Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2016. Том 57, № 3

УДК 515.129

О ЛИНЕЙНЫХ ГОМЕОМОРФИЗМАХ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ДЛИННЫХ ПРЯМЫХ ЗОРГЕНФРЕЯ

Н. Н. Трофименко, Т. Е. Хмылева

Аннотация. Проводится линейная гомеоморфная классификация пространств непрерывных функций, заданных на «длинных прямых Зоргенфрея» S_α, где α — произвольный ординал. Пространства непрерывных функций наделяются топологией поточечной сходимости и обозначаются через $C_p(S_\alpha)$.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.320

Ключевые слова: прямая Зоргенфрея, линейный гомеоморфизм, отрезок ординалов, регулярный ординал, начальный ординал, порядковая топология, топология поточечной сходимости.

Пространства непрерывных функций $C(X)$ — классический объект в топологии и функциональном анализе. Классификация банаховых пространств непрерывных функций на отрезках ординалов $[1, \alpha]$ была проведена в [1–4]. В данной работе рассматриваются пространства непрерывных функций на «длинных прямых Зоргенфрея».

Прямая Зоргенфрея, которую мы обозначаем через S, есть множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ с топологией, базу которой образуют все полуинтервалы вида $(a, b]$. Всюду в данной работе полуинтервал $I = (0, 1]$ рассматривается как подпространство прямой Зоргенфрея S. Это означает, что базу окрестностей каждой точки $x \in I$ образует семейство множеств $B_x = \{(x - \epsilon, x],\ \epsilon > 0\}$. Для произвольного ординала α отрезок $[1, \alpha]$ наделяется порядковой топологией. Хорошо известно [5], что отрезок ординалов $[1, \alpha]$ является компактом.

Определим «длинные прямые Зоргенфрея», используя конструкцию, предложенную В. В. Федорчуком в [6]. Пусть $X = [1, \alpha]$ — отрезок ординалов, X' — множество предельных точек пространства X и

$$Y_\gamma = \begin{cases} (0,1], & \text{если } \gamma \in X \backslash X', \\ \{\gamma\}, & \text{если } \gamma \in X', \end{cases}$$

где в случае $\gamma \in X \backslash X'$ под Y_γ понимаются попарно не пересекающиеся копии полуинтервала $I = (0, 1]$, наделенные топологией Зоргенфрея.

Будем называть *длинной прямой Зоргенфрея* множество $S_\alpha = \bigsqcup\limits_{\gamma \in [1,\alpha]} Y_\gamma$ с топологией, порожденной следующей базой окрестностей: для точки $p \in Y_\gamma$ базу окрестностей образуют множества вида

$$O_p = V_p \cup \bigcup \{Y_\delta : \delta \in U \cap f^{-1}(V_p)\},$$

где V_p — окрестность точки p в пространстве Y_γ, U — окрестность точки γ в пространстве X и $f_\gamma : X\backslash\{\gamma\} \to Y_\gamma$ — непрерывные отображения, определенные по формулам: $f_\gamma(p) = 1$ для всех $p \in X \setminus \{\gamma\}$, если $\gamma \in X\backslash X'$; $f_\gamma(p) = \gamma$ для всех $p \in X \setminus \{\gamma\}$, если $\gamma \in X'$.

Топологию τ на длинных прямых Зоргенфрея можно определить, не опираясь на конструкцию В. В. Федорчука, если на множестве S_α ввести следующее отношение порядка $\leq_\alpha$:

если $p \in Y_\xi$, $q \in Y_\eta$ и $\xi < \eta$ в отрезке ординалов $[1, \alpha]$, то $p \leq_\alpha q$;

если $p \in Y_\xi$ и $q \in Y_\xi$, то $p \leq_\alpha q$ означает, что $p \leq q$ в пространстве Y_ξ.

Тогда базу окрестностей точки $p \in S_\alpha$ в топологии τ образуют множества вида $O_q(p) = \{t \in S_\alpha : q <_\alpha t \leq_\alpha p\}$.

Образно говоря, длинные прямые Зоргенфрея получаются из отрезков ординалов при помощи «приклеивания» полуинтервала $I \subset S$ к непредельным ординалам α. Но поскольку подпространство $I \subset S$ гомеоморфно пространству S [7], в работе мы используем термин «длинная прямая Зоргенфрея».

Для ординалов λ и μ, $\lambda < \mu \leq \alpha$, определим подпространство $S_{[\lambda,\mu]} \subset S_\alpha$ следующим образом:

$$S_{[\lambda,\mu]} = \Big\{x \in S_\alpha : x \in \bigsqcup_{\lambda \leq \gamma \leq \mu} Y_\gamma\Big\}.$$

Нетрудно видеть, что для произвольного ординала λ множество $S_{[\lambda+1,\mu]}$ открыто-замкнуто в пространстве S_α.

Если X и Y — линейные топологические пространства, то запись $X \sim Y$ означает, что эти пространства линейно гомеоморфны.

Пусть T — топологическое пространство и $M \subset T$. Для произвольного ординала η через $M^{(\eta)}$ обозначим производное множество порядка η. Отметим (см., например, [5]), что если A и B — замкнутые подмножества топологического пространства T и $M = A \sqcup B$, то для любого ординала η справедливо равенство

$$M^{(\eta)} = A^{(\eta)} \sqcup B^{(\eta)}. \tag{1}$$

Пусть L — замкнутое подмножество в пространстве S_α и $\gamma \in [1, \alpha]$ — непредельный ординал. Так как $Y_\gamma = (0, 1] \subset S$ является открыто-замкнутым подмножеством в S_α, по формуле (1) получаем

$$L^{(\eta)} = (L \cap Y_\gamma)^{(\eta)} \sqcup (L \cap (S_\alpha\backslash Y_\gamma))^{(\eta)}. \tag{2}$$

Поскольку полуинтервал $(0, 1]$, наделенный топологией Зоргенфрея, не содержит несчетных компактов [5], для первого несчетного ординала ω_1 справедливо равенство $(L \cap Y_\gamma)^{(\omega_1)} = \varnothing$ и, следовательно, для любого ординала $\gamma \in X\backslash X'$

$$L^{(\omega_1)} = (L \cap (S_\alpha\backslash Y_\gamma))^{(\omega_1)} \subset L \cap (S_\alpha\backslash Y_\gamma) \subset S_\alpha\backslash Y_\gamma. \tag{3}$$

Из соотношения (3) получаем

$$L^{(\omega_1)} \subset \bigcap_{\gamma \in X\backslash X'} (S_\alpha\backslash Y_\gamma) = S_\alpha\backslash \bigsqcup_{\gamma \in X\backslash X'} Y_\gamma = \bigsqcup_{\gamma \in X'} Y_\gamma = X' \subset [1, \alpha]. \tag{4}$$

Для доказательства теорем о линейной гомеоморфности пространств $C_p(S_\alpha)$ понадобится

Лемма 1. *Пусть* $\alpha = \omega^\delta \cdot n + \rho$, $\delta \geq \omega_1$, $\rho < \omega^\delta$ *и* L — *произвольный компакт в* S_α. *Тогда* $L^{(\delta)} \subset [1, \alpha]^{(\delta)}$.

Доказательство проведем методом трансфинитной индукции по δ. Пусть $\delta = \omega_1$. В этом случае $\alpha = \omega^{\omega_1} \cdot n + \rho = \omega_1 \cdot n + \rho$, так как $\omega^{\omega_1} = \omega_1$. Покажем, что

$$L^{(\omega_1)} \subset [1, \alpha]^{(\omega_1)} = \{\omega_1, \omega_1 \cdot 2, \ldots, \omega_1 \cdot n\}.$$

Пусть существует точка x такая, что $x \in L^{(\omega_1)}$, но $x \notin [1, \alpha]^{(\omega_1)} = \{\omega_1, \omega_1 \cdot 2, \ldots, \omega_1 \cdot n\}$. Так как по формуле (4) $L^{(\omega_1)} \subset X'$, то $x = \omega_1 \cdot k + \lambda$, где $k = 0, \ldots, n-1$, $0 < \lambda < \omega_1$ и λ — предельный ординал. Пользуясь равенством (1), получаем

$$L^{(\omega_1)} = (L \cap S_{[\omega_1 \cdot k+1, \omega_1 \cdot k+\lambda]})^{(\omega_1)} \sqcup (L \cap (S_\alpha \backslash S_{[\omega_1 \cdot k+1, \omega_1 \cdot k+\lambda]}))^{(\omega_1)}.$$

Поскольку $\lambda < \omega_1$, множество $L \cap S_{[\omega_1 \cdot k+1, \omega_1 \cdot k+\lambda]}$ является счетным компактом, следовательно,

$$L^{(\omega_1)} = (L \cap (S_\alpha \backslash S_{[\omega_1 \cdot k+1, \omega_1 \cdot k+\lambda]}))^{(\omega_1)} \subset S_\alpha \backslash S_{[\omega_1 \cdot k+1, \omega_1 \cdot k+\lambda]}.$$

Значит, $x \notin S_{[\omega_1 \cdot k+1, \omega_1 \cdot k+\lambda]}$, что противоречит тому, что $x = \omega_1 \cdot k + \lambda$.

Предположим, что для всех ординалов δ, $\omega_1 \leq \delta < \xi$, справедливо включение $L^{(\delta)} \subset [1, \alpha]^{(\delta)}$. Докажем, что утверждение выполнено для ординала ξ. Пусть $\alpha = \omega^\xi \cdot n + \rho$, где $\rho < \omega^\xi$. Допустим, что существует $x \in L^{(\xi)}$, но $x \notin [1, \alpha]^{(\xi)} = \{\omega^\xi \cdot 1, \omega^\xi \cdot 2, \ldots, \omega^\xi \cdot n\}$. Тогда $x = \omega^\xi \cdot k + \lambda$, где $k = 0, \ldots, n-1$, $0 < \lambda < \omega^\xi$ и λ — предельный ординал. Заметим, что пространства $S_{[\omega^\xi \cdot k+1, \omega^\xi \cdot k+\lambda]}$ и $S_{[1,\lambda]}$ гомеоморфны, следовательно, компактное подмножество $L \cap S_{[\omega^\xi \cdot k+1, \omega^\xi \cdot k+\lambda]}$ гомеоморфно подмножеству $K \subset S_{[1,\lambda]}$. Представим ординал λ в виде $\lambda = \omega^\mu \cdot m + r$, где $r < \omega^\mu$ и $\mu < \xi$. Тогда по предположению индукции

$$K^{(\mu)} \subset [1, \lambda]^{(\mu)} = \{\omega^\mu \cdot 1, \omega^\mu \cdot 2, \ldots, \omega^\mu \cdot m\},$$

т. е. $K^{(\mu)}$ — конечное множество. Поэтому множество $(L \cap S_{[\omega^\xi \cdot 1+1, \omega^\xi \cdot k+\lambda]})^{(\mu)}$ также конечно, и поскольку $\mu < \xi$, то $(L \cap S_{[\omega^\xi \cdot 1+1, \omega^\xi \cdot k+\lambda]})^{(\xi)} = \varnothing$. Пользуясь равенством (1), получаем

$$\begin{aligned} L^{(\xi)} &= (L \cap S_{[\omega^\xi \cdot 1+1, \omega^\xi \cdot k+\lambda]})^{(\xi)} \sqcup (L \cap (S_\alpha \backslash S_{[\omega^\xi \cdot 1+1, \omega^\xi \cdot k+\lambda]}))^{(\xi)} \\ &= (L \cap S_\alpha \backslash S_{[\omega^\xi \cdot 1+1, \omega^\xi \cdot k+\lambda]})^{(\xi)} \subset S_\alpha \backslash S_{[\omega^\xi \cdot 1+1, \omega^\xi \cdot k+\lambda]}. \end{aligned}$$

Следовательно, $x \notin S_{[\omega^\xi \cdot 1+1, \omega^\xi \cdot k+\lambda]}$; противоречие с тем, что $x = \omega^\xi \cdot k + \lambda$. Теорема доказана.

Напомним, что ординал λ называется *начальным*, если λ — наименьший среди всех ординалов α таких, что $|\alpha| = |\lambda|$. Начальный ординал λ называется *регулярным*, если не существует $\alpha < \lambda$, конфинального λ.

Теорема 2. *Пусть* λ — *регулярный начальный ординал и* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$. *Тогда пространства* $C_p(S_{\lambda \cdot n})$ *и* $C_p(S_{\lambda \cdot m})$ *не линейно гомеоморфны.*

Доказательство. Предположим, что $n > m$ и существует линейный гомеоморфизм T пространства $C_p(S_{\lambda \cdot n})$ на пространство $C_p(S_{\lambda \cdot m})$. Поскольку пространства $C_p(S_{\lambda \cdot n})$ и $C_p(S_{\lambda \cdot m})$ всюду плотны в пространствах $\mathbb{R}^{S_{\lambda \cdot n}}$ и $\mathbb{R}^{S_{\lambda \cdot m}}$ соответственно, линейный гомеоморфизм T может быть продолжен до линейного гомеоморфизма $\widetilde{T}$ пространства $\mathbb{R}^{S_{\lambda \cdot n}}$ на пространство $\mathbb{R}^{S_{\lambda \cdot m}}$ [5], $\widetilde{T} : \mathbb{R}^{S_{\lambda \cdot n}} \longrightarrow$

$\mathbb{R}^{S_{\lambda\cdot m}}$. Известно [8], что сопряженным к пространствам $C_p(S_{\lambda\cdot n})$ и $\mathbb{R}^{S_{\lambda\cdot n}}$ является пространство $L_p(S_{\lambda\cdot n})$, состоящее из всех функционалов вида

$$f = p_1 \cdot \delta_{t_1} + p_2 \cdot \delta_{t_2} + \cdots + p_n \cdot \delta_{t_n},$$

где $p_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\delta_{t_k}(x) = x(t_k)$ для любого $x \in C_p(S_{\lambda\cdot n})$, $k = 1, \dots, n$. Множество точек $\{t_1, \dots, t_n\} \subset S_{\lambda\cdot n}$ называется *носителем функционала* f и обозначается через $\operatorname{supp} f$. Рассмотрим линейное подпространство

$$M_{\lambda\cdot n} = C_p(S_{\lambda\cdot n}) \oplus \operatorname{span}\{\chi_{\lambda_1}, \dots, \chi_{\lambda_n}\},$$

где $\chi_{\lambda_l} \subset \mathbb{R}^{\lambda\cdot n}$ — характеристическая функция одноточечного множества $\{\lambda\cdot l\}$, $l = 1, \dots, n$.

Докажем, что

$$\widetilde{T}(M_{\lambda\cdot n}) = M_{\lambda\cdot m} = C_p(S_{\lambda\cdot m}) \oplus \operatorname{span}\{\chi_{\lambda_1}, \dots, \chi_{\lambda_m}\}. \tag{5}$$

Для этого покажем, что пространство $M_{\lambda\cdot n}$ можно определить другим способом с помощью семейства функционалов $\{f_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subset L_p(S_{\lambda\cdot n})$ мощности, меньшей чем $|\omega_\tau|$.

А именно, покажем, что $M_{\lambda\cdot n} = E$, где

$$E = \{y \in \mathbb{R}^{\lambda\cdot n} : \forall \{f_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subset L_p(S_{\lambda\cdot n})\,(|\mathscr{I}| < |\lambda|)\; \exists x \in C_p(S_{\lambda\cdot n})\,(f_i(x) = f_i(y))\,\forall i \in \mathscr{I}\}. \tag{6}$$

Рассмотрим множество $A = \bigcup\limits_{i\in\mathscr{I}} (\operatorname{supp} f_i \setminus \{\lambda\cdot 1, \dots, \lambda\cdot n\})$. Поскольку для любого i множество $\operatorname{supp} f_i \subset S_{\lambda\cdot n}$ конечно, $|A| < |\lambda|$. Так как ординал λ регулярный, существует ординал $\gamma < \lambda$ такой, что $A \subset \bigsqcup\limits_{k=0}^{n-1} S_{[\lambda\cdot l+1, \lambda\cdot l+\gamma]}$. Отсюда

$$\operatorname{supp} f_i \setminus \bigsqcup_{k=0}^{n-1} S_{[\lambda\cdot l+1, \lambda\cdot l+\gamma]} \subset \{\lambda, \lambda\cdot 2, \dots, \lambda\cdot n\}$$

для любого $i \in \mathscr{I}$. Рассмотрим функцию $x_l \in \mathbb{R}^{S_{\lambda\cdot n}}$, определенную формулой

$$x_l(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in S_{[\lambda\cdot(l-1)+\gamma+1, \lambda\cdot l]}, \\ 0, & \text{если } t \notin S_{[\lambda\cdot(l-1)+\gamma+1, \lambda\cdot l]}. \end{cases}$$

Функция x_l непрерывна. Для каждого $i \in \mathscr{I}$ функционал f_i имеет вид

$$f_i = \alpha_1 \cdot \delta_{t_1} + \alpha_2 \cdot \delta_{t_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \delta_{t_j} + \alpha_0 \cdot \delta_{\lambda\cdot l},$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_j$ отличны от нуля, а α_0 может равняться нулю. Так как

$$\operatorname{supp} f_i \cap S_{[\lambda\cdot(l-1)+\gamma+1, \lambda\cdot l]} \subset \{\lambda\cdot l\},$$

то $f_i(x_0) = \alpha_0 \cdot x_0(\lambda\cdot l) = \alpha_0$ и $f_i(\chi_{\lambda\cdot l}) = \alpha_0 \cdot \chi_{\lambda\cdot l}(\lambda\cdot l) = \alpha_0$ для любого $i \in I$. Следовательно, $\chi_{\lambda\cdot l} \in E$. Включение $C_p(S_{\lambda\cdot n}) \subset E$ очевидно. Стало быть,

$$M_{\lambda\cdot n} = C_p(S_{\lambda\cdot n}) \oplus \operatorname{span}\{\chi_{\lambda\cdot 1}, \dots, \chi_{\lambda\cdot n}\} \subset E.$$

Для доказательства обратного включения предположим, что существует $g \in E$, но $g \notin C_p(S_{\lambda\cdot n}) \oplus \operatorname{span}\{\chi_{\lambda_1}, \dots, \chi_{\lambda_n}\}$. В этом случае функция g разрывна в некоторой точке $t \notin \{\lambda, \lambda\cdot 2, \dots, \lambda\cdot n\}$. Значит, либо $t \in Y_\gamma = (0, 1]$, либо

$t = \lambda{\cdot}l{+}\gamma$, где $l = 0, \ldots, n{-}1$ и $\gamma < \lambda$ — предельный ординал. Если $t \in Y_\gamma = (0,1]$, то существуют $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность $t_n \to t$ такие, что

$$|g(t_n) - g(t)| \geq \varepsilon_0. \tag{7}$$

Если $t = \lambda \cdot l + \gamma$, то в любой окрестности $O_\xi(t) = (\xi, \lambda \cdot l + \gamma]$, где $\xi < \lambda \cdot l + \gamma$, найдется точка $t_\xi \in O_\xi(t)$ такая, что

$$|g(t_\xi) - g(t)| \geq \varepsilon_0 \tag{8}$$

для некоторого $\varepsilon_0 > 0$. Рассмотрим последовательность функционалов

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad f_n = \delta_{t_n} - \delta_t, \text{ если } t \in Y_\gamma = (0,1],$$

и семейство функционалов

$$\{f_\xi : \xi < \lambda \cdot l + \gamma\}, \quad f_\xi = \delta_{t_\xi} - \delta_t, \text{ если } t = \lambda \cdot l + \gamma.$$

Для любой непрерывной функции $x \in C_p(S_{\lambda\cdot n})$ выполнены условия $|x(t_n) - x(t)| < \varepsilon_0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ или $|x(t_\xi) - x(t)| < \varepsilon_0$ для некоторого $\xi < \lambda{\cdot}l{+}\gamma$, т. е. $|f_n(x)| < \varepsilon_0$ или $|f_\xi(x)| < \varepsilon_0$. Так как $|f_n(g)| \geq \varepsilon_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $|f_\xi(g)| \geq \varepsilon_0$ для всех $\xi < \lambda \cdot l + \gamma$, в силу неравенств (7) и (8) $g \notin E$. Таким образом, (6) доказано.

Докажем равенство (5). Пусть $y \in M_{\lambda\cdot n}$. Рассмотрим произвольное семейство функционалов $\{g_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subset L_p(S_{\lambda\cdot m})$, $|\mathscr{I}| < |\lambda|$. Поскольку $y \in M_{\lambda\cdot n}$, для семейства функционалов $\{f_i\}_{i\in\mathscr{I}} = \{\widetilde{T}^* g_i\}_{i\in\mathscr{I}} \in L_p(S_{\lambda\cdot n})$ существует непрерывная функция $x \in C_p(S_{\lambda\cdot n})$ такая, что

$$(\widetilde{T}^* g_i)(x) = (\widetilde{T}^* g_i)(y)$$

для любого $i \in \mathscr{I}$. Отсюда по определению отображения T^* получаем

$$g_i(\widetilde{T}x) = g_i(\widetilde{T}y)$$

для любого $i \in \mathscr{I}$. Так как $\widetilde{T}x = Tx \in C_p(S_{\lambda\cdot m})$, то $\widetilde{T}y \in M_{\lambda\cdot m}$. Значит, $\widetilde{T}(M_{\lambda\cdot n}) \subset M_{\lambda\cdot m}$. Аналогично доказывается обратное включение, если в доказательстве вместо отображения $\widetilde{T}^*$ рассмотреть отображение

$$(\widetilde{T}^*)^{-1} = (\widetilde{T}^{-1})^* : L_p(S_{\lambda\cdot n}) \longrightarrow L_p(S_{\lambda\cdot m}).$$

Из равенства (5) имеем

$$\begin{aligned} M_{\lambda\cdot m} &= \widetilde{T}(M_{\lambda\cdot n}) = \widetilde{T}(C_p(S_{\lambda\cdot n}) \oplus \operatorname{span}\{\chi_{\lambda_1}, \ldots, \chi_{\lambda_n}\}) \\ &= \widetilde{T}(C_p(S_{\lambda\cdot n})) \oplus \widetilde{T}(\operatorname{span}\{\chi_{\lambda_1}, \ldots, \chi_{\lambda_n}\}) \sim C_p(S_{\lambda\cdot m}) \oplus \widetilde{T}(\operatorname{span}\{\chi_{\lambda_1}, \ldots, \chi_{\lambda_n}\}) \\ &= C_p(S_{\lambda\cdot m}) \oplus \operatorname{span}\{\widetilde{T}(\chi_{\lambda_1}), \ldots, \widetilde{T}(\chi_{\lambda_n})\}. \end{aligned}$$

С другой стороны, по определению

$$M_{\lambda\cdot m} = C_p(S_{\lambda\cdot m}) \oplus \operatorname{span}\{\chi_{\lambda_1}, \ldots, \chi_{\lambda_m}\}.$$

Из последних двух равенств, учитывая, что все дополнения к пространству $C_p(S_{\lambda\cdot m})$ в пространстве $M_{\lambda\cdot m}$ линейно гомеоморфны, заключаем что

$$\operatorname{span}\{\chi_{\lambda_1}, \ldots, \chi_{\lambda_m}\} \sim \operatorname{span}\{\widetilde{T}(\chi_{\lambda_1}), \ldots, \widetilde{T}(\chi_{\lambda_n})\}.$$

Но это невозможно, так как $n > m$ и функции $\widetilde{T}(\chi_{\lambda_1}), \dots, \widetilde{T}(\chi_{\lambda_n})$ линейно независимы в m-мерном пространстве $\operatorname{span}\{\chi_{\lambda_1}, \dots, \chi_{\lambda_m}\}$. Теорема доказана.

Пусть Y_γ — семейство попарно не пересекающихся топологических пространств и $Y = \bigoplus\limits_{\gamma \in A} Y_\gamma$ — их топологическая сумма. Тогда

$$C_p\Big(\bigoplus_{\gamma \in A} Y_\gamma\Big) \sim \prod_{\gamma \in A} C_p(Y_\gamma).$$

Произведением пространств $C_p(Y_\gamma)$ *по типу* c_0 называется подпространство

$$\Big\{g = \{g_\gamma\}_{\gamma \in A} \in \prod_{\gamma \in A} C_p(Y_\gamma) : \forall \epsilon > 0 \text{ множество } \{\gamma : \sup_{t \in Y_\gamma} |g_\gamma(t)| \geq \epsilon\} \text{ конечно}\Big\}$$

в произведении $\prod\limits_{\gamma \in A} C_p(Y_\gamma)$. Будем обозначать его через $\big(\prod\limits_{\gamma \in A} C_p(Y_\gamma)\big)_{c_0}$.

Из этого определения следует, что для любого элемента $g \in \big(\prod\limits_{\gamma \in A} C_p(Y_\gamma)\big)_{c_0}$ множество $\{\gamma : \sup\limits_{t \in Y_\gamma} |g_\gamma(t)| \neq 0\}$ счетно.

Нетрудно видеть также, что $\big(\prod\limits_{\gamma \in A} C_p(Y_\gamma)\big)_{c_0}$ — линейное подпространство в $\prod\limits_{\gamma \in A} C_p(Y_\gamma)$ и

$$\Big(\prod_{\gamma \in A} C_p(Y_\gamma)\Big)_{c_0} \sim \Big\{g \in C_p\Big(\bigoplus_{\gamma \in A} Y_\gamma\Big) : \forall \epsilon > 0 \ \{\gamma : \sup_{t \in Y_\gamma} |g(t)| \geq \epsilon\} \text{ конечно}\Big\}.$$

Теорема 3. *Пусть $\omega_1 \leq \alpha < \beta$. Пространства $C_p(S_\alpha)$ и $C_p(S_\beta)$ линейно гомеоморфны тогда и только тогда, когда пространства $C_p[1, \alpha]$ и $C_p[1, \beta]$ линейно гомеоморфны.*

Доказательство. Необходимость. Пусть T — линейный гомеоморфизм пространства $C_p(S_\alpha)$ на пространство $C_p(S_\beta)$, где $\alpha < \beta$. Предположим, что пространства $C_p[1, \alpha]$ и $C_p[1, \beta]$ не линейно гомеоморфны. Отождествляя точку $t = 1 \in Y_\gamma$ с точкой γ, можно считать, что компакт $[1, \beta]$ содержится в S_β. Положим $L = \overline{\operatorname{supp}[1, \beta]} \subset S_\alpha$, где $\operatorname{supp}[1, \beta] = \bigcup\limits_{\gamma \in [1, \beta]} \operatorname{supp} T^* \delta_\gamma$. Известно [9], что подмножество $L \subset S_\alpha$ является компактом и обладает свойством:

$$\text{если } f|_L = 0, \text{ то } Tf|_{[1, \beta]} = 0. \tag{9}$$

Поскольку компакт L является вполне упорядоченным множеством в пространстве S_α, он подобен некоторому отрезку ординалов $[1, \eta]$. В силу компактности L отображение подобия является гомеоморфизмом компакта L и отрезка ординалов $[1, \eta]$, наделенного порядковой топологией. Следовательно,

$$C_p[1, \eta] \sim C_p(L). \tag{10}$$

Так как компакты в пространстве S_α являются ретрактами, существует непрерывный оператор продолжения $U : C_p(L) \to C_p(S_\alpha)$. Это означает, что пространства $C_p(S_\alpha)$ и $C_p(S_\beta)$ можно представить в виде

$$C_p(S_\alpha) = C_p^0(S_\alpha, L) \times C_p(L), \quad C_p(S_\beta) = C_p^0(S_\beta, [1, \beta]) \times C_p[1, \beta],$$

где $C_p^0(S_\alpha, L)$ — подпространство всех непрерывных функций $x \in C_p(S_\alpha, L)$ таких, что $x|_L \equiv 0$. В силу свойства (9) пространство $T\big(C_p^0(S_\alpha, L)\big)$ входит в пространство $C_p^0(S_\beta,[1,\beta])$ и является в нем дополняемым подпространством. Следовательно, существует замкнутое подпространство $Z \subset C_p^0(S_\beta,[1,\beta])$ такое, что

$$C_p^0(S_\beta,[1,\beta]) \sim T\big(C_p^0(S_\alpha,L)\big) \times Z.$$

Отсюда

$$C_p(S_\beta) \sim C_p^0(S_\beta,[1,\beta]) \times C_p[1,\beta] \sim T\big(C_p^0(S_\alpha,L)\big) \times Z \times C_p[1,\beta]. \qquad (11)$$

С другой стороны,

$$C_p(S_\beta) = T(C_p(S_\alpha)) \sim T\big(C_p^0(S_\alpha,L)\big) \times T(C_p(L)). \qquad (12)$$

Поскольку все дополнения к пространству $T\big(C_p^0(S_\alpha,L)\big)$ в $C_p(S_\beta)$ линейно гомеоморфны, из формул (10)–(12) получаем

$$C_p[1,\eta] \sim C_p(L) \sim T(C_p(L)) \sim Z \times C_p[1,\beta]. \qquad (13)$$

Таким образом, пространство $C_p[1,\beta]$ линейно гомеоморфно дополняемому подпространству в $C_p[1,\eta]$.

Докажем, что если $L \subset S_\alpha$ и L гомеоморфно $[1,\eta]$, то $C_p[1,\eta]$ дополняемо вкладывается в $C_p[1,\alpha]$. Действительно, согласно [10] ординалы α и η можно представить в виде

$$\alpha = \omega^\delta \cdot n + \rho,\ \text{где}\ \rho < \omega^\delta, \quad \eta = \omega^\xi \cdot k + r,\ \text{где}\ r < \omega^\xi.$$

По лемме 1

$$L^{(\delta)} \subset [1,\alpha]^{(\delta)} = \{\omega^\delta, \omega^\delta \cdot 2, \dots, \omega^\delta \cdot n\}, \qquad (14)$$

т. е. $L^{(\delta)}$ — конечное подмножество, состоящее не более чем из n точек, возможно, пустое. Поскольку $\eta = \omega^\xi \cdot k + r$, имеем $[1,\eta]^{(\xi)} = \{\omega^\xi, \omega^\xi \cdot 2, \dots, \omega^\xi \cdot k\}$. Отсюда, если $[1,\eta]^{(\delta)} = \varnothing$, то $\xi < \delta$, следовательно, $\eta < \alpha$, значит, $C_p[1,\eta]$ дополняемо вкладывается в пространство $C_p[1,\alpha]$.

Если $[1,\eta]^{(\delta)}$ состоит из конечного числа точек, то $\delta = \xi$. Так как $[1,\eta]^{(\delta)} = [1,\eta]^{(\xi)}$ состоит из k точек и $L^{(\delta)} \sim [1,\eta]^{(\delta)}$, из (14) следует, что $k \le n$. Стало быть, пространство $C_p[1,\omega^\xi \cdot k]$ дополняемо вкладывается в пространство $C_p[1,\alpha]$. Поскольку $C_p[1,\omega^\xi \cdot k] \sim C_p[1,\eta]$, то $C_p[1,\eta]$ дополняемо вкладывается в $C_p[1,\alpha]$.

Таким образом, учитывая (13), получаем, что пространство $C_p[1,\beta]$ дополняемо вкладывается в пространство $C_p[1,\alpha]$. В силу того, что $\alpha < \beta$, пространство $C_p[1,\alpha]$ линейно гомеоморфно дополняемому подпространству в $C_p[1,\beta]$.

Поскольку каждое из пространств $C_p[1,\alpha]$ и $C_p[1,\beta]$ гомеоморфно подпространству другого, имеем [8]

$$|[1,\alpha]| = w(C_p[1,\alpha]) = w(C_p[1,\beta]) = |[1,\beta]|. \qquad (15)$$

Обозначим через λ начальный ординал, для которого $|\lambda| = |\alpha|$. Тогда $\lambda \le \alpha < \beta < \lambda_+$, где λ_+ — наименьший начальный ординал, превосходящий λ. Далее рассмотрим следующие три случая.

1. λ — сингулярный ординал. В этом случае, как доказано в [11], пространства $C_p[1,\beta]$ и $C_p[1,\alpha]$ линейно гомеоморфны своим квадратам. Применяя схему разложения Пелчинского [12], получаем, что пространства $C_p[1,\beta]$ и $C_p[1,\alpha]$ линейно гомеоморфны.

2. λ — регулярный ординал и $\beta \ge \lambda \cdot \omega$. Тогда из результатов в [11] следует, что $C_p[1,\beta] \sim C_p[1,\beta \cdot \omega] \sim \big(\prod_{\aleph_0} C_p[1,\beta]\big)_{c_0}$. Так как $C_p[1,\beta \cdot \omega]$ линейно

гомеоморфно своему счетному c_0-произведению $\big(\prod\limits_{\aleph_0} C_p[1,\beta]\big)_{c_0}$, применяя схему разложения Пелчинского [12], получаем, что пространства $C_p[1,\beta]$ и $C_p[1,\alpha]$ линейно гомеоморфны.

3. λ — регулярный ординал и $\beta < \lambda\cdot\omega$, т. е. $\beta = \lambda\cdot k + \rho$, $\rho < \lambda$. Поскольку $\lambda \le \alpha < \beta$, то $\alpha = \lambda\cdot m + r$, где $m < k$ или $m = k$ и $r < \rho$. Так как

$$C_p(S_\alpha) = C_p(S_{\lambda\cdot m+r}) \sim C_p(S_{\lambda\cdot m}), \quad C_p(S_\beta) = C_p(S_{\lambda\cdot k+\rho}) \sim C_p(S_{\lambda\cdot k})$$

и по условию теоремы $C_p(S_\alpha) \sim C_p(S_\beta)$, по теореме 2 получаем, что $k = m$. Следовательно, пространства $C_p[1,\beta]$ и $C_p[1,\alpha]$ линейно гомеоморфны.

Достаточность. Пусть пространства $C_p[1,\alpha]$ и $C_p[1,\beta]$ линейно гомеоморфны. Нетрудно видеть, что

$$C_p(S_\alpha) \sim C_p[1,\alpha] \times C_p^0(S_\alpha,[1,\alpha]) \sim C_p[1,\alpha] \times \Big(\prod_{0\le\gamma<\alpha} C_p^0(Y_{\gamma+1})\Big)_{c_0},$$

где $C_p^0(Y_{\gamma+1}) = \{x \in C_p(Y_{\gamma+1}) : x(1) = 0\}$. Аналогично

$$C_p(S_\beta) \sim C_p[1,\beta] \times \Big(\prod_{0\le\delta<\beta} C_p^0(Y_{\delta+1})\Big)_{c_0}.$$

Так как по условию пространства $C_p[1,\alpha]$ и $C_p[1,\beta]$ линейно гомеоморфны и в силу (15)

$$\Big(\prod_{0\le\gamma<\alpha} C_p^0(Y_{\gamma+1})\Big)_{c_0} = \Big(\prod_{0\le\delta<\beta} C_p^0(Y_{\delta+1})\Big)_{c_0},$$

получаем, что пространства $C_p(S_\alpha)$ и $C_p(S_\beta)$ линейно гомеоморфны. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть α и β — счетные ординалы. Тогда пространства $C_p(S_\alpha)$ и $C_p(S_\beta)$ линейно гомеоморфны.*

Доказательство. Разложим пространство $C_p(S_\alpha)$ следующим образом:

$$C_p(S_\alpha) \sim C_p[1,\alpha] \times \Big\{\prod_{0\le\gamma<\alpha} C_p^0(Y_{\gamma+1})\Big\}_{c_0} = C_p[1,\alpha] \times \big(C_p^0(0,1] \times \dots \times C_p^0(0,1] \times \cdots\big)_{c_0},$$

где $C_p^0(0,1] = \{x \in C_p(0,1] : x(1) = 0\}$. Поскольку для любого счетного ординала α пространство $C_p[1,\alpha]$ дополняемо вкладывается в $C_p^0(0,1]$, то $C_p(S_\alpha)$ дополняемо вкладывается в пространство $\big(C_p^0(0,1] \times \dots \times C_p^0(0,1] \times \cdots\big)_{c_0}$, которое, в свою очередь, дополняемо вкладывается в $C_p(S_\alpha)$. Так как пространство $\big(C_p(0,1] \times C_p^0(0,1] \times \dots \times C_p^0(0,1] \times \cdots\big)_{c_0}$ линейно гомеоморфно своему счетному c_0-произведению, применяя схему разложения Пелчинского [12], имеем

$$C_p(S_\alpha) \sim \big(C_p(0,1] \times C_p^0(0,1] \times \dots \times C_p^0(0,1] \times \cdots\big)_{c_0}.$$

Аналогичную формулу получаем для $C_p(S_\beta)$, следовательно, $C_p(S_\alpha) \sim C_p(S_\beta)$. Теорема доказана.

Авторы выражают благодарность профессору Сергею Порфирьевичу Гулько за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bessaga C., Pelczyński C.* On isomorphic classification of spaces of continuous functions // Studia Math. 1960. V. 19. P. 53–62.

2. *Semadeni Z.* Banach spaces non-isomorphic to their Cartesian squares // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. Stron. Phys. 1960. V. 8. P. 81–84.

3. *Гулько С. П., Оськин А. В.* Изоморфная классификация пространств непрерывных функций на вполне упорядоченных бикомпактах // Функцион. анализ и его прил. 1975. Т. 9, № 1. С. 61–62.

4. *Кисляков С. В.* Классификация пространств непрерывных функций // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 2. С. 293–300.

5. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.

6. *Федорчук В. В.* О бикомпактах с несовпадающими размерностями // Докл. АН СССР. 1968. Т. 182, № 2. С. 229–308.

7. *Burke D. K., Moore J. T.* Subspaces of the Sorgenfrey line // Topology Appl. 1988. V. 90. P. 57–68.

8. *Архангельский А. В.* Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989.

9. *Архангельский А. В.* О линейных гомеоморфизмах пространств функций // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264, № 6. С. 1289–1292.

10. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970.

11. *Гулько С. П.* Свободные топологические группы и пространства непрерывных функций на ординалах // Вестн. Том. гос. ун-та. 2003. № 280. С. 34–38.

12. *Пелчинский А.* Линейные продолжения, линейные усреднения и их применение к линейной топологической классификации пространств непрерывных функций. М.: Мир, 1979.

Статья поступила 9 июня 2015 г.

Трофименко Надежда Николаевна, Хмылева Татьяна Евгеньевна
Томский гос. университет, механико-математический факультет,
кафедра теории функций,
пр. Ленина, 36, Томск 634050
`trofimenko@sibmail.com`, `TEX2150@yandex.ru`