Сибирский математический журнал
Июль—август, 2016. Том 57, № 4

УДК 512.54

О СЛАБО $S\Phi$–ДОБАВЛЯЕМЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Чж. У, Ю. Мао, В. Го

Аннотация. Пусть G — конечная группа. Говорят, что подгруппа H в G *слабо $S\Phi$-добавляема в G*, если в G имеется подгруппа T такая, что $G = HT$ и $H \cap T \leq \Phi(H)H_{sG}$, где H_{sG} — подгруппа группы H, порожденная всеми подгруппами в H, s-перестановочными в G. Изучается влияние слабо $S\Phi$-добавляемых подгрупп на строение конечных групп. Получены некоторые новые характеризации p-нильпотентности и сверхразрешимости конечных групп.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.411

Ключевые слова: силовская p-подгруппа, слабо $S\Phi$-добавляемая подгруппа, p-нильпотентная группа, сверхразрешимая группа.

1. Введение

Все группы в статье предполагаются конечными, символ G всегда обозначает группу, π — некоторое множество простых чисел, p — простое число, а $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G.

Хорошо известно, что добавляемые подгруппы играют важную роль в теории конечных групп. В частности, много новых исследований и продвижений произошло в последние годы. Например, Баллестер-Болинше с соавторами ввели в [1] понятие c-добавляемой подгруппы: подгруппа H группы G называется *c-добавляемой*, если существует подгруппа T в G такая, что $G = HT$ и $H \cap T \leq H_G$, где H_G — максимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в H. Подгруппа H группы G называется *слабо s-добавляемой* [2, 3], если существует подгруппа T в G такая, что $G = HT$ и $H \cap T \leq H_{sG}$, где H_{sG} — подгруппа в H, порожденная всеми подгруппами в H, которые s-перестановочны в G. Отметим, что подгруппа H_{sG} s-перестановочна в G в силу [3, лемма 2.8]. Подгруппа H группы G называется *слабо Φ-добавляемой* [4] в G, если существует подгруппа T в G такая, что $G = HT$ и $H \cap T \leq \Phi(H)$, где $\Phi(H)$ — подгруппа Фраттини группы H. Ряд интересных результатов о строении конечных групп был получен с использованием этих понятий (см. [1–4]). В продолжение упомянутых выше исследований введем следующее понятие.

Определение 1.1. Говорят, что подгруппа H группы G *слабо $S\Phi$-добавляема в G*, если существует подгруппа T в G такая, что $G = HT$ и $H \cap T \leq \Phi(H)H_{sG}$, где H_{sG} — подгруппа группы H, порожденная всеми подгруппами в H, s-перестановочными в G.

Легко видеть, что все упомянутые подгруппы группы G слабо $S\Phi$-добавляемы в G. Однако обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 1.2. Пусть $G = Q_8 = \langle a, b \mid a^4 = 1,\ a^2 = b^2,\ b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$. Положим $H = \langle b^2\rangle$. Тогда ясно, что G — единственное добавление H в G и H s-добавляема в G. Значит, H слабо s-добавляема в G и потому слабо $S\Phi$-добавляема в G, но не является слабо Φ-добавляемой в G для $\Phi(H) = 1$.

Пример 1.3. Пусть $G = S_5$ — симметрическая группа степени 5. Положим $H = \langle(1234)\rangle$. Ясно, что $H_{sG} = H_G = 1$. Поскольку $G = HA_5$ и $H \cap A_5 = \Phi(H) = \langle(13)(24)\rangle$, подгруппа H слабо Φ-добавляема в G и потому слабо $S\Phi$-добавляема в G, но не является ни слабо s-добавляемой в G, ни c-добавляемой в G.

В данной работе мы исследуем влияние слабо $S\Phi$-добавляемых подгрупп на строение конечных групп. В частности, получены некоторые новые характеризации p-нильпотентности и сверхразрешимости конечных групп.

Данные без пояснений обозначения и терминология стандартны (см. [5–8]).

2. Предварительные сведения

Следующая лемма очевидна.

Лемма 2.1. *Пусть N — нормальная подгруппа группы G.*

(1) *Предположим, что P — нетривиальная p-подгруппа группы G для некоторого простого делителя p группы $|G|$. Тогда $\Phi(P)N/N \le \Phi(PN/N)$.*

(2) *Пусть H — подгруппа группы G, удовлетворяющая условию $(|H|, |N|) = 1$. Тогда $\Phi(H)N/N = \Phi(HN/N)$.*

Лемма 2.2 [9, 10]. *Пусть $H \le G$ и $N \trianglelefteq G$.*

(1) *Если подгруппа H s-перестановочна в G, то подгруппа HN/N s-перестановочна в G/N.*

(2) *Предположим, что H — p-группа. Подгруппа H s-перестановочна в G тогда и только тогда, когда $O^p(G) \le N_G(H)$.*

Лемма 2.3 [3, лемма 2.8]. *Пусть G — группа и $H \le K \le G$. Тогда*

(1) *H_{sG} — s-перестановочная подгруппа в G;*

(2) *$H_{sG} \le H_{sK}$;*

(3) *если $H \trianglelefteq G$, то $(K/H)_{s(G/H)} = K_{sG}/H$.*

Лемма 2.4. *Пусть G — группа, $H \le K \le G$ и $N \trianglelefteq G$. Справедливы следующие утверждения.*

(1) *H слабо $S\Phi$-добавляема в G тогда и только тогда, когда в G имеется подгруппа T такая, что $G = HT, H_G \le T$ и $H \cap T \le \Phi(H)H_{sG}$.*

(2) *Если H слабо $S\Phi$-добавляема в G, то она слабо $S\Phi$-добавляема в K.*

(3) *Предположим, что $N \le H$. Если H слабо $S\Phi$-добавляема в G, то H/N слабо $S\Phi$-добавляема в G/N. Кроме того, если $N \le \Phi(H)$, то верно и обратное.*

(4) *Если H слабо $S\Phi$-добавляема в G и $(|H|, |N|) = 1$, то HN/N слабо $S\Phi$-добавляема в G/N.*

Доказательство. (1) Предположим, что в G имеется подгруппа T_0 такая, что $G = HT_0$ и $H \cap T_0 \le \Phi(H)H_{sG}$. Пусть $T = T_0H_G$. Тогда $G = HT$ и

$$H \cap T = H \cap T_0H_G = (H \cap T_0)H_G \le \Phi(H)H_{sG}.$$

Обратное очевидно.

(2) Пусть подгруппа H слабо $S\Phi$-добавляема в G, и пусть T — подгруппа в G такая, что $G = HT$ и $H \cap T \le \Phi(H)H_{sG}$. Тогда $K = HT \cap K = H(T \cap K)$ и

$$H \cap (T \cap K) \le H \cap T \le \Phi(H)H_{sG} \le \Phi(H)H_{sK}$$

в силу леммы 2.3(2). Значит, H слабо $S\Phi$-добавляема в K.

(3) Предположим, что $N \leq H$ и в G имеется подгруппа T такая, что $G = HT$ и $H \cap T \leq \Phi(H)H_{sG}$. Тогда, очевидно, $G/N = (H/N)(TN/N)$ и

$$(H/N) \cap (TN/N) = (H \cap T)N/N \leq (\Phi(H)N/N)(H_{sG}/N) \\ \leq \Phi(H/N)(H/N)_{s(G/N)}$$

в силу [5, A, 9.2(e)] и леммы 2.3(3). Следовательно, H/N слабо $S\Phi$-добавляема в G/N.

Предположим, что $N \leq \Phi(H)$ и в G/N имеется подгруппа T/N такая, что $G/N = (H/N)(T/N)$ и $(H/N) \cap (T/N) \leq \Phi(H/N)(H/N)_{s(G/N)}$. Тогда $G = HT$. Так как $N \leq \Phi(H)$, по [5, A, 9.2(e)] $\Phi(H/N) = \Phi(H)/N$. По лемме 2.3(3) $H \cap T \leq \Phi(H)H_{sG}$. Поэтому H слабо $S\Phi$-добавляема в G.

(4) Допустим, что $(|H|, |N|) = 1$ и G имеет подгруппу T такую, что $G = HT$ и $H \cap T \leq \Phi(H)H_{sG}$. Тогда очевидно, что $N \leq T$ и

$$(HN/N) \cap (T/N) = (H \cap T)N/N \leq (\Phi(H)H_{sG})N/N \\ = \Phi(HN/N)(H_{sG}N/N) \leq \Phi(HN/N)(HN/N)_{s(G/N)}$$

в силу лемм 2.1(2) и 2.3(3). Значит, HN/N слабо $S\Phi$-добавляема в G/N. $\square$

Пусть P — p-группа. Если P не является неабелевой 2-группой, то используем символ $\Omega(P)$ для обозначения подгруппы $\Omega_1(P)$. Иначе $\Omega(P) = \Omega_2(P)$.

Лемма 2.5 [11, лемма 4.3]. *Пусть C — критическая подгруппа Томпсона (см. [6, гл. 5, теорема 3.3]) нетривиальной p-группы в P.*

(1) *Если p нечетно, то показатель $\Omega_1(C)$ равен p.*

(2) *Если $p = 2$, то показатель $\Omega_2(C)$ не превосходит 4. Кроме того, если P — абелева 2-группа, то показатель $\Omega_1(C)$ равен 2.*

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если он замкнут относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной* (соответственно *разрешимо насыщенной*), если $G \in \mathfrak{F}$, как только $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ (соответственно $G/\Phi(N) \in \mathfrak{F}$ для разрешимой нормальной подгруппы N группы G) (см., например, [12]). Далее, формация $\mathfrak{F}$ называется *S-замкнутой*, если каждая подгруппа в G принадлежит $\mathfrak{F}$, как только $G \in \mathfrak{F}$. $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, обозначаемый символом $G^{\mathfrak{F}}$, является наименьшей нормальной подгруппой в G с фактором в $\mathfrak{F}$.

Для формации $\mathfrak{F}$ главный фактор H/K группы G называется *$\mathfrak{F}$-центральным в G*, если $H/K \rtimes G/C_G(H/K) \in \mathfrak{F}$. Нормальная подгруппа N группы G называется *$\mathfrak{F}$-центральной*, если либо $N = 1$, либо $N \neq 1$ и всякий главный фактор группы G ниже N $\mathfrak{F}$-централен в G. $\mathfrak{F}$-гиперцентр $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ группы G — это произведение всех нормальных $\mathfrak{F}$-центральных подгрупп в G (см. [5, с. 389]).

Мы используем обозначения $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{N}_p$ для класса всех сверхразрешимых групп и p-нильпотентных групп соответственно.

Лемма 2.6 [13, теорема B]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная формация и E — нормальная подгруппа группы G. Если $F^*(E) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$, то $E \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$.*

В этой лемме $F^*(E)$ — обобщенная подгруппа Фиттинга группы E, т. е. наибольшая нормальная квазинильпотентная подгруппа в E (см. [14, гл. X]).

Лемма 2.7 [15, лемма 3.3]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимо насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы. Пусть E — нормальная подгруппа группы G такая, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Если $E \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$. В частности, если подгруппа E циклическая, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Лемма 2.8 (см. [16, лемма 2.12; 17, лемма 2.8]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимо насыщенная формация. Предположим, что P — нормальная p-подгруппа группы G и C — критическая подгруппа Томсона группы P. Если либо $P/\Phi(P) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G/\Phi(P))$, либо $\Omega(C) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$, то $P \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$.*

Следующая лемма очевидна (см. также [18, лемма 2.8]).

Лемма 2.9. *Пусть M — максимальная подгруппа группы G и P — нормальная p-подгруппа группы G такая, что $G = MP$, где p — простой делитель $|G|$. Тогда $P \cap M \trianglelefteq G$.*

3. Новые характеризации p-нильпотентности групп

Теорема 3.1. *Пусть подгруппа $N \trianglelefteq G$ такова, что G/N p-нильпотентна, где p — наименьший простой делитель $|G|$. Предположим, что всякая циклическая подгруппа порядка 4 группы N слабо $S\Phi$-добавляема в G и всякая минимальная подгруппа порядка p в N содержится в $Z_{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}(G)$. Тогда G p-нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно, и пусть G — контрпример наименьшего порядка. Доказательство осуществим с помощью следующих шагов.

(1) G — минимальная ненильпотентная группа.

Пусть L — собственная подгруппа в G. Так как $L/L \cap N \cong LN/N \leq G/N$, группа $L/L \cap N$ p-нильпотентна. В силу предположения и леммы 2.4(2) всякая циклическая подгруппа в $L \cap N$ порядка 4 слабо $S\Phi$-добавляема в L. Кроме того, всякая минимальная подгруппа порядка p в $L \cap N$ содержится в $Z_{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}(G) \cap L \leq Z_{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}(L)$ (см. [19, лемма 2.2(5)]). Поэтому L удовлетворяет условию теоремы. В силу выбора G группа L p-нильпотентна. Это показывает, что G — минимальная не p-нильпотентная группа.

Ввиду [20, гл. IV, утверждение 5.4; 5, гл. VII, теорема 6.18] G — минимальная ненильпотентная группа, $G = P \rtimes Q$, где Q — силовская q-подгруппа в G; $P = G^{\mathfrak{N}}$, $P/\Phi(P)$ — главный фактор в G; показатель P равен p или 4 (когда P — неабелева 2-группа) и $\Phi(G) = Z_{\mathfrak{N}}(G)$.

(2) $p = 2$ и P содержит элемент порядка 4.

Так как группа G/N p-нильпотентна и $G = P \rtimes Q$, то $G/N = (PN/N) \times (QN/N)$. Отсюда следует, что G/N нильпотентна, поэтому $P = G^{\mathfrak{N}} \leq N$. Предположим, что (2) неверно, и тогда показатель P равен p. По предположению $P \leq Z_{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}(G)$. Следовательно, G p-нильпотентна; противоречие. Значит, (2) верно.

(3) Заключительное противоречие.

Пусть $H = \langle x \rangle$ — произвольный элемент порядка 4 в P. Тогда существует подгруппа T в G такая, что $G = HT$, $H \cap T \leq \Phi(H)H_{sG}$. Если $P = H$, то в силу [21, (10.1.9)] группа G p-нильпотентна; противоречие. Таким образом, $P \neq H$. Поскольку $P/\Phi(P)$ — главный фактор G, легко видеть, что $(P \cap T)\Phi(P)/\Phi(P) \trianglelefteq G/\Phi(P)$. Следовательно, $(P \cap T)\Phi(P) = \Phi(P)$ или $(P \cap T)\Phi(P) = P$. Если $(P \cap T)\Phi(P) = \Phi(P)$, то $P \cap T \leq \Phi(P)$ и потому $P = P \cap HT = H(P \cap T) = H$. Полученное противоречие показывает, что $P = (P \cap T)\Phi(P)$. Следовательно, $P \leq T$, так что $T = G$. Значит, $H = H \cap T \leq \Phi(H)H_{sG}$. Отсюда $H = H_{sG}$. В силу леммы 2.2(2) $O^p(G) \leq N_G(H)$. Следовательно, $H\Phi(P)/\Phi(P) \trianglelefteq G/\Phi(P)$. Таким образом, $H \leq \Phi(P) \leq \Phi(G) = Z_{\mathfrak{N}}(G)$. Отсюда вытекает, что $P \leq Z_{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}(G)$

и потому G p-нильпотентна. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Следующие результаты следуют непосредственно из теоремы 3.1.

Следствие 3.2. *Пусть p — наименьший простой делитель числа $|G|$. Если всякая циклическая подгруппа порядка 4 в группе G слабо $S\Phi$-добавляема в G и всякая минимальная подгруппа порядка p в G содержится в $Z_{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}(G)$, то G p-нильпотентна.*

Следствие 3.3 [4, теорема 3.1]. *Пусть G — группа с нормальной подгруппой N такой, что группа G/N p-нильпотентна. Предположим, что всякая минимальная подгруппа порядка p в N содержится в $Z(G)$ и всякая циклическая подгруппа порядка 4 в N (при $p = 2$) слабо Φ-добавляема в G. Тогда G p-нильпотентна.*

Теорема 3.4. *Пусть N — нормальная подгруппа в G такая, что G/N p-нильпотентна, где p — наименьший простой делитель $|G|$. Предположим, что всякая циклическая подгруппа порядка p или 4 в N слабо $S\Phi$-добавляема в G. Тогда G p-нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно, и пусть G — контрпример наименьшего порядка. Тогда имеем следующие утверждения.

(1) G — минимальная ненильпотентная группа.

Используя рассуждения, подобные приведенным в доказательстве п. (1) теоремы 3.1, убеждаемся, что G — минимальная ненильпотентная группа; $G = P \rtimes Q$, где Q — силовская q-подгруппа группы G; $P = G^{\mathfrak{N}}$, $P/\Phi(P)$ — главный фактор G; показатель P равен p или 4 (когда P — неабелева 2-группа).

(2) P — неабелева 2-группа.

Если P абелева или неабелева, но $p > 2$, то показатель P равен p. Используя рассуждения, подобные приведенным в доказательстве п. (2) теоремы 3.1, убеждаемся, что $P = G^{\mathfrak{N}} \leq N$. Пусть H — произвольный элемент порядка p группы P. Поскольку $P/\Phi(P)$ — главный фактор группы G, он абелев. Если $H = H_{sG}$, то в силу лемм 2.2(2) и 2.3(1) $H\Phi(P)/\Phi(P) \trianglelefteq G/\Phi(P)$. Следовательно, $P = H$ или $H \leq \Phi(P)$. Если $P = H$, то G p-нильпотентна согласно [21, (10.1.9)]; противоречие. Значит, $H \leq \Phi(P)$. Тогда $P \leq \Phi(P)$, потому что показатель группы P равен p, что невозможно. Таким образом, $H_{sG} = 1$. Тогда в силу предположения найдется подгруппа T группы G такая, что $G = HT$ и $H \cap T = 1$. Значит, $T \trianglelefteq G$ (см. [21, (10.1.9)]). Отсюда следует, что $T\Phi(P) \cap P = P$ или $T\Phi(P) \cap P = \Phi(P)$, и потому $P \leq T$ или $P \cap T \leq \Phi(P)$. Первый из случаев противоречит тому, что $H \cap T = 1$. Во втором случае имеем $P = P \cap HT = H(P \cap T) = H$; противоречие. Поэтому P — неабелева 2-группа.

(3) Если x — элемент порядка 2 в P, то $\langle x \rangle \leq \Phi(P)$.

Пусть $A = \langle x \rangle$ и $|x| = 2$. По предположению существует подгруппа T в G такая, что $G = AT$ и $A \cap T \leq \Phi(A)A_{sG} = A_{sG}$. Очевидно, что $|G : T| = |A : A \cap T| \leq 2$. Если $|G : T| = 2$, то $T \trianglelefteq G$ и T 2-нильпотентна в силу (1). Пусть $T_{2'}$ — нормальная холлова $2'$-подгруппа в T. Тогда $T_{2'}$ — нормальная холлова $2'$-подгруппа в G; противоречие. Значит, $T = G$. Тогда $A = A \cap T \leq A_{sG}$, поэтому $A = A_{sG}$. Применяя то же рассуждение, что и в (2), получаем, что $\langle x \rangle \leq \Phi(P)$.

(4) Завершающее противоречие.

Пусть x — произвольный элемент порядка 4 в P и $H = \langle x \rangle$. Если $H = H_{sG}$, то $H \leq \Phi(P)$ в силу рассуждений, подобных приведенным в (2), и тем самым $P \leq \Phi(P)$ ввиду (3); противоречие. Значит, $H_{sG} \leq \Phi(H)$. Тогда в силу предположения в G имеется подгруппа T такая, что $G = HT$ и $H \cap T \leq \Phi(H)$. В этом случае, очевидно, $(P \cap T)\Phi(P)/\Phi(P) \trianglelefteq G/\Phi(P)$. Так как $P/\Phi(P)$ — главный фактор группы G, то $(P \cap T)\Phi(P) = P$ или $(P \cap T)\Phi(P) = \Phi(P)$. Если $P = (P \cap T)\Phi(P)$, то $P \leq T$, откуда следует, что $T = G$. Значит, $H = H \cap T \leq \Phi(H)$, что невозможно. Предположим, что $(P \cap T)\Phi(P) = \Phi(P)$. Тогда $P \cap T \leq \Phi(P)$. Отсюда следует, что $P = P \cap HT = (P \cap T)H \leq H$; противоречие с (2). Теорема доказана. $\square$

Следствие 3.5. *Пусть p — наименьший простой делитель $|G|$. Предположим, что всякая циклическая подгруппа порядка p или 4 в G слабо $S\Phi$-добавляема в G. Тогда G p-нильпотентна.*

Следствие 3.6 [22, теорема 3.1]. *Пусть G — группа и p — наименьший простой делитель $|G|$. Если всякая циклическая подгруппа порядка p или 4 в G слабо s-добавляема в G, то G p-нильпотентна.*

4. Новая характеризация сверхразрешимости групп

Говорят, что подгруппа H группы G имеет *сверхразрешимое добавление* в G, если существует сверхразрешимая подгруппа L в G такая, что $G = HL$.

Лемма 4.1. *Пусть P — нормальная p-подгруппа в G. Если всякая максимальная подгруппа в P либо слабо $S\Phi$-добавляема, либо имеет сверхразрешимое добавление в G, то $P \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$.*

Доказательство. Допустим, что утверждение неверно, и пусть (G, P) — контрпример, для которого число $|G| + |P|$ наименьшее. Тогда $G \neq Z_{\mathfrak{U}}(G)$, т. е. G не сверхразрешима. Разобьем доказательство на шаги.

(1) В G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N, содержащаяся в P, $P/N \leq Z_{\mathfrak{U}}(G/N)$ и $|N| > p$.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в P. Из леммы 2.4(3) ясно, что $(G/N, P/N)$ удовлетворяет условию. Из выбора (G, P) следует, что $P/N \leq Z_{\mathfrak{U}}(G/N)$. Если $|N| = p$, то, очевидно, $P \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$, что невозможно. Значит, $|N| > p$. Если в G имеется другая минимальная подгруппа L, содержащаяся в P и такая, что $N \neq L$, аналогичными рассуждениями получаем, что $P/L \leq Z_{\mathfrak{U}}(G/L)$. Отсюда $NL/L \leq Z_{\mathfrak{U}}(G/L)$ и потому $|N| = p$; противоречие.

(2) $\Phi(P) \neq 1$.

Если $\Phi(P) = 1$, то группа P элементарная абелева. Пусть N_1 — максимальная подгруппа в N такая, что N_1 нормальна в некоторой силовской p-подгруппе G_p группы G, и пусть S — дополнение N в P. Тогда $P_1 = N_1S$ — максимальная подгруппа в P и $P_1 \cap N = N_1$. Ясно, что $\Phi(P_1) \leq \Phi(P) = 1$. Если P_1 слабо $S\Phi$-добавляема в G, то существует подгруппа T в G такая, что $G = P_1T$ и $P_1 \cap T \leq (P_1)_{sG}$. Таким образом, $G = PT$ и $P = P \cap P_1T = P_1(P \cap T)$. Легко видеть, что $1 \neq P \cap T \trianglelefteq G$. В силу (1) $N \leq P \cap T$ и потому $P_1 \cap N \leq P_1 \cap T \leq (P_1)_{sG}$. Следовательно, $N_1 = P_1 \cap N = (P_1)_{sG} \cap N$ s-перестановочна в G (см. лемму 2.3(1) и [9, предложение 2]). Стало быть, по лемме 2.2(2) $O^p(G) \leq N_G(N_1)$. Но поскольку $N_1 \trianglelefteq G_p$, получаем, что $N_1 \trianglelefteq G$. Тем самым $|N| = p$, что противоречит (1). Предположим, что P_1 имеет сверхразрешимое добавление K в G.

Тогда $G = P_1K = PK$. Так как $(G/N)/(P/N) \cong G/P \cong K/K \cap P$ — сверхразрешимая группа и $P/N \le Z_{\mathfrak{U}}(G/N)$ в силу (1), группа G/N сверхразрешима. Поскольку G не сверхразрешима, $N \nleq \Phi(G)$. Значит, найдется максимальная подгруппа M в G такая, что $N \nleq M$ и $G = NM$. Ясно, что $P \cap M \trianglelefteq PM = G$. Если $P \cap M \ne 1$, то в силу (1) $N \le P \cap M$, что невозможно. Значит, можем предполагать, что $P \cap M = 1$. Тогда $P = P \cap NM = N$, поэтому $G = N_1K = NK$. Также ясно, что $N \cap K \trianglelefteq G$. Если $N \cap K \ne 1$, то $N \le K$ и потому группа $G = K$ сверхразрешима. Полученное противоречие показывает, что $N \cap K = 1$. Значит, $N = N \cap N_1K = N_1$; противоречие. Поэтому $\Phi(P) \ne 1$.

(3) Завершающее противоречие.

Согласно (1) и (2) $N \le \Phi(P)$ и $P/N \le Z_{\mathfrak{U}}(G/N)$. Это влечет, что $P/\Phi(P) \le Z_{\mathfrak{U}}(G/\Phi(P))$. Таким образом, $P \le Z_{\mathfrak{U}}(G)$ в силу леммы 2.8. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Предложение 4.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимо насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Предположим, что в G имеется разрешимая нормальная подгруппа E такая, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Если всякая максимальная подгруппа каждой нециклической силовской подгруппы в $F(E)$ либо $S\Phi$-добавляема, либо имеет сверхразрешимое добавление в G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Так как E разрешима, $F(E) \ne 1$. Пусть P — силовская p-подгруппа в $F(E)$, где p — произвольный простой делитель $|E|$. Тогда P — нормальная p-подгруппа в G. Если P нециклическая, то P удовлетворяет условию леммы 4.1 и потому $P \le Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Предположим, что группа P циклическая. Пусть L/K — произвольный главный фактор G ниже P. Тогда $|L/K| = p$, стало быть, подгруппа L/K $\mathfrak{U}$-центральна в G. Значит, также получаем, что $P \le Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Следовательно, $F(E) \le Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Заметим, что $F^*(E) = F(E)$, так как E разрешима. Тем самым в силу лемм 2.6 и 2.7 $G \in \mathfrak{F}$. $\square$

Лемма 4.3. *Предположим, что P — нормальная p-подгруппа группы G. Если всякая циклическая подгруппа в P простого порядка или порядка 4 либо слабо $S\Phi$-добавляема, либо имеет сверхразрешимое добавление в G, то $P \le Z_{\mathfrak{U}}(G)$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно и (G, P) — контрпример, для которого число $|G| + |P|$ наименьшее.

(1) В G имеется единственная нормальная подгруппа N такая, что P/N — главный фактор G, $N \le Z_{\mathfrak{U}}(G)$ и $|P/N| > p$.

Пусть P/N — главный фактор G. Тогда, очевидно, пара (G, N) удовлетворяет условию теоремы. Из выбора (G, P) следует, что $N \le Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Если $|P/N| = p$, то $P/N \le Z_{\mathfrak{U}}(G/N)$ и потому $P \le Z_{\mathfrak{U}}(G)$; противоречие. Значит, $|P/N| > p$. Предположим, что P/L — главный фактор группы G такой, что $P/N \ne P/L$. Используя те же рассуждения, что и выше, получаем, что $L \le Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Тогда $P/N = NL/N \le NZ_{\mathfrak{U}}(G)/N \le Z_{\mathfrak{U}}(G/N)$. Следовательно, из $N \le Z_{\mathfrak{U}}(G)$ следует, что $P \le Z_{\mathfrak{U}}(G)$; противоречие.

(2) Показатель P равен p или 4 (когда P — неабелева 2-группа).

Пусть C — критическая подгруппа Томсона группы P. Если $\Omega(C) < P$, то $\Omega(C) \le N \le Z_{\mathfrak{U}}(G)$ в силу (1), поэтому $P \le Z_{\mathfrak{U}}(G)$ согласно лемме 2.8, что невозможно. Значит, $P = C = \Omega(C)$. Тогда по лемме 2.5 показатель P равен p или порядок равен 4 (когда P — неабелева 2-группа).

(3) Завершающее противоречие.

Очевидно, что $P/N \cap Z(G_p/N) > 1$, где G_p — произвольная силовская p-подгруппа в G. Предположим, что $L/N \leq P/N \cap Z(G_p/N)$ и $|L/N| = p$. Пусть $x \in L \backslash N$ и $H = \langle x \rangle$. Тогда $L = HN$ и $|H| = p$ или 4 (когда P — неабелева 2-группа) в силу (2). Если $H = H_{sG}$, то подгруппа HN/N s-перестановочна в G/N в силу лемм 2.2(1) и 2.3(1). Ясно, что $HN/N \trianglelefteq G_p/N$, и по лемме 2.2(2) $O^p(G/N) \leq N_{G/N}(HN/N)$. Отсюда следует, что $HN/N \trianglelefteq G/N$. Но поскольку P/N — главный фактор в G и $H \nleq N$, получаем, что $P = HN$. Следовательно, группа $P/N = L/N$ циклическая, что противоречит (1). Значит, $H \neq H_{sG}$ и потому $H_{sG} \leq \Phi(H)$. Предположим сначала, что подгруппа H слабо $S\Phi$-добавляема в G. Тогда существует подгруппа T в G такая, что $G = HT = PT$ и $H \cap T \leq \Phi(H)$. Ясно, что $|H \cap T| \leq |\Phi(H)| \leq 2$. Если $H \cap T = 1$, то $T \neq G$. Пусть M — максимальная подгруппа в G такая, что $T \leq M$. Тогда $G = PM$. В силу леммы 2.9 $P \cap M \trianglelefteq G$. Согласно (1) $P \cap M \leq N$. Значит,

$$P = P \cap HT = H(P \cap T) \leq H(P \cap M) = HN,$$

что невозможно. Теперь предположим, что $|H \cap T| = 2$. Тогда $|H| = 4$ и $|G : T| = |H : H \cap T| = 2$. Тем самым $T \trianglelefteq G$. Следовательно, $P \cap T \trianglelefteq G$. Если $P \leq T$, то $G = T$ и потому $H \leq \Phi(H)$. Полученное противоречие показывает, что $P \cap T \leq N$ в силу (1). Рассуждения, подобные приведенным выше, показывают, что это невозможно. Теперь предположим, что H имеет разрешимое добавление K в G. Тогда $G = HK = PK$. Если $P \leq K$, то группа $G = K$ сверхразрешима, что невозможно. Значит, в G имеется максимальная подгруппа M такая, что $K \leq M$ и потому $G = PM$. Как и выше, можно показать, что $P = HN$, что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Теорема 4.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимо насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$, и пусть E — нормальная подгруппа в G такая, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Предположим, что $X = E$ или $X = F^*(E)$. Если для произвольной нециклической силовской подгруппы P в X всякая циклическая подгруппа в P простого порядка или порядка 4 либо слабо $S\Phi$-добавляема, либо имеет сверхразрешимое добавление в G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Покажем сначала, что теорема верна для $X = E$. Предположим, что теорема неверна, и пусть (G, E) — контрпример, для которого число $|G| + |E|$ наименьшее. Тогда имеем следующие утверждения.

(1) Группа E разрешима.

Предположим, что это неверно. Тогда в силу известной теоремы Фейта — Томпсона $2||E|$. Если в E имеется циклическая силовская 2-подгруппа, то согласно [21, (10.1.9)] E 2-нильпотентна и потому разрешима. Полученное противоречие показывает, что всякая 2-подгруппа в E нециклическая. Если всякая циклическая подгруппа в E порядка 2 или 4 слабо $S\Phi$-добавляема в G, то по следствию 3.5 E 2-нильпотентна, так что разрешима; противоречие. Значит, найдется циклическая подгруппа H порядка 2 или 4 в E такая, что она имеет добавление T в G. Тогда $G = HT = ET$, поэтому $G/E = ET/E \cong T/T \cap E \in \mathfrak{U}$. Покажем, что G — минимальная несверхразрешимая группа. Пусть L — собственная подгруппа в G. Так как $L/L \cap E \cong LE/E \leq G/E$, имеем $L/L \cap E \in \mathfrak{U}$. Пусть $\langle x \rangle$ — произвольная циклическая подгруппа в любой нециклической силовской подгруппе группы $L \cap E$ простого порядка или порядка 4. По предположению подгруппа $\langle x \rangle$ либо слабо $S\Phi$-добавляема в G, либо имеет сверхразрешимое добавление в G. Если подгруппа $\langle x \rangle$ слабо $S\Phi$-добавляема в G, то по лемме 2.4(2) она также слабо $S\Phi$-добавляема в L. Если $\langle x\rangle$ имеет сверхразрешимое добавление K в G, то $L = \langle x\rangle(K \cap L)$ и $K \cap L \in \mathfrak{U}$. Это показывает, что условие все еще выполняется для $(L, L \cap E)$. Из выбора (G, E) вытекает, что $L \in \mathfrak{U}$. Таким образом, G — минимальная несверхразрешимая группа. Следовательно, группа G разрешима (см. [23] или [24, теорема 12]), поэтому E разрешима; противоречие. Таким образом, утверждение (1) верно.

(2) $G^{\mathfrak{F}}$ — p-group, $G^{\mathfrak{F}}/\Phi(G^{\mathfrak{F}})$ — главный фактор группы G, и показатель $G^{\mathfrak{F}}$ равен p или 4 (если $p = 2$ и группа $G^{\mathfrak{F}}$ неабелева).

Так как $G/E \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq E$. Значит, группа $G^{\mathfrak{F}}$ разрешима в силу (1). Если $G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(G)$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M_G$ для любой максимальной подгруппы M в G, так что $G/M_G \in \mathfrak{F}$. Значит, утверждение (2) следует из теоремы Семенчука (см. [25] или [7, теорема 3.4.2]). Предположим, что $G^{\mathfrak{F}} \nsubseteq \Phi(G)$. Пусть T — максимальная подгруппа в G такая, что $G^{\mathfrak{F}} \nsubseteq T$. Тогда $G = G^{\mathfrak{F}}T = ET$ и $T/T \cap E \cong TE/E = G/E \in \mathfrak{F}$. Пусть $\langle x\rangle$ — циклическая подгруппа произвольной нециклической силовской подгруппы простого порядка или порядка 4 в $T \cap E$. Используя рассуждения, подобные тем, что приведены в доказательстве утверждения (1), убеждаемся, что условие выполняется и для $(T, T \cap E)$. Из выбора (G, E) вытекает, что $T \in \mathfrak{F}$. Таким образом, утверждение (2) также верно по теореме Семенчука (см. [25] или [7, теорема 3.4.2]).

(3) Завершающее противоречие.

Согласно (2) $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа. Если группа $G^{\mathfrak{F}}$ нециклическая, то $G^{\mathfrak{F}}$ удовлетворяет условию леммы 4.3 и потому $G^{\mathfrak{F}} \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Предположим, что $G^{\mathfrak{F}}$ — циклическая группа. Тогда, очевидно, $G^{\mathfrak{F}} \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$ (см. также доказательство предложения 4.2). Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие показывает, что теорема верна для $X = E$.

Покажем, что теорема верна для $X = F^*(E)$.

В силу леммы 2.4(2) легко видеть, что условие выполнено для пары $(F^*(E), F^*(E))$. Значит, ввиду доказанного выше группа $F^*(E)$ сверхразрешима, а следовательно, $F(E) = F^*(E)$. Пусть H — силовская p-подгруппа в $F(E)$. Очевидно, что $H \trianglelefteq G$. Если подгруппа H нециклическая, то H удовлетворяет условию леммы 4.3. Значит, $H \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Если H циклическая, то, очевидно, $H \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Следовательно, $F^*(E) = F(E) \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Поэтому в силу леммы 2.6 $E \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Из леммы 2.7 следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Доказательство завершено. $\square$

Следствие 4.5 [22, теорема 4.8]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$, и E — нормальная подгруппа группы G такая, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$, если всякая циклическая подгруппа в $F^*(E)$ простого порядка или порядка 4 слабо s-добавляема в G.*

Следствие 4.6 [26, теорема 1.2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$, и пусть E — нормальная подгруппа группы G такая, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Если все минимальные подгруппы и все циклические подгруппы порядка 4 в $F^*(E)$ c-добавляемы в G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ballester-Bolinches A., Wang Y., Guo X.* c-Supplemented subgroups of finite groups // Glasgow Math. J. 2000. V. 42. P. 383–389.
2. *Guo W., Xie F., Li B.* Some open questions in the theory of generalized permutable subgroups // Sci. China, Ser. A. 2014. V. 52, N 10. P. 2132–2144.
3. *Skiba A. N.* On weakly s-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2007. V. 315. P. 192–209.

4. *Li J., Xie F.* On inequalities of subgroups and the structure of finite groups // J. Ineq. Appl. 2013. V. 1. P. 427.
5. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
6. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Chelsea Publ. Comp., 1980.
7. *Guo W.* The theory of classes of groups. Beijing; New York; Dordrecht; Boston; London: Sci. Press-Kluwer Acad. Publ., 2000.
8. *Guo W.* Structure theory for canonical classes of finite groups. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2015.
9. *Kegel O.* Sylow-Gruppen and Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. 1962. Bd 78. S. 205–221.
10. *Schmid P.* Subgroup permutable with all Sylow subgroups // J. Algebra. 1998. V. 207. P. 285–293.
11. *Guo W., Skiba A. N.* Finite groups with generalized Ore supplement conditions for primary subgroups // J. Algebra. 2015. V. 432. P. 205–227.
12. *Guo W., Skiba A. N., Tang X.* On boundary factors and traces of subgroups of finite groups // Comm. Math. Stat. 2014. V. 2. P. 349–361.
13. *Skiba A. N.* On two questions of L. A. Shemetkov concerning hypercyclically embedded subgroups of finite groups // J. Group Theory. 2010. V. 13. P. 841–850.
14. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups. III. Berlin; New York: Springer-Verl., 1982.
15. *Guo W., Skiba A. N.* On $\mathfrak{F}\Phi^*$-hypercentral subgroups of finite groups // J. Algebra. 2012. V. 372. P. 275–292.
16. *Chen X., Guo W., Skiba A. N.* Some conditions under which a finite group belongs to a Baer-local formation // Comm. Algebra. 2014. V. 42. P. 4188–4203.
17. *Chen X., Guo W.* On Π-supplemented subgroups of a finite group // Comm. Algebra (to appear), see arXiv:1307.0089.
18. *Wang Y., Wei H., Li Y.* A generalization of a theorem of Kramer and its applications // Bull. Austral. Math. Soc. 2002. V. 65. P. 467–475.
19. *Guo W., Skiba A. N.* On the intersection of the $\mathfrak{F}$-maximal subgroups and the generalized $\mathfrak{F}$-hypercentre of a finite groups // J. Algebra. 2012. V. 366. P. 112–125.
20. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
21. *Robinson D. J. S.* A course in the theory of groups. New York: Springer-Verl., 1982.
22. *Li Y., Li B.* On minimal weakly s-supplemented subgroups of finite groups // J. Algebra Appl. 2011. V. 10. P. 811–820.
23. *Huppert B.* Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1954. Bd 60. S. 409–434.
24. *Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R.* On minimal non-supersoluble groups // Rev. Mat. Iberoam. 2007. V. 23, N 1. P. 127–142.
25. *Семенчук В. Н.* Минимальные не-$\mathfrak{F}$-группы // Алгебра и логика. 1979. Т. 18, № 3. С. 348–382.
26. *Wei H., Wang Y., Li Y.* On c-supplemented maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. V. 132. P. 2197–2204.

Статья поступила 1 июня 2015 г.

Zhengfeng Wu (У Чжэньфэн), Wenbin Guo (Го Вэньбинь)
School of Mathematical Sciences,
University of Science and Technology of China,
Hefei 230026, P.R. China
zhfwu@mail.ustc.edu.cn, wbguo@ustc.edu.cn

Yuemei Mao (Мао Юемэй)
School of Mathematical Sciences,
University of Science and Technology of China,
Hefei 230026, P. R. China;
School of Mathematics and Computer,
University of Datong of Shanxi,
Datong 037009, P. R. China
maoym@mail.ustc.edu.cn