгруппа из G K-*$\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

Доказательство следует из теоремы 4.1 ввиду лемм 3.2 и 4.2.

Следствие 4.1.6 [9]. *Пусть*

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{(i,j)\in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}.$$

Группа G ($\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$) тогда и только тогда принадлежит формации $\mathfrak{F}$, когда любая силовская подгруппа из G K-*$\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

Следствие 4.1.7 [9]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс всех π-нильпотентных (p-нильпотентных) групп. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда любая силовская подгруппа из G* K-*$\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

Следствие 4.1.8 [9]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс всех π-замкнутых (p-замкнутых) групп. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда любая силовская подгруппа из G* K-*$\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

Следствие 4.1.9 [9]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс всех π-разложимых (p-разложимых) групп. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда любая силовская подгруппа из G K-$\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

Заметим, что отмеченные выше результаты из [9] можно получить другим путем, используя следующую теорему, которая вытекает из теоремы 3.6.

Теорема 4.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, h — ее максимальный внутренний локальный экран и $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда и только тогда $\mathrm{W}_\pi\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, когда $h^*_\pi(p) = h(p)$ для любого простого p.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hawkes T.* On formation subgroups of a finite soluble group // J. London Math. Soc. 1969. V. 44, N 1. P. 243–250.

2. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

3. *Kegel O. H.* Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten // Arch. Math. 1978. Bd 30, Heft 3. S. 225–228.

4. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of finite groups. Dordrecht: Springer-Verl., 2006.

5. *Васильев А. Ф.* О влиянии примарных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп на строение группы // Вопросы алгебры. 1995. Вып. 8. С. 31–39.

6. *Васильева Т. И., Прокопенко А. И.* Конечные группы с формационно субнормальными подгруппами // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2006. № 3. С. 25–30.

7. *Ли Ш., Ду Н.* Конечные группы с $\mathfrak{F}$-субнормальными условиями // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 367–373.

8. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И.* О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами // Проблемы физики, математики и техники. 2011. № 4. С. 86–91.

9. *Семенчук В. Н., Шевчук С. Н.* Характеризация классов конечных групп с помощью обобщенно субнормальных силовских подгрупп // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 1. С. 104–108.

10. *Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Tyutyanov V. N.* On a problem of L. A. Shemetkov on superradical formations of finite groups // J. Algebra. 2014. V. 403. P. 69–76.

11. *Kovaleva V. A., Skiba A. N.* Finite soluble groups with all n-maximal subgroups $\mathfrak{F}$-subnormal // J. Group Theory. 2014. V. 17, N 2. P. 273–290.

12. *Мурашко В. И.* Классы конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 6. С. 1353–1367.

13. *Каморников С. Ф., Селькин М. В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Беларуская навука, 2003.

14. *Вегера А. С.* О насыщенных формациях конечных групп, определяемых свойствами вложения силовских подгрупп // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2012. № 6. С. 154–158.

15. *Вегера А. С.* О конечных группах с заданными K-$\mathfrak{F}$-субнормальными силовскими подгруппами // Проблемы физики, математики и техники. 2014. № 3. С. 53–57.

16. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.

17. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О K-$\mathbb{P}$-субнормальных подгруппах конечных групп // Мат. заметки. 2014. Т. 95, № 4. С. 517–528.

18. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О произведениях $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп в конечных группах // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 59–67.

19. *Monakhov V. S., Kniahina V. N.* Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Recerche Mat. 2013. V. 62, N 2. P. 307–322.

20. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M., Heliel A. A., Al-Shomrani M. M.* Some results on products of finite groups // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (link.springer.com/article/10.1007/s40840-015-0111-7).

21. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

22. *Förster P.* Projektive Klassen endlicher Gruppen. II a: Gesättigte Formationen: Ein allgemeiner Satz vom Gaschütz–Lubeseder–Baer-Typ/ // Pub. Soc. Math. Univ. Autònoma Barcelona. 1985. V. 29, N 2–3. P. 39–76.

23. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Сыроквашин А. В.* Заметка о пересечениях некоторых максимальных подгрупп конечных групп // Проблемы физики, математики и техники. 2012. Т. 2. С. 62–64.
24. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups. III. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1982.
25. *Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н.* О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы // Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. С. 27–54.

Статья поступила 24 апреля 2015 г.

Васильев Александр Федорович, Вегера Артем Сергеевич
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины, кафедра алгебры и геометрии,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
formation56@mail.ru, vegera.artem@gmail.com

Васильева Татьяна Ивановна
Белорусский гос. университет транспорта, кафедра высшей математики,
ул. Кирова, 34, Гомель 246653, Беларусь
tivasilyeva@mail.ru