Сибирский математический журнал
Июль—август, 2016. Том 57, № 4

УДК 517.951

ПОВЕДЕНИЕ НА БОЛЬШИХ ПРОМЕЖУТКАХ ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЗАТУХАНИЕМ

З. Т. Луен, Н. М. Чи

Аннотация. Изучается асимптотическое поведение решений гиперболических уравнений с затуханием, в которых участвуют сильно вырожденные дифференциальные операторы. Для рассматриваемого гиперболического уравнения установлено существование глобального аттрактора и доказана его конечномерность.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.407

Ключевые слова: глобальное решение, глобальный аттрактор, функционал Ляпунова, вырожденное гиперболическое уравнение с затуханием, l-траектория, конечномерность аттракторов.

§ 1. Введение

Выяснение асимптотического поведения динамических систем является важной задачей современной математической физики. Один из подходов к решению этой задачи для диссипативной динамической системы состоит в рассмотрении ее глобального аттрактора. Существование глобальных аттракторов было установлено для различных нелинейных диссипативных параболических и гиперболических уравнений с частными производными, содержащими эллиптические операторы (см., например, [1–4] и библиографию в них).

Одним из классов вырожденных эллиптических уравнений, широко исследовавшимся в последние годы, является класс уравнений с оператором типа Грушина (см. [5, 6])

$$G_\alpha u = \Delta_x u + |x|^{2\alpha}\Delta_y u, \quad \alpha \geq 0.$$

Заметим, что $G_0 = \Delta$ — оператор Лапласа и при $\alpha > 0$ оператор G_α не является эллиптическим в областях, пересекающих поверхность $x = 0$. В [7] рассмотрен сильно вырожденный эллиптический оператор, вырождающийся на двух пересекающихся поверхностях, и установлены некоторые теоремы о компактном вложении для весовых пространств Соболева, ассоциированных с таким оператором в ограниченных областях. Этот оператор попадает в класс Δ_λ-операторов, рассмотренных позднее в [8, 9]. Многие аспекты теории вырожденных эллиптических дифференциальных операторов представлены в [10, 11].

This research is funded by Vietnam National Foundation for Science and Technology Development (NAFOSTED) under grant number 101.02–2014.50.

В данной статье нас интересует глобальное существование и поведение при $t \to \infty$ решений следующей задачи:

$$u_{tt} + \gamma u_t = P_{\alpha,\beta} u + f(X,u), \quad X \in \Omega,\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(X,t) = 0, \quad X \in \partial\Omega,\ t > 0, \tag{2}$$

$$u(X,0) = u_0(X), \quad u_t(X,0) = u_1(X), \tag{3}$$

где Ω — ограниченная область с гладкой границей в $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3} = \mathbb{R}^N (N_1, N_2, N_3 \geq 1)$, γ — положительная константа, $X = (x,y,z)$ и $P_{\alpha,\beta}$ — сильно вырожденный эллиптический оператор

$$P_{\alpha,\beta} u := \Delta_x u + \Delta_y u + |x|^{2\alpha} |y|^{2\beta} \Delta_z u,$$

где $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta \geq 0$ и

$$\Delta_x = \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad \Delta_y = \sum_{j=1}^{N_2} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}, \quad \Delta_z = \sum_{k=1}^{N_3} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$|x|^{2\alpha} = \left(\sum_{i=1}^{N_1} x_i^2 \right)^{\alpha}, \quad |y|^{2\beta} = \left(\sum_{j=1}^{N_2} y_j^2 \right)^{\beta}.$$

Мы предполагаем, что $f(X,\xi) : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция от ξ для почти всех $X \in \Omega$, измеримая в X для всех $\xi \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющая неравенству

$$|f(X,\xi_1) - f(X,\xi_2)| \leq C|\xi_1 - \xi_2|(g(X) + |\xi_1|^{\rho} + |\xi_2|^{\rho}), \tag{4}$$

где $0 \leq \rho \leq \frac{2}{N_{\alpha,\beta} - 2}$, $N_{\alpha,\beta} = N_1 + N_2 + (1 + \alpha + \beta) N_3 > 2$,

$$f(X,0) = h(X) \in L^2(\Omega), \tag{5}$$

$$F(X,\xi) = \int\limits_0^{\xi} f(X,\tau)\, d\tau \leq g_1(X) + g_2(X)\xi^2, \tag{6}$$

$$f(X,\xi)\xi \leq g_3(X) + g_4(X)\xi^2. \tag{7}$$

Здесь $\rho, C > 0$ — константы и

$$g_1(X), g_3(X) \in L^1(\Omega), \quad g_2(X) \in L^{\frac{N_{\alpha,\beta}}{2}}(\Omega), \quad g_4(X) \in L^{\frac{N_{\alpha,\beta}}{2}}(\Omega),$$

$$\|g_2\|_{L^{\frac{N_{\alpha,\beta}}{2}}(\Omega)} < \frac{1}{2C^2(2^*_{\alpha,\beta}, \Omega)}, \quad \|g_4\|_{L^{\frac{N_{\alpha,\beta}}{2}}(\Omega)} < \frac{1}{C^2(2^*_{\alpha,\beta}, \Omega)},$$

где $C(2^*_{\alpha,\beta}, \Omega)$ — лучшая константа в неравенстве Соболева

$$\|u\|_{L^{\frac{2N_{\alpha,\beta}}{N_{\alpha,\beta}-2}}(\Omega)} \leq C(2^*_{\alpha,\beta}, \Omega) \|u\|_{S^2_{1,0}(\Omega)}$$

и $g(X)$ — неотрицательная функция, $g(X) \in L^{N_{\alpha,\beta}}(\Omega)$, если $\rho = 0$, и $g(X) \in L^{\frac{2N_{\alpha,\beta}}{(N_{\alpha,\beta}-2)\rho}}(\Omega)$, если $\rho \neq 0$.

Для случая $\alpha = \beta = 0$ существование глобального аттрактора для задачи (1)–(3) установлено А. В. Бабиным [1] и Хейлом [12] для функции $f(X,u) = f(u)$, удовлетворяющей при $N_{0,0} := N \geq 3$ условию роста

$$f \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}), \quad |f(\xi)| \leq C_0(|\xi|^{\rho+1} + 1),$$

где $0 \leq \rho < \frac{2}{N-2}$. Для $N = 2$ в [13] доказано существование аттрактора при условии экспоненциального роста

$$f \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}), \quad |f(\xi)| \leq e^{\theta(\xi)},$$

с некоторой непрерывной функцией θ, удовлетворяющей соотношению

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \frac{\theta(\xi)}{\xi^2} = 0.$$

Существование аттрактора в критическом случае $\rho = \frac{2}{N-2}$ установлено в [14]. Существование глобального аттрактора для задачи (1)–(3) доказано в [4], а то, что глобальный аттрактор имеет конечную фрактальную размерность, доказано в [15] для функций $f(X,u) = g(u) + h(X)$, $h(X) \in L^2(\Omega)$, $g(u) \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \inf \frac{G(\xi)}{\xi^2} \geq 0, \quad \lim_{|\xi|\to\infty} \inf \frac{\xi g(\xi) - c_1 G(\xi)}{\xi^2} \geq 0, \quad G(\xi) = \int\limits_0^\xi g(s)\,ds, \quad c_1 > 0,$$

и

$$|g'(\xi)| \leq C_2(1 + |\xi|^\rho) \ \text{ с } \begin{cases} 0 \leq \rho < \infty, & \text{если } n = 1, 2, \\ 0 \leq \rho < 2, & \text{если } n = 3, \\ \rho = 0 \text{ (т. е. } g' \text{ ограничена)}, & \text{если } n \geq 4. \end{cases}$$

Поведение при $t \to \infty$ полулинейных параболических уравнений изучалось в [16–18]. В [16] исследовались полулинейные параболические уравнения, содержащие операторы типа Грушина. В [18] рассмотрены полулинейные вырожденные параболические операторы с сильно вырожденным эллиптическим оператором. Совсем недавно в [17] были изучены существование и конечномерность глобальных аттракторов для полулинейных вырожденных параболических уравнений, содержащих так называемые X-эллиптические операторы. Хотя класс X-эллиптических операторов содержит наш оператор, используемый здесь метод отличается от предложенного в [17], и нам представляется, что этот метод также применим к уравнениям, рассмотренным в [17]. Полученный нами с использованием этого метода результат содержит в себе широкий класс нелинейных возмущений, в частности, критический случай $\rho = \frac{2}{N_{\alpha,\beta}-2}$.

Структура нашей статьи следующая. В § 2 приведены предварительные результаты о существовании глобальных слабых решений. В § 3 установлено существование глобального аттрактора для задачи (1)–(3). В § 4 доказана конечномерность глобального аттрактора.

§ 2. Существование и единственность глобального мягкого решения

2.1. Существование глобальных аттракторов в абстрактном случае. Для удобства читателя здесь приводятся некоторые используемые в дальнейшем определения и результаты из теории бесконечномерных динамических диссипативных систем в [19–21].

Пусть H — метрическое пространство (не обязательно полное) с метрикой d. Если $C \subset H$ и $b \in H$, то полагаем $\rho(b,C) := \inf\limits_{c\in C} d(b,c)$, а если $B \subset H, C \subset H$, то полагаем $\operatorname{dist}(B,C) := \sup\limits_{b\in B} \rho(b,C)$. Пусть $S(t)$ — непрерывная полугруппа на метрическом пространстве H.

Множество $\mathscr{A} \subset H$ называется *инвариантным*, если $S(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}$ для любого $t \geq 0$.

Положительная орбита элемента $x \in H$ — это множество $\gamma^+(x) = \{S(t)x, t \geq 0\}$. Если $B \subset H$, то положительная орбита множества B — это множество

$$\gamma^+ = \bigcup_{t\geq 0} S(t)B = \bigcup_{z\in B} \gamma^+(z).$$

Более общо, для $\tau \geq 0$ орбита множества B после момента времени τ — это

$$\gamma_\tau^+(B) = \gamma^+(S(\tau)B).$$

Множество $\mathscr{A} \subset H$ — аттрактор множества B, если $\operatorname{dist}(S(t)B, \mathscr{A}) \to 0$ при $t \to \infty$.

Подмножество $\mathscr{A}$ называется *глобальным аттрактором*, если $\mathscr{A}$ замкнуто, ограничено, инвариантно и является аттрактором всех ограниченных подмножеств в B.

Множество вида

$$\omega(u) = \{\xi \in H : u(t_n) \to \xi \quad \text{для некоторой последовательности } t_n \to \infty\}$$

называют *ω-предельным для $u \in H$*.

Полугруппа $S(t)$ называется *асимптотически компактной*, если для всякого ограниченного подмножества B в H такого, что множество $\gamma_\tau^+(B)$ ограничено для некоторого $\tau \geq 0$ и всякое множество вида $S(t_n)z_n$, где $z_n \in B$ и $t_n \geq \tau$, $t_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$, относительно компактно.

Непрерывная полугруппа $S(t)$ называется *непрерывной градиентной системой*, если существует функционал $\Phi \in C(H, \mathbb{R})$ такой, что $\Phi(S(t)u) \leq \Phi(u)$ для всех $t \geq 0$, $u \in H$ и соотношение $\Phi(S(t)u) = \Phi(u)$ для всех $t \geq 0$ влечет, что u — точка равновесия, т. е. $S(t)u = u$ при любом $t \geq 0$. В этом случае функционал Φ называется *строгим функционалом Ляпунова*.

Пусть E — множество точек равновесия полугруппы $S(t)$. Дадим определение нестабильного множества в E следующим образом:

$$W^u(E) = \{y \in H : S(-t)y \text{ определено для } t \geq 0 \text{ и } S(-t)y \to E \text{ при } t \to +\infty\}.$$

Из предложения 2.19 и теоремы 4.6 в [21] имеем следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $S(t), t \geq 0$, — асимптотически компактная градиентная система, обладающая тем свойством, что для всякого ограниченного множества $B \subset H$ существует $\tau \geq 0$, для которого множество $\gamma_\tau^+(B)$ ограничено. Если множество точек равновесия E ограничено, то $S(t)$ имеет компактный глобальный аттрактор $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A} = W^u(E)$. Кроме того, если H — банахово пространство, то множество $\mathscr{A}$ связно.*

Если глобальный аттрактор $\mathscr{A}$ существует, то он содержит минимальный глобальный аттрактор $\mathscr{M}$, определяемый как минимальное замкнутое положительно инвариантное множество со свойством

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(S(t)y, \mathscr{M}) = 0 \quad \text{для любого } y \in H.$$

Кроме того, если $\mathscr{M}$ компактен, то он инвариантен и $\mathscr{M} = \bigcup\limits_{z\in H} \omega(z)$.

2.2. Функциональные пространства и операторы.

Определение 1. Символом $S_1^2(\Omega)$ обозначим множество всех функций $u \in L^2(\Omega)$ таких, что $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial y_j} \in L^2(\Omega)$, $|x|^\alpha |y|^\beta \frac{\partial u}{\partial z_k} \in L^2(\Omega)$ для всех $i = 1, \dots, N_1$, $j = 1, \dots, N_2$, $k = 1, \dots, N_3$. Определим норму в этом пространстве следующим образом:

$$\|u\|_{S_1^2(\Omega)} = \left\{ \int\limits_\Omega (|u|^2 + |\nabla_{\alpha,\beta} u|^2)\, dX \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $\nabla_{\alpha,\beta} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_{N_1}}, \frac{\partial u}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial y_{N_2}}, |x|^\alpha |y|^\beta \frac{\partial u}{\partial z_1}, \dots, |x|^\alpha |y|^\beta \frac{\partial u}{\partial z_{N_3}}\right)$, и

$$|\nabla_{\alpha,\beta} u| := \left(\sum_{i=1}^{N_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 + \sum_{j=1}^{N_2} \left| \frac{\partial u}{\partial y_j} \right|^2 + |x|^{2\alpha} |y|^{2\beta} \sum_{k=1}^{N_3} \left| \frac{\partial u}{\partial z_k} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Снабдим $S_1^2(\Omega)$ скалярным произведением

$$(u, v)_{S_1^2(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla_{\alpha,\beta} u, \nabla_{\alpha,\beta} v)_{L^2(\Omega)}.$$

Пространство $S_{1,0}^2(\Omega)$ определяется как замыкание $C_0^1(\Omega)$ в пространстве $S_1^2(\Omega)$.

Следующее неравенство вложения доказано в [7, 11]:

$$\left(\int\limits_\Omega |u|^p \, dX \right)^{\frac{1}{p}} \le C(p, \Omega) \|u\|_{S_{1,0}^2(\Omega)},$$

где $1 \le p \le \frac{2N_{\alpha,\beta}}{N_{\alpha,\beta} - 2}$, $C(p, \Omega) > 0$. Кроме того, число $2^*_{\alpha,\beta} = \frac{2N_{\alpha,\beta}}{N_{\alpha,\beta} - 2}$ является критическим показателем Соболева для вложения $S_{1,0}^2(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, и при $1 \le p < 2^*_{\alpha,\beta}$ вложение компактно.

Положим

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ P_{\alpha,\beta} & 0 \end{pmatrix}, \quad f^*(X, U) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma v + f(X, u) \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

Задача (1)–(3) эквивалентна задаче

$$\frac{dU}{dt} = AU + f^*(X, U), \quad t > 0,\ X \in \Omega, \tag{8}$$

$$U(0) = U_0. \tag{9}$$

Положим $H = S_{1,0}^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Рассматриваем H как гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(U, \overline{U})_H = \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar u \\ \bar v \end{pmatrix} \right) = (\nabla_{\alpha,\beta} u, \nabla_{\alpha,\beta} \bar u)_{L^2(\Omega)} + (v, \bar v)_{L^2(\Omega)}.$$

Область определения $D(A)$ оператора A выглядит следующим образом:

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},\ u, v \in S_{1,0}^2(\Omega);\ P_{\alpha,\beta} u \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Лемма 1. *Сопряженный к A^* оператор A определяется формулой*

$$A^* = -\begin{pmatrix} 0 & I \\ P_{\alpha,\beta} & 0 \end{pmatrix},$$

причем

$$D(A^*) = \left\{ \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} : \chi, \psi \in S^2_{1,0}(\Omega);\ P_{\alpha,\beta}\chi \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Доказательство. Из определения сопряженного оператора следует, что $\begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} \in D(A^*)$ и $A^* \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ тогда и только тогда, когда

$$\left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ P_{\alpha,\beta}u \end{pmatrix} \right) \quad \text{для всех } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A),$$

что выполняется в том и только том случае, если

$$(\nabla_{\alpha,\beta}p, \nabla_{\alpha,\beta}u)_{L^2(\Omega)} = (\psi, P_{\alpha,\beta}u)_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in S^2_{1,0}(\Omega),\ P_{\alpha,\beta}u \in L^2(\Omega), \tag{10}$$

$$(q, v)_{L^2(\Omega)} = (\nabla_{\alpha,\beta}\chi, \nabla_{\alpha,\beta}v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in S^2_{1,0}(\Omega). \tag{11}$$

Из формулы Гаусса — Грина имеем

$$(\nabla_{\alpha,\beta}p, \nabla_{\alpha,\beta}u)_{L^2(\Omega)} = -(p, P_{\alpha,\beta}u)_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in S^2_{1,0}(\Omega),\ P_{\alpha,\beta}u \in L^2(\Omega),$$

и потому формула (10) эквивалентна равенству

$$(p + \psi, P_{\alpha,\beta}u)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall u \in S^2_{1,0}(\Omega),\ P_{\alpha,\beta}u \in L^2(\Omega).$$

Следовательно, $p = -\psi$. Но соотношение (11) выполняется тогда и только тогда, когда $P_{\alpha,\beta}\chi \in L^2(\Omega)$ и $q = -P_{\alpha,\beta}\chi$. Это завершает доказательство. □

2.3. Глобальные решения.

Лемма 2. *Предположим, что функция $f(X, \xi)$ удовлетворяет условиям* (4), (5). *Справедливы следующие утверждения.*

(a) *Отображение Немыцкого*

$$f : S^2_{1,0}(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega), \quad u \longmapsto f(X, u(X))$$

липшицево на всяком ограниченном множестве в $S^2_{1,0}(\Omega)$.

(b) *Отображение $f^*(X, U) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma v + f(X, u) \end{pmatrix} : H \longrightarrow H$ липшицево на всяком ограниченном множестве в H.*

Доказательство. (a) Из (4) вытекает, что

$$|f(X, u)|^2 \le C(g^2(X)|u|^2 + |u|^{2(\rho+1)} + |h(X)|^2).$$

Значит,

$$\int\limits_\Omega |f(X, u)|^2\, dX \le C \left\{ \int\limits_\Omega (g^2(X)|u|^2 + |u|^{2(1+\rho)})\, dX + \int\limits_\Omega |h(X)|^2\, dX \right\}$$
$$\le C\big(\|g\|^2_{L^{N_{\alpha,\beta}}(\Omega)} \|u\|^2_{L^{2^*_{\alpha,\beta}}(\Omega)} + \|u\|^{2(1+\rho)}_{L^{2(1+\rho)}(\Omega)} + \|h\|^2_{L^2(\Omega)}\big) < +\infty.$$

Поскольку пространство $S^2_{1,0}(\Omega)$ непрерывно вложено в $L^{2^*_{\alpha,\beta}}(\Omega)$, заключаем, что f — отображение из $S^2_{1,0}(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$.

Пусть теперь $u, v \in S^2_{1,0}(\Omega), R > 0$ и $\|u\|_{S^2_{1,0}(\Omega)} \le R$, $\|v\|_{S^2_{1,0}(\Omega)} \le R$. Имеем

$$\int\limits_\Omega |f(X,u) - f(X,v)|^2\,dX \le C\int\limits_\Omega |u-v|^2(g^2(X) + |u|^{2\rho} + |v|^{2\rho})\,dX$$
$$\le C\int\limits_\Omega g^2(X)|u-v|^2\,dX + C\int\limits_\Omega |u-v|^2|u|^{2\rho}\,dX + C\int\limits_\Omega |u-v|^2|v|^{2\rho}\,dX.$$

Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\int\limits_\Omega g^2(X)|u-v|^2\,dX \le \|g\|^2_{L^{N_{\alpha,\beta}}(\Omega)}\|u-v\|^2_{L^{2^*_{\alpha,\beta}}(\Omega)},$$
$$\int\limits_\Omega |u-v|^2|u|^{2\rho}\,dX \le \|u\|^{2\rho}_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}\|u-v\|^2_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)},$$
$$\int\limits_\Omega |u-v|^2|v|^{2\rho}\,dX \le \|v\|^{2\rho}_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}\|u-v\|^2_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}.$$

Так как пространство $S^2_{1,0}(\Omega)$ непрерывно вложено в $L^{2^*_{\alpha,\beta}}(\Omega)$ и $1 < 2(\rho+1) \le 2^*_{\alpha,\beta}$, то

$$\|f(X,u) - f(X,v)\|^2_{L^2(\Omega)} \le C_1\|u-v\|^2_{S^2_{1,0}(\Omega)}\big(1 + \|u\|^{2\rho}_{S^2_{1,0}(\Omega)} + \|v\|^{2\rho}_{S^2_{1,0}(\Omega)}\big),$$

или

$$\|f(X,u) - f(X,v)\|_{L^2(\Omega)} \le C(R)\|u-v\|_{S^2_{1,0}(\Omega)}.$$

(b) Пусть $R > 0$, $U, \overline{U} \in H$ и $\|U\|_H \le R$, $\|\overline{U}\|_H \le R$. Имеем

$$f^*(X,U) - f^*(X,\overline{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma\bar{v} - \gamma v + f(X,u) - f(X,\bar{u}) \end{pmatrix}.$$

Отсюда выводим, что

$$\|f^*(X,U) - f^*(X,\overline{U})\|^2_H = \|\gamma\bar{v} - \gamma v + f(X,u) - f(X,\bar{u})\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\le 2\|\gamma\bar{v} - \gamma v\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|f(X,u) - f(X,\bar{u})\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\le 2\gamma^2\|\bar{v} - v\|^2_{L^2(\Omega)} + 2C\|u-\bar{u}\|^2_{S^2_{1,0}(\Omega)}\big(1 + \|u\|^{2\rho}_{S^2_{1,0}(\Omega)} + \|\bar{u}\|^{2\rho}_{S^2_{1,0}(\Omega)}\big)$$
$$\le C_1(R)\|U - \overline{U}\|^2_H.$$

Это завершает доказательство. $\square$

Из леммы 1 с учетом теоремы 10.8 из [22] вытекает, что A порождает C_0-полугруппу E^{At} на H.

Определение 2 (см. [23]). Пусть $T > 0, T \in \mathbb{R}$. Непрерывное отображение $U : [0,T) \to H$ называют *мягким решением задачи* (8), (9), если оно является решением интегрального уравнения

$$U(X,t) = e^{At}U_0 + \int\limits_0^t e^{A(t-s)}f^*(U(s))\,ds, \quad t \in [0,T).$$

Если U (сильно) дифференцируема почти всюду на $[0,T)$ и U_t, AU принадлежат $L^1_{\mathrm{loc}}([0,T),H)$, а U почти всюду в $[0,T)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dU}{dt} = AU + f^*(U), \quad U(0) = U_0,$$

то U называют *сильным решением задачи* (8), (7).

Используя лемму 2, а также теоремы 46.1 и 46.2 из [23], получаем

Предложение 1. *Пусть функция $f(X,u)$ удовлетворяет условиям* (4), (5). *Тогда для любых $R > 0$ и $U_0 \in H$ таких, что $\|U_0\|_H \le R$, существует достаточно малое $T = T(R) > 0$ такое, что задача* (8), (9) *имеет единственное мягкое решение $U \in C([0,T];H)$. Более того, если $U_0 \in D(A)$, то $U \in C([0;T],D(A)) \cap C^1([0,T],H)$ — сильное решение задачи* (8), (9).

Из (4), (5) следует, что

$$|F(X,u)| \le C(g(X)|u|^2 + |u|^{2+\rho} + |f(X,0)||u|).$$

Значит,

$$\int\limits_\Omega |F(X,u)|\,dX \le C\int\limits_\Omega (g(X)|u|^2 + |u|^{2+\rho} + |h(X)||u|)\,dX$$
$$\le C\big(\|g\|_{L^{\frac{N_{\alpha,\beta}}{2}}(\Omega)}\|u\|^2_{L^{2^*_{\alpha,\beta}}(\Omega)} + \|u\|^{2+\rho}_{L^{2+\rho}(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}\big) < +\infty.$$

Поэтому имеет смысл ввести функционал Ляпунова, определенный на траекториях решений, найденных в предложении 1:

$$\Phi(U) = \frac{1}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u\|^2_{S^2_{1,0}(\Omega)} - \int\limits_\Omega F(X,u(X))\,dX. \tag{12}$$

Умножая (1) на u_t и интегрируя по Ω, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\nabla_{\alpha,\beta}u\|^2_{L^2(\Omega)} - \int\limits_\Omega F(X,u(X))\,dX\right) = -\gamma\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\Phi(U(t)) = -\gamma\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{13}$$

Теорема 2. *Пусть $f(X,u)$ удовлетворяет условиям* (4)–(6) *и $U_0 \in H$. Тогда задача* (1)–(3) *имеет единственное глобальное решение $U \in C([0,\infty);H)$.*

Доказательство. Единственность локального решения была получена в предложении 1. Покажем, что локальное решение из предложения 1 можно продолжить глобально по времени. Пусть решение $U(t)$ определено на максимальном промежутке существования $[0,T_{\max})$. Из (3) получаем

$$\int\limits_\Omega F(X,u(X))\,dX \le \int\limits_\Omega (g_1(X) + g_2(X)u^2)\,dX$$
$$\le \|g_1\|_{L^1(\Omega)} + \|g_2\|_{L^{\frac{N_{\alpha,\beta}}{2}}(\Omega)}\|u\|^2_{L^{2^*_{\alpha,\beta}}(\Omega)}$$
$$\le \|g_1\|_{L^1(\Omega)} + C^2(2^*_{\alpha,\beta},\Omega)\|g_2\|_{L^{\frac{N_{\alpha,\beta}}{2}}(\Omega)}\|u\|^2_{S^2_{1,0}(\Omega)}.$$

Как следует из (13), решение $U(t)$ на максимальном промежутке существования $[0, T_{\max})$ удовлетворяет неравенству

$$\Phi(U(0)) \geq \Phi(U(t)) \geq \frac{1}{2}\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\,\|\nabla_{\alpha,\beta}u\|^2_{L^2(\Omega)} - C^2(2^*_{\alpha,\beta},\Omega)\|g_2\|_{L^{\frac{N_{\alpha,\beta}}{2}}(\Omega)}\|u\|^2_{S^2_{1,0}(\Omega)} - \|g_1\|_{L^1(\Omega)}.$$

Следовательно,

$$\|U\|^2_H \leq \frac{2(\Phi(U(0)) + \|g_1\|_{L^1(\Omega)})}{\min\{1, 1 - 2C^2(2^*_{\alpha,\beta},\Omega)\|g_2\|_{L^{\frac{N_{\alpha,\beta}}{2}}(\Omega)}\}} := \widetilde{C} \quad \forall t \in [0, T_{\max}). \tag{14}$$

Из (14) заключаем, что $T_{\max} = +\infty$. В самом деле, если $T_{\max} < +\infty$, то из (14) имеем $\left\|U\left(T_{\max} - \frac{1}{n}\right)\right\|^2_H \leq \widetilde{C}$ для $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq \frac{1}{T_{\max}}$. По предложению 1 существует константа $T^*(\widetilde{C})$ (не зависящая от n) такая, что задача (1)–(3) имеет единственное решение на $\left[T_{\max} - \frac{1}{n}, T_{\max} - \frac{1}{n} + T^*(\widetilde{C})\right)$, т. е. решение $U(t)$ определено на $\left[0, T_{\max} - \frac{1}{n} + T^*(\widetilde{C})\right)$. Если $n > \frac{1}{T^*(\widetilde{C})}$, то $T_{\max} - \frac{1}{n} + T^*(\widetilde{C}) > T_{\max}$; противоречие с определением $T_{\max}$. Теорема 2 доказана. $\square$

§ 3. Существование глобального аттрактора в $S^2_{1,0}(\Omega) \times L^2(\Omega)$

Ввиду теоремы 2 можно определить непрерывную полугруппу $S(t) : H \to H$ следующим образом:

$$S(t)U_0 := U(t),$$

где $U(t)$ — единственное глобальное мягкое решение задачи (1)–(3) с U_0 в качестве начальных данных. Используя рассуждения из доказательства теоремы 2, получаем, что для всех R, U_0 с условием $\|U_0\|_H \leq R$ существует число $M > 0$, зависящее только от R, такое, что $\|U(t)\|_H \leq M$ для всех $t > 0$. Другими словами, орбиты ограниченных множеств ограничены.

Теорема 3. *Предположим, что функция $f(X, u)$ удовлетворяет условиям (4)–(7). Тогда полугруппа $S(t)$, порожденная задачей (1)–(3), имеет компактный связный глобальный аттрактор $\mathscr{A} = W^u(E)$ в H.*

Доказательство. Во-первых, из (13) и доказательства теоремы 2 видно, что множество $\gamma^+(B)$ ограничено для всякого ограниченного подмножества B в H, а функция Φ, определенная равенством (12), является строгим функционалом Ляпунова. Множество точек равновесия есть

$$E = \left\{\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \in H : P_{\alpha,\beta}u + f(X, u) = 0\right\}.$$

Для $U \in E$ имеем

$$\|\nabla_{\alpha,\beta}u\|^2_{L^2(\Omega)} - \int\limits_\Omega f(X, u)u\,dX = 0.$$

Поэтому

$$\|u\|^2_{S^2_{1,0}(\Omega)} = \int\limits_\Omega f(X, u)u\,dX \leq \int\limits_\Omega (g_3(X) + g_4(X)u^2)\,dX.$$

Применяя неравенства Гёльдера и Соболева, получаем

$$\int\limits_{\Omega} f(X,u)u\,dX \le \|g_3\|_{L^1(\Omega)} + \|g_4\|_{L^{\frac{N_{\alpha,\beta}}{2}}(\Omega)} \|u\|^2_{L^{2^*_{\alpha,\beta}}(\Omega)}$$

$$\le \|g_3\|_{L^1(\Omega)} + C^2(2^*_{\alpha,\beta},\Omega)\|g_4\|_{L^{\frac{N_{\alpha,\beta}}{2}}(\Omega)} \|u\|^2_{S^2_{1,0}(\Omega)}.$$

Следовательно,

$$\|u\|^2_{S^2_{1,0}(\Omega)} \le \frac{\|g_3\|_{L^1(\Omega)}}{1 - C^2(2^*_{\alpha,\beta},\Omega)\|g_4\|_{L^{\frac{N_{\alpha,\beta}}{2}}(\Omega)}},$$

откуда

$$\|U\|^2_H \le \frac{\|g_3\|_{L^1(\Omega)}}{1 - C^2(2^*_{\alpha,\beta},\Omega)\|g_4\|_{L^{\frac{N_{\alpha,\beta}}{2}}(\Omega)}},$$

т. е. множество E ограничено в H. Таким образом, для доказательства существования глобального аттрактора достаточно доказать, что полугруппа $S(t)$ асимптотически компактна в H.

Рассмотрим функционалы

$$I(U(t)) = \Phi(U(t)) + \frac{\gamma}{2}\int\limits_{\Omega} uu_t\,dX, \quad H_0(u(t)) = \gamma\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}f(X,u)u - F(X,u)\right)dX.$$

Умножая (1) на u и интегрируя по Ω, получаем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} uu_t\,dX = \|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\nabla_{\alpha,\beta}u\|^2_{L^2(\Omega)} - \gamma\int\limits_{\Omega} uu_t\,dX + \int\limits_{\Omega} f(X,u(X))u\,dX.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}I(U(t)) = -\gamma I(U(t)) + H_0(u), \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}[e^{\gamma t}I(U(t))] = e^{\gamma t}H_0(u),$$

и потому для любого $T > 0$

$$I(U(T)) = e^{-\gamma T}I(U(0)) + \int\limits_0^T e^{\gamma(t-T)}H_0(u(t))\,dt. \tag{15}$$

Пусть $U_n(t) = S(t)U_n(0)$, где последовательность $\{U_n(0)\}_{n=1}^{n=\infty}$ ограничена в H, и пусть $t_m \to +\infty$. Из неравенства $\Phi(U(0)) \ge \Phi(U(t))$ вытекает, что последовательность $\{\Phi(U_n(t_n))\}_{n=1}^{n=\infty}$ ограничена в H, и в силу (14) получаем, что последовательность $\{U_n(t_n)\}_{n=1}^{n=\infty}$ ограничена в H. Таким образом, последовательность $\{U_n(t_n)\}_{n=1}^{n=\infty}$ имеет слабо сходящуюся подпоследовательность. Будем далее предполагать, что $U_n(t_n) \rightharpoonup U$ в H и $U_n(t_n - T) \rightharpoonup U_T$ в H для некоторых $U, U_T \in H$. Для любого $t \ge 0$ у последовательности $\{U_n(t_n + t - T)\}_{n=1}^{n=\infty}$ имеется слабо сходящаяся подпоследовательность, и можно далее полагать, что найдется $\overline{U} = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in H$, для которого

$$U_n(t_n + t - T) \rightharpoonup \overline{U}(t) \ \text{ в } H,$$

где $\overline{U}(0) = U_T$, $\overline{U}(T) = U$.

Применим равенство (15) к $U_n(t_n+t-T)=\begin{pmatrix} u_n(t_n+t-T)\\ u_{nt}(t_n+t-T)\end{pmatrix}$. Имеем

$$I(U_n(t_n))=e^{-\gamma T}I(U_n(t_n-T))+\int\limits_0^T e^{\gamma(t-T)}H_0(u_n(t_n+t-T))\,dt.$$

Покажем, что

$$H_0(u_n(t_n+t-T))\to H_0(u(t)).$$

В самом деле, из того, что $u_n(t_n+t-T)\rightharpoonup u(t)$ в $S^2_{1,0}(\Omega)$ и $S^2_{1,0}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$, получаем, что $u_n(t_n+t-T)\to u(t)$ в $L^2(\Omega)$.

Из неравенства Гёльдера и соотношения (4) имеем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega |f(X,u_n)u_n-f(X,u)u|\,dX\\
&\qquad\le\int\limits_\Omega |f(X,u_n)u_n-f(X,u)u_n|\,dX+\int\limits_\Omega |f(X,u)u_n-f(X,u)u|\,dX\\
&\qquad=\int\limits_\Omega |f(X,u_n)-f(X,u)||u_n|\,dX+\int\limits_\Omega |u_n-u||f(X,u)|\,dX\\
&\qquad\le C\int\limits_\Omega (g(X)+|u_n|^\rho+|u|^\rho)|u_n||u_n-u|\,dX+\int\limits_\Omega |u_n-u||f(X,u)|\,dX\\
&\qquad\le C\|u_n-u\|^2_{L^2(\Omega)}\big(\|g\|_{L^{r_1}(\Omega)}+\|u_n\|^\rho_{L^{r_1\rho}(\Omega)}+\|u\|^\rho_{L^{r_1\rho}(\Omega)}\big)\|u_n\|_{L^{r_2}(\Omega)}\\
&\qquad\qquad+\|u_n-u\|^2_{L^2(\Omega)}\|f(X,u)\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

где $r_1=\frac{2N_{\alpha,\beta}}{(N_{\alpha,\beta}-2)\rho}$, если $\rho\ne0$, $r_1=N_{\alpha,\beta}$, если $\rho=0$, и $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac12$.

Так как последовательность $\{u_n(t_n+t-T)\}_{n=1}^{n=\infty}$ ограничена в $S^2_{1,0}(\Omega)$ и $S^2_{1,0}(\Omega)\hookrightarrow L^{2(\rho+1)}$, то

$$\int\limits_\Omega f(X,u_n(t_n+t-T))u_n(t_n+t-T)\,dX\to\int\limits_\Omega f(X,u(t))u(t)\,dX\quad\text{при } n\to\infty.$$

Из (4) получаем

$$\begin{aligned}
&|F(X,u_n)-F(X,u)|=\left|\int\limits_0^1\frac{dF(X,u+\theta(u_n-u))}{d\theta}d\theta\right|\\
&=\left|\int\limits_0^1 F'_u(X,u+\theta(u_n-u))(u_n-u)\,d\theta\right|\le\int\limits_0^1|f(X,u+\theta(u_n-u))||u_n-u|\,d\theta\\
&\le\int\limits_0^1\{C(g(X)|u+\theta(u_n-u)|+|(u+\theta(u_n-u))^{\rho+1}|)+|f(X,0)|\}|u_n-u|\,d\theta\\
&\qquad\le C(g(X)|u|+g(X)|u_n|+|u|^{\rho+1}+|u_n|^{\rho+1})|u_n-u|+|f(X,0)||u_n-u|.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\Omega} |F(X,u_n)-F(X,u)|\,dX \le \int\limits_{\Omega} |f(X,0)||u_n-u|\,dX$$
$$+\int\limits_{\Omega} (C(g(X)|u|+g(X)|u_n|+|u|^{\rho+1}+|u_n|^{\rho+1})|u_n-u|)\,dX.$$

Применяя неравенство Гёльдера, заключаем, что

$$\int\limits_{\Omega} |F(X,u_n)-F(X,u)|\,dX \le C\|u_n-u\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\times\big\{\big(\|u\|^{\rho+1}_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}+\|u_n\|^{\rho+1}_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}\big)+\|f(X,0)\|_{L^2(\Omega)}$$
$$+\|g\|_{L^{N_{\alpha,\beta}}(\Omega)}\big(\|u\|_{L^{\frac{2N_{\alpha,\beta}}{N_{\alpha,\beta}-2}}(\Omega)}+\|u_n\|_{L^{\frac{2N_{\alpha,\beta}}{N_{\alpha,\beta}-2}}(\Omega)}\big)\big\}.$$

Поскольку последовательность $\{u_n(t_n+t-T)\}_{n=1}^{n=\infty}$ ограничена в $S^2_{1,0}(\Omega)$ и $S^2_{1,0}(\Omega)\hookrightarrow L^{2(\rho+1)}$, получаем, что

$$\int\limits_{\Omega} F(X,u_n(t_n+t-T))\,dX \to \int\limits_{\Omega} F(X,u(t))\,dX \quad \text{при } n\to\infty.$$

Поэтому

$$H_0(u_n(t_n+t-T))\to H_0(u(t)) \quad \text{при } n\to\infty.$$

В силу равенства (15), примененного к $\overline{U}$, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^T e^{\gamma(t-T)}H_0(u_n(t_n+t-T))\,dt=\int\limits_0^T e^{\gamma(t-T)}H_0(u(t))\,dt$$
$$=I(\overline{U}(T))-e^{-\gamma T}I(\overline{U}(0)).$$

Так как последовательность $\{U_n\}_{n=1}^{n=\infty}$ ограничена в H, найдется $C>0$ такое, что $I(U_n)\le C$ для всех t. Значит,

$$\lim_{n\to\infty}\sup I(U_n(t_n))\le Ce^{-\gamma T}+I(\overline{U}(T))-e^{-\gamma T}I(\overline{U}(0)).$$

Поскольку функционал I секвенциально слабо полунепрерывен снизу, устремляя $T\to\infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\sup I(U_n(t_n))\le I(U)\le \lim_{n\to\infty}\inf I(U_n(t_n))$$

и потому $I(U_n(t_n))\to I(U)$. Тем самым $\|U_n(t_n)\|_H\to\|U\|_H$, а значит, $U_n(t_n)\to U$ сильно в H. Стало быть, полугруппа $S(t)$ асимптотически компактна. Применяя теорему 1, приходим к утверждению теоремы 3. □

Следующая теорема описывает асимптотическое поведение решений задачи (8), (9) при $t\to+\infty$.

Теорема 4. *Пусть функция $f(X,u)$ удовлетворяет условиям (4)–(7). Тогда полугруппа $S(t)$, определяемая задачей (8), (9), обладает минимальным компактным глобальным аттрактором $\mathscr{M}$ в пространстве $S^2_{1,0}(\Omega)\times L^2(\Omega)$. Кроме того, для каждого $(u_0,u_1)\in S^2_{1,0}(\Omega)\times L^2(\Omega)$ соответствующее решение $(u(t),u_t(t))$*

$= S(t)(u_0, u_1)$ *стремится к множеству* E *точек равновесия в* $S^2_{1,0}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *при* $t \to +\infty$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 в [18], поэтому детали опускаем. $\square$

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} = P_{\frac14,\frac14} u - |u|u \quad \text{для } (x,y,z) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3,\ t > 0,$$

$$u(x,y,z,t) = 0 \quad \text{для } (x,y,z) \in \partial\Omega,\ t > 0,$$

$$u(x,y,z,0) = u_0(x,y,z), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0) = u_1(x,y,z) \quad \text{для } (x,y,z) \in \Omega,$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $u_0(x,y,z) \in S^2_{1,0}(\Omega)$, $u_1(x,y,z) \in L^2(\Omega)$,

$$P_{\frac14,\frac14} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sqrt{|x|}\sqrt{|y|}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

В этом случае можно взять $\rho = 1$, $c = 1$, $\mu = 0$. Тогда $\frac{2}{N_{\frac14,\frac14} - 2} = \frac{7}{2}$. Легко проверяется, что функция f удовлетворяет условиям (4)–(7). Применяя теорему 4, заключаем, что у полугруппы $S(t)$, ассоциированной с задачей этого примера, существует минимальный компактный глобальный аттрактор в пространстве $S^2_{1,0}(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

§ 4. Конечномерность аттракторов

4.1. Множество l-траекторий.

Определение 3. Пусть $\mathscr{M}$ — компактное множество в метрическом пространстве H. *Фрактальная размерность* множества $\mathscr{M}$ определяется формулой

$$\dim^H_{\mathrm{fr}} \mathscr{M} = \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{\ln n(\mathscr{M}, \epsilon)}{\ln \frac{1}{\epsilon}},$$

где $n(\mathscr{M}, \epsilon)$ — наименьшее число замкнутых шаров радиуса ϵ, покрывающих множество $\mathscr{M}$.

Положим

$$H_l := \big\{ u \in L^2\big(0, l; S^2_{1,0}(\Omega)\big),\ u_t \in L^2(0, l; L^2(\Omega)) \big\},$$

$$\mathscr{A}_l := \left\{ u \in H_l;\ u \text{ — решение (1) на } [0, l], \begin{pmatrix} u(0) \\ u_t(0) \end{pmatrix} \in \mathscr{A} \right\},$$

где l — фиксированное положительное число и $\mathscr{A}$ — глобальный аттрактор, найденный в теореме 3. Пространство H_l, снабженное нормой

$$\|u\|^2_{H_l} := \|u\|^2_{L^2(0,l;S^2_{1,0}(\Omega))} + \|u_t\|^2_{L^2(0,l;L^2(\Omega))},$$

гильбертово. Для произвольной функции пространства и времени используем обозначение

$$E(u(.,s)) := \left\| \begin{pmatrix} u(.,s) \\ u_t(.,s) \end{pmatrix} \right\|^2_H = \|\nabla_{\alpha,\beta} u(.,s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_t(.,s)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Заметим, что

$$\|u\|_{H_l}^2 = \int_0^l E(u(s))\,ds.$$

Наконец, определим $e : \mathscr{A}_l \to H$, полагая $e(u) := \begin{pmatrix} u(l) \\ u_t(l) \end{pmatrix}$, и $L_t : \mathscr{A}_l \to H_l$, полагая $(L_t(u))(s) := u_1(t+s)$, $s \in [0, l]$, где u_1 — единственное решение уравнения (1) на отрезке $[0, l+t]$ такое, что $u_1|_{[0,l]} = u$.

Лемма 3. *Справедливы следующие утверждения.*
(a) *Функция L_t липшицева на $\mathscr{A}_l$.*
(b) *$L_t(\mathscr{A}_l) = \mathscr{A}_l$ для всех $t \geq 0$.*
(c) *$e(\mathscr{A}_l) = \mathscr{A}$.*
(d) *Функция e липшицева на $\mathscr{A}_l$.*

Доказательство. Пусть $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in \mathscr{A}$, $V_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \in \mathscr{A}$ и $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u_t(t) \end{pmatrix} = S(t)U_0$, $V(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ v_t(t) \end{pmatrix} = S(t)V_0$.

Положим $w(t) = u(t) - v(t)$. Тогда $w(X,t)$ — решение задачи

$$w_{tt} + \gamma w_t = P_{\alpha,\beta} w + f(X,u) - f(X,v) \quad \text{в } \Omega \times (0,\infty),$$

$$w(X,t) = 0 \quad \text{для } X \in \partial\Omega,\ t > 0,$$

$$w(X,0) = u_0 - v_0, \quad w_t(X,0) = u_1 - v_1.$$

Умножая уравнение на w_t и интегрируя по Ω, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|w\|_{S_{1,0}^2(\Omega)}^2 + \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2\big) + \gamma\|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega (f(X,u) - f(X,v))(u_t - v_t)\,dX \quad \forall t \geq 0. \tag{16}$$

Используя лемму 2 и неравенство Гёльдера, видим, что существует $C_1(\mathscr{A}) > 0$ такое, что

$$\Big|\int_\Omega (f(X,u) - f(X,v))(u_t - v_t)\,dX\Big| \leq \Big\{\int_\Omega |f(X,u) - f(X,v)|^2\,dX\Big\}^{\frac{1}{2}} \|u_t - v_t\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1(\mathscr{A})\|u - v\|_{S_{1,0}^2(\Omega)}\|u_t - v_t\|_{L^2(\Omega)}.$$

Значит,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|w\|_{S_{1,0}^2(\Omega)}^2 + \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2\big) + \gamma\|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_1(\mathscr{A})\|u - v\|_{S_{1,0}^2(\Omega)}\|u_t - v_t\|_{L^2(\Omega)},$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\big(\|w\|_{S_{1,0}^2(\Omega)}^2 + \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2\big) \leq 2C_1(\mathscr{A})\|u - v\|_{S_{1,0}^2(\Omega)}\|u_t - v_t\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1(\mathscr{A})\big(\|w\|_{S_{1,0}^2(\Omega)}^2 + \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2\big).$$

В силу неравенства Гронуолла

$$\|w\|^2_{S^2_{1,0}(\Omega)} + \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} \le e^{C_1(\mathscr{A})t}\big(\|w(0)\|^2_{S^2_{1,0}(\Omega)} + \|w_t(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\big),$$

или

$$\|S(t)(U_0 - V_0)\|^2_H \le e^{C_1(\mathscr{A})t}\|U_0 - V_0\|^2_H. \tag{17}$$

(a) Пусть $u_1, u_2 \in \mathscr{A}_l$. Найдутся решения v_1, v_2 уравнения (1), идущие из $\mathscr{A}$ и такие, что

$$u_1 = v_1|_{[0,l]}, \quad L_t u_1(s) = v_1(s+t), \quad u_2 = v_2|_{[0,l]}, \quad L_t u_2(s) = v_2(s+t), \quad s \in [0,l].$$

Положив $w := v_1 - v_2$, возьмем $s \in (0,l)$ и используем (17); тогда

$$E(w(t+s)) = E\left(S(t)\begin{pmatrix} v_1(s) \\ v_{1t}(s)\end{pmatrix} - S(t)\begin{pmatrix} v_2(s) \\ v_{2t}(s)\end{pmatrix}\right) \le CE(w(s)).$$

Интегрирование по $(0,l)$ по переменной s дает

$$\int_0^l E(w(t+s))\,ds \le C\int_0^l E(w(s))\,ds,$$

откуда

$$\|L_t u_1 - L_t u_2\|^2_{H_l} \le C_1\|u_1 - u_2\|^2_{H_l}.$$

(b) Для любого $u \in L_t(\mathscr{A}_l)$ найдется $u_1 \in \mathscr{A}_l$ такое, что $u(s) = (L_t u_1)(s) = u_2(t+s)$, u_2 — решение (1) на $[0, l+t]$ со свойством $u_2|_{[0,l]} = u_1$. Далее, из того факта, что $u_1 \in \mathscr{A}_l$, следует, что $\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_{1t}(0)\end{pmatrix} \in \mathscr{A}$, и потому в силу свойства глобальных аттракторов $\begin{pmatrix} u_2(\xi) \\ u_{2t}(\xi)\end{pmatrix} \in \mathscr{A}$ для любого $\xi \in [0, l+t]$. Отсюда получаем, что $u \in \mathscr{A}_l$, а значит, $L_t(\mathscr{A}_l) \subset \mathscr{A}_l$.

Обратно, возьмем произвольно $u \in \mathscr{A}_l$. Из определения $\mathscr{A}_l$ и свойства глобальных аттракторов имеем $\begin{pmatrix} u(s) \\ u_t(s)\end{pmatrix} \in \mathscr{A}$ для любого $s \in [0,l]$. Поскольку $S(t)(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$, существует $\begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_{1t}(s)\end{pmatrix} \in \mathscr{A}$ такое, что

$$S(t)\begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_{1t}(s)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(s) \\ u_t(s)\end{pmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix} u_1(t+s) \\ u_{1t}(t+s)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(s) \\ u_t(s)\end{pmatrix}.$$

К тому же u_1 — решение уравнения (1) на $[t, l+t]$, поэтому существует решение u_2 уравнения (1) на $[0, l+t]$ такое, что $u_2|_{[t,t+l]} = u_1$. Следовательно, $(L_t(u_2))(s) = u_1(t+s) = u(s)$. Стало быть, $\mathscr{A}_l \subset L_t(\mathscr{A}_l)$.

(c) Для любого $U \in e(\mathscr{A}_l)$ существует $u \in \mathscr{A}_l$ элемент такой, что $U = e(u) = \begin{pmatrix} u(l) \\ u_t(l)\end{pmatrix}$. Из определения $\mathscr{A}_l$ и свойства глобальных аттракторов имеем

$$\begin{pmatrix} u(l) \\ u_t(l)\end{pmatrix} \in \mathscr{A}.$$

Значит, $e(\mathscr{A}_l) \subset \mathscr{A}$. Обратно, возьмем произвольно $U \in \mathscr{A}$. Поскольку $S(l)(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$, найдется $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in \mathscr{A}$ со свойством $S(l)\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = U$. Для произвольного $t \in [0,l]$ положим

$$S(t)\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда $u(t) \in \mathscr{A}_l$ и $e(u(t)) = \begin{pmatrix} u(l) \\ u_t(l) \end{pmatrix} = U$. Значит, $\mathscr{A} \subset e(\mathscr{A}_l)$.

(d) Пусть $u_1, u_2 \in \mathscr{A}_l$. Тогда $e(u_1) = \begin{pmatrix} u_1(l) \\ u_{1t}(l) \end{pmatrix}$, $e(u_2) = \begin{pmatrix} u_2(l) \\ u_{2t}(l) \end{pmatrix}$. Для $s \in [0,l]$ положим $w(s) := u_1(s) - u_2(s)$. Используя (17), получаем

$$E(w(l)) = E\left(S(l-s)\begin{pmatrix} u_1(s) - u_2(s) \\ u_{1t}(s) - u_{2t}(s) \end{pmatrix}\right) \le CE(w(s)).$$

Интегрируя по $(0,l)$ по переменной s, имеем

$$\int_0^l E(w(l))\,ds \le C\int_0^l E(w(s))\,ds,$$

или

$$\|e(u_1) - e(u_2)\|_H^2 \le C_1\|u_1 - u_2\|_{H_l}^2.$$

Доказательство завершено. $\square$

Из утверждений (c) и (d) леммы 3 получаем $\dim_{\mathrm{fr}}^H \mathscr{A} \le \dim_{\mathrm{fr}}^{H_l} \mathscr{A}_l$.

4.2. Обобщенное сжимающее свойство.

Определение 4 (см. [24]). Пусть H — гильбертово пространство. Будем говорить, что отображение $L : H \to H$ имеет *обобщенное сжимающее свойство* (ОСС) на множестве $\mathscr{A} \subset H$, если существуют константы $C > 0$, $\theta \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ и конечномерный ортопроектор P в H такие, что для произвольной пары $x_1, x_2 \in \mathscr{A}$ либо

$$\|Lx_1 - Lx_2\|_H \le C\big(\|P(x_1 - x_2)\|_H^2 + \|P(Lx_1 - Lx_2)\|_H^2\big)^{\frac{1}{2}},$$

либо

$$\|Lx_1 - Lx_2\|_H < \theta\|x_1 - x_2\|_H.$$

Лемма 4. *Пусть $r \in \left[2, \frac{2N_{\alpha,\beta}}{N_{\alpha,\beta}-2}\right)$ и $\mu > 0$. Тогда существуют $K_\mu > 0$ и конечномерный ортопроектор P в H_l такой, что для любого $w \in H_l$*

$$\int_0^l \|w(s)\|_{L^r(\Omega)}^2\,ds \le \mu\|w\|_{H_l}^2 + K_\mu\,\|P(w)\|_{H_l}^2. \tag{18}$$

Доказательство. Так как

$$S_{1,0}^2(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^r(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

в силу леммы Обена — Лионса $H_l \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(0,l;L^r(\Omega))$. Допустим, что неравенство (18) неверно. Тогда найдутся число $\mu_0 > 0$ и последовательность ортопроекторов P_n такие, что $P_n \to I$ сильно в H_l и

$$\int_0^l \|w_n(s)\|_{L^r(\Omega)}^2\,ds > \mu_0 + n\|P_n(w_n)\|_{H_l}^2, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{19}$$

для некоторой последовательности $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H_l$ со свойством $\|w_n\|_{H_l} = 1$.

Из (19) получаем, что $\|P_n(w_n)\|_{H_l} \to 0$ при $n \to +\infty$. Можно также предполагать, что $w_n \rightharpoonup w$ слабо в H_l для некоторого $w \in H_l$. Поскольку

$$P_n w = P_n(w - w_n) + P_n(w_n) \rightharpoonup 0,$$

заключаем, что $w = 0$. Поэтому $\int\limits_0^l \|w_n(s)\|^2_{L^r(\Omega)}\, ds \to 0$ при $n \to +\infty$, что противоречит (19). Значит, неравенство (18) выполнено. $\square$

Лемма 5. *Пусть H — гильбертово пространство и множество $\mathscr{A} \subset H$ ограничено. Предположим, что существует отображение $L : \mathscr{A} \to H$ такое, что $L(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$, L липшицево на $\mathscr{A}$ и удовлетворяет* ОСС *на $\mathscr{A}$. Тогда $\dim_{\mathrm{fr}}^H \mathscr{A} < \infty$.*

Доказательство. См. [24].

Лемма 6. *Предположим, что $0 < \rho < \frac{2}{N_{\alpha,\beta}-2}$. Тогда для достаточно больших l отображение L_l обладает* ОСС *на $\mathscr{A}_l$.*

Доказательство. Пусть $u_1, u_2 \in \mathscr{A}_l$. Тогда существуют решения v_1, v_2 уравнения (1), начинающиеся в $\mathscr{A}$ и такие, что

$$u_1 = v_1|_{[0,l]}, \quad L_l u_1 = v_1|_{[l,2l]}, \quad u_2 = v_2|_{[0,l]}, \quad L_l u_2 = v_2|_{[l,2l]}.$$

Полагая $w := v_1 - v_2$, имеем

$$w_{tt} + \gamma w_t = P_{\alpha,\beta} w + f(X, v_1) - f(X, v_2). \tag{20}$$

Умножая равенство (20) на w_t и интегрируя по Ω, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(w) + \gamma \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} \le C \int\limits_{\Omega} (g(X) + |v_1|^\rho + |v_2|^\rho)|w||w_t|\, dX.$$

Применяя неравенство Гёльдера, выводим

$$\int\limits_{\Omega} (g(X) + |v_1|^\rho + |v_2|^\rho)|w||w_t|\, dX$$
$$\le C\big(\|g\|_{L^{r_1}(\Omega)} + \|v_1\|^\rho_{L^{r_1\rho}(\Omega)} + \|v_2\|^\rho_{L^{r_1\rho}(\Omega)}\big)\|w\|_{L^{r_2}(\Omega)}\|w_t\|_{L^2(\Omega)},$$

где $r_1 = \frac{2N_{\alpha,\beta}}{(N_{\alpha,\beta}-2).\rho}$ и $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{2}$.

Из условия $\rho < \frac{2}{N_{\alpha,\beta}-2}$ следует, что $r_2 < 2^*_{\alpha,\beta}$. Имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(w) + \gamma\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} \le C\|w\|_{L^{r_2}(\Omega)}\|w_t\|_{L^2(\Omega)} \le C_1\|w\|^2_{L^{r_2}(\Omega)} + \frac{\gamma}{2}\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}E(w) + \gamma\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} \le 2C_1\|w\|^2_{L^{r_2}(\Omega)}. \tag{21}$$

Зафиксируем $\tau \in (0, l)$ и проинтегрируем (21) по $(\tau, 2l)$:

$$E(w(2l)) + \gamma \int\limits_\tau^{2l} \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \le C_2 \int\limits_\tau^{2l} \|w\|^2_{L^{r_2}(\Omega)}\, dt + E(w(\tau)). \tag{22}$$

Умножая равенство (20) на w и интегрируя по Ω, получаем

$$\int_\Omega w_{tt} w\, dX + \gamma \int_\Omega w_t w\, dX = \int_\Omega (P_{\alpha,\beta} w) w\, dX + \int_\Omega (f(X, v_1) - f(X, v_2)) w\, dX.$$

Поскольку

$$\int_\Omega w_{tt} w\, dX = \frac{d}{dt}\int_\Omega w_t w\, dX - \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \int_\Omega (P_{\alpha,\beta} w) w\, dX = -\|\nabla_{\alpha,\beta} w\|^2_{L^2(\Omega)},$$

$$\left|\int_\Omega w_t w\, dX\right| \le \|w_t\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{1}{2}\big(\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}\big),$$

$$\int_\Omega (g(X) + |v_1|^\rho + |v_2|^\rho)|w|^2\, dX$$
$$\le C\big(\|g\|_{L^{r_1}(\Omega)} + \|v_1\|^\rho_{L^{r_1\rho}(\Omega)} + \|v_2\|^\rho_{L^{r_1\rho}(\Omega)}\big)\|w\|^2_{L^{2r_3}(\Omega)} \le C_3 \|w\|^2_{L^{2r_3}(\Omega)},$$

где

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = 1,$$

имеем

$$\|\nabla_{\alpha,\beta} w\|^2_{L^2(\Omega)} \le \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)\|w_t\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{d}{dt}\int_\Omega w_t w\, dX + C_4 \|w\|^2_{L^{r_4}(\Omega)}, \tag{23}$$

где $r_4 := \max(2, 2r_3)$. Интегрируя (23) по $(\tau, 2l)$, получаем

$$\int_\tau^{2l} \|\nabla_{\alpha,\beta} w\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \le \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)\int_\tau^{2l} \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt$$
$$- \int_\tau^{2l} \left(\frac{d}{dt}\int_\Omega w_t w\, dX\right) dt + C_4 \int_\tau^{2l} \|w\|^2_{L^{r_4}(\Omega)}\, dt.$$

Из

$$\left|\int_\tau^{2l} \left(\frac{d}{dt}\int_\Omega w_t w\, dX\right) dt\right| = \left|\int_\Omega w_t(2l) w(2l)\, dX - \int_\Omega w_t(\tau) w(\tau)\, dX\right|$$
$$\le \left|\int_\Omega w_t(2l) w(2l)\, dX\right| + \left|\int_\Omega w_t(\tau) w(\tau)\, dX\right| \le C_5(E(w(2l)) + E(w(\tau))),$$

следует, что

$$\int_\tau^{2l} \|\nabla_{\alpha,\beta} w\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt \le \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)\int_\tau^{2l} \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt$$
$$+ C_4 \int_\tau^{2l} \|w\|^2_{L^{r_4}(\Omega)}\, dt + C_5(E(w(2l)) + E(w(\tau))). \tag{24}$$

Умножая (24) на $\epsilon \in (0,1)$ и добавляя его к (22), имеем

$$(1 - C_5\epsilon)E(w(2l)) + \epsilon \int_\tau^{2l} \|\nabla_{\alpha,\beta} w\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \left(\gamma - \epsilon\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)\right) \int_\tau^{2l} \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt$$

$$\le C_6 \int_\tau^{2l} \|w\|^2_{L^r(\Omega)}\,dt + (1 + C_5\epsilon)E(w(\tau)),$$

где $r := \max(r_2; r_4)$. Выбирая $\epsilon = \min\left\{\frac{1}{2C_5}, \frac{\gamma}{2+\gamma}\right\}$, получаем

$$(1 - C_5\epsilon)E(w(2l)) + \epsilon \int_\tau^{2l} \|\nabla_{\alpha,\beta} w\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \left(\gamma - \epsilon\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)\right) \int_\tau^{2l} \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt$$

$$\ge \eta\left(\int_\tau^{2l} \|\nabla_{\alpha,\beta} w\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_\tau^{2l} \|w_t\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt\right) = \eta \int_\tau^{2l} E(w)\,dt \ge \eta \int_l^{2l} E(w)\,dt,$$

$$C_6 \int_\tau^{2l} \|w\|^2_{L^r(\Omega)}\,dt + (1 + C_5\epsilon)E(w(\tau)) \le C_6 \int_0^{2l} \|w\|^2_{L^r(\Omega)}\,dt + 2E(w(\tau)),$$

где $\eta := \min\left\{\epsilon, \gamma - \epsilon\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)\right\}$. Значит,

$$\eta \int_l^{2l} E(w)\,dt \le C_6 \int_0^{2l} \|w\|^2_{L^r(\Omega)}\,dt + 2E(w(\tau)).$$

Теперь выполним интегрирование по $(0,l)$ по переменной τ и получим

$$\eta l \int_l^{2l} E(w)\,dt \le C_6 l \int_0^{2l} \|w\|^2_{L^r(\Omega)}\,dt + 2 \int_0^l E(w(\tau))\,d\tau,$$

откуда

$$\int_l^{2l} E(w)\,dt \le \frac{C_6}{\eta} \int_0^{2l} \|w\|^2_{L^r(\Omega)}\,dt + \frac{2}{\eta l} \int_0^l E(w(\tau))\,d\tau.$$

Тем самым

$$\|Lu_1 - Lu_2\|^2_{H_l} \le \frac{C_6}{\eta} \int_0^{2l} \|w\|^2_{L^r(\Omega)}\,dt + \frac{2}{\eta l}\|u_1 - u_2\|^2_{H_l}, \tag{25}$$

где $L := L_l$. С другой стороны,

$$\int_0^{2l} \|w\|^2_{L^r(\Omega)}\,dt = \int_0^l \|w\|^2_{L^r(\Omega)}\,dt + \int_l^{2l} \|w\|^2_{L^r(\Omega)}\,dt$$

$$= \int_0^l \|u_1 - u_2\|^2_{L^r(\Omega)}\,dt + \int_0^l \|Lu_1 - Lu_2\|^2_{L^r(\Omega)}\,dt.$$

Полагая $l = \frac{128}{\eta}$, из леммы 4 и (25) получаем

$$\|Lu_1 - Lu_2\|_{H_l}^2 \le \frac{C_6}{\eta}\left(\int_0^l \|u_1 - u_2\|_{L^r(\Omega)}^2\,dt + \int_0^l \|Lu_1 - Lu_2\|_{L^r(\Omega)}^2\,dt\right) + \frac{1}{64}\|u_1 - u_2\|_{H_l}^2$$
$$\le \frac{C_6}{\eta}\big(\mu\|u_1 - u_2\|_{H_l}^2 + K_\mu\|P(u_1 - u_2)\|_{H_l}^2 + \mu\|Lu_1 - Lu_2\|_{H_l}^2 + K_\mu\|P(Lu_1 - Lu_2)\|_{H_l}^2\big) + \frac{1}{64}\|u_1 - u_2\|_{H_l}^2,$$

поэтому

$$\frac{1}{2}\|Lu_1 - Lu_2\|_{H_l}^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{C_6\mu}{\eta}\right)\|Lu_1 - Lu_2\|_{H_l}^2 \le \frac{C_6K_\mu}{\eta}\big(\|P(u_1 - u_2)\|_{H_l}^2 + \|P(Lu_1 - Lu_2)\|_{H_l}^2\big) + \left(\frac{1}{64} + \frac{C_6\mu}{\eta}\right)\|u_1 - u_2\|_{H_l}^2.$$

Полагая $\mu = \frac{\eta}{192C_6}$, имеем

$$\frac{1}{2}\|Lu_1 - Lu_2\|_{H_l}^2 + \frac{95}{192}\|Lu_1 - Lu_2\|_{H_l}^2 \le K_0\big(\|P(u_1 - u_2)\|_{H_l}^2 + \|P(Lu_1 - Lu_2)\|_{H_l}^2\big) + \frac{1}{48}\|u_1 - u_2\|_{H_l}^2,$$

где $K_0 = \frac{C_6K_\mu}{\eta}$. Следовательно, либо

$$\|Lu_1 - Lu_2\|_{H_l}^2 \le \frac{192K_0}{95}\big(\|P(u_1 - u_2)\|_{H_l}^2 + \|P(Lu_1 - Lu_2)\|_{H_l}^2\big),$$

либо

$$\|Lu_1 - Lu_2\|_{H_l}^2 < \frac{1}{24}\|u_1 - u_2\|_{H_l}^2.$$

Это завершает доказательство. □

Объединяя леммы 3, 5 и 6, получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть функция $f(X,u)$ удовлетворяет условиям (4)–(7), где $0 < \rho < \frac{2}{N_{\alpha,\beta}-2}$. Тогда фрактальная размерность глобального аттрактора $\mathscr{A}$ конечна.*

Замечание. Теорема 5 остается верной, если $\rho = 0$, $g(X) \in L^{N_{\alpha,\beta}+\epsilon}(\Omega)$ для каждого малого положительного ϵ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Babin A. V., Vishik M. I.* Regular attractors of semigroups and evolution equations // J. Math. Pures Appl. 1983. V. 62, N 4. P. 441–491.
2. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Attractors for equations of mathematical physics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.; V. 49).
3. *Robinson J. C.* Infinite-dimensional dynamical systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.
4. *Temam R.* Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics. New York: Springer-Verl., 1988.
5. *Грушин В.В.* Об одном классе гипоэллиптических операторов // Мат. сб. 1970. Т. 83, № 3. С. 456–473.

6. *Thuy N. T. C., Tri N. M.* Some existence and non-existence results for boundary value problem (BVP) for semilinear degenerate elliptic operators // Russ. J. Math. Phys. 2002. V. 9. P. 366–371.
7. *Thuy P. T., Tri N. M.* Nontrivial solutions to boundary value problems for semilinear strongly degenerate elliptic differential equations // Nonlinear Diff. Equ. Appl. (NoDEA). 2012. V. 19. P. 279–298.
8. *Kogoj A. E., Lanconelli E.* On semilinear Δ_λ-Laplace equation // Nonlinear Anal. 2012. V. 75. P. 4637–4649.
9. *Luyen D. T., Tri N. M.* Existence of solutions to boundary value problems for semilinear Δ_γ differential equations // Math. Notes. 2015. V. 97, N 1. P. 73–84.
10. *Tri N. M.* Semilinear degenerate elliptic differential equations. Local and global theories. Saarbrücken: Lambert Acad. Publ., 2010.
11. *Tri N. M.* Recent progress in the theory of semilinear equations involving degenerate elliptic differential operators. Hanoi: Publ. House Sci. Technology. Vietnam Acad. Sci. Technology, 2014.
12. *Hale J. K.* Asymptotic behavior and dynamics in infinite dimensions // Nonlinear differential equations (Granada, 1984). Boston, MA: Pitman, 1985. P. 1–42. (Res. Notes Math.; V. 132).
13. *Hale J. K., Raugel G.* Attractors for dissipative evolutionary equations // Proc. Conf. EQUADIFF-91 (Univ. Barcelona, August 26–31 1991) (C. Perelló, C. Simó, and J. Solà-Morales, eds). River Edge, NJ: World Sci. Publ. Co. Inc., 1993. V. 1. P. 3–22.
14. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
15. *Feireisl E.* Finite-dimensional asymptotic behavior of some semilinear damped hyperbolic problems // J. Dyn. Differ. Equations. 1994. V. 6. P. 23–35.
16. *Anh C. T., Hung P. Q., Ke T. D., Phong T. T.* Global attractor for a semilinear parabolic equation involving the Grushin operator // Electron. J. Differ. Equations. 2008. N 32. P. 1–11.
17. *Kogoj A. E., Sonner S.* Attractors met X-elliptic operators // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 420. P. 407–434.
18. *Thuy P. T., Tri N. M.* Long time behavior of solutions to semilinear parabolic equations involving strongly degenerate elliptic differential operators // Nonlinear Diff. Equ. Appl. 2013. V. 20, N 3. P. 1213–1224.
19. *Chueshov I. D.* Introduction to the theory of infinite-dimensional dissipative systems. Kharkov, Ukraine: ACTA Sci. Publ. House, 2002.
20. *Hale J. K.* Asymptotic behavior of dissipative systems. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1988. (Math. Surveys Monogr.; V. 25).
21. *Raugel G.* Global attractors in partial differential equations // Handbook of dynamical systems. Amsterdam: North-Holland, 2002. V. 2. P. 885–892.
22. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. New York: Springer-Verl., 1983. (Appl. Math. Sci.; V. 44).
23. *Sell G. R., You Y.* Dynamics of evolutionary equations. New York: Springer-Verl., 2002.
24. *Pražák D.* On finite fractal dimension of the global attractor for the wave equation with nonlinear damping // J. Dyn. Differ. Equations. 2002. V. 14. P. 763–776.

Статья поступила 20 марта 2015 г.

Duong Trong Luyen (Луен Зыонг Чонг)
Department of Mathematics,
Hoa Lu University, Ninh Nhat, Ninh Binh city, Vietnam
Nguen Minh Tri (Чи Нгуен Минь)
Institute of Mathematics,
Vietnam Academy of Science and Technology,
18 Hoang Quoc Viet, 10307 Cau Giay, Hanoi, Vietnam
`triminh@math.ac.vn`