Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2016. Том 57, № 3

УДК 517.54

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО ПОРЯДКУ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

И. В. Бойков

Аннотация. Построены оптимальные по порядку кубатурные формулы для вычисления многомерных интегралов в весовых пространствах Соболева. Рассматриваются классы функций, определенных в кубе $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 1, 2, \dots$, и имеющих в Ω ограниченные частные производные до r-го порядка и производные j-го порядка ($r < j \le s$), модули которых стремятся к бесконечности как степенные функции вида $(d(x,\Gamma))^{-(j-r)}$, где $x \in \Omega \setminus \Gamma$, $x = (x_1, \dots, x_l)$, $\Gamma = \partial\Omega$, $d(x,\Gamma)$ — расстояние от x до Γ.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.305

Ключевые слова: весовые пространства Соболева, кубатурные формулы, оптимальные алгоритмы.

1. Введение

Задача построения наилучших квадратурных формул поставлена в [1]. Первые наилучшие квадратурные формулы построены в [2]. Задача построения наилучших квадратурных формул непосредственно распространяется на кубатурные формулы и заключается в следующем. Пусть многомерный интеграл вычисляется по кубатурной формуле

$$\int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} f(x_1, \dots, x_l)\, dx_1 \dots dx_l = \sum_{k=1}^{n} \sum_{|v|=0}^{s-1} p_{kv} f^v(M_k) + R_n(f, p_{kv}, M_k), \tag{1.1}$$

где $M_k \in [-1,1; \dots; -1,1]$ — узлы, а p_{kv} — веса, $v = (v_1, \dots, v_l)$, $|v| = v_1 + \dots + v_l$, $0 \le v_i \le |v|$, $i = 1, \dots, l$, $f^v(x_1, \dots, x_l) = \partial^{|v|} f / \partial x_1^{v_1} \dots \partial x_l^{v_l}$.

Если функция f принадлежит некоторому классу Ψ, то

$$R_n[\Psi, p_{kv}, M_k] = \sup_{f \in \Psi} |R_n(f, p_{kv}, M_k)|.$$

Введем функционал $\zeta_n[\Psi] = \inf\limits_{p_{kv}, M_k} R_n[\Psi, p_{kv}, M_k]$, где нижняя грань берется по всевозможным наборам весов и узлов.

Если существуют такие наборы $\{p^*_{kv}\}_1^n$ и $\{M^*_k\}_1^n$ весов и узлов, что

$$R_n[\Psi, p^*_{kv}, M^*_k] / \zeta_n[\Psi] = 1, \sim 1, \asymp 1,$$

то кубатурная формула (1.1) называется [3] *оптимальной* (*наилучшей*), *асимптотически оптимальной*, *оптимальной по порядку*.

Другие подходы к определению оптимальных пассивных алгоритмов предложены в [4, 5].

В настоящее время получены наилучшие кубатурные формулы лишь для отдельных классов функций [6]. Оптимальные по порядку кубатурные формулы на различных классах функций исследовались в [7]. Построению асимптотически оптимальных кубатурных формул посвящены монографии [8, 9]. Асимптотика весовых кубатурных формул с ограниченными весами вычислена в [10] (на соболевских классах) и в [11] (на классах функций Гёльдера).

В [12] построены оптимальные по порядку кубатурные формулы вычисления интегралов на классе $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\Omega = [-1,1]^l$ и асимптотически оптимальные квадратурные формулы на классе $Q_r(\Omega,1)$, $\Omega = [-1,1]$. Класс функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ является обобщением класса $Q_r(\Omega, M)$, введенного К. И. Бабенко [13]. Определение класса $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ приведено ниже в разд. 2. Оптимальные по порядку кубатурные формулы для вычисления интегралов на классах функций $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\Omega = [-1,1]^l$ (определение класса $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$ см. в [12, 14]), получены в [14]. Подробное изложение построения оптимальных кубатурных формул на весовых классах функций дано в [14].

В данной работе построены оптимальные по порядку кубатурные формулы на классах функций $\overline{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, являющихся обобщениями класса функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$. Интерес к этим классам функций обусловлен тем, что им принадлежат значения гиперсингулярных интегралов [15].

2. Классы функций и обозначения

В этом разделе приведены определения классов функций, используемых в работе.

Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l \geq 1$, $\Gamma = \partial\Omega$ — граница области Ω; l, u, r — положительные целые числа, v_i — неотрицательные целые числа, $i = 1, 2, \ldots, l$. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_l)$, $v = (v_1, \ldots, v_l)$, $|v| = v_1 + \cdots + v_l$. Через D^v обозначен оператор $D^v = \partial^{|v|}/\partial x_1^{v_1} \ldots \partial x_l^{v_l}$.

Напомним определение пространства Соболева.

Определение 2.1. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, r — неотрицательное целое число, $1 \leq p \leq \infty$. Функция f *принадлежит пространству $W_p^r(\Omega)$ Соболева*, если она интегрируема в p-й степени на Ω вместе со своими обобщенными производными до порядка r включительно. Норма функции f вводится равенством

$$\|f\|_{W_p^r(\Omega)} = \Big\{ \|f\|^p_{L_p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=r} \|D^\alpha f\|^p_{L_p(\Omega)} \Big\}^{1/p},$$

где $D^\alpha f$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_l$, $0 \leq \alpha_i \leq |\alpha|$, обозначает любую обобщенную производную от f порядка r и сумма распространяется на все такие производные. Здесь $\|f\|_{L_p(\Omega)} = \big(\int\limits_\Omega |f|^p \, d\Omega \big)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$, и $\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \sup\limits_{x\in\Omega} \operatorname{vrai}|f(x)|$.

Пусть u — неотрицательное целое число, γ — положительное вещественное число. Для $x \in \Omega$ введем весовые функции

$$\rho_{\gamma,u}(x) = \begin{cases} (d(x,\Gamma))^\gamma (1 + |\ln^u d(x,\Gamma)|)^{-1} & \text{при } x \in \Omega\backslash\Gamma, \\ 0 & \text{при } x \in \Gamma, \end{cases}$$

где $\Gamma = \partial\Omega$, $d(x,\Gamma) = \min\limits_{1\leq i\leq l} \min(|x_i + 1|, |1 - x_i|)$.

Определение 2.2. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, s, u — неотрицательные целые числа, γ ($\gamma < s$) — положительное вещественное число, $1 \le p \le \infty$. Функция f *принадлежит весовому пространству Соболева* $W_p^s(\Omega, \rho_{\gamma,u})$ с весом $\rho_{\gamma,u}(x)$, если произведение функций $(D^\alpha f(x))\rho_{\gamma,u}(x)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_l$, интегрируемо в p-й степени на Ω. Норма в $W_p^s(\Omega, \rho_{\gamma,u})$ определяется равенством

$$\|f\|_{W_p^s(\Omega,\rho_{\gamma,u})} = \left\{ \|f\rho_{\gamma,u}\|^p_{L_p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=s} \|(D^\alpha f)\rho_{\gamma,u}\|^p_{L_p(\Omega)} \right\}^{1/p}.$$

Здесь $D^\alpha f$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_l$, $0 \le \alpha_i \le |\alpha|$, обозначает любую обобщенную производную от f порядка s и сумма распространяется на все такие производные.

Частными случаями пространства $W_\infty^s(\Omega, \rho_{\gamma,u})$ являются множества функций $\overline{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $0 < M = \mathrm{const} < \infty$, $s = r + \lceil \gamma \rceil$, определения которых даны ниже.

Ниже будут построены оптимальные по порядку квадратурные и кубатурные формулы вычисления интегралов на классах $Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\overline{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M)$, которые являются частными случаями весовых пространств Соболева $W_\infty^s(\Omega, \rho_{\gamma,u})$ с нормой, введенной равенством

$$\|f\|_{W_\infty^s(\Omega,\rho_{\gamma,u})} = \sup_{x\in\Omega} \mathrm{vrai} |f(x)\rho_{\gamma,u}(x)| + \sum_{|\alpha|=s} \sup_{x\in\Omega} \mathrm{vrai} |(D^\alpha f(x))\rho_{\gamma,u}(x)|.$$

Выбор этих классов функций обусловлен двумя обстоятельствами. Во-первых, тем, что сингулярные и гиперсингулярные интегралы с переменными особенностями, а также решения эллиптических, слабосингулярных, сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений принадлежат этим классам функций. Во-вторых, тем, что постановка задачи вычисления поперечников и построения наилучших методов приближения сформулирована в [13] в терминах класса функций $Q_r(\Omega, 1)$.

Определение 2.3 [6]. Пусть r — натуральное число. *Класс* $W^{(r)}(M; a, b)$ состоит из функций, заданных на отрезке $[a, b]$, непрерывных и имеющих непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно и кусочно непрерывную производную r-го порядка, удовлетворяющую на этом отрезке неравенству $|f^{(r)}| \le M$.

Определение 2.4. Пусть r — натуральное число, $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 2, 3, \dots$. *Класс* $W^{(r)}(M, \Omega)$ состоит из функций f, заданных на кубе Ω, непрерывных и имеющих непрерывные частные производные $D^{r-1} f$ и кусочно непрерывные частные производные $D^r f$, удовлетворяющие на Ω неравенству $\|D^r f\|_{C(\Omega} \le M$.

Замечание. Здесь под $D^{r-1} f$ и $D^r f$ понимаются все частные производные порядка $r-1$ и r соответственно.

В [13] введен класс функций $Q_r(\Omega, M)$. Приводимые ниже классы функций $Q^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$ и $\overline{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, M)$ являются обобщениями класса $Q_r(\Omega, M)$.

Определение 2.5. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 1, 2, \dots$. Функция $\varphi(x)$, $x = (x_1 \dots, x_l)$, *принадлежит классу* $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, если выполнены следующие условия:

$$\max_{x\in\Omega} |D^v \varphi(x)| \le M \quad \text{при } 0 \le |v| \le r,$$

$$|D^v\varphi(x)| \le M/(d(x,\Gamma))^{|v|-r-\zeta},\ x\in\Omega\setminus\Gamma,\quad \text{при } r<|v|\le s,$$

где $d(x,\Gamma)$ — расстояние от точки x до границы Γ области Ω, вычисляемое по формуле $d(x,\Gamma)=\min\limits_{1\le i\le l}\min(|1+x_i|,|1-x_i|)$, $s=r+[\gamma]+1$, $\gamma=[\gamma]+\mu$, $0<\mu<1$, $\zeta=1-\mu$ при нецелом γ, $s=r+\gamma$ при целом γ.

Определение 2.6. Пусть $\Omega=[-1,1]^l$, $l=1,2,\dots,$ γ, r и u — неотрицательные целые числа, $s=r+\gamma$. *Множество* $\overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega,M)$ состоит из функций $\varphi(x)$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_l)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\max_{x\in\Omega}|D^v\varphi(x)|\le M\quad \text{при } 0\le|v|\le r-1,$$

$$|D^v\varphi(x)|\le M(1+|\ln^u d(x,\Gamma)|),\ x\in\Omega\setminus\Gamma,\quad \text{при } |v|=r,$$

$$|D^v\varphi(x)|\le M(1+|\ln^{u-1} d(x,\Gamma)|)/(d(x,\Gamma))^{|v|-r},\ x\in\Omega\setminus\Gamma,\quad \text{при } r<|v|\le s.$$

Определение 2.7. Пусть $\Omega=[-1,1]^l$, $l=1,2,\dots,u$ — натуральное число, γ — нецелое число. *Класс* $Q^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$ состоит из функций, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\max_{x\in\Omega}|D^v\varphi(x)|\le M\quad \text{при } 0\le|v|\le r,$$

$$|D^v\varphi(x)|\le M(1+|\ln^u d(x,\Gamma)|)/(d(x,\Gamma))^{|v|-r-\zeta},\ x\in\Omega\setminus\Gamma,\quad \text{при } r<|v|\le s,$$

где $s=r+[\gamma]+1$, $\gamma=[\gamma]+\mu$, $0<\mu<1$, $\zeta=1-\mu$.

Пусть $\Delta=[a,b]$, $c\in[a,b]$, $f(x)\in W^{(r)}(M,\Delta)$. Через $T_r(f,\Delta,c)$ обозначен отрезок ряда Тейлора $T_r(f,\Delta,c)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\dots+\frac{f^{(r)}(c)}{r!}(x-c)^r$. В данной работе используется формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме [6]:

$$f(x)=f(c)+\frac{x-c}{1!}f'(c)+\frac{(x-c)^2}{2!}f''(c)+\dots+\frac{(x-c)^{r-1}}{(r-1)!}f^{r-1}(c)+R_r(x),$$

где $R_r(x)=\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_a^t(x-t)^{r-1}f^{(r)}(t)\,dt$.

Пусть $\Delta=[a_1,b_1;\dots;a_l,b_l]$, $l=2,3,\dots,$ $c=(c_1,\dots,c_l)\in\Delta$, $f(x_1,\dots,x_l)\in W^{(r)}(M,\Delta)$.

Через $T_r(f,\Delta,c)$ обозначим отрезок ряда Тейлора

$$T_r(f,\Delta,c)=f(c)+\frac{1}{1!}df(c)+\frac{1}{2!}d^2f(c)+\dots+\frac{1}{r!}d^rf(c),$$

где

$$d^kf(c)=\sum C_{k_1,\dots,k_l}\left.\frac{\partial^k f(x)}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_l^{k_l}}\right|_{x=c}(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\dots(x-c_l)^{k_l},$$

$k=k_1+\dots+k_l$, $0\le k_i\le k$, $i=1,2,\dots,l$, $C_{k_1,\dots,k_l}=\frac{k!}{k_1!\dots k_l!}$.

Пусть $x,x^0\in\Delta$. Мы будем использовать формулу Тейлора для функций многих переменных с остаточным членом в интегральной форме [16]:

$$f(x)=\sum_{k=0}^r\frac{1}{k!}\sum_{j_1=1}^l\cdots\sum_{j_k=1}^l\left(x_{j_1}-x^0_{j_1}\right)\dots\left(x_{j_k}-x^0_{j_k}\right)\frac{\partial^kf(x^0)}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_k}}+R_{r+1}(x),\quad (2.1)$$

$$R_{r+1}(x)=(r+1)\sum_{|k|=r+1}\frac{(x-x^0)^k}{k!}\int\limits_0^1(1-u)^rf^{(k)}(x^0+u(x-x^0))\,du.\qquad (2.2)$$

3. Квадратурные формулы

Рассмотрим интеграл

$$J\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(\tau)\, d\tau, \tag{3.1}$$

определенный на классах функций $\overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, 1)$, $Q^u_{r\gamma}(\Omega, 1)$, $\Omega = [-1, 1]$.

Интеграл (3.1) будем вычислять по квадратурным формулам вида

$$\int\limits_{-1}^{1} \varphi(\tau)\, d\tau = \sum_{k=-N}^{N} \sum_{j=0}^{\rho_k} p_{kj} \varphi^{(j)}(t_k) + R_n(t_k, p_{kj}, \varphi), \tag{3.2}$$

где $-1 < t_{-N} < \cdots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \cdots \le t_N < 1$, $0 \le \rho_k \le s$, $s = r + \lceil \gamma \rceil$.

Здесь n $\left(n = \sum\limits_{k=-N}^{N} \sum\limits_{j=0}^{\rho_k} 1\right)$ — число узлов квадратурной формулы (с учетом их кратности).

Теорема 3.1. *Пусть* $\Psi = \overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, 1)$, $\Omega = [-1, 1]$, $u = 1, 2, \ldots$. *Для квадратурных формул вида* (3.2) *справедлива оценка*

$$\zeta_n \left[\overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, 1) \right] \ge C n^{-s}. \tag{3.3}$$

Замечание. Здесь и ниже через C обозначены константы, не зависящие от N, n и подынтегральных функций.

Доказательство. Пусть $\Psi = \overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, 1)$, $\Omega = [-1, 1]$, $u = 1, 2, \ldots$. Оценим снизу величину функционала $\zeta_n[\Psi]$. Нетрудно видеть, что класс функций $Q_{r\gamma}(\Omega, 1)$ вложен в класс $\overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, 1)$. В [12] получена оценка $\zeta_n[Q_{r\gamma}(\Omega, 1)] \ge C n^{-s}$. Следовательно, $\zeta_n \left[\overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, 1) \right] \ge C n^{-s}$ при $u = 1, 2, \ldots$.

Построим оптимальные по порядку квадратурные формулы. Введем узлы $x^1_k = -1 + (k/N)^v$, $x^2_k = 1 - (k/N)^v$, $k = 0, 1, \ldots, N$, $v = (s+1)/(r+1)$ и сегменты $\Delta^1_k = \left[x^1_k, x^1_{k+1}\right]$, $\Delta^2_k = \left[x^2_{k+1}, x^2_k\right]$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Пусть $h^i_k = \left| x^i_{k+1} - x^i_k \right|$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Введем константы $M_0 = \lceil \ln N \rceil$, $M_k = 1$, $k = 1, \ldots, N-1$, при $u = 1$ и $M_0 = \lceil \ln^{u/r} N \rceil$, $M_k = \lceil \ln^{(u-1)/(s+1)}(N/k) \rceil$, $k = 1, \ldots, N-1$, при $u \ge 2$. Разделим каждый сегмент Δ^i_k на M_k равных сегментов и обозначим последние через $\Delta^i_{k,j}$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1, \ldots, M_k - 1$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Пусть $f \in C[a, b]$. Обозначим через $\zeta_1, \ldots, \zeta_s$ узлы полинома Лежандра s-го порядка. Обозначим через ζ'_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, образы узлов ζ_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, полученные при аффинном отображении сегмента $[-1, 1]$ на $[a, b]$. Через $P_s(f, [a, b])$ обозначим полином, интерполирующий функцию $f \in C[a, b]$ на сегменте $[a, b]$ по узлам ζ'_i, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Будем аппроксимировать $\varphi \in \overline{Q}^u_{r,\gamma}(\Omega, 1)$ в каждом сегменте $\Delta^i_{k,j}$ интерполяционным полиномом $P_s\left(\varphi, \Delta^i_{k,j}\right)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1, \ldots, M_k - 1$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Обозначим через φ_N сплайн, составленный из полиномов $P_s\left(\varphi, \Delta^i_{k,j}\right)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1, \ldots, M_k - 1$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Интеграл (3.1) будем вычислять по квадратурной формуле

$$\int\limits_{-1}^{1} \varphi(\tau)\, d\tau = \int\limits_{-1}^{1} \varphi_N(\tau)\, d\tau + R_n(\varphi), \tag{3.4}$$

где n — число узлов квадратурной формулы (3.4).

Оценим погрешность квадратурной формулы (3.4). Очевидно, что

$$|R_n(\varphi)| \le \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{M_k-1} \int\limits_{\Delta^j_{k,i}} |\varphi(\tau) - \varphi_N(\tau)|\, d\tau. \tag{3.5}$$

Так как правая часть предыдущего неравенства одинаково оценивается при $j = 1$ и $j = 2$, ограничимся суммой с индексом $j = 1$.

Оценим интеграл

$$\int\limits_{\Delta^1_{0,i}} |\varphi(\tau) - \varphi_N(\tau)|\, d\tau \le E_{s-1}\big(\varphi, \Delta^1_{0,i}\big)(1 + \lambda_s) h^1_{0,i}, \quad i = 0, 1, \dots, M_0 - 1. \tag{3.6}$$

Здесь через $E_s(\varphi, [a, b])$ обозначено наилучшее приближение в равномерной метрике функции φ на сегменте $[a, b]$ полиномами степени s; через λ_s обозначена константа Лебега по узлам ζ'_i $(i = 1, 2, \dots, s)$, полученным при отображении узлов ζ_i $(i = 1, 2, \dots, s)$ полинома Лежандра с сегмента $[-1, 1]$ на сегмент $[a, b]$, $h^1_{0,l} = h_0/M_0$.

Очевидно, что

$$\begin{aligned} E_{s-1}\big(\varphi, \Delta^1_{0,i}\big) &\le \big\|\varphi - T_{r-1}\big(\varphi, \Delta^1_{0,i}, x^1_{0,i}\big)\big\|_{C(\Delta^1_{0,i})} \\ &\le \frac{1}{(r-1)!} \max_{t \in \Delta^1_{0,i}} \left| \int\limits_{x^1_{0,i}}^{t} \varphi^{(r)}(\tau)(t - \tau)^{r-1}\, d\tau \right| \\ \le \frac{1}{(r-1)!} \max_{t \in \Delta^1_{0,i}} &\left| \int\limits_{x^1_{0,i}}^{t} (1 + |\ln^u(1 + \tau)|)(t - \tau)^{r-1}\, d\tau \right| \le C\big(h^1_{0,i}\big)^r \big|\ln^u h^1_{0,i}\big|. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Из неравенств (3.6), (3.7) следует, что

$$\int\limits_{\Delta^1_{0,i}} |\varphi(\tau) - \varphi_N(\tau)|\, d\tau \le C\big(h^1_{0,i}\big)^{r+1} \big|\ln^u h^1_{0,i}\big| \le \frac{C}{N^{s+1}}.$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{2} \sum_{i=0}^{M_0-1} \int\limits_{\Delta^j_{0,i}} |\varphi(\tau) - \varphi_N(\tau)|\, d\tau \le \frac{C}{N^s}. \tag{3.8}$$

Пусть $1 \le k \le N - 1$. Оценим интеграл

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Delta^1_{k,i}} |\varphi(\tau) - \varphi_N(\tau)|\, d\tau &= \int\limits_{\Delta^1_{k,i}} \big|\varphi(\tau) - P_s\big(\varphi, \Delta^1_{k,i}\big)\big|\, d\tau \\ &\le E_{s-1}\big(\varphi, \Delta^1_{k,i}\big)(1 + \lambda_s) h^1_{ki} \le \frac{C(h^1_{ki})^{s+1}}{s!} \left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma} \left(1 + \left|\ln^{u-1}\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma}\right|\right) \\ \le C\Bigg(\Bigg(\left(\frac{k+1}{N}\right)^v &- \left(\frac{k}{N}\right)^v\Bigg) \frac{1}{\big(\ln \frac{N}{k}\big)^{(u-1)/(s+1)}}\Bigg)^{s+1} \left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma} \left(1 + \ln^{u-1} \frac{N}{k}\right) \\ &\le C \frac{(k + \theta)^{(v-1)(s+1)}}{k^{v\gamma}} \frac{1}{N^{s+1}} = \frac{C}{N^{s+1}}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует, что

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{i=0}^{M_k-1}\int\limits_{\Delta_{k,i}^{j}}|\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)|\,d\tau\le\frac{C}{N^{s+1}}\sum_{k=1}^{N-1}M_k\le\frac{C}{N^s}. \tag{3.9}$$

Из (3.8), (3.9) имеем $|R_N(\varphi)|\le\frac{C}{N^s}$.

Так как φ — произвольная функция из класса $\overline{Q}_{r\gamma}^{u}(\Omega,1)$, то

$$R_n\bigl[\overline{Q}_{r\gamma}^{u}(\Omega,1)\bigr]\le\frac{C}{N^s}. \tag{3.10}$$

Поскольку в каждом сегменте $\Delta_{k,j}^{i}$, $i=1,2$, $j=0,1,\dots,M_k-1$, $k=0,1,\dots,$ $N-1$, используется s узлов квадратурной формулы (3.4), общее число n узлов квадратурной формулы (3.4) равно

$$n=\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M_k-1}s=CN. \tag{3.11}$$

Таким образом, из (3.10) и (3.11) следует оценка

$$R_n\bigl[\overline{Q}_{r\gamma}^{u}(\Omega,1)\bigr]\le\frac{C}{n^s}. \tag{3.12}$$

Из сопоставления неравенства (3.3) и оценки (3.12) вытекает

Теорема 3.2. *Пусть* $\Psi=\overline{Q}_{r\gamma}^{u}(\Omega,1)$, $\Omega=[-1,1]$. *Среди множества квадратурных формул вида* (3.2) *формула* (3.4) *оптимальная по порядку по точности. Ее погрешность равна* $R_n[\Psi]\asymp Cn^{-s}$.

Построим оптимальные квадратурные формулы вычисления интеграла (3.1) на классе функций $Q_{r\gamma}^{u}(\Omega,1)$, $\Omega=[-1,1]$.

Теорема 3.3. *Пусть* $\Psi=Q_{r\gamma}^{u}(\Omega,1)$, $\Omega=[-1,1]$. *Для квадратурных формул вида* (3.2) *справедлива оценка* $\zeta_n[\Psi]\ge Cn^{-s}$.

Доказательство подобно доказательству теоремы 3.1, поэтому опускается.

Построим оптимальную по порядку квадратурную формулу для вычисления интеграла (3.1). Как и при доказательстве теоремы 3.2, разобьем сегмент $[-1,1]$ на более мелкие сегменты Δ_{kj}^{1} и Δ_{kj}^{2}, $j=0,1,\dots,M_k-1$, $k=0,1,\dots,N-1$. Здесь $M_0=\lceil\ln^{u/(r+2-\mu)}N\rceil$, $M_k=\lceil\ln^{u/(s+1)}\frac{N}{k}\rceil$, $k=1,\dots,N-1$, $\mu=1-\zeta$, $v=(s+1)/(s+1-\gamma)$.

Будем аппроксимировать функцию $\varphi(t)$ на сегменте $[-1,1]$ сплайном $\varphi_N(t)$, составленным из полиномов $P_s(\varphi,\Delta_{kj}^{i})$, $i=1,2$, $j=0,1,\dots,M_k-1$, $k=0,1,\dots,N-1$.

Интеграл (3.1) будем вычислять по квадратурной формуле

$$\int\limits_{-1}^{1}\varphi(\tau)\,d\tau=\int\limits_{-1}^{1}\varphi_N(\tau)\,d\tau+R_n(\varphi). \tag{3.13}$$

Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 3.2, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.4. *Пусть* $\Psi=Q_{r\gamma}^{u}(\Omega,1)$, $\Omega=[-1,1]$, $u=1,2,\dots.$ *Среди квадратурных формул вида* (3.2) *оптимальной по порядку является формула* (3.13). *Справедлива оценка* $R_n(\Psi)\asymp n^{-s}$.

4. Приближенные методы вычисления многомерных интегралов на классах функций $\overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, 1)$, $Q^u_{r\gamma}(\Omega, 1)$, $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 2, 3, \dots$

Рассмотрим интеграл

$$L\varphi \equiv \int_{\Omega}\!\cdots\!\int \varphi(\tau_1, \dots, \tau_l)\, d\tau_1 \dots d\tau_l, \tag{4.1}$$

которому сопоставим кубатурные формулы вида

$$L\varphi = \sum_{k_1=1}^{N} \cdots \sum_{k_l=1}^{N} p_{k_1,\dots,k_l} \varphi(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}) + R_n(t_{k_1}, \dots, t_{k_l}; p_{k_1,\dots,k_l}; \varphi). \tag{4.2}$$

Построим кубатурную формулу вычисления интеграла $L\varphi$ на классе функций $\overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, 1)$, $u = 1, 2, \dots$. Обозначим через Δ^k множество точек $\Delta^k = \big\{t \in \Omega : \big(\frac{k}{N}\big)^v \le d(t, \Gamma) \le \big(\frac{k+1}{N}\big)^v,\ k = 0, 1, \dots, N-1\big\}$, $v = (s+l)/(s+l-\gamma)$, где $d(t, \Gamma)$ дано в определении 2.5.

Покроем области Δ^k кубами и параллелепипедами $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, ребра которых параллельны координатным осям и длины ребер которых не меньше h_k и не больше $2h_k$, $h_k = ((k+1)/N)^v - (k/N)^v$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Пусть $M_0 = \lceil (\ln N)^{u/(r+l)} \rceil$, $M_k = \lceil (\ln(N/k))^{(u-1)/(s+l)} \rceil$, $k = 1, 2, \dots, N-1$. Разделим каждое из ребер $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ на M_k равных частей и через точки деления проведем плоскости, параллельные координатным плоскостям. Кубы и параллелепипеды, полученные в результате деления, обозначим через $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}$.

В разд. 3 был введен полином $P_s(f, [a, b])$, интерполирующий функцию f на сегменте $[a, b]$ по s узлам. Для функции $f(t_1, \dots, t_l) \in C(\Omega)$ построим полином $P_{s,\dots,s}(f; [a_1, b_1; \dots; a_l, b_l])$, интерполирующий функцию f в области $[a_1, b_1; \dots; a_l, b_l]$ и определяемый выражением

$$P_{s,\dots,s}(f; [a_1, b_1; \dots; a_l, b_l]) = P^{t_1}_s\big(P^{t_2}_s\big(\dots P^{t_l}_s(f; [a_l, b_l]); \dots; [a_1, b_1]\big)\big).$$

Этот полином имеет порядок $s-1$ по каждой переменной. Другими словами, $P^{t_l}_s(f; [a_l, b_l])$ интерполирует функцию f в сегменте $[a_l, b_l]$, $P^{t_{l-1}}_s(P^{t_l}_s(f; [a_l, b_l]); [a_{l-1}, b_{l-1}])$ интерполирует функцию $P^{t_l}_s(f; [a_l, b_l])$ в сегменте $[a_{l-1}, b_{l-1}]$ по переменной t_{l-1}, и т. д. Полином $P_{s,\dots,s}\big(\varphi, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}\big)$ интерполирует функцию $\varphi(t_1, \dots, t_l)$ в области $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}$. Сплайн $\varphi_N(t_1, \dots, t_l)$ составлен из полиномов $P_{s,\dots,s}\big(\varphi, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}\big)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Интеграл (4.1) будем вычислять по кубатурной формуле

$$L\varphi = \int_{\Omega}\!\cdots\!\int \varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_l)\, d\tau_1 \dots d\tau_l + R_n(\varphi), \tag{4.3}$$

где n — число узлов, используемых при построении кубатурной формулы (4.3).

Теорема 4.1. *Пусть $\Psi = \overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, 1)$, $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 2, 3, \dots$, $u = 1, 2, \dots$, $v = (s+l)/(s+l-\gamma)$, $v < l/(l-1)$. Среди кубатурных формул вида (4.2) оптимальной по порядку является формула (4.3) с погрешностью $R_n[\Psi] \asymp n^{-s/l}$, где n — число узлов кубатурной формулы (4.3).*

Доказательство. Оценим погрешность кубатурной формулы (4.3). Пусть $\psi^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}(\tau_1,\dots,\tau_l)=\varphi(\tau_1,\dots,\tau_l)-P_{s,\dots,s}\big(\varphi;\Delta^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}\big)$. Очевидно, что

$$|R_n(\varphi)|\le \int\underset{\Omega}{\cdots}\int|\varphi(\tau_1,\dots,\tau_l)-\varphi_N(\tau_1,\dots,\tau_l)|\,d\tau_1\dots d\tau_l$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i_1,\dots,i_l}\sum_{j_1,\dots,j_l}\int\underset{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}}{\cdots}\int\big|\psi^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}(\tau_1,\dots,\tau_l)\big|\,d\tau_1\dots d\tau_l. \quad (4.4)$$

Оценим слагаемое

$$\int\underset{\Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}}{\cdots}\int\big|\psi^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}(\tau_1,\dots,\tau_l)\big|\,d\tau_1\dots d\tau_l$$

$$\le CE_{r-1,\dots,r-1}\big(\varphi,\Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}\big)\lambda^l_s\big(h^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}\big)^l,$$

где $h^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}=\big(\frac{1}{N}\big)^v\frac{1}{M_0}$, $E_{r,\dots,r}\big(\varphi,\Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}\big)$ — наилучшее приближение в равномерной метрике $C\big(\Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}\big)$ функции $\varphi(t_1,\dots,t_l)$ полиномами степени r по каждой переменной.

Для оценки $E_{r-1,\dots,r-1}\big(\varphi,\Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}\big)$ воспользуемся формулой Тейлора (2.1), (2.2).

Если t и t^0 принадлежат области $\Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}$, имеющей непустое пересечение с границей $\Gamma=\partial\Omega$, причем $t^0\in\Gamma$, то $d(t^0+\tau(t-t^0),\Gamma)\le h^0_{0,\dots,0;0,\dots,0}=h_0/M_0$, где $h_0=N^{-v}$, $0\le\tau\le1$. Так как $|\varphi^{(r)}(t^0+\tau(t-t^0))|\le 1+|\ln^u d(t^0+\tau(t-t^0),\Gamma)|$, то

$$E_{r-1,\dots,r-1}\big(\varphi,\Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}\big)$$

$$\le C\max_{t,t^0\in\Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}}\sum_{|k|=r}\frac{|(t-t^0)^k|}{k!}\int_0^1(1-\tau)^{r-1}(1+|\ln^u d(t^0+\tau(t-t^0),\Gamma)|)d\tau$$

$$\le C(h_{0,0,\dots,0,0,\dots,0})^r|\ln^u h_{0,0,\dots,0,0,\dots,0}|.$$

Отсюда следует, что

$$\int\underset{\Delta^0_{0,\dots,0;0,\dots,0}}{\cdots}\int\big|\varphi(\tau_1,\dots,\tau_l)-P_{s,\dots,s}\big(\varphi;\Delta^0_{0,\dots,0;0,\dots,0}\big)\big|\,d\tau_1\dots d\tau_l$$

$$\le C\big(h^0_{0,\dots,0;0,\dots,0}\big)^{r+l}|\ln^u h_{0,\dots,0;0,\dots,0}|\le C\frac{1}{N^{s+l}}. \quad (4.5)$$

Аналогичная оценка справедлива для всех областей $\Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}$.

Оценим при $1\le k\le N-1$ интеграл

$$\int\underset{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}}{\cdots}\int\big|\varphi(\tau_1,\dots,\tau_l)-P_{s,\dots,s}\big(\varphi;\Delta^k_{i_1,\dots,i_l,j_1,\dots,j_l}\big)\big|\,d\tau_1\dots d\tau_l$$

$$\le C\left(\left(\left(\frac{k+1}{N}\right)^v-\left(\frac{k}{N}\right)^v\right)\frac{1}{\big(\ln\frac{N}{k}\big)^{(u-1)/(s+l)}}\right)^{s+l}\frac{\big(1+\big|\ln\big(\frac{k+1}{N}\big)^v\big|\big)^{u-1}}{\big(\frac{k}{N}\big)^{v\gamma}}$$

$$\le\frac{C}{N^{s+l}}. \quad (4.6)$$

Из неравенств (4.4)–(4.6) следует оценка

$$|R_n(\varphi)| \leq \frac{Cm}{N^{s+l}}, \tag{4.7}$$

где m — число областей $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l,j_1,\ldots,j_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Оценим число m областей $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, покрывающих куб Ω:

$$\begin{aligned} m &\asymp \left(\beta \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{2 - 2\left(\frac{k}{N}\right)^v}{\left(\frac{k+1}{N}\right)^v - \left(\frac{k}{N}\right)^v}\right)^{l-1} M_k^l + \beta N^{v(l-1)} [\ln N]^{lu/(r+l)}\right) \\ &\asymp N^{v(l-1)} (\ln N)^{lu/(r+l)} + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{2N^v - 2k^v}{v(k+\theta)^{v-1}}\right)^{l-1} \left(1 + \left(\ln \frac{N}{k}\right)^{\frac{u-1}{s+l}}\right)^l \\ &\asymp N^{v(l-1)} (\ln N)^{lu/(r+l)} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{N^{v(l-1)}}{k^{(v-1)(l-1)}} \left(\left(\ln \frac{N}{k}\right)^{\frac{(u-1)l}{s+l}} + 1\right) \asymp N^l, \end{aligned}$$

где β — число граней куба Ω.

В каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, используется s^l узлов кубатурной формулы (4.3). Таким образом, при построении кубатурной формулы (4.3) используется $n = CN^l$ узлов. Отсюда и из (4.7) следует, что при $v < l/(l-1)$ имеем $R_n(\varphi) \leq Cn^{-s/l}$, и так как φ — произвольная функция из класса $\overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, 1)$, справедлива оценка

$$R_n\left[\overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, 1)\right] \leq Cn^{-s/l}. \tag{4.8}$$

Оценим снизу функционал $\zeta_n\left[\overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, 1)\right]$. Известно [12], что для кубатурных формул вида (4.2) на классе функций $Q_{r\gamma}(\Omega, 1)$, $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 2, 3, \ldots$ справедлива оценка $\zeta_n(Q_{r\gamma}(\Omega, 1)) \geq Cn^{-s/l}$. Так как класс функций $Q_{r\gamma}(\Omega, 1)$ вложен в класс функций $\overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, 1)$, справедливо неравенство

$$\zeta_n\left[\overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, 1)\right] \geq Cn^{-s/l}. \tag{4.9}$$

Из сопоставления оценок (4.8) и (4.9) следует справедливость теоремы 4.1.

Теорема 4.2. *Пусть* $\Psi = \overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, 1)$, $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 2, 3, \ldots$, $u = 1, 2, \ldots$, $v = (s+l)/(s+l-\gamma) = l/(l-1)$. *Среди всевозможных кубатурных формул вида* (4.2) *формула* (4.3) *является оптимальной по порядку. Ее погрешность равна*

$$R_n[\Psi] \asymp \begin{cases} \frac{(\ln n)^{(l+s)u/(r+l)}}{n^{s/l}}, & \frac{lu}{r+l} \geq 1 + \frac{l(u-1)}{s+l}, \\ \frac{(\ln n)^{u+s/l}}{n^{s/l}}, & \frac{lu}{r+l} < 1 + \frac{l(u-1)}{s+l}. \end{cases}$$

Доказательство. При $v = l/(l-1)$ погрешность кубатурной формулы (4.3) оценивается точно так же, как при $v < l/(l-1)$:

$$R_n[\Psi] \leq m\frac{Cs^l}{N^{s+l}}, \tag{4.10}$$

где m — число областей $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Оценим число m областей $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l}$, осуществляющих покрытие куба Ω:

$$m \asymp \left(\beta \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{2-2\left(\frac{k}{N}\right)^v}{\left(\frac{k+1}{N}\right)^v - \left(\frac{k}{N}\right)^v}\right)^{l-1} M_k^l + \beta N^{v(l-1)} [\ln N]^{lu/(r+l)}\right)$$

$$\asymp N^l (\ln N)^{lu/(r+l)} + \frac{N^l}{N^{(v-1)(l-1)}} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{N}{k}\right)^{(v-1)(l-1)} \left(\ln \frac{N}{k}\right)^{l(u-1)/(s+l)}$$

$$\asymp N^l (\ln N)^{lu/(r+l)} + N^l (\ln N)^{l(u-1)/(s+l)} + N^{l-1} \int_1^N \frac{N}{x} \left(\ln \frac{N}{x}\right)^{l(u-1)/(s+l)} dx$$

$$\asymp N^l (\ln N)^{lu/(r+l)} + N^l (\ln N)^{l(u-1)/(s+l)+1}$$

$$\asymp \begin{cases} N^l (\ln N)^{lu/(r+l)}, & lu/(r+l) \geq 1 + l(u-1)/(s+l), \\ N^l (\ln N)^{1+l(u-1)/(s+l)}, & lu/(r+l) \leq 1 + l(u-1)/(s+l). \end{cases} \qquad (4.11)$$

Воспользовавшись последним соотношением, выразим N через m:

$$N \asymp \begin{cases} m^{1/l} (\ln m)^{-u/(r+l)}, & lu/(r+l) \geq 1 + l(u-1)/(s+l), \\ m^{1/l} (\ln m)^{-1/l-(u-1)/(s+l)}, & lu/(r+l) \leq 1 + l(u-1)/(s+l). \end{cases} \qquad (4.12)$$

Так как в каждой области $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, используется s^l узлов кубатурной формулы, общее число n узлов кубатурной формулы (4.3) равно $n = Cm$ и, следовательно,

$$R_n(\varphi) \leq C \begin{cases} (\ln n)^{(l+s)u/(r+l)}/n^{s/l}, & lu/(r+l) \geq 1 + l(u-1)/(s+l), \\ (\ln n)^{u+s/l}/n^{s/l}, & lu/(r+l) \leq 1 + l(u-1)/(s+l). \end{cases}$$

Поскольку φ — произвольная функция из $\overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, 1)$, при $v = l/(l-1)$

$$R_n\left[\overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, 1)\right] \leq C \begin{cases} (\ln n)^{(l+s)u/(r+l)}/n^{s/l}, & lu/(r+l) \geq 1 + l(u-1)/(s+l), \\ (\ln n)^{u+s/l}/n^{s/l}, & lu/(r+l) \leq 1 + l(u-1)/(s+l). \end{cases} \qquad (4.13)$$

Оценим снизу функционал $\zeta_n\left[\overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, 1)\right]$. По аналогии с тем, как это было сделано выше, положим $M_0 = \lceil (\ln N_*)^{u/(r+l)} \rceil$, $M_k = \lceil \ln(N_*/k)^{(u-1)/(s+l)} \rceil$ и покроем куб Ω областями $\overline{\Delta}^k_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N_* - 1$. Здесь N_* выбирается таким образом, чтобы число m_* областей $\overline{\Delta}^k_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N_* - 1$, удовлетворяло неравенству $2N^l \leq m_* \leq qN^l$, где q — наименьшее число, при котором неравенство выполняется. Напомним, что N^l — это число узлов кубатурной формулы (4.2). Из оценки (4.12) следует, что это всегда осуществимо при достаточно больших значениях N_*. Оценим значение N_*, при котором $m_* \geq 2N^l$.

Нетрудно видеть, что для того, чтобы $m_* \geq 2N^l$, достаточно выбрать $N_* \asymp N/(\ln N)^{u/(r+l)}$ при $lu/(r+l) \geq 1 + l(u+1)/(s+1)$ и $N_* \asymp N/(\ln N)^{(u-1)/(s+l)+1/l}$ при $lu/(r+l) < 1 + l(u+1)/(s+1)$.

Так как в построении кубатурной формулы (4.2) участвует N^l узлов, не более чем в N^l областях $\overline{\Delta}^k_{i_1,\ldots,i_l;j_1,\ldots,j_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N_* - 1$, имеются узлы кубатурной формулы (4.2). Области $\overline{\Delta}^k_{i_1,\ldots,i_l}$, в которых нет узлов кубатурной формулы (4.2), назовем *отмеченными*. Таких областей не менее N^l.

Пусть $\overline{\Delta}^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l} = [b_{i_1,j_1}, b_{i_1,j+1};\dots;b_{i_1,j_l}, b_{i_1,j_l+1}]$ — отмеченная область. Введем функцию

$$\varphi^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}(t) = \begin{cases} A_k \frac{((t_1-b_{i_1,j_1})(b_{i_1,j_1+1}-t_1)\dots(t_l-b_{i_l,j_l})(b_{i_l,j_l+1}-t_l))^s}{(h_k/M_k)^{(2l-1)s}((k+1)/N_*)^{v\gamma}}\left(1+\left|\ln^{u-1}\left(\frac{k+1}{N_*}\right)^v\right|\right), \\ \qquad t \in \Delta^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}, \\ 0, \quad t \in \Omega \setminus \overline{\Delta}^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}, \end{cases}$$

$k = 0, 1, \dots, N_* - 2$.

Пусть $\overline{\Delta}^{N_*-1} = [b_{i_1}, b_{i_1+1};\dots;b_{i_l}, b_{i_1+1}]$. Введем функцию

$$\varphi^{N_*-1}(t) = \begin{cases} A_{N_*-1}\frac{((t_1-b_{i_1})(b_{i_1+1}-t_1)\dots(t_l-b_{i_l})(b_{i_l+1}-t_l))^s}{h^{(2l-1)s}_{N_*-1}}, & t \in \Delta^{N_*-1}, \\ 0, & t \in \Omega \setminus \overline{\Delta}^{N_*-1}, \end{cases}$$

где $h_k = ((k+1)/N_*)^v - (k/N_*)^v$, $k = 0, 1, \dots, N_*-1$. Константы A_k выбираются таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\left|D^s \varphi^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}\right| \le \frac{\left(1+\left|\ln^{u-1}\left(\frac{k+1}{N_*}\right)^v\right|\right)}{\left(\frac{k+1}{N_*}\right)^{v(s-r)}}, \quad |D^s \varphi^{N_*-1}| \le 1.$$

Построим функцию $\xi(t)$, равную $\varphi^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}(t)$, $k = 0, 1, \dots, N_* - 1$, $\varphi^{N_*-1}(t)$ в отмеченных областях $\overline{\Delta}^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}$ и нулю в неотмеченных областях. Погрешность кубатурной формулы (4.2) при любом наборе узлов и коэффициентов не меньше величины $\int\cdots\int_\Omega \xi(t)\,dt$.

Оценим эту величину. Нетрудно видеть, что

$$\int\cdots\int_{\overline{\Delta}^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}} \varphi^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}(t)\,dt \ge C\frac{1}{N_*^{s+l}}. \tag{4.14}$$

Следовательно,

$$\int\cdots\int_\Omega \xi(t)\,dt \ge C\frac{m_{\text{mark}}}{N_*^{s+l}},$$

где m_{mark} — число отмеченных областей $\overline{\Delta}^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}$, $k = 0, 1, \dots, N_* - 1$.

Число m_* областей $\overline{\Delta}^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}$, $k = 0, 1, \dots, N_*-1$, связано с параметром N_* формулой, аналогичной (4.11):

$$m_* \asymp \begin{cases} N_*^l(\ln N_*)^{lu/(r+l)}, & lu/(r+l) \ge 1 + (u-1)/(s+l), \\ N_*^l(\ln N_*)^{1+l(u-1)/(s+l)}, & lu/(r+l) \le 1 + (u-1)/(s+l). \end{cases}$$

Так как число m_{mark} отмеченных областей по построению не меньше N^l, а $m_* \ge 2N^l$, очевидно, что $\lceil \frac{m_*}{2} \rceil \le m_{\text{mark}} \le m_*$. Таким образом,

$$m_{\text{mark}} \asymp \begin{cases} N_*^l(\ln N_*)^{lu/(r+l)}, & lu/(r+l) \ge 1 + (u-1)/(s+l), \\ N_*^l(\ln N_*)^{1+l(u-1)/(s+l)}, & lu/(r+l) \le 1 + (u-1)/(s+l). \end{cases} \tag{4.15}$$

Из неравенств (4.14) и (4.15) следует, что

$$\int\cdots\int_\Omega \xi(t)\,dt \ge C\begin{cases} (\ln N_*)^{lu/(r+l)}/N_*^s, & lu/(r+l) \ge 1 + (u-1)/(s+l), \\ (\ln N_*)^{1+l(u-1)/(s+l)}/N_*^s, & lu/(r+l) \le 1 + l(u-1)/(s+l), \end{cases}$$

Отсюда, учитывая связь m_* и N_*, имеем

$$\int\limits_{\Omega}\cdots\int \xi(t)\,dt \geq C\begin{cases} (\ln m_*)^{(l+s)u/(r+l)}/m_*^{s/l}, & lu/(r+l)\geq 1+l(u-1)/(s+l),\\ (\ln m_*)^{u+s/l}/m_*^{s/l}, & lu/(r+l)\leq 1+l(u-1)/(s+l).\end{cases}$$

Обозначим через $n=N^l$ число узлов кубатурной формулы (4.2). Так как $qN^l\geq m_*\geq 2N^l$, то $n\geq m_*/q$. Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega}\cdots\int \xi(t)\,dt \geq C\begin{cases} (\ln n)^{(l+s)u/(r+l)}/n^{s/l}, & lu/(r+l)\geq 1+l(u-1)/(s+l),\\ (\ln n)^{u+s/l}/n^{s/l}, & lu/(r+l)\leq 1+l(u-1)/(s+l).\end{cases} \tag{4.16}$$

Из сопоставления неравенств (4.13) и (4.16) следует справедливость теоремы.

Приступим к построению кубатурных формул на классе функций $\overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega,1)$, $\Omega=[-1,1]^l$, $l=2,3,\dots$, при $v=(s+l)/(s+l-\gamma)>l/(l-1)$. Так же, как и при рассмотрении случая, когда $v\leq l/(l-1)$, покроем куб Ω областями Δ^k, $k=0,1,\dots,N-1$, которые, в свою очередь, покроем областями $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$. Нетрудно видеть, что число m областей $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, покрывающих Ω, равно

$$m\asymp N^{v(l-1)}. \tag{4.17}$$

Функцию φ в каждой области $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ будем аппроксимировать интерполяционным полиномом $P_{s,\dots,s}(\varphi,\Delta^k_{i_1,\dots,i_l})$. Сплайн, составленный из интерполяционных полиномов $P_{s,\dots,s}(\varphi,\Delta^k_{i_1,\dots,i_l})$, $k=0,1,\dots,N-1$, обозначим через φ_N.

Интеграл (4.1) будем вычислять по кубатурной формуле

$$L\varphi=\int\limits_{\Omega}\cdots\int \varphi_N(\tau)\,d\tau+R_n(\varphi), \tag{4.18}$$

где индекс n в функционале $R_n(\varphi)$ означает число узлов кубатурной формулы (4.18).

Оценим погрешность кубатурной формулы (4.18). Очевидно,

$$|R_n(\varphi)|\leq\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i_1,\dots,i_l}\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}}\cdots\int\bigl|\varphi(\tau)-P_{s,\dots,s}\bigl(\varphi;\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}\bigr)\bigr|\,d\tau. \tag{4.19}$$

Оценим в отдельности слагаемые из правой части неравенства (4.19) при $k=0$ и при $1\leq k\leq N-1$. При $1\leq k\leq N-1$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}}\cdots\int\bigl|\varphi(\tau)-P_{s,\dots,s}\bigl(\varphi,\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}\bigr)\bigr|\,d\tau &\leq Ch_k^{s+l}\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma}\left|\ln\left(\frac{k}{N}\right)^{v}\right|^{u-1}\\ &\leq C\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma}\left(\left(\frac{k+1}{N}\right)^{v}-\left(\frac{k}{N}\right)^{v}\right)^{s+l}\left|\ln\left(\frac{k}{N}\right)^{v}\right|^{u-1}\\ &\leq C\frac{1}{N^{s+l}}\frac{(k+\theta)^{(v-1)(s+l)}}{k^{v\gamma}}(\ln N)^{u-1}\leq\frac{1}{N^{s+l}}(\ln N)^{u-1}.\end{aligned} \tag{4.20}$$

При $k=0$

$$\int\limits_{\Delta^0_{i_1,\dots,i_l}}\cdots\int\bigl|\varphi(\tau)-P_{s,\dots,s}\bigl(\varphi,\Delta^0_{i_1,\dots,i_l}\bigr)\bigr|\,d\tau\leq CE_{s-1,\dots,s-1}\bigl(\varphi,\Delta^0_{i_1,\dots,i_l}\bigr)\lambda_s^l h_0^l, \tag{4.21}$$

где $h_0 = N^{-v}$.

Ограничимся рассмотрением области $\Delta^0_{0,\dots,0} = [-1, x_1; -1, x_1; \dots; -1, x_1]$, где $x_1 = -1 + N^{-v}$. Воспользовавшись формулой Тейлора (2.1), (2.2), имеем

$$\begin{aligned}
&\bigl\|E_{r-1,\dots,r-1}\bigl(f, \Delta^0_{0,\dots,0}\bigr)\bigr\| \\
&\le C \max_{t,t^0 \in \Delta^0_{0,\dots,0}} \left| \sum_{|k|=r} \frac{1}{k!} \int\limits_0^1 (1-\tau)^{r-1}(t-t^0)^k (1 + |\ln^u d((-1+\tau(t-t^0)),\Gamma)|)\, d\tau \right| \\
&\qquad \le C \max_{t,t^0 \in \Delta^0_{0,\dots,0}} \left| \sum_{|k|=r} \frac{1}{k!} \int\limits_0^1 (1-\tau)^{r-1}(t-t^0)^k |\ln^u \tau(t-t^0)|\, d\tau \right| \\
&\qquad\qquad \le C h_0^r |\ln^u h_0| \le C \frac{\ln^u N}{N^s}.
\end{aligned}$$

Из этой оценки и неравенства (4.21) следует, что

$$\int\limits_{\Delta^0_{i_1,\dots,i_l}} \cdots \int \bigl|\varphi(\tau) - P_{s,\dots,s}\bigl(\varphi, \Delta^0_{i_1,\dots,i_l}\bigr)\bigr|\, d\tau \le C h_0^{r+l} |\ln^u h_0| \le C \frac{1}{N^{s+l}} (\ln N)^u. \tag{4.22}$$

Так как общее число m областей $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ оценивается равенством (4.17), а в каждой из этих областей используется s^l узлов кубатурной формулы, общее число n узлов кубатурной формулы (4.18) равно

$$n = C N^{v(l-1)}. \tag{4.23}$$

Из (4.20), (4.22) следует, что погрешность кубатурной формулы (4.18) оценивается неравенством

$$|R_n(\varphi)| \le C m \frac{1}{N^{s+l}} \ln^u N.$$

Выразим эту оценку через число n узлов кубатурной формулы (4.18). Очевидно,

$$|R_n(\varphi)| \le C \frac{\ln^u n}{n^{(r+1)/(l-1)}}.$$

Так как φ — произвольная функция из класса функций $\overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, 1)$, имеем

$$R_n\bigl[\overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, 1)\bigr] \le C \frac{\ln^u n}{n^{(r+1)/(l-1)}}. \tag{4.24}$$

Оценим снизу функционал $\zeta_n\bigl[\overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega, 1)\bigr]$ при $v > l/(l-1)$. Пусть N_* — натуральное число, величина которого будет определена ниже. Обозначим через Δ^0 множество точек $\Delta^0 = \{t \in \Omega : 0 \le d(t,\Gamma) \le (1/N_*)^v = \rho_0\}$. Пусть

$$\Delta^k = \{t \in \Omega : \rho_{k-1} \le d(t,\Gamma) \le \rho_k \le 1\},$$

где ρ_k определяется из равенства $h_k^{s+l}/\rho_k^\gamma = N_*^{-s-l} \ln^{u-1} N_*$ и $h_k = \rho_k - \rho_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, m$. Здесь m — наибольшее целое число такое, что $\rho_m \le 1$. Если $\rho_m = 1$, то Ω покрывается областями $\Delta^k, k = 0, 1, \dots, m$. Если $\rho_m < 1$, то область Δ^{m+1} определяется неравенствами $\Delta^{m+1} = \{t \in \Omega : \rho_m \le d(t,\Gamma) \le 1\}$. Без ограничения общности можно считать, что $\rho_m = 1$.

Покажем, что уравнения $h_k^{s+l}/\rho_k^\gamma = N_*^{-s-l}\ln^{u-1}N_*$ разрешимы. Пусть $\rho_k^* = (k/N_*)^v, k = 0,1,\dots,N_*,$ $h_k^* = \rho_k^* - \rho_{k-1}^*, k = 1,2,\dots,N_*$. Тогда $h_k^{*(s+l)}/\rho_k^{*\gamma} = 1/N_*^{s+l}$ при $k=1$. При $k = 2,\dots,N_*$ имеем

$$\frac{h_k^{*(s+l)}}{\rho_k^{*\gamma}} = \frac{(k^v-(k-1)^v)^{s+l}}{N_*^{v(s+l)}}\left(\frac{N_*}{k}\right)^{v\gamma} = \frac{(k-\theta)^{(v-1)(s+l)}v^{s+l}}{N_*^{s+l}k^{v\gamma}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{v\gamma} v^{s+l}\frac{1}{N_*^{s+l}}.$$

Тем самым существует последовательность $\rho_k^* = (k/N_*)^v, k = 0,1,\dots,N_*$, такая, что

$$\frac{h_k^{*(s+l)}}{\rho_k^{*\gamma}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{v\gamma} v^{s+l}\frac{1}{N_*^{s+l}} = \frac{C}{N_*^{s+l}}, \quad h_k^* = \rho_k^* - \rho_{k-1}^*.$$

Функция $g(\rho) = \frac{(\rho-\rho_{k-1})^{s+l}}{\rho^\gamma}$ возрастает при $\rho > \rho_{k-1}, k = 2,\dots,N_*$. Значит, существует последовательность ρ_k такая, что $(\rho_k-\rho_{k-1})^{s+l}/\rho_k^\gamma \geq N_*^{-s-l}\ln^{u-1}N_*$ и, более того, $h_k = \rho_k - \rho_{k-1} > h_k^* = \rho_k^* - \rho_{k-1}^*$, $k = 1,2,\dots,m$, где m — число областей Δ^k, $k = 0,1,\dots,m$. Очевидно, что m меньше чем N_*.

Покроем каждую из областей Δ^k более мелкими областями $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}, k = 0,1,,\dots,m-1$, так, как это было неоднократно проделано выше. Нетрудно видеть, что число кубов $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ равно $n^* \asymp n_0^* \asymp N_*^{v(l-1)}$, где n_0^* — число кубов $\Delta^0_{i_1,\dots,i_l}$.

Кубатурная формула (4.2) использует N^l узлов. Выберем N_* таким, что $qN^l \geq n^* \geq 2N^l$, где q — наименьшая константа, при которой выполняется это неравенство. Тогда среди областей $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, $k = 0,1,\dots,m$, построенного выше покрытия имеется по крайней мере N^l областей, в которых отсутствуют узлы кубатурной формулы (4.2). Назовем эти области *отмеченными*.

Пусть $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l} = \left[b^k_{i_1}, b^k_{i_1+1};\dots;b^k_{i_l}, b^k_{i_l+1}\right]$, $k = 0,1,\dots,m$. Введем функции

$$\varphi^0_{i_1,\dots,i_l}(t_1,\dots,t_l) = \begin{cases} A_0\frac{((t_1-b^0_{i_1})(b^0_{i_1+1}-t_1)\dots(t_l-b^0_{i_l})(b^0_{i_l+1}-t_l))^s}{h_0^{(2l-1)s}}N_*^{v\gamma}\ln^{u-1}N_*, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \in \Delta^0_{i_1,\dots,i_l}, \\ 0, \quad t \in \Omega\backslash\Delta^0_{i_1,\dots,i_l}, \end{cases}$$

$$\varphi^k_{i_1,\dots,i_l}(t_1,\dots,t_l) = \begin{cases} A_k\frac{((t_1-b^k_{i_1})(b^k_{i_1+1}-t_1)\dots(t_l-b^k_{i_l})(b^k_{i_l+1}-t_l))^s}{h_k^{(2l-1)s}\rho_k^\gamma}, & t \in \Delta^k_{i_1,\dots,i_l}, \\ 0, & t \in \Omega\backslash\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}, \end{cases}$$

$k = 1,2,\dots,m$. Константы A_k, $k = 0,1,\dots,m$, выбираются таким образом, что

$$\left|D^s\varphi^0_{i_1,\dots,i_l}\right| \leq N_*^{v\gamma}\ln^{u-1}N_*, \quad \left|D^s\varphi^k_{i_1,\dots,i_l}\right| \leq \frac{1}{\rho_k^\gamma}.$$

Очевидно, такие константы существуют и не зависят от N_*, u, γ.

Введем функцию $\xi(t)$, $t \in \Omega$, равную $\varphi^k_{i_1,\dots,i_l}(t)$ в отмеченных кубах $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ и нулю во всех неотмеченных кубах. Тогда

$$\int\limits_\Omega\cdots\int \xi(t)\,dt \geq \sum_{k=0}^{N_*}\sum_{i_1,\dots,i_l}{}' \int\limits_{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}}\cdots\int \varphi_{i_1,\dots,i_l}(t)\,dt$$

$$\geq Cm_{\mathrm{mark}}\frac{1}{N_*^{s+l}}\ln^{u-1}N_* = C\frac{\ln^{u-1}n^*}{n^{*(r+l)/(l-1)}},$$

где n^* — число областей $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, $m_{\rm mark}$ — число отмеченных областей, $m_{\rm mark} \geq n^*/2$, $\sum'$ означает суммирование по отмеченным областям.

Так как $qN^l \geq n^* \geq 2N^l$, а число узлов кубатурной формулы (4.2) $n = N^l$ (т. е. $n \asymp n^*$), из предыдущего неравенства имеем

$$\zeta_n\big[\overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega,1)\big] \geq C\frac{\ln^{u-1} n}{n^{(r+1)/(l-1)}}, \tag{4.25}$$

где n — число узлов кубатурной формулы (4.2).

Из сопоставления оценок (4.24) и (4.25) вытекает

Теорема 4.3. *Пусть $\Psi = \overline{Q}^u_{r\gamma}(\Omega,1)$, $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 2,3,\dots$, $u = 1,2,\dots$, $v = (s+l)/(s+l-\gamma)$, $v > l/(l-1)$. Для кубатурных формул вида* (4.2) *справедливы оценки*

$$C\frac{\ln^{u-1} n}{n^{(r+1)/(l-1)}} \leq R_n(\Psi) \leq C\frac{\ln^{u} n}{n^{(r+1)/(l-1)}},$$

где n — число узлов кубатурной формулы (4.2).

Кратко опишем изменения, которые нужно внести в предыдущие построения при вычислении интеграла (4.1) на классе $Q^u_{r,\gamma}(\Omega,M)$, $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 2,3,\dots$, при $v = (s+l)/(s+l-\gamma)$.

Пусть $v \leq l/(l-1)$. Покроем Ω кубами и параллелепипедами $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l;j_1\dots,j_l}$, $k = 0,1,\dots,N-1$, аналогичными построенным при доказательстве теоремы 4.1. Отличие состоит в том, что в данном случае

$$M_0 = \lceil (\ln N)^{u/(r+l+1-\mu)}\rceil, \quad M_k = \lceil (\ln(N/k)^v)^{u/(s+l)}\rceil, \quad k = 1,2,\dots,N-1.$$

По аналогии с доказательством теоремы 4.1 введем сплайн $\varphi_N(t_1,\dots,t_l)$, состоящий из полиномов $P_{s,\dots,s}\big(\varphi,\Delta^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}\big)$, $k = 0,1,\dots,N-1$. Интеграл (4.1) будем вычислять по кубатурной формуле

$$L\varphi = \int_{\Omega}\!\!\cdots\!\int \varphi_N(\tau_1,\dots,\tau_l)\,d\tau_1\dots d\tau_l + R_n(\varphi), \tag{4.26}$$

где n — число узлов, используемых при построении кубатурной формулы (4.26).

Теорема 4.4. *Пусть $\Psi = Q_{r,\gamma}(\Omega,1)$, $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 2,3,\dots$, $u = 1,2,\dots$, $v = (s+l)/(s+l-\gamma)$, $v < l/(l-1)$. Среди кубатурных формул вида* (4.2) *оптимальной по порядку является формула* (4.26) *с погрешностью $R_N[\Psi] \asymp n^{-s/l}$, где n — число узлов кубатурной формулы* (4.26).

Доказательство. Погрешность кубатурной формулы (4.26) мажорируется неравенством

$$|R_n(\varphi)| \leq \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i_1,\dots,i_l}\sum_{j_1,\dots,j_l}\int_{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}}\!\!\cdots\!\int \big|\psi^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}(\tau_1,\dots,\tau_l)\big|\,d\tau_1\dots d\tau_l, \tag{4.27}$$

где $\psi^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}(\tau_1,\dots,\tau_l) = \varphi(\tau_1,\dots,\tau_l) - P_{s,\dots,s}\big(\varphi,\Delta^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}\big)$, слагаемые правой части которого оцениваются по такой же схеме, что и при доказательстве теоремы 4.1.

Изменения состоят в следующих оценках:

$$\int\limits_{\Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}}\cdots\int \left|\psi^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}(\tau_1,\dots,\tau_l)\right| d\tau_1\dots d\tau_l$$

$$\le C E_{r,\dots,r}\big(\varphi,\Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}\big)\lambda_s^l h_{00}^l, \quad h_{00}=h_0/M_0,\ h_0=N^{-v},$$

$$E_{r,\dots,r}\big(\varphi,\Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}\big)$$

$$\le C\max_{(t,t^0)\in\Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}}\int\limits_0^1(1-\tau)^r(d(t^0+\tau(t-t^0),\Gamma))^{r+1-\mu}$$

$$\times\left|\ln^u d(t^0+\tau(t-t^0))\right| d\tau\le C h_{00}^{r+1-\mu}\ln^u N,$$

$$\int\limits_{\Delta^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}}\cdots\int \left|\psi^0_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}(\tau_1,\dots,\tau_l)\right| d\tau_1\dots d\tau_l\le\frac{C}{N^{s+l}},$$

$$\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\dots,i_l,j_1,\dots,j_l}}\cdots\int \left|\varphi(\tau_1,\dots,\tau_l)-P_{s,\dots,s}\big(\varphi,\Delta^k_{i_1,\dots,i_l,j_1,\dots,j_l}\big)\right|$$

$$\le C\Bigg(\bigg(\Big(\frac{k+1}{N}\Big)^v-\Big(\frac{k}{N}\Big)^v\bigg)\frac{1}{\big(\ln\frac{N}{k}\big)^{u/(s+l)}}\Bigg)^{s+l}\Big(\frac{N}{k}\Big)^{v\gamma}\left|\ln^u\Big(\frac{k}{N}\Big)^v\right|$$

$$\le C\bigg(\Big(\frac{k+1}{N}\Big)^v-\Big(\frac{k}{N}\Big)^v\bigg)^{s+l}\Big(\frac{N}{k}\Big)^{v\gamma}\le C\frac{1}{N^{s+l}}.$$

Тогда погрешность кубатурной формулы (4.26) оценивается неравенством $R_N[\Psi]\le C\frac{m}{N^{s+l}}$, где m — число областей $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l,j_1,\dots,j_l}$.

Величина m оценена при доказательстве теоремы 4.1: $m\asymp CN^l$. Следовательно, $R_N[\Psi]\le C\frac{1}{N^s}\le\frac{C}{n^{s/l}}$. Функционал $\zeta_n\big[Q^u_{r,\gamma}(\Omega,1)\big]$ оценивается так же, как при доказательстве теоремы 4.1.

Все остальные элементы доказательства являются практически дословным повторением рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 4.1, и на них не останавливаемся.

Теорема доказана.

Теорема 4.5. *Пусть* $\Psi=Q_{r,\gamma}(\Omega,1)$, $\Omega=[-1,1]^l$, $l=2,3,\dots$, $u=1,2,\dots$, $v=(s+l)/(s+l-\gamma)=l/(l-1)$. *Среди всевозможных кубатурных формул вида* (4.2) *формула* (4.26) *является оптимальной по порядку. Ее погрешность равна*

$$R_n\big[Q^u_{r\gamma}(\Omega,1)\big]\asymp\begin{cases}(\ln n)^{(s+l)u(r+1+l-\mu)}/n^{s/l}, & lu/(r+1+l-\mu)\ge 1+lu/(s+l),\\ (\ln n)^{u+1+s/l}/n^{s/l}, & lu/(r+1+l-\mu)\le 1+lu/(s+l).\end{cases}$$

Доказательство. При $v=l/(l-1)$ погрешность кубатурной формулы (4.26) оценивается так же, как и при $v<l/(l-1)$:

$$R_N[\Psi]\le C\frac{ms^l}{N^{s+l}},\tag{4.28}$$

где m — число областей $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l,j_1,\dots,j_l}$, $k=0,1,\dots,N-1$.

Число областей $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l,j_1,\dots,j_l}$ оценивается так же, как при доказательстве теоремы 4.2, и равно

$$m \asymp \begin{cases} N^l(\ln N)^{lu/(r+1+l-\mu)}, & lu/(r+1+l-\mu) \ge 1 + lu/(s+l), \\ N^l(\ln N)^{1+lu/(s+l)}, & lu/(r+1+l-\mu) \le 1 + lu/(s+l). \end{cases}$$

Отсюда

$$N \asymp \begin{cases} m^{l/l}/(\ln m)^{u/(r+1+l-\mu)}, & lu/(r+1+l-\mu) \ge 1 + lu/(s+l), \\ m^{l/l}(\ln m)^{1/l+u/(s+l)}, & lu/(r+1+l-\mu) \le 1 + lu/(s+l). \end{cases}$$

Из этой формулы и неравенства (4.28) имеем

$$\begin{aligned} &R_n\big[Q^u_{r\gamma}(\Omega,1)\big] \\ &\le C\begin{cases} (\ln n)^{(s+l)u(r+1+l-\mu)}/n^{s/l}, & lu/(r+1+l-\mu) \ge 1 + lu/(s+l), \\ (\ln n)^{u+1+s/l}/n^{s/l}, & lu/(r+1+l-\mu) \le 1 + lu/(s+l). \end{cases} \end{aligned} \tag{4.29}$$

Оценка снизу функционала $\zeta_n[\Psi]$ проводится по такой же схеме, что и при доказательстве теоремы 4.2. Единственное отличие заключается в том, что функционал $\varphi^k_{i_1,\dots,i_l,j_1,\dots,j_l}(t)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} &\varphi^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}(t) \\ &= \begin{cases} A_k \frac{((t_1-b_{i_1,j_1})(b_{i_1,j_1+1}-t_1)\dots(t_l-b_{i_l,j_l})(b_{i_l,j_l+1}-t_l))^s}{(h_k/M_k)^{(2l-1)s}((k+1)/N_*)^{v\gamma}}(1+|\ln^u(k+1/N_*)^v|), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \in \Delta^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}, \\ 0, \quad t \in \Omega \setminus \overline{\Delta}^k_{i_1,\dots,i_l;j_1,\dots,j_l}, \end{cases} \end{aligned}$$

$k = 0, 1, \dots, N_* - 2$.

В результате получаем оценку

$$\zeta_n[\Psi] \ge C\begin{cases} (\ln n)^{(s+l)u/(r+1+l-\mu)}/n^{s/l}, & lu/(r+1+l-\mu) \ge 1 + lu/(s+l), \\ (\ln n)^{u+1+s/l}/n^{s/l}, & lu/(r+1+l-\mu) \le 1 + lu/(s+l). \end{cases} \tag{4.30}$$

Из сопоставления оценок (4.29), (4.30) следует справедливость теоремы.

Рассмотрим случай, когда $v = (s+l)/(s+l-\gamma)$, $v > l/(l-1)$. Как и при доказательстве теоремы 4.3, покроем куб Ω областями $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, число которых равно $n \asymp N^{v(l-1)}$. Функция $\varphi(t)$ аппроксимируется сплайном $\varphi_N(t)$, составленным из полиномов $P_{s,\dots,s}\big(\varphi, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l}\big)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Интеграл (4.1) будем вычислять по кубатурной формуле

$$L\varphi = \int \cdots \int_\Omega \varphi_N(\tau)\, d\tau + R_n(\varphi). \tag{4.31}$$

Повторяя доказательство теоремы 4.3, имеем

$$R_N[\Psi] \le C\frac{\ln^u n}{n^{(r+1)/(l-1)}}.$$

Для оценки снизу функционала $\zeta_N[\Psi]$ повторим доказательство теоремы 4.3, полагая $\frac{h_k^{s+l}}{\rho_k^\gamma} = N_*^{-s-l}\ln^u N_*$, $k = 1, 2, \dots, m$, и

$$\varphi^0_{i_1,\dots,i_l}(t_1,\dots,t_l) = \begin{cases} A_0 \frac{((t_1-b^0_{i_1})(b^0_{i_1+1}-t_1)\dots(t_l-b^0_{i_l})(b^0_{i_l+1}-t_l))^s}{h_0^{(2l-1)s}} N_*^{v\gamma}\ln^u N_*, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \in \Delta^0_{i_1,\dots,i_l}, \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad t \in \Omega \backslash \Delta^0_{i_1,\dots,i_l}. \end{cases}$$

В результате приходим к следующему утверждению.

Теорема 4.6. *Пусть* $\Psi = Q^u_{r,\gamma}(\Omega, 1)$, $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 2,3,\ldots$, $u = 1,2,\ldots$, $v = (s+l)/(s+l-\gamma)$, $v > l/(l-1)$. *Кубатурная формула* (4.31) *оптимальна по порядку с погрешностью*

$$R_n[\Psi] \asymp C \frac{\ln^u n}{n^{(r+1)/(l-1)}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kolmogoroff A.* Zur Grossenordnung des Restgleides Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen // Ann. Math. 1935. Bd 36. S. 521–526.
2. *Никольский С. М.* К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами // Успехи мат. наук. 1950. Т. 5, № 2. С. 165–177.
3. *Бахвалов Н. С.* О свойствах оптимальных методов решения задач математической физики // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1970. Т. 10, № 3. С. 555–568.
4. *Теоретические основы* и конструирование численных алгоритмов задач математической физики (Под ред. К. И. Бабенко). М.: Наука, 1979.
5. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1983.
6. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. М.: Наука, 1979.
7. *Бахвалов Н. С.* Об оптимальных оценках сходимости квадратурных процессов и методов интегрирования типа Монте-Карло на классах функций // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964. С. 5–63.
8. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
9. *Соболев С. Л., Васкевич В. Л.* Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1996.
10. *Половинкин В. И.* Некоторые вопросы теории весовых кубатурных формул // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 1. С. 177–196.
11. *Бабенко В. Ф.* Точная асимптотика остатков оптимальных для некоторых классов функций весовых кубатурных формул // Мат. заметки. 1976. Т. 20, № 4. С. 589–595.
12. *Бойков И. В.* Оптимальные кубатурные формулы вычисления многомерных интегралов на классе $Q_{r,\gamma}(\Omega, 1)$ // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1990. Т. 30, № 8. С. 1123–1132.
13. *Бабенко К. И.* О некоторых задачах теории приближений и численного анализа // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40, № 1. С. 3–28.
14. *Бойков И. В.* Оптимальные методы приближения функций и вычисления интегралов. Пенза: Изд-во Пензен. гос. ун-та, 2007.
15. *Бойков И. В.* Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Ч. 2. Гиперсингулярные интегралы. Пенза: Изд-во Пензен. гос. ун-та, 2009.
16. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. М.: Наука, 1975. Т. 1.

Статья поступила 27 октября 2014 г., окончательный вариант — 5 октября 2015 г.

Бойков Илья Владимирович
Пензенский гос. университет,
факультет вычислительной техники,
кафедра высшей и прикладной математики,
ул. Красная, 40, Пенза 440026
i.v.boykov@gmail.com