Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2016. Том 57, № 2

УДК 512.643

ДОЛЯ МАТРИЦ С ВЕЩЕСТВЕННЫМ СПЕКТРОМ В ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ АЛГЕБРЕ ЛИ

А. С. Кривоногов, В. А. Чуркин

Аннотация. Доля матриц с вещественным спектром в заданной матричной алгебре Ли — это отношение объема множества матриц с вещественным спектром в шаре с центром в нуле алгебры к объему всего шара. В статье вычислена доля матриц с вещественным спектром в вещественной ортогональной алгебре Ли.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.213

Ключевые слова: вещественная ортогональная алгебра Ли, случайные матрицы с вещественным спектром.

Введение

Случайные матрицы — область исследования на стыке линейной алгебры, теории вероятностей и теории динамических систем. Если траектория динамической системы содержится в группе Ли, то ее поведение часто определяется начальным положением и законом изменения во времени вектора скорости, который принадлежит касательному пространству к группе Ли, т. е. сдвигу ее алгебры Ли. Отсюда видно, что важную роль в поведении системы играют собственные числа матрицы из алгебры Ли, а задачи отыскания спектра конкретной матрицы и распределения спектра в среднем для данного семейства матриц весьма актуальны (см., например, монографии [1, 2], обзоры [3, 4]).

В [5] найдена доля матриц с вещественным спектром в алгебре всех вещественных матриц порядка n с нулевым следом, а в [6] аналогичная задача была решена для серии вещественных симплектических алгебр Ли.

Цель данной работы — вычислить долю матриц с вещественным спектром во всех вещественных ортогональных алгебрах Ли. Тем самым такая задача решена для всех классических вещественных расщепимых простых алгебр Ли.

Уточним формулировки. Пусть $\mathfrak{g} \leq \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ — вещественная алгебра Ли, $\mathrm{B}(\mathfrak{g}, r)$ — шар радиуса r с центром в нуле в алгебре $\mathfrak{g}$ в стандартной евклидовой 2-норме, $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, r)$ — множество матриц из $\mathrm{B}(\mathfrak{g}, r)$ с вещественным спектром.

Определение. *Доля* матриц с вещественным спектром в алгебре — это число

$$\mathrm{P}(\mathfrak{g}) = \lim_{r\to\infty} \frac{\operatorname{vol} \mathrm{R}(\mathfrak{g}, r)}{\operatorname{vol} \mathrm{B}(\mathfrak{g}, r)}.$$

Пусть на $\mathbb{R}^{p+q}$ задана билинейная симметрическая невырожденная форма $(u, v)_{J_{p,q}} \stackrel{\mathrm{df}}{=} u^\top J_{p,q} v$ с матрицей $J_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$, где I_m — единичная матрица порядка m.

Определение. Линейные преобразования, сохраняющие эту форму, образуют группу Ли

$$\mathrm{O}_{p,q}(\mathbb{R}) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{S \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R}) \mid S^\top J_{p,q} S = J_{p,q}\}.$$

Ее алгебра Ли состоит из преобразований, косых относительно этой формы, называется *ортогональной алгеброй типа* (p, q) и обозначается через

$$\mathfrak{so}_{p,q}(\mathbb{R}) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{X \in \mathfrak{gl}_{p+q}(\mathbb{R}) \mid X^\top J_{p,q} + J_{p,q} X = 0\}.$$

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Доля матриц с вещественным спектром в вещественной ортогональной алгебры Ли* $\mathfrak{so}_{p,q}(\mathbb{R})$ *равна*

(i) *нулю при* $|p - q| > 1$,

(ii) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n^2-n}$ *при* $p = q = n$,

(iii) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n^2}$ *при* $p = n + 1$, $q = n$.

§ 1. Параметризация множества матриц с вещественным спектром

В [6] для вычисления объема множества матриц с вещественным спектром была предложена следующая параметризация, основанная на действии компактной подгруппы группы Ли на ее алгебре Ли.

Теорема [6, теорема 2]. *Пусть* $G \leq \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ *— матричная группа Ли с недискретной максимальной компактной подгруппой* $G \cap \mathrm{O}_m$. *Допустим, что ее алгебра Ли* $\mathfrak{g} \leq \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R})$ *— сумма векторных пространств* $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{so}_m) \oplus \mathfrak{t}$, *где* $\mathfrak{t}$ *алгебра Ли такая, что* $\operatorname{Spec} T \subset \mathbb{R}$ *для всех* $T \in \mathfrak{t}$.

Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ *содержит матрицы с простым спектром и для некоторого открытого многогранника* $\hat{\mathfrak{t}}$ *в* $\mathfrak{t}$ *множество* $\hat{\mathfrak{t}}(r) = \hat{\mathfrak{t}} \cap \mathrm{R}(\mathfrak{g}, r)$ *содержится и всюду плотно в некоторой фундаментальной области относительно действия сопряжениями группы* $G \cap \mathrm{O}_m$ *на множестве матриц с простым спектром в* $\mathrm{R}(\mathfrak{g}, r)$.

Предположим также, что для любого элемента $T \in \hat{\mathfrak{t}}(r)$ *его стабилизатор относительно* $G \cap \mathrm{O}_m$ *равен* $\{\pm I_m\}$, *где* I_m *— единичная матрица порядка* m.

Тогда существует такая область $\mathrm{D} \subseteq G \cap \mathrm{O}_m$, *содержащая единицу, что* $\operatorname{vol} \mathrm{D} = \frac{1}{2} \operatorname{vol}(G \cap \mathrm{O}_m)$ *и отображение*

$$\Phi : \mathrm{D} \times \hat{\mathfrak{t}}(r) \to \mathrm{R}(\mathfrak{g}, r), \quad (Q, T) \mapsto QTQ^\top$$

является однозначной параметризацией множества $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}(\mathfrak{g}, r)$ *такого, что* $\operatorname{vol} \mathrm{R} = \operatorname{vol} \mathrm{R}(\mathfrak{g}, r)$.

Кроме того, объем множества матриц с вещественным спектром равен

$$\operatorname{vol} \mathrm{R}(\mathfrak{g}, r) = \frac{1}{2} \operatorname{vol}(G \cap \mathrm{O}_m) \int\limits_{\hat{\mathfrak{t}}(r)} |\det \mathscr{D}_{I_m,T}| \, dT,$$

где $\det \mathscr{D}_{I_m,T}$ *— якобиан отображения* Φ *в точке* (I_m, T), *при этом*

$$\det \mathscr{D}_{I_m,T} = \det \operatorname{ad} T,$$

где

$$\operatorname{ad} T : \mathfrak{g} \cap \mathfrak{so}_m \to \mathfrak{g}/\mathfrak{t}, \quad W \mapsto [W, T] \mod \mathfrak{t}.$$

Таким образом, для вычисления $\mathrm{P}(\mathfrak{g})$ надо

1) найти факторизацию $X = QTQ^\top$ матриц с простым вещественным спектром из $\mathfrak{g}$;

2) найти фундаментальную область относительно действия $G \cap \mathrm{O}_m$ и многогранник, всюду плотный в ней, используя полученную факторизацию;

3) вычислить модуль якобиана $|\det \mathscr{D}_{I_m,T}|$;

4) найти объем компактной группы $G \cap \mathrm{O}_m$;

5) вычислить конечный интеграл.

§ 2. Аналог разложения Шура

Для вычисления доли матриц с вещественным спектром в ортогональных алгебрах Ли будем применять указанный выше алгоритм к другой известной реализации этих алгебр. Это позволит сделать вычисления близкими к случаю симплектических алгебр. Также в данном разделе будет показано, что алгебры $\mathfrak{so}_{p,q}(\mathbb{R})$ при $|p-q| > 1$ не содержат матриц с простым вещественным спектром, а значит, в этом случае $\mathrm{P}(\mathfrak{so}_{p,q}(\mathbb{R})) = 0$.

Пусть на $\mathbb{R}^{2n}$ и $\mathbb{R}^{2n+1}$ соответственно заданы билинейные симметрические невырожденные формы $(u,v)_{J_{2n}} \overset{\mathrm{df}}{=} u^\top J_{2n} v$ с матрицей $J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ и $(u,v)_{J_{2n+1}} \overset{\mathrm{df}}{=} u^\top J_{2n+1} v$ с матрицей $J_{2n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$, где I_n — единичная матрица порядка n.

Определение. Пусть

$$\Omega_{2n}(\mathbb{R}) \overset{\mathrm{df}}{=} \{S \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \mid S^\top J_{2n} S = J_{2n}\},$$

$$\Omega_{2n+1}(\mathbb{R}) \overset{\mathrm{df}}{=} \{S \in \mathrm{GL}_{2n+1}(\mathbb{R}) \mid S^\top J_{2n+1} S = J_{2n+1}\}.$$

— группы Ли преобразований, сохраняющих заданные формы. Их алгебры Ли состоят из преобразований, косых относительно данных форм, называются *классическими ортогональными алгебрами* соответственно четной и нечетной размерности и обозначаются через

$$\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R}) \overset{\mathrm{df}}{=} \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{R}) \mid X^\top J_{2n} + J_{2n} X = 0\},$$

$$\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R}) \overset{\mathrm{df}}{=} \{X \in \mathfrak{gl}_{2n+1}(\mathbb{R}) \mid X^\top J_{2n+1} + J_{2n+1} X = 0\}.$$

Лемма 1. (i) *Пусть*

$$S_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}.$$

Тогда отображение

$$\varphi_{2n} : X \mapsto S_{2n}^{-1} X S_{2n}$$

задает изоморфизм групп Ли $\Omega_{2n}(\mathbb{R})$ и $\mathrm{O}_{n,n}(\mathbb{R})$, сохраняющий объемы компактных подгрупп, а также изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R})$ и $\mathfrak{so}_{n,n}(\mathbb{R})$, сохраняющий объемы подмножеств и спектры матриц. Кроме того, $S_{2n}^2 = I$ и $\varphi_{2n}^2 = \mathrm{id}$.

(ii) *Пусть*

$$S_{2n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_{2n} \end{pmatrix}.$$

Тогда отображение

$$\varphi_{2n+1} : X \mapsto S_{2n+1}^{-1} X S_{2n+1}$$

задает изоморфизм групп Ли $\Omega_{2n+1}(\mathbb{R})$ *и* $\mathrm{O}_{n+1,n}(\mathbb{R})$, *сохраняющий объемы компактных подгрупп, а также изоморфизм алгебр Ли* $\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R})$ *и* $\mathfrak{so}_{n+1,n}(\mathbb{R})$, *сохраняющий объемы подмножеств и спектры матриц. Кроме того,* $S_{2n+1}^2 = I$ *и* $\varphi_{2n+1}^2 = \mathrm{id}$.

Доказательство. Утверждение следует из того, что сопряжение ортогональной матрицей сохраняет норму и спектр матрицы, а также выполнены равенства $S_{2n}^2 = I_{2n}$, $S_{2n+1}^2 = I_{2n+1}$, $S_{2n}J_{2n}S_{2n} = J_{n,n}$ и $S_{2n+1}J_{2n+1}S_{2n+1} = J_{n+1,n}$.

Следствие. *Верны следующие равенства:*

$$\mathrm{P}(\mathfrak{so}_{n,n}(\mathbb{R})) = \mathrm{P}(\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R})), \quad \mathrm{P}(\mathfrak{so}_{n+1,n}(\mathbb{R})) = \mathrm{P}(\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R})).$$

Доказательство. Согласно лемме 1 изоморфизмы φ_{2n} и φ_{2n+1} сохраняют спектры матриц, а следовательно, отображают множества $\mathrm{R}(\mathfrak{so}_{n,n}(\mathbb{R}), r)$ и $\mathrm{R}(\mathfrak{so}_{n+1,n}(\mathbb{R}), r)$ на множества $\mathrm{R}(\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R}), r)$ и $\mathrm{R}(\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R}), r)$ соответственно. Так как, кроме того, φ_{2n} и φ_{2n+1} сохраняют объемы множеств, искомое утверждение следует из определения доли матриц с вещественным спектром.

Лемма 2 (о матричном описании).

$$\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & -X^\top \end{pmatrix} \mid Y^\top = -Y,\ Z^\top = -Z \right\},$$

$$\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u^\top & v^\top \\ -v & X & Y \\ -u & Z & -X^\top \end{pmatrix} \mid Y^\top = -Y,\ Z^\top = -Z,\ u, v \in \mathbb{R}^n \right\},$$

$$\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{so}_{2n} = \left\{ \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix} \mid X^\top = -X,\ Y^\top = -Y \right\},$$

$$\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{so}_{2n+1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u^\top & u^\top \\ -u & X & Y \\ -u & Y & X \end{pmatrix} \mid X^\top = -X,\ Y^\top = -Y,\ u \in \mathbb{R}^n \right\},$$

$$\Omega_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{2n} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \mid B^\top A + A^\top B = 0,\ A^\top A + B^\top B = I_n \right\},$$

$$\Omega_{2n+1}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{2n+1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b^\top & b^\top \\ c & A & B \\ c & B & A \end{pmatrix} \mid bb^\top + B^\top A + A^\top B = 0, \right.$$

$$\left. bb^\top + A^\top A + B^\top B = I_n,\ a^2 + 2c^\top c = 1,\ ab + (A+B)^\top c = 0 \right\},$$

$$\mathrm{O}_{p,q}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{p+q} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{O}_p,\ B \in \mathrm{O}_q \right\}.$$

Доказательство. Утверждение леммы легко показать, положив $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ в случае матриц четной размерности и $X = \begin{pmatrix} a & b^\top & c^\top \\ d & A & B \\ e & C & D \end{pmatrix}$ в случае нечетной размерности и выписав условия принадлежности X соответствующим алгебрам и группам.

Лемма 3. *Пусть X — матрица с простым вещественным спектром в алгебре Ли*

$$\mathfrak{g} = \left\{ X \in \mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}) \mid X^\top J + JX = 0 \right\},$$

где $J^2 = I$. Тогда если $\lambda \in \operatorname{Spec} X$, то $-\lambda \in \operatorname{Spec} X$. Кроме того, в $\mathbb{R}^m$ существует изотропное относительно формы $(v, w)_J = v^\top J w$ подпространство размерности $\left[\frac{m}{2}\right]$, порожденное собственными векторами матрицы X, отвечающими положительным собственным числам.

Доказательство. Преобразуем характеристический многочлен матрицы X следующим образом:

$$\begin{aligned} \det(X - \lambda I) &= \det(-JX^\top J - \lambda J^2) = (-1)^m \det(JX^\top J + \lambda J^2) \\ &= (-1)^m \det(J(X^\top + \lambda I)J) = (-1)^m \det(X^\top + \lambda I) = (-1)^m \det(X + \lambda I). \end{aligned}$$

Значит, если $\lambda \in \operatorname{Spec} X$, то $-\lambda \in \operatorname{Spec} X$.

Можно считать, что

$$\operatorname{Spec} X \setminus \{0\} = \{\lambda_1, -\lambda_1, \dots, \lambda_k, -\lambda_k\}, \quad \text{где } \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k > 0,$$

и $k = \left[\frac{m}{2}\right]$, тогда для любого i существует ненулевой собственный вектор v_i такой, что $Xv_i = \lambda_i v_i$.

Далее, для любых i, j получаем

$$(Xv_i, v_j)_J = -(v_i, Xv_j)_J, \quad (\lambda_i v_i, v_j)_J = -(v_i, \lambda_j v_j)_J,$$

$$(\lambda_i + \lambda_j)(v_i, v_j)_J = 0, \quad (v_i, v_j)_J = 0,$$

так как $\lambda_i + \lambda_j > 0$. Значит, подпространство $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ изотропно.

Доказательство п. (i) теоремы 1. Без потери общности будем считать, что $p \geq q + 2$. Предположим, что в алгебре $\mathfrak{so}_{p,q}(\mathbb{R})$ содержится матрица с простым вещественным спектром. Тогда из леммы 3 следует, что в $\mathbb{R}^{p+q}$ существует изотропное подпространство размерности

$$\left[\frac{p+q}{2}\right] \geq \left[\frac{q+2+q}{2}\right] = q + 1 > q,$$

что противоречит факту, что размерность максимального изотропного подпространства в $\mathbb{R}^{p+q}$ равна $\min(p, q) = q$.

Поскольку в $\mathfrak{so}_{p,q}(\mathbb{R})$ содержатся матрицы с простым спектром вида $\begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D \\ 0 & D & 0 \end{pmatrix}$, где $X \in \mathfrak{so}_{p-q}$ и D — диагональная порядка q, мера множества матриц с вещественным спектром в $\mathfrak{so}_{p,q}(\mathbb{R})$ равна нулю.

Лемма 4 (аналог разложения Шура). (i) *Для любой матрицы $X \in \mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R})$ с простым вещественным спектром существует такая матрица $Q \in \Omega_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{2n}$, что $X = QTQ^\top$, где*

$$T = \begin{pmatrix} U & Z \\ 0 & -U^\top \end{pmatrix},$$

U — верхнетреугольная матрица с собственными числами $\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0$ матрицы X на главной диагонали, а $Z^\top = -Z$.

(ii) *Для любой матрицы $X \in \mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R})$ с простым вещественным спектром существует такая матрица $Q \in \Omega_{2n+1}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{2n+1}$, что $X = QTQ^\top$, где*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v^\top \\ -v & U & Z \\ 0 & 0 & -U^\top \end{pmatrix},$$

U — верхнетреугольная матрица с собственными числами $\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0$ матрицы X на главной диагонали, $Z^\top = -Z$, а $v \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. (i) Из леммы 3 следует, что

$$\operatorname{Spec} X = \{\lambda_1, -\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_n\}, \quad \text{где } \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0,$$

и существуют собственные векторы

$$v_i \neq 0: \ Xv_i = \lambda_i v_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

такие, что подпространство $L = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ изотропно.

Выберем в L ортонормированный (в евклидовом смысле) базис $f_1, \dots, f_n$. Положим

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = (\, f_1 \dots f_n \,), \quad S = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Далее, $B^\top A + A^\top B = 0$, так как подпространство L изотропно, и $A^\top A + B^\top B = I_n$ ввиду того, что выбранный базис ортонормированный. Значит, $S \in \Omega_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{2n}$ согласно лемме 2. Тогда

$$S^{-1} X S = \begin{pmatrix} \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ 0 & \widetilde{D} \end{pmatrix},$$

но поскольку группа Ли $\Omega_{2n}(\mathbb{R})$ действует сопряжениями на своей алгебре Ли $\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R})$, то $S^{-1}XS = \begin{pmatrix} Y & W \\ 0 & -Y^\top \end{pmatrix}$, причем $\operatorname{Spec} Y = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, а W — кососимметрическая матрица.

По теореме Шура вещественная матрица Y с простым вещественным спектром представима в виде $Y = HUH^{-1}$, где U — верхнетреугольная матрица с числами $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$ на главной диагонали, а $H \in \mathrm{SO}_n$.

Возьмем матрицу $D = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} \in \Omega_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{2n}$. Тогда $Q = SD$ будет искомой матрицей:

$$\begin{aligned} D^{-1}S^{-1}XSD &= \begin{pmatrix} H^\top & 0 \\ 0 & H^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & W \\ 0 & -Y^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} H^\top Y H & H^\top W H \\ 0 & -H^\top Y^\top H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & Z \\ 0 & -U^\top \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $Z = H^\top W H$ — кососимметрическая матрица.

(ii) Из леммы 3 следует, что

$$\operatorname{Spec} X = \{0, \lambda_1, -\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_n\}, \quad \text{где } \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0,$$

и существуют собственные векторы

$$v_i \neq 0: \ Xv_i = \lambda_i v_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

такие, что подпространство $L = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ изотропно.

Выберем в L ортонормированный (в евклидовом смысле) базис $f_1, \ldots, f_n$. Положим

$$\begin{pmatrix} b^\top \\ A \\ B \end{pmatrix} = (\, f_1 \ldots f_n \,), \quad S = \begin{pmatrix} a & b^\top & b^\top \\ c & A & B \\ c & B & A \end{pmatrix}.$$

Далее, $bb^\top + B^\top A + A^\top B = 0$, так как подпространство L изотропно, и $bb^\top + A^\top A + B^\top B = I_n$ ввиду того, что выбранный базис ортонормированный. Значит, для того чтобы $S \in \Omega_{2n+1}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{2n+1}$ согласно лемме 2, необходимо найти $a \in \mathbb{R}$ и $c \in \mathbb{R}^n$ такие, что $a^2 + 2c^\top c - 1 = 0$ и $ab + (A+B)^\top c = 0$. Матричное уравнение $ab + (A+B)^\top c = 0$ можно переписать в виде

$$(\, b \quad (A+B)^\top \,) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

для $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$. Поскольку $\operatorname{rk}(\, b \quad (A+B)^\top \,) \leq n < n+1$, данное уравнение имеет нетривиальное решение $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Будем искать a и c в виде $a = \lambda x$, $c = \lambda y$. Имеем

$$a^2 + 2c^\top c - 1 = \lambda^2 x^2 + 2\lambda^2 y^\top y - 1 = \lambda^2(x^2 + 2y^\top y) - 1,$$

таким образом, взяв $\lambda = \sqrt{\frac{1}{x^2+2y^\top y}}$, $a = \lambda x$, $c = \lambda y$, получим, что

$$S = \begin{pmatrix} a & b^\top & b^\top \\ c & A & B \\ c & B & A \end{pmatrix} \in \Omega_{2n+1}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{2n+1}$$

по лемме 2. Тогда

$$S^{-1}XS = \begin{pmatrix} \tilde{x} & 0 & \tilde{y}^\top \\ \tilde{z} & \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \widetilde{w} & 0 & \widetilde{D} \end{pmatrix},$$

но так как группа Ли $\Omega_{2n+1}(\mathbb{R})$ действует сопряжениями на своей алгебре Ли $\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R})$, имеем $S^{-1}XS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x^\top \\ -x & Y & W \\ 0 & 0 & -Y^\top \end{pmatrix}$, причем $\operatorname{Spec} Y = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, а W — кососимметрическая матрица.

По теореме Шура вещественная матрица Y с простым вещественным спектром представима в виде $Y = HUH^{-1}$, где U — верхнетреугольная матрица с числами $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > 0$ на главной диагонали, а $H \in \mathrm{SO}_n$.

Возьмем матрицу $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & H \end{pmatrix} \in \Omega_{2n+1}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{2n+1}$. Тогда $Q = SD$ будет искомой матрицей:

$$D^{-1}S^{-1}XSD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & H^\top & 0 \\ 0 & 0 & H^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & x^\top \\ -x & Y & W \\ 0 & 0 & -Y^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & H \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & x^\top H \\ -H^\top x & H^\top Y H & H^\top W H \\ 0 & 0 & -H^\top Y^\top H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v^\top \\ -v & U & Z \\ 0 & 0 & -U^\top \end{pmatrix},$$

где $Z = H^\top W H$ — кососимметрическая матрица, $v = H^\top x$.

§ 3. Фундаментальная область

Покажем, что для алгебр Ли $\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R})$ и $\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R})$ выполнены условия теоремы 2 из [6].

Лемма 5. (i) *В алгебре Ли $\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R})$ верны следующие утверждения.*

(1) *Группа $\Omega_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{2n}$ действует сопряжениями на множестве матриц с простым спектром в $\mathrm{R}(\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R}), r)$ и относительно данного действия можно выбрать фундаментальную область F_{2n} так, что она содержится в множестве*

$$F'_{2n} = \left\{ \begin{pmatrix} U & Z \\ 0 & -U^\top \end{pmatrix} \mid U_{11} > U_{22} > \dots > U_{n-1n-1} > U_{nn} > 0, \right.$$
$$\left. U_{12} \geq 0, \dots, U_{1n} \geq 0 \right\},$$

лежащем в алгебре

$$\mathfrak{t}_{2n} = \left\{ \begin{pmatrix} U & Z \\ 0 & -U^\top \end{pmatrix} \mid U \text{ верхнетреугольная, } Z^\top = -Z \right\}.$$

(2) *Алгебра Ли $\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R})$ есть сумма векторных пространств*

$$\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R}) = (\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{so}_{2n}) \oplus \mathfrak{t}_{2n},$$

и спектр любой матрицы $T \in \mathfrak{t}_{2n}$ вещественен.

(3) *Пусть в $\mathfrak{t}_{2n}$ задан открытый многогранник*

$$\hat{\mathfrak{t}}_{2n} = \left\{ \begin{pmatrix} U & Z \\ 0 & -U^\top \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}_{2n} \mid U_{11} > U_{22} > \dots > U_{n-1n-1} > U_{nn} > 0, \right.$$
$$\left. U_{12} > 0, \dots, U_{1n} > 0 \right\}.$$

Тогда множество $\hat{\mathfrak{t}}_{2n}(r) = \hat{\mathfrak{t}}_{2n} \cap \mathrm{R}(\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R}), r)$ содержится и всюду плотно в фундаментальной области F_{2n} и для любого элемента $T \in \hat{\mathfrak{t}}_{2n}(r)$ его стабилизатор равен $\{\pm I_{2n}\}$.

(ii) *В алгебре Ли $\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R})$ верны следующие утверждения.*

(1) *Группа $\Omega_{2n+1}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{2n+1}$ действует сопряжениями на множестве матриц с простым спектром в $\mathrm{R}(\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R}), r)$ и относительно данного действия можно выбрать фундаментальную область F_{2n+1} так, что она содержится в множестве*

$$F'_{2n+1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & v^\top \\ -v & U & Z \\ 0 & 0 & -U^\top \end{pmatrix} \mid U_{11} > U_{22} > \dots > U_{n-1n-1} > U_{nn} > 0, \right.$$
$$\left. U_{12} \geq 0, \dots, U_{1n} \geq 0, v_1 \geq 0 \right\},$$

лежащем в алгебре

$$\mathfrak{t}_{2n+1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & v^\top \\ -v & U & Z \\ 0 & 0 & -U^\top \end{pmatrix} \mid U \text{ — верхнетреугольная, } Z^\top = -Z, \ \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

(2) *Алгебра Ли $\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R})$ есть сумма векторных пространств*

$$\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R}) = (\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{so}_{2n+1}) \oplus \mathfrak{t}_{2n+1},$$

и спектр любой матрицы $T \in \mathfrak{t}_{2n+1}$ вещественен.

(3) *Пусть в $\mathfrak{t}_{2n+1}$ задан открытый многогранник*

$$\hat{\mathfrak{t}}_{2n+1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & v^\top \\ -v & U & Z \\ 0 & 0 & -U^\top \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}_{2n+1} \mid U_{11} > U_{22} > \dots > U_{n-1n-1} > U_{nn} > 0, \right.$$
$$\left. U_{12} > 0, \dots, U_{1n} > 0, v_1 > 0 \right\}.$$

Тогда множество $\hat{\mathfrak{t}}_{2n+1}(r) = \hat{\mathfrak{t}}_{2n+1} \cap \mathrm{R}(\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R}), r)$ содержится и всюду плотно в фундаментальной области F_{2n+1} и для любого элемента $T \in \hat{\mathfrak{t}}_{2n+1}(r)$ его стабилизатор равен $\{\pm I_{2n+1}\}$.

Доказательство. (i) Доказательство п. (1) полностью повторяет доказательство леммы 3 из [6], за исключением того, что

$$\dim \mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R}) = 2n^2 - n = (n^2 - n) + n^2 = \dim (\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{so}_{2n}) + \dim \mathfrak{t}_{2n}.$$

(ii)(1) Возьмем $X \in \mathrm{R}(\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R}), r)$ с простым спектром и рассмотрим его орбиту относительно действия группы $\Omega_{2n+1}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{2n+1}$. Согласно лемме 4 в данной орбите содержится матрица T из множества

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & v^\top \\ -v & U & Z \\ 0 & 0 & -U^\top \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}_{2n+1} \mid U_{11} > U_{22} > \dots > U_{n-1n-1} > U_{nn} > 0 \right\}.$$

Далее, сопрягая T, если необходимо, матрицами вида $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$, где A диагональная с ± 1 на диагонали, $a = \pm 1$, можно считать, что T лежит в множестве F'_{2n+1}. Значит, можно выбрать фундаментальную область F_{2n+1}, содержащуюся в множестве F'_{2n+1}. Включение $F'_{2n+1} \subset \mathfrak{t}_{2n+1}$, следует из матричного описания элементов данных множеств.

(2) Возьмем $T \in \mathfrak{t}_{2n+1}$. Ее спектр лежит в $\mathbb{R}$. Действительно, используя разложение по первому столбцу и тот факт, что матрица U верхнетреугольная, имеем

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & v^\top \\ -v & U - \lambda I_n & Z \\ 0 & 0 & -U^\top - \lambda I_n \end{vmatrix} = -\lambda |U - \lambda I_n| | - U^\top - \lambda I_n|.$$

Поскольку в алгебре $\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{so}_{2n+1}$ содержатся лишь матрицы с чисто мнимым спектром, $(\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{so}_{2n+1}) \cap \mathfrak{t}_{2n+1} = \{0\}$ и сумма $(\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{so}_{2n+1}) \oplus \mathfrak{t}_{2n+1}$ будет прямой. Равенство $\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R}) = (\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{so}_{2n+1}) \oplus \mathfrak{t}_{2n+1}$ следует из равенства размерностей (все размерности можно найти из матричного описания данных алгебр)

$$\dim \mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R}) = 2n^2 + n = n^2 + (n^2 + n) = \dim (\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{so}_{2n+1}) + \dim \mathfrak{t}_{2n+1}.$$

(3) Возьмем $T \in \hat{\mathfrak{t}}_{2n+1}(r) \subset \mathrm{R}(\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R}), r)$. Тогда по определению фундаментальной области существуют такие матрицы $Q \in \Omega_{2n+1}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SO}_{2n+1}$ и $T' \in F_{2n+1} \subset F'_{2n+1}$, что $QTQ^\top = T'$, $QT = T'Q$.

Так как $Q \in \Omega_{2n+1}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{2n+1}$, то Q имеет вид $\begin{pmatrix} a & b^\top & b^\top \\ c & A & B \\ c & B & A \end{pmatrix}$, где

$$bb^\top + A^\top A + B^\top B = I_n, \quad bb^\top + B^\top A + A^\top B = 0,$$
$$ab + (A+B)^\top c = 0, \quad a^2 + 2c^\top c = 1.$$

Значит,

$$\begin{pmatrix} a & b^\top & b^\top \\ c & A & B \\ c & B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & v^\top \\ -v & U & Z \\ 0 & 0 & -U^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v'^\top \\ -v' & U' & Z' \\ 0 & 0 & -U'^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b^\top & b^\top \\ c & A & B \\ c & B & A \end{pmatrix}, \tag{1}$$

в частности, $BU = -U'^\top B$ — матричное уравнение Сильвестра для неизвестной матрицы B.

Но $\operatorname{Spec} U \cap \operatorname{Spec}(-U'^\top) = \varnothing$ и согласно [1, § 4.3] получаем, что $B = 0$ — единственное решение этого уравнения. Из (1) с учетом того, что $B = 0$, вытекает, что $b^\top U = 0$, но так как U не имеет нулевого собственного значения, то $b = 0$. Тогда из (1) с учетом того, что $B = 0$ и $b = 0$, следует, что

$$AU = U'A. \tag{2}$$

Пусть $Uf_j = \lambda_j f_j$ для $j = 1, \dots, n$ и $V_k = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$. Поскольку спектр сужения U на $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$ равен $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, то $\langle e_1, \dots, e_k \rangle = V_k$.

Из равенства (2) получаем $U'Af_j = AUf_j = \lambda_j Af_j$. Поэтому $Af_j \in V_k$ при $j \le k$, $A(V_k) \subseteq V_k$ при всех k, следовательно, матрица A верхнетреугольная. Но, с другой стороны, A ортогональна, значит, она диагональна с ± 1 на диагонали.

Из условия $ab + (A+B)^\top c = 0$ получаем $A^\top c = 0$, значит, $c = 0$, поскольку A диагональна с ± 1 на диагонали. Из условия $a^2 + 2c^\top c = 1$ имеем $a^2 = 1$.

Предположим, что $T \ne T'$. Тогда $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \ne \pm I_{n+1}$ и, значит, либо существуют i и j такие, что $A_{ii} = -A_{jj} = 1$, либо $A = -aI_n$. Если существуют i и j такие, что $A_{ii} = -A_{jj} = 1$, то в случае $A_{11} = 1$ получим, что $U'_{1j} = -U_{1j} < 0$; если $A_{11} = -1$, то $U'_{1i} = -U_{1i} < 0$. Получаем противоречие с тем, что T' лежит в F'_{2n+1}.

Если $A = -aI_n$, то $v_1 = -v'_1$; получаем противоречие с тем, что $T' \in F'_{2n+1}$ и $T \in \hat{\mathfrak{t}}_{2n+1}(r)$.

Значит, $T = T' \in F_{2n+1}$ и $\hat{\mathfrak{t}}_{2n+1}(r) \subset F_{2n+1}$. Кроме того, отсюда следует, что $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \pm I_{n+1}$, значит, стабилизатор элемента $T \in \hat{\mathfrak{t}}_{2n+1}(r)$ равен $\{\pm I_{2n+1}\}$.

Так как множество

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & v^\top \\ -v & U & Z \\ 0 & 0 & -U^\top \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}_{2n+1} \mid U_{11} > U_{22} > \dots > U_{n-1n-1} > U_{nn} > 0, \right.$$
$$\left. U_{12} > 0, \dots, U_{1n} > 0,\ v_1 > 0 \right\}$$

всюду плотно в множестве

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & v^\top \\ -v & U & Z \\ 0 & 0 & -U^\top \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}_{2n+1} \mid U_{11} > U_{22} > \dots > U_{n-1n-1} > U_{nn} > 0, \right.$$
$$\left. U_{12} \ge 0, \dots, U_{1n} \ge 0,\ v_1 \ge 0 \right\},$$

то $\hat{\mathfrak{t}}_{2n+1}(r)$ всюду плотно в F'_{2n+1} и, следовательно, всюду плотно в F_{2n+1}, поскольку $\hat{\mathfrak{t}}_{2n+1}(r) \subset F_{2n+1} \subset F'_{2n+1}$.

§ 4. Вычисление якобиана

Для вычисления якобиана отображения Φ из теоремы 2 в [6] будем использовать базисы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющие соотношениям, аналогичным соотношениям для базиса, состоящего из корневых векторов.

Лемма 6. *Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ равна прямой сумме алгебр Ли $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{so}_m) \oplus \mathfrak{t}$ и в алгебре Ли $\mathfrak{t}$ есть абелева подалгебра $\mathfrak{h}$, состоящая из диагональных матриц. Пусть в алгебрах $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{so}_m$ и $\mathfrak{t}$ выбраны соответственно ортонормированные базисы $\{Y_i\}_{i=1}^p$ и $\left(\{H_k\}_{k=1}^n \cup \{X_i\}_{i=1}^p\right)$ такие, что $\{H_k\}_{k=1}^n$ является базисом $\mathfrak{h}$, и для некоторых линейных на $\mathfrak{h}$ функций λ_i $(i = 1, \dots, p)$ выполнены соотношения*

$$Y_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X_i - X_i^\top\right), \quad \left[X_i^\top, H_k\right] = -\lambda_i(H_k)X_i^\top,$$

$$\left[X_i^\top, X_j\right] = \begin{cases} X_l \in \mathfrak{t}, & \text{если } i < j, \\ H_l \in \mathfrak{h}, & \text{если } i = j, \\ X_l^\top, & \text{где } l < i, \text{ если } i > j. \end{cases}$$

Тогда определитель отображения $\operatorname{ad} T : W \mapsto ([W, T] \mod \mathfrak{t})$ из $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{so}_m$ в $\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$ равен $\prod\limits_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i(H)}{\sqrt{2}}$, где H — проекция T на $\mathfrak{h}$.

Доказательство. Рассмотрим образ базисного элемента $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{so}_m$ под действием отображения $\operatorname{ad} T$:

$$\begin{aligned}
[Y_i, T] &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[X_i - X_i^\top, H + \sum_{j=1}^{p}\gamma_j X_j\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[X_i, H + \sum_{j=1}^{p}\gamma_j X_j\right] - \frac{1}{\sqrt{2}}\left[X_i^\top, H + \sum_{j=1}^{p}\gamma_j X_j\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[X_i, H + \sum_{j=1}^{p}\gamma_j X_j\right] - \frac{1}{\sqrt{2}}\left[X_i^\top, \sum_{j=i}^{p}\gamma_j X_j\right] - \frac{1}{\sqrt{2}}\left[X_i^\top, H + \sum_{j=1}^{i-1}\gamma_j X_j\right],
\end{aligned}$$

значит, по модулю подпространства $\mathfrak{t}$ имеем

$$[Y_i, T] \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[X_i^\top, H + \sum_{j=1}^{i-1}\gamma_j X_j\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_i(H)X_i^\top - \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j=1}^{i-1}\gamma_j\left[X_i^\top, X_j\right].$$

Далее, так как для каждого $j < i$ верно, что $\left[X_i^\top, X_j\right] = X_l^\top$ и при этом $l < i$, получаем, что в паре упорядоченных по возрастанию i базисов $\{Y_i\}_{i=1}^p$ и $\left\{X_i^\top\right\}_{i=1}^p$ матрица отображения $\operatorname{ad} T$ верхнетреугольная с элементами $\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_i(H)$ на главной диагонали.

Выберем в алгебре $\mathfrak{t}_{2n}$ ортонормированный базис:

$$\left[\begin{array}{ll} u_{ij} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e_{ij} & 0 \\ 0 & -e_{ji}\end{pmatrix}, & 1 \le i \le j \le n, \\[2ex] v_{ij} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & e_{ij} - e_{ji} \\ 0 & 0\end{pmatrix}, & 1 \le i < j \le n, \end{array}\right.$$

где e_{ij} — матричные единицы порядка n. Пусть

$$T = \sum_{i\le j} \alpha_{ij} u_{ij} + \sum_{i<j} \beta_{ij} v_{ij} \in \hat{\mathfrak{t}}_{2n}(r).$$

Аналогично в алгебре $\mathfrak{t}_{2n+1}$ выберем ортонормированный базис

$$\left[\begin{aligned} &u'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u_{ij} \end{pmatrix}, \quad 1 \le i \le j \le n, \\ &v'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v_{ij} \end{pmatrix}, \quad 1 \le i < j \le n, \\ &w'_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_i^\top \\ -e_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \le i \le n, \end{aligned}\right.$$

где e_i — векторы стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$. Пусть

$$T' = \sum_{i\le j} \alpha'_{ij} u'_{ij} + \sum_{i<j} \beta'_{ij} v'_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \gamma'_i w'_i \in \hat{\mathfrak{t}}_{2n+1}(r).$$

Лемма 7. (i) *Якобиан параметризации множества* $\mathrm{R}(\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R}), r)$ *равен*

$$|\det \mathscr{D}_{I_{2n},T}| = \frac{1}{2^{n^2-n}} \prod_{1\le i<j\le n} (\alpha_{ii}^2 - \alpha_{jj}^2).$$

(ii) *Якобиан параметризации множества* $\mathrm{R}(\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R}), r)$ *равен*

$$|\det \mathscr{D}_{I_{2n+1},T'}| = \frac{1}{2^{n^2}} \prod_{1\le i<j\le n} (\alpha'^2_{ii} - \alpha'^2_{jj}) \prod_{i=1}^{n} \alpha'_{ii}.$$

Доказательство. (i) Пусть $\mathfrak{h}_{2n}$ — алгебра, состоящая из диагональных матриц из $\mathfrak{t}_{2n}$ с базисом $\{u_{ii}\}_{i=1}^{n}$. Упорядочим базисные элементы $\{u_{ij}\}_{1\le i<j\le n}$ в порядке возрастания $j-i$ (при равенстве этих разностей упорядочим элементы произвольным образом), затем упорядочим $\{v_{ij}\}_{1\le i<j\le n}$ в порядке убывания $i+j$ (при равенстве этих сумм упорядочим элементы произвольным образом). Получим таким образом упорядоченный набор $\{X_i\}_{i=1}^{n^2-n}$. Нетрудно проверить, что $\bigl\{\frac{1}{\sqrt{2}}\bigl(X_i - X_i^\top\bigr)\bigr\}_{i=1}^{n^2-n}$ является ортонормированным базисом $\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{so}_{2n}$. Кроме того, для линейных на $\mathfrak{h}_{2n}$ функций

$$\lambda_{u_{ij}}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kk} u_{kk}\right) = \frac{\alpha_{jj} - \alpha_{ii}}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \lambda_{v_{ij}}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kk} u_{kk}\right) = \frac{\alpha_{jj} + \alpha_{ii}}{\sqrt{2}}$$

и указанных базисов выполнены условия леммы 6, значит, по теореме 2 из [6] имеем

$$\begin{aligned} |\det \mathscr{D}_{I_{2n},T}| &= \prod_{1\le i<j\le n} \frac{|\alpha_{jj} - \alpha_{ii}|}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{|\alpha_{jj} + \alpha_{ii}|}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \\ &= \prod_{1\le i<j\le n} \frac{|\alpha_{jj}^2 - \alpha_{ii}^2|}{4} = \frac{1}{2^{n^2-n}} \prod_{1\le i<j\le n} (\alpha_{ii}^2 - \alpha_{jj}^2), \end{aligned}$$

так как $T \in \hat{\mathfrak{t}}_{2n}(r)$ и $\alpha_{ii} > \alpha_{jj}$ при $i < j$.

(ii) Пусть $\mathfrak{h}_{2n+1}$ — алгебра, состоящая из диагональных матриц из $\mathfrak{t}_{2n+1}$ с базисом $\{u'_{ii}\}_{i=1}^{n}$. Упорядочим базисные элементы $\{u'_{ij}\}_{1\le i<j\le n}$ в порядке возрастания $j-i$ (при равенстве этих разностей упорядочим элементы произвольным образом), затем упорядочим $\{w'_i\}_{1\le i\le n}$ по убыванию i и, наконец, упорядочим $\{v'_{ij}\}_{1\le i<j\le n}$ в порядке убывания $i+j$ (при равенстве этих сумм упорядочим элементы произвольным образом). Получим таким образом упорядоченный набор $\{Y_i\}_{i=1}^{n^2}$. Нетрудно проверить, что $\bigl\{\frac{1}{\sqrt{2}}\bigl(Y_i-Y_i^{\top}\bigr)\bigr\}_{i=1}^{n^2-n}$ является ортонормированным базисом $\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R})\cap\mathfrak{so}_{2n+1}$. Кроме того, для линейных на $\mathfrak{h}_{2n+1}$ функций

$$\lambda_{u'_{ij}}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha'_{kk}u'_{kk}\right)=\frac{\alpha'_{jj}-\alpha'_{ii}}{\sqrt{2}},\ \lambda_{w'_i}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha'_{kk}u'_{kk}\right)=-\frac{\alpha'_{ii}}{\sqrt{2}},$$

$$\lambda_{v'_{ij}}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha'_{kk}u'_{kk}\right)=\frac{\alpha'_{jj}+\alpha'_{ii}}{\sqrt{2}}$$

и указанных базисов выполнены условия леммы 6, значит, по теореме 2 из [6] имеем

$$\begin{aligned}|\det\mathscr{D}_{I_{2n+1},T'}|&=\prod_{1\le i<j\le n}\frac{|\alpha'_{jj}-\alpha'_{ii}|}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\prod_{i=1}^{n}\frac{|\alpha'_{ii}|}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{|\alpha'_{jj}+\alpha'_{ii}|}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\\&=\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\bigl|\alpha'^2_{jj}-\alpha'^2_{ii}\bigr|}{4}\prod_{i=1}^{n}\frac{|\alpha'_{ii}|}{2}=\frac{1}{2^{n^2}}\prod_{1\le i<j\le n}\bigl(\alpha'^2_{ii}-\alpha'^2_{jj}\bigr)\prod_{i=1}^{n}\alpha'_{ii},\end{aligned}$$

так как $T'\in\hat{\mathfrak{t}}_{2n+1}(r)$ и $\alpha'_{ii}>\alpha'_{jj}$ при $i<j$ и $\alpha'_{ii}>0$ для всех i.

§ 5. Объем компактной псевдоортогональной группы

Лемма 8. (i) *Имеет место равенство*

$$\operatorname{vol}(\Omega_{2n}(\mathbb{R})\cap\mathrm{O}_{2n})=\frac{2^{n^2+[\frac{n+1}{2}]}\pi^{[\frac{n^2}{2}]}}{\prod\limits_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}(n-2k)!^2}=\begin{cases}\dfrac{2^{n^2+\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n^2}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}(2k)!^2}, & \text{если } n=2m,\\[2ex] \dfrac{2^{n^2+\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n^2-1}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(2k-1)!^2}, & \text{если } n=2m+1.\end{cases}$$

(ii) *Верно равенство*

$$\operatorname{vol}(\Omega_{2n+1}(\mathbb{R})\cap\mathrm{O}_{2n+1})=\frac{2^{n^2+\frac{3n}{2}+1}\pi^{\frac{n^2+n}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k-1)!}.$$

Доказательство. (i) По лемме 1 группы $\Omega_{2n}(\mathbb{R})$ и $\mathrm{O}_{n,n}(\mathbb{R})$ изоморфны и

$$\operatorname{vol}(\Omega_{2n}(\mathbb{R})\cap\mathrm{O}_{2n})=\operatorname{vol}(\mathrm{O}_{n,n}(\mathbb{R})\cap\mathrm{O}_{2n}).$$

Из леммы 2 о матричном описании следует, что

$$\operatorname{vol}(\mathrm{O}_{n,n}(\mathbb{R})\cap\mathrm{O}_{2n})=4\operatorname{vol}(\mathrm{SO}_n)^2.$$

В [7, гл. 11, § 10] показано, что $\mathrm{SO}_n/\mathrm{SO}_{n-1}$ изометрично сфере $S^{n-1}(R)$, при этом кривая

$$\gamma(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & I_{n-2}\end{pmatrix},\quad \varphi\geq 0,$$

отображается в геодезическую на сфере, а значит, $R=\sqrt{2}$. Следовательно,

$$\operatorname{vol}(\mathrm{SO}_n)=\prod_{k=1}^{n-1}\operatorname{vol}(S^k(\sqrt{2})). \tag{3}$$

Используя формулу объема сферы, а также формулу $\Gamma\bigl(k+\frac{1}{2}\bigr)=\frac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi}$, получаем

$$\operatorname{vol}(S^{2k}(\sqrt{2}))=\frac{2\pi^{\frac{2k+1}{2}}(\sqrt{2})^{2k}}{\Gamma\bigl(\frac{2k+1}{2}\bigr)}=\frac{2\pi^{k+\frac{1}{2}}2^k2^k}{(2k-1)!!\sqrt{\pi}}=\frac{2^{2k+1}\pi^k}{(2k-1)!!}. \tag{4}$$

Ввиду равенства $\Gamma(k)=(k-1)!=\frac{(2k-2)!!}{2^{k-1}}$ имеем

$$\operatorname{vol}(S^{2k-1}(\sqrt{2}))=\frac{2\pi^{\frac{2k-1+1}{2}}(\sqrt{2})^{2k-1}}{\Gamma\bigl(\frac{2k-1+1}{2}\bigr)}=\frac{2\pi^k2^{k-\frac{1}{2}}}{(k-1)!}=\frac{2^{2k-\frac{1}{2}}\pi^k}{(2k-2)!!}. \tag{5}$$

В итоге если $n=2m+1$, то

$$\begin{aligned}2\operatorname{vol}(\mathrm{SO}_n)&=2\prod_{k=1}^{2m}\operatorname{vol}(S^k(\sqrt{2}))\\&=2\prod_{k=1}^{m}\operatorname{vol}(S^{2k}(\sqrt{2}))\prod_{k=1}^{m}\operatorname{vol}(S^{2k-1}(\sqrt{2}))\\&=2\prod_{k=1}^{m}\frac{2^{2k+1}\pi^k}{(2k-1)!!}\prod_{k=1}^{m}\frac{2^{2k-\frac{1}{2}}\pi^k}{(2k-2)!!}=2\prod_{k=1}^{m}\frac{2^{2k+1}2^{2k-\frac{1}{2}}\pi^k\pi^k}{(2k-1)!!(2k-2)!!}\\&=2\prod_{k=1}^{m}\frac{2^{4k+\frac{1}{2}}\pi^{2k}}{(2k-1)!}=\frac{2^{1+4\frac{m(m+1)}{2}+\frac{m}{2}}\pi^{2\frac{m(m+1)}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{m}(2k-1)!}\\&=\frac{2^{2m(m+1)+\frac{m}{2}+1}\pi^{m(m+1)}}{(2m-1)!(2m-3)!\dots3!1!}\end{aligned}$$

и, используя равенства $m=\frac{n-1}{2}$, $m(m+1)=\frac{n^2-1}{4}$, получаем

$$2\operatorname{vol}(\mathrm{SO}_n)=\frac{2^{\frac{n^2-1}{2}+\frac{n-1}{4}+1}\pi^{\frac{n^2-1}{4}}}{(n-2)!(n-4)!\dots3!1!}=\frac{2^{\frac{n^2}{2}+\frac{n+1}{4}}\pi^{\frac{n^2-1}{4}}}{\prod\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(n-2k)!}=\frac{2^{\frac{n^2}{2}+\frac{n+1}{4}}\pi^{\frac{n^2-1}{4}}}{\prod\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(2k-1)!}.$$

Если $n=2m$, то

$$\begin{aligned}2\operatorname{vol}(\mathrm{SO}_n)&=2\prod_{k=1}^{2m-1}\operatorname{vol}(S^k(\sqrt{2}))\\&=2\operatorname{vol}(S^{2m-1}(\sqrt{2}))\prod_{k=1}^{m-1}\operatorname{vol}(S^{2k}(\sqrt{2}))\prod_{k=1}^{m-1}\operatorname{vol}(S^{2k-1}(\sqrt{2}))\end{aligned}$$

$$= 2\frac{2^{2m-\frac{1}{2}}\pi^m}{(2m-2)!!}\prod_{k=1}^{m-1}\frac{2^{4k+\frac{1}{2}}\pi^{2k}}{(2k-1)!} = \frac{2^{1+2m-\frac{1}{2}+4\frac{m(m-1)}{2}+\frac{m-1}{2}}\pi^{m+2\frac{m(m-1)}{2}}}{(2m-2)!!\prod\limits_{k=1}^{m-1}(2k-1)!}$$

$$= \frac{2^{2m+\frac{1}{2}+2m(m-1)+\frac{m-1}{2}}\pi^{m+m(m-1)}}{(2m-2)!!(2m-3)!(2m-5)!\dots 3!1!} = \frac{2^{2m^2+\frac{m}{2}}\pi^{m^2}}{(2m-2)!(2m-4)!\dots 4!2!}$$

и, используя равенство $m = \frac{n}{2}$, получаем

$$2\operatorname{vol}(\mathrm{SO}_n) = \frac{2^{\frac{n^2}{2}+\frac{n}{4}}\pi^{\frac{n^2}{4}}}{(n-2)!(n-4)!\dots 4!2!} = \frac{2^{\frac{n^2}{2}+\frac{n}{4}}\pi^{\frac{n^2}{4}}}{\prod\limits_{k=1}^{\frac{n}{2}}(n-2k)!} = \frac{2^{\frac{n^2}{2}+\frac{n}{4}}\pi^{\frac{n^2}{4}}}{\prod\limits_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}(2k)!}.$$

Заметим, что и при $n = 2m+1$, и при $n = 2m$ имеем

$$2\operatorname{vol}(\mathrm{SO}_n) = \frac{2^{\frac{n^2}{2}+\frac{1}{2}[\frac{n+1}{2}]}\pi^{\frac{1}{2}[\frac{n^2}{2}]}}{\prod\limits_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}(n-2k)!},$$

значит,

$$\operatorname{vol}(\Omega_{2n}(\mathbb{R})\cap \mathrm{O}_{2n}) = (2\operatorname{vol}(\mathrm{SO}_n))^2$$

$$= \frac{2^{n^2+[\frac{n+1}{2}]}\pi^{[\frac{n^2}{2}]}}{\prod\limits_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}(n-2k)!^2} = \begin{cases} \dfrac{2^{n^2+\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n^2}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}(2k)!^2}, & \text{если } n = 2m, \\ \dfrac{2^{n^2+\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n^2-1}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(2k-1)!^2}, & \text{если } n = 2m+1. \end{cases}$$

(ii) По лемме 1 группы $\Omega_{2n+1}(\mathbb{R})$ и $\mathrm{O}_{n+1,n}(\mathbb{R})$ изоморфны и

$$\operatorname{vol}(\Omega_{2n+1}(\mathbb{R})\cap \mathrm{O}_{2n+1}) = \operatorname{vol}(\mathrm{O}_{n+1,n}(\mathbb{R})\cap \mathrm{O}_{2n+1}).$$

Из леммы 2 о матричном описании следует, что

$$\operatorname{vol}(\mathrm{O}_{n+1,n}(\mathbb{R})\cap \mathrm{O}_{2n+1}) = 4\operatorname{vol}(\mathrm{SO}_{n+1})\operatorname{vol}(\mathrm{SO}_n).$$

Из равенства (3) получаем

$$\operatorname{vol}(\mathrm{SO}_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n}\operatorname{vol}(S^k(\sqrt{2})) = \operatorname{vol}(S^n(\sqrt{2}))\prod_{k=1}^{n-1}\operatorname{vol}(S^k(\sqrt{2}))$$

$$= \operatorname{vol}(S^n(\sqrt{2}))\operatorname{vol}(\mathrm{SO}_n),$$

следовательно,

$$\operatorname{vol}(\Omega_{2n+1}(\mathbb{R})\cap \mathrm{O}_{2n+1}) = \operatorname{vol}(\Omega_{2n}(\mathbb{R})\cap \mathrm{O}_{2n})\operatorname{vol}(S^n(\sqrt{2})).$$

В итоге если $n = 2m$, то из равенства (4) следует

$$\operatorname{vol}(S^n(\sqrt{2})) = \frac{2^{2m+1}\pi^m}{(2m-1)!!} = \frac{2^{n+1}\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-1)!!},$$

значит, в этом случае

$$\operatorname{vol}(\Omega_{2n+1}(\mathbb{R})\cap \mathrm{O}_{2n+1}) = \frac{2^{n^2+\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n^2}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{\frac{n}{2}}(n-2k)!^2}\frac{2^{n+1}\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-1)!!}$$

$$= \frac{2^{n^2+\frac{3n}{2}+1}\pi^{\frac{n^2+n}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{\frac{n}{2}}(n-2k)!(n-2k)!}\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{\frac{n}{2}}(n-2k+1)}$$

$$= \frac{2^{n^2+\frac{3n}{2}+1}\pi^{\frac{n^2+n}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{\frac{n}{2}}(n-2k+1)!(n-2k)!} = \frac{2^{n^2+\frac{3n}{2}+1}\pi^{\frac{n^2+n}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k-1)!}.$$

Если $n=2m-1$, то из равенства (5) вытекает, что

$$\operatorname{vol}(S^n(\sqrt{2})) = \frac{2^{2m-\frac{1}{2}}\pi^m}{(2m-2)!!} = \frac{2^{n+\frac{1}{2}}\pi^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)!!},$$

значит, и в этом случае

$$\operatorname{vol}(\Omega_{2n+1}(\mathbb{R})\cap \mathrm{O}_{2n+1}) = \frac{2^{n^2+\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n^2-1}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(n-2k)!^2}\frac{2^{n+\frac{1}{2}}\pi^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)!!}$$

$$= \frac{2^{n^2+\frac{3n}{2}+1}\pi^{\frac{n^2+n}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(n-2k)!(n-2k)!}\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(n-2k+1)}$$

$$= \frac{2^{n^2+\frac{3n}{2}+1}\pi^{\frac{n^2+n}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{\frac{n}{2}}(n-2k+1)!(n-2k)!} = \frac{2^{n^2+\frac{3n}{2}+1}\pi^{\frac{n^2+n}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k-1)!}.$$

§ 6. Вычисление интеграла

Лемма 9. *Имеет место равенство*

$$\mathrm{P}(\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R})) = \frac{\Gamma\left(\frac{n^2}{2}+1\right)}{2^{n^2+n}\pi^{\frac{n^2}{2}}}\operatorname{vol}(\Omega_{2n}(\mathbb{R})\cap \mathrm{O}_{2n})\mathfrak{I}_n,$$

где

$$\mathfrak{I}_n = \underset{\substack{x_1+\dots+x_n\le 1,\\ 0<x_1<\dots<x_n}}{\int\cdots\int} \frac{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}\,dx_1\dots dx_n.$$

Доказательство. По теореме 2 из [6] и леммам 5–8 имеем

$$\operatorname{vol}\mathrm{R}(\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R}),r) = \frac{1}{2}\operatorname{vol}(\Omega_{2n}(\mathbb{R})\cap \mathrm{O}_{2n})\frac{1}{2^{n^2-n}}\int\limits_{\hat{\mathfrak{t}}(r)}\prod_{1\le k<m\le n}(\alpha_{kk}^2-\alpha_{mm}^2)\,dT$$

$$= \frac{1}{2^{n^2}}\operatorname{vol}(\Omega_{2n}(\mathbb{R})\cap \mathrm{O}_{2n})J_n(r),$$

где
$$J_n(r) = 2^{n-1} \int\limits_{\mathfrak{t}(r)} \prod_{1\le k<m\le n} \left(\alpha_{kk}^2 - \alpha_{mm}^2\right) dT.$$

Переобозначим α_{ii} через x_{n-i+1}, $i = 1,\dots,n$, $\alpha_{12},\dots,\alpha_{1n}$ — через $y_1,\dots,y_{n-1}$, а остальные α_{ij} и β_{ij} при $i<j$ в некотором произвольном порядке — через y_i, $i = n,\dots,n^2-n$. Будем также обозначать $\|x\|^2 = x_1^2+\dots+x_n^2$, $\|y\|^2 = y_1^2+\dots+y_{n^2-n}^2$, $dx = dx_1\dots dx_n$, $dy = dy_1\dots dy_{n^2-n}$.

Рассмотрим интеграл
$$\mathfrak{I}_n(R) = \int\limits_{\substack{\|x\|^2\le R^2,\\ 0<x_1<\dots<x_n}} \!\!\cdots\!\! \int \prod_{1\le i<j\le n} \left(x_j^2 - x_i^2\right) dx.$$

Сделаем замену $x_i = R\sqrt{t_i}$. Якобиан этой замены равен
$$\prod_{i=1}^n \frac{R}{2\sqrt{t_i}} = \frac{R^n}{2^n}\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{t_i}}.$$

Тогда
$$\mathfrak{I}_n(R) = \frac{R^n}{2^n} R^{2\frac{n(n-1)}{2}} \int\limits_{\substack{t_1+\dots+t_n\le 1,\\ 0<t_1<\dots<t_n}} \!\!\cdots\!\! \int \frac{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(t_j-t_i)}{\prod\limits_{i=1}^n \sqrt{t_i}}\, dt_1\dots dt_n = \frac{R^{n^2}}{2^n}\mathfrak{I}_n,$$

где $\mathfrak{I}_n$ — интеграл из формулировки леммы.

Используя полученное равенство и теорему Фубини, получим
$$J_n(r) = 2^{n-1} \int\limits_{\substack{\|y\|^2\le r^2,\\ y_1>0,\dots,y_{n-1}>0}} \!\!\cdots\!\! \int dy \int\limits_{\substack{\|x\|^2\le r^2-\|y\|^2,\\ 0<x_1<\dots<x_n}} \!\!\cdots\!\! \int \prod_{1\le i<j\le n}\left(x_j^2-x_i^2\right) dx$$
$$= \int\limits_{\|y\|^2\le r^2} \!\!\cdots\!\! \int \mathfrak{I}_n\bigl(\sqrt{r^2-\|y\|^2}\bigr)\, dy = \frac{\mathfrak{I}_n}{2^n} \int\limits_{\|y\|^2\le r^2} \!\!\cdots\!\! \int (r^2-\|y\|^2)^{\frac{n^2}{2}}\, dy,$$

так как подынтегральная функция четна относительно $y_1,\dots,y_{n-1}$.

Сделаем замену $y_i = rz_i$ с якобианом r^{n^2-n}. Тогда
$$J_n(r) = \frac{\mathfrak{I}_n}{2^n} r^{2n^2-n} \int\limits_{\|z\|^2\le 1} \!\!\cdots\!\! \int (1-\|z\|^2)^{\frac{n^2}{2}}\, dz$$
$$= \frac{\mathfrak{I}_n}{2^n} r^{2n^2-n} \int\limits_0^1 (1-\rho^2)^{\frac{n^2}{2}} \Biggl(\int\limits_{\|z\|=\rho} \!\!\cdots\!\! \int dz \Biggr) d\rho$$
$$= \frac{\mathfrak{I}_n}{2^n} r^{2n^2-n} \int\limits_0^1 (1-\rho^2)^{\frac{n^2}{2}} \operatorname{vol} S^{n^2-n-1}(\rho)\, d\rho.$$

Используя формулу объема n-мерной сферы, получим
$$J_n(r) = \frac{\mathfrak{I}_n}{2^n} r^{2n^2-n} \frac{2\pi^{\frac{n^2-n}{2}}}{\Gamma\bigl(\frac{n^2-n}{2}\bigr)} \int\limits_0^1 (1-\rho^2)^{\frac{n^2}{2}} \rho^{n^2-n-1}\, d\rho.$$

Сделаем замену $t=\rho^2$, $dt=2\rho d\rho$. Тогда

$$\begin{aligned}J_n(r)=\frac{\mathfrak{I}_n}{2^n}r^{2n^2-n}\frac{\pi^{\frac{n^2-n}{2}}}{\Gamma\bigl(\frac{n^2-n}{2}\bigr)}\int\limits_0^1(1-t)^{\frac{n^2}{2}}t^{\frac{n^2-n-2}{2}}\,dt\\ =\frac{\mathfrak{I}_n r^{2n^2-n}\pi^{\frac{n^2-n}{2}}}{2^n\Gamma\bigl(\frac{n^2-n}{2}\bigr)}\frac{\Gamma\bigl(\frac{n^2-n}{2}\bigr)\Gamma\bigl(\frac{n^2}{2}+1\bigr)}{\Gamma\bigl(\frac{2n^2-n}{2}+1\bigr)}\\ =\frac{\mathfrak{I}_n r^{2n^2-n}\pi^{\frac{n^2-n}{2}}}{2^n}\frac{\Gamma\bigl(\frac{n^2}{2}+1\bigr)}{\Gamma\bigl(\frac{2n^2-n}{2}+1\bigr)}.\end{aligned}$$

Согласно [8, гл. 1, § 1] размерность алгебры $\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R})$ как вещественного конечномерного векторного пространства равна $2n^2-n$ и тогда объем шара радиуса r в этом пространстве равен

$$\operatorname{vol}\mathrm{B}(\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R}),r)=\frac{\pi^{\frac{2n^2-n}{2}}r^{2n^2-n}}{\Gamma\bigl(\frac{2n^2-n}{2}+1\bigr)}.$$

В итоге

$$\mathrm{P}(\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R}))=\frac{\Gamma\bigl(\frac{n^2}{2}+1\bigr)}{2^{n^2+n}\pi^{\frac{n^2}{2}}}\operatorname{vol}(\Omega_{2n}(\mathbb{R})\cap\mathrm{O}_{2n})\mathfrak{I}_n.$$

Вычислим интеграл $\mathfrak{I}_n$.

Лемма 10. *Имеет место равенство*

$$\mathfrak{I}_n=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n^2}{2}+1\right)}\frac{1}{2^{\frac{n^2}{2}-n}}\prod\limits_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}(2k)!^2, & \text{если } n=2m,\\ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n^2}{2}+1\right)}\frac{\pi^{\frac12}}{2^{\frac{(n-1)^2}{2}}}\prod\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(2k-1)!^2, & \text{если } n=2m+1.\end{cases}$$

Доказательство. Введем обозначение

$$\Delta_n(x)\overset{\mathrm{df}}{=}\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).$$

Тогда интеграл $\mathfrak{I}_n$ примет вид

$$\mathfrak{I}_n=\underset{\substack{x_1+\dots+x_n\le1,\\0<x_1<\dots<x_n}}{\int\cdots\int}\frac{\Delta_n(x)}{\prod\limits_{i=1}^n\sqrt{x_i}}\,dx_1\dots dx_n=\underset{\substack{x_1+\dots+x_n\le1,\\0<x_1<\dots<x_n}}{\int\cdots\int}|\Delta_n(x)|\prod_{i=1}^n x_i^{-\frac12}\,dx_1\dots dx_n,$$

поскольку в заданной области $\Delta_n(x)>0$. Заметим, что если поменять порядок переменных $x_1,\dots,x_n$, последний интеграл не изменится и, просуммировав по всем возможным упорядочениям, имеем

$$n!\mathfrak{I}_n=\underset{\substack{x_1+\dots+x_n\le1,\\0<x_i}}{\int\cdots\int}|\Delta_n(x)|\prod_{i=1}^n x_i^{-\frac12}\,dx_1\dots dx_n.$$

Полученный интеграл является частным случаем одного из обобщений β-интеграла, принадлежащего Сельбергу, и вычислен, например, в [2]. Воспользовавшись формулой (17.10.1) из [2] при $m=0$, $\gamma=\frac{1}{2}$, $\beta=1$, $\alpha=\frac{1}{2}$, получим

$$n!\mathfrak{I}_n=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n^2}{2}+1\right)}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{n-j+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{j}{2}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}.$$

Пусть $n=2m$, тогда

$$\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{n-j+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{j}{2}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}=\prod_{j=1}^{2m}\frac{\Gamma\left(\frac{2m-j+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{j}{2}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$
$$=\prod_{i=1}^{m}\frac{\Gamma\left(\frac{2m-2i+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{2i}{2}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{2m-2i+1+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{2i-1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$
$$=\prod_{i=1}^{m}\frac{\Gamma\left(m-i+\frac{1}{2}\right)\Gamma(1+i)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\frac{\Gamma(m-i+1)\Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}.$$

Используя формулы для гамма-функции $\Gamma(k+1)=k!$ и $\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2k-1)!!\sqrt{\pi}}{2^k}$ выводим

$$\prod_{i=1}^{m}\frac{\Gamma\left(m-i+\frac{1}{2}\right)\Gamma(1+i)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\frac{\Gamma(m-i+1)\Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$
$$=\prod_{i=1}^{m}\frac{(2(m-i)-1)!!\sqrt{\pi}i!}{2^{m-i}\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\frac{(m-i)}{!}(2i-1)!!\sqrt{\pi}2^i\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
$$=\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{2^{m-2}}(2(m-i)-1)!!\frac{(2i)!!}{2^i}\frac{(2(m-i))!!}{2^{m-i}}(2i-1)!!$$
$$=\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{2^{2m-2}}(2(m-i))!(2i)!=\frac{1}{2^{2(m-1)m}}\prod_{i=1}^{m}(2(m-i))!\prod_{i=1}^{m}(2i)!$$
$$=\frac{1}{2^{2(m-1)m}}(2m)!\prod_{i=1}^{m-1}(2i)!\prod_{i=1}^{m-1}(2i)!=\frac{1}{2^{\frac{n^2}{2}-n}}n!\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}(2i)!^2.$$

В итоге при $n=2m$ имеем

$$\mathfrak{I}_n=\frac{1}{n!}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n^2}{2}+1\right)}\frac{1}{2^{\frac{n^2}{2}-n}}n!\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}(2i)!^2=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n^2}{2}+1\right)}\frac{1}{2^{\frac{n^2}{2}-n}}\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}(2k)!^2.$$

Пусть $n=2m+1$, тогда

$$\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{n-j+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{j}{2}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{n-j+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{j}{2}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(1+\frac{2m+1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\prod_{j=1}^{2m}\frac{\Gamma\left(\frac{2m+1-j+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{j}{2}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$
$$=2\Gamma\left(1+m+\frac{1}{2}\right)\prod_{i=1}^{m}\frac{\Gamma\left(\frac{2m+1-2i+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{2i}{2}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{2m+1-2i+1+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{2i-1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$= 2\Gamma\left(1+m+\frac{1}{2}\right)\prod_{i=1}^{m}\frac{\Gamma(m-i+1)\Gamma(1+i)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\frac{\Gamma\big(m-i+1+\frac{1}{2}\big)\Gamma\big(i+\frac{1}{2}\big)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}.$$

Используя формулы для гамма-функции $\Gamma(k+1)=k!$ и $\Gamma\big(k+\frac{1}{2}\big)=\frac{(2k-1)!!\sqrt{\pi}}{2^k}$, выводим

$$2\Gamma\big(1+m+\frac{1}{2}\big)\prod_{i=1}^{m}\frac{\Gamma(m-i+1)\Gamma(1+i)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\frac{\Gamma\big(m-i+1+\frac{1}{2}\big)\Gamma\big(i+\frac{1}{2}\big)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$= 2\frac{(2(m+1)-1)!!\sqrt{\pi}}{2^{m+1}}\prod_{i=1}^{m}\frac{(m-i)!i!}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\frac{(2(m-i+1)-1)!!\sqrt{\pi}(2i-1)!!\sqrt{\pi}}{2^{m-i+1}2^i\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$= \frac{(2m+1)!!\sqrt{\pi}}{2^m}\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{2^{m-1}}\frac{(2(m-i))!!}{2^{m-i}}\frac{(2i)!!}{2^i}(2(m-i)+1)!!(2i-1)!!$$

$$= \frac{(2m+1)!!\sqrt{\pi}}{2^{m+(2m-1)m}}\prod_{i=1}^{m}(2(m-i)+1)!\prod_{i=1}^{m}(2i)!$$

$$= \frac{(2m+1)!!\sqrt{\pi}}{2^{2m^2}}\prod_{i=1}^{m}(2i-1)!\prod_{i=1}^{m}(2i)! = \frac{(2m+1)!!\sqrt{\pi}}{2^{2m^2}}\prod_{i=1}^{m}(2i-1)!(2i-1)!(2i)$$

$$= \frac{(2m+1)!!\sqrt{\pi}}{2^{2m^2}}\prod_{i=1}^{m}(2i-1)!^2\prod_{i=1}^{m}(2i) = \frac{(2m+1)!!\sqrt{\pi}}{2^{2m^2}}(2m)!!\prod_{i=1}^{m}(2i-1)!^2$$

$$= \frac{(2m+1)!\sqrt{\pi}}{2^{2m^2}}\prod_{i=1}^{m}(2i-1)!^2 = \frac{n!\sqrt{\pi}}{2^{\frac{(n-1)^2}{2}}}\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(2i-1)!^2.$$

В итоге при $n=2m+1$ имеем

$$\mathfrak{I}_n = \frac{1}{n!}\frac{1}{\Gamma\big(\frac{n^2}{2}+1\big)}\frac{n!\sqrt{\pi}}{2^{\frac{(n-1)^2}{2}}}\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(2i-1)!^2 = \frac{1}{\Gamma\big(\frac{n^2}{2}+1\big)}\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{(n-1)^2}{2}}}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(2k-1)!^2.$$

Лемма 11. *Верно равенство*

$$\mathrm{P}(\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R})) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n^2-n}{2}}.$$

Доказательство. Подставим значение интеграла $\mathfrak{I}_n$, полученное в лемме 10, и значение объема псевдоортогональной группы из леммы 8 в выражение для $\mathrm{P}(\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R}))$ из леммы 9.

При четном n получим

$$\mathrm{P}(\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R})) = \frac{\Gamma\big(\frac{n^2}{2}+1\big)}{2^{n^2+n}\pi^{\frac{n^2}{2}}}\frac{2^{n^2+\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n^2}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}(2k)!^2}\frac{1}{\Gamma\big(\frac{n^2}{2}+1\big)}\frac{1}{2^{\frac{n^2}{2}-n}}\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}(2k)!^2 = \frac{1}{2^{\frac{n^2-n}{2}}}.$$

При нечетном n имеем

$$\mathrm{P}(\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R})) = \frac{\Gamma\big(\frac{n^2}{2}+1\big)}{2^{n^2+n}\pi^{\frac{n^2}{2}}}\frac{2^{n^2+\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n^2-1}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(2k-1)!^2}\frac{1}{\Gamma\big(\frac{n^2}{2}+1\big)}\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{(n-1)^2}{2}}}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(2k-1)!^2 = \frac{1}{2^{\frac{n^2-n}{2}}}.$$

Лемма 12. *Имеет место равенство*

$$\mathrm{P}(\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R})) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n^2}{2}}.$$

Доказательство. По теореме 2 из [6] и леммам 5–8 имеем

$$\operatorname{vol}\mathrm{R}(\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R}), r) = \frac{1}{2}\frac{2^{n^2+\frac{3n}{2}+1}\pi^{\frac{n^2+n}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k-1)!}\frac{1}{2^{n^2}}\int\limits_{\hat{\mathfrak{t}}_{2n+1}(r)}\prod_{1\le i<j\le n}\left(\alpha'^2_{ii}-\alpha'^2_{jj}\right)\prod_{i=1}^{n}\alpha'_{ii}\,dT$$

$$= \frac{2^{\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n^2+n}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k-1)!}J'_n(r),$$

где

$$J'_n(r) = 2^n\int\limits_{\hat{\mathfrak{t}}_{2n+1}(r)}\prod_{1\le i<j\le n}\left(\alpha'^2_{ii}-\alpha'^2_{jj}\right)\prod_{i=1}^{n}\alpha'_{ii}\,dT.$$

Переобозначим α'_{ii} через x_{n-i+1}, $i=1,\dots,n$, $\alpha'_{12},\dots,\alpha'_{1n}$ — через $y_1,\dots,y_{n-1}$, γ_1 — через y_n, а остальные α'_{ij} и β'_{ij} при $i<j$ и γ'_i в некотором произвольном порядке — через y_i, $i=n+1,\dots,n^2$. Будем также обозначать $\|x\|^2 = x_1^2+\dots+x_n^2$, $\|y\|^2 = y_1^2+\dots+y_{n^2}^2$, $dx = dx_1\dots dx_n$, $dy = dy_1\dots dy_{n^2}$. Получим

$$J'_n(r) = 2^n\int\limits_{\substack{\|x\|^2+\|y\|^2\le r^2,\\ 0<x_1<\dots<x_n,\\ y_1>0,\dots,y_n>0}}\cdots\int\prod_{1\le i<j\le n}\left(x_j^2-x_i^2\right)\prod_{i=1}^{n}x_i\,dxdy$$

$$= \int\limits_{\substack{\|x\|^2+\|y\|^2\le r^2,\\ 0<x_1<\dots<x_n}}\cdots\int\prod_{1\le i<j\le n}\left(x_j^2-x_i^2\right)\prod_{i=1}^{n}x_i\,dxdy,$$

так как подынтегральная функция четна относительно $y_1,\dots,y_n$.

Данный интеграл был подсчитан в лемме 6 из [6]:

$$J'_n(r) = \frac{\mathfrak{I}'_n r^{2n^2+n}\pi^{\frac{n^2}{2}}}{2^n}\frac{\left(\frac{n^2+n}{2}\right)!}{\Gamma\left(\frac{2n^2+n}{2}+1\right)},$$

где

$$\mathfrak{I}'_n = \int\limits_{\substack{x_1+\dots+x_n\le 1,\\ 0<x_1<\dots<x_n}}\cdots\int\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\,dx_1\dots dx_n.$$

Кроме того, в лемме 7 из [6] с применением интеграла Сельберга было получено, что

$$\mathfrak{I}'_n = \frac{1}{\left(\frac{n^2+n}{2}\right)!}\frac{1}{2^{\frac{n^2-n}{2}}}\prod_{k=1}^{n}(k-1)!,$$

значит,

$$J'_n(r) = \frac{r^{2n^2+n}\pi^{\frac{n^2}{2}}}{2^{\frac{n^2+n}{2}}\Gamma\left(\frac{2n^2+n}{2}+1\right)}\prod_{k=1}^{n}(k-1)!,$$

откуда получаем, что

$$\operatorname{vol}\mathrm{R}(\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R}), r) = \frac{\pi^{\frac{2n^2+n}{2}} r^{2n^2+n}}{2^{\frac{n^2}{2}}\Gamma\left(\frac{2n^2+n}{2}+1\right)}.$$

Согласно [8, гл. 1, § 1] размерность алгебры $\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R})$ как вещественного конечномерного векторного пространства равна $2n^2+n$ и тогда объем шара радиуса r в этом пространстве равен

$$\operatorname{vol}\mathrm{B}(\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R}), r) = \frac{\pi^{\frac{2n^2+n}{2}} r^{2n^2+n}}{\Gamma\left(\frac{2n^2+n}{2}+1\right)}.$$

В итоге получаем

$$\mathrm{P}(\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R})) = \frac{\operatorname{vol}\mathrm{R}(\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R}), r)}{\operatorname{vol}\mathrm{B}(\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R}), r)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n^2}{2}}.$$

Доказательство пп. (ii) и (iii) основной теоремы получается из лемм 11 и 12, поскольку согласно следствию из леммы 1

$$\mathrm{P}(\mathfrak{so}_{n,n}(\mathbb{R})) = \mathrm{P}(\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{R})), \quad \mathrm{P}(\mathfrak{so}_{n+1,n}(\mathbb{R})) = \mathrm{P}(\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{R})).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.
2. *Madan Lal Mehta.* Random matrices. Third ed. Amsterdam: Elsevier/Academic Press, 2004.
3. *Girko V. L.* Random matrices // Handbook of Algebra, ed. Hazewinkel. 1996. V. 1. P. 27–78.
4. *Edelman A., Raj Rao N.* Random matrix theory // Acta Numerica. 2005. V. 14, N 1. P. 233-297.
5. *Edelman A.* The probability that a random real Gaussian matrix has k real eigenvalues, related distributions, and the circular law // J. Multivariate Anal. 1997. V. 60, N 2. P. 203–232.
6. *Кривоногов А. С., Чуркин В. А.* Доля матриц с вещественным спектром в алгебре Ли вещественной симплектической группы // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 6. С. 1297–1314.
7. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. II.
8. *Хамфрис Дж.* Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. М.: МЦНМО, 2003.

Статья поступила 15 марта 2015 г.

Кривоногов Андрей Сергеевич,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
krivonogov.andrey@gmail.com

Чуркин Валерий Авдеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
churkin@math.nsc.ru