Сибирский математический журнал
Июль—август, 2016. Том 57, № 4

УДК 517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫРОЖДЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАМЯТЬЮ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ПОЛУГРУПП ОПЕРАТОРОВ

В. Е. Федоров, Л. В. Борель

Аннотация. Задача с заданной историей для интегродифференциального уравнения в банаховом пространстве, учитывающего эффект памяти, редуцирована к задаче Коши для эволюционной системы уравнений с постоянным оператором в более широком пространстве, обладающей разрешающей (C_0)-полугруппой. Это позволило сформулировать условия существования единственного классического решения исходной задачи. Полученные результаты использованы при исследовании однозначной разрешимости задач с заданной историей для вырожденного линейного эволюционного уравнения с памятью в банаховом пространстве. Показано, что начально-краевая задача для линеаризованной интегродифференциальной системы уравнений Осколкова, описывающей в линейном приближении динамику жидкости Кельвина — Фойгта, принадлежит исследованному классу задач.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.412

Ключевые слова: эволюционное уравнение, полугруппа операторов, уравнение с памятью, интегродифференциальное уравнение, начально-краевая задача, жидкость Кельвина — Фойгта.

1. Введение

Исследуется однозначная разрешимость задачи с заданной историей

$$u(t) = u_-(t), \quad t \in (-\infty, 0], \tag{1.1}$$

для линейного интегродифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} \mathscr{K}(t-s)u(s)\,ds + f(t) \tag{1.2}$$

с оператором A, порождающим (C_0)-полугруппу в банаховом пространстве. Она редуцирована к задаче Коши $w(0) = w_0$ для уравнения $\dot{w}(t) = Bw(t) + g(t)$ с постоянным оператором B в более широком пространстве. Показано, что полученный при этом оператор B также порождает (C_0)-полугруппу. Это позволило сформулировать условия однозначной разрешимости для задачи (1.1), (1.2).

Задачи с заданной историей для вырожденного интегродифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}Lu(t) = Mu(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} \mathscr{K}(t-s)u(s)\,ds + f(t) \tag{1.3}$$

Работа выполнена частично при финансовой поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского гос. университета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

с линейными операторами $L, M, \mathscr{K}(s)$, $s \geq 0$, действующими из банахова пространства $\mathfrak{U}$ в банахово пространство $\mathfrak{V}$, $\ker L \neq \{0\}$, методами теории вырожденных полугрупп операторов [1] сводятся к задаче (1.1), (1.2). При этом предполагается, что пара операторов L, M порождает вырожденную сильно непрерывную полугруппу операторов (т. е. выполняется условие сильной (L,p)-радиальности оператора M [1]). К таким задачам редуцируются начально-краевые задачи для интегродифференциальных уравнений в частных производных, описывающих динамику некоторых процессов с эффектами памяти, например, термомеханическое поведение полимеров [2], вязкоупругих жидкостей [3] и других процессов [4–6]. В данной работе общие результаты использованы для исследования однозначной разрешимости начально-краевых задач для линеаризованной интегродифференциальной системы уравнений Осколкова, моделирующей в линейном приближении вязкоупругую жидкость Кельвина — Фойгта [3], и для модельной сильно вырожденной системы уравнений в частных производных с памятью.

Отметим близкие по предмету исследования работы [7–10]. В [7] с помощью теоремы о сжимающем отображении рассмотрены те же начальные задачи для уравнений (1.2) и (1.3) с левой частью $L\frac{d}{dt}u(t)$, что и в данной работе, но при более жестких условиях на оператор A (порождение аналитической полугруппы) или на операторы L, M (порождение вырожденной аналитической полугруппы). В работах М. В. Фалалеева и С. С. Орлова (см. [8, 9] и др.) исследованы интегродифференциальные уравнения с эффектами памяти, вообще говоря, высокого порядка, имеющие вырожденный оператор при старшей производной. В предположении фредгольмовости оператора при производной и существования полного M-жорданова набора у оператора L либо при условии (L,p)-ограниченности оператора M доказана разрешимость начальной задачи Коши для уравнения (1.3) как в смысле классических, так и в смысле обобщенных решений. Аналогичные результаты получены для уравнений высокого порядка.

В [10] в отличие от настоящей работы рассмотрено уравнение (1.3) с (L,p)-ограниченным оператором M. В таком случае при анализе уравнения (1.3) методами теории вырожденных полугрупп операторов получается уравнение (1.2) с ограниченным оператором $A = L_1^{-1}M_1$, что значительно упрощает рассмотрения. В данной работе исследован существенно более общий случай, когда оператор M сильно (L,p)-радиален, поэтому, в частности, оператор $A = L_1^{-1}M_1$ не ограничен.

2. Невырожденное уравнение с памятью

Для банаховых пространств $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ через $\mathscr{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ будем обозначать банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{V}$. Множество линейных замкнутых операторов с областями определения, плотными в пространстве $\mathfrak{U}$, действующих в $\mathfrak{V}$, обозначим через $\mathscr{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Если $\mathfrak{V} = \mathfrak{U}$, то соответствующие обозначения будут иметь вид $\mathscr{L}(\mathfrak{U})$ и $\mathscr{C}l(\mathfrak{U})$ соответственно.

Через D_M обозначается область определения оператора $M \in \mathscr{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Снабженное нормой графика $\|\cdot\|_{D_M} = \|\cdot\|_{\mathfrak{U}} + \|M\cdot\|_{\mathfrak{V}}$ это множество является банаховым пространством в силу замкнутости M.

Обозначим также $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_- = \{0\} \cup \mathbb{R}_-$, $\mathscr{R}(\mathbb{R}_+;\mathfrak{U})$ — множество функций $h : \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{U}$, для которых сходится несобственный интеграл Римана $\int\limits_0^{+\infty} \|h(t)\|_{\mathfrak{U}}\,dt$, $\mathscr{R}^1(\mathbb{R}_+;\mathfrak{U})$ — множество функций $h:\mathbb{R}_+\to\mathfrak{U}$, для которых почти всюду на $\mathbb{R}_+$ существует производная h' и несобственные интегралы Римана $\int\limits_0^{+\infty} \|h(t)\|_{\mathfrak{U}}\,dt$ и $\int\limits_0^{+\infty} \|h'(t)\|_{\mathfrak{U}}\,dt$ сходятся. Через $C^k(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$, $k\in\{0\}\cup\mathbb{N}$, обозначим множество k раз непрерывно дифференцируемых функций из $\overline{\mathbb{R}}_+$ в $\mathfrak{U}$. Вместо $C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ будем писать $C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$.

Через $C^{k,0}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ обозначим банахово пространство k раз непрерывно дифференцируемых и ограниченных на $\overline{\mathbb{R}}_+$ вместе с k первыми производными функций, удовлетворяющих равенствам $u^{(l)}(0)=0$, $l=0,1,\dots,k$, с нормой

$$\|u\|_{C^{k,0}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})}=\sum_{l=0}^{k}\sup_{t\ge 0}\|u^{(l)}(t)\|_{\mathfrak{U}},$$

$C^{0,0}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ будет обозначаться через $C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$.

Пусть $\mathfrak{U}$ — банахово пространство, задан оператор $A:D_A\to\mathfrak{U}$, где $D_A\subset\mathfrak{U}$. Рассмотрим задачу (1.1), (1.2) с заданными функциями $u_-\in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})\cap\mathscr{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $\mathscr{K}:\overline{\mathbb{R}}_+\to\mathscr{L}(\mathfrak{U})$, $f:[0,T)\to\mathfrak{U}$, $T\le+\infty$. Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{t}\mathscr{K}(t-s)u(s)\,ds=\int\limits_{-\infty}^{0}\mathscr{K}(t-s)u_-(s)\,ds+\int\limits_{0}^{t}\mathscr{K}(t-s)u(s)\,ds.$$

Решением задачи (1.1), (1.2) *на промежутке* $[0,T)$ будем называть функцию $u\in C^1([0,T);\mathfrak{U})\cap C([0,T);D_A)\cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$, для которой справедливо условие (1.1) и при каждом $t\in[0,T)$ выполняется равенство (1.2).

Следуя работам [4–6], введем в рассмотрение функцию

$$v(t,s)=\int\limits_0^s u(t-\tau)\,d\tau=\int\limits_{t-s}^{t}u(\tau)\,d\tau,$$

тогда при $\mathscr{K}\in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathscr{L}(\mathfrak{U}))\cap\mathscr{R}^1(\mathbb{R}_+;\mathscr{L}(\mathfrak{U}))$

$$\int\limits_{-\infty}^{t}\mathscr{K}(t-s)u(s)\,ds=\int\limits_{0}^{+\infty}\mathscr{K}(s)u(t-s)\,ds=\int\limits_{0}^{+\infty}\mathscr{K}(s)\frac{\partial}{\partial s}v(t,s)\,ds$$
$$=\left(\int\limits_{-\infty}^{0}u_-(\tau)\,d\tau+\int\limits_0^t u(\tau)\,d\tau\right)\lim_{s\to+\infty}\mathscr{K}(s)-\int\limits_0^{+\infty}\mathscr{K}'(s)v(t,s)\,ds$$
$$=-\int\limits_0^{+\infty}\mathscr{K}'(s)v(t,s)\,ds.$$

Получено уравнение

$$\frac{d}{dt}u(t)=Au(t)-\int\limits_0^{+\infty}\mathscr{K}'(s)v(t,s)\,ds+f(t).\tag{2.1}$$

Вычислим частную производную

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\int\limits_0^s \frac{\partial}{\partial \tau} u(t-\tau)\,d\tau = u(t) - u(t-s) = u(t) - \frac{\partial}{\partial s} v(t,s). \tag{2.2}$$

Таким образом, задача (1.1) для уравнения (1.2) сведена к задаче Коши

$$u(0) = u_-(0), \quad v(0,s) = \int\limits_{-s}^0 u_-(\tau)\,d\tau, \quad s \geq 0,$$

для системы уравнений (2.1), (2.2), которую можно записать в виде неоднородного уравнения $w'(t) = Bw(t) + g(t)$ в пространстве $\mathfrak{W} = \mathfrak{U} \times C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$. Здесь

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A & A_1 \\ J & A_2 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

$A_1 : C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}) \to \mathfrak{U}$, $A_2 : C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}) \to C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$, $J : \mathfrak{U} \to C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ действуют по правилам

$$A_1 z = -\int\limits_0^{+\infty} \mathscr{K}'(s) z(s)\,ds, \quad (A_2 z)(s) = -z'(s), \quad (Jz)(s) \equiv z, \quad s \geq 0.$$

Очевидно, что $J \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}; C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}))$, $\|J\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U};C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}))} = 1$.

Лемма 2.1. *Если $\mathscr{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathscr{L}(\mathfrak{U})) \cap \mathscr{R}^1(\mathbb{R}_+;\mathscr{L}(\mathfrak{U}))$, то оператор A_1 принадлежит $\mathscr{L}(C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U});\mathfrak{U})$.*

Доказательство. Для $z \in C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$

$$\|A_1 z\|_{\mathfrak{U}} \leq \sup_{\tau \geq 0} \|z(\tau)\|_{\mathfrak{U}} \int\limits_0^{+\infty} \|\mathscr{K}'(s)\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})}\,ds. \quad \square$$

Лемма 2.2. *Оператор $A_2 \in \mathscr{C}l(C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}))$ с областью определения $D_{A_2} = C^{1,0}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ порождает сжимающую (C_0)-полугруппу операторов.*

Доказательство. Нетрудно вычислить, что при заданных $\mu > 0$ и $z \in C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$

$$[(\mu I - A_2)^{-1} z](s) = \int\limits_0^s e^{\mu(\tau - s)} z(\tau)\,d\tau,$$

$$\|(\mu I - A_2)^{-1} z\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})} \leq \sup_{s \geq 0} \int\limits_0^s e^{\mu(\tau - s)} \|z(\tau)\|_{\mathfrak{U}}\,d\tau \leq \frac{1}{\mu} \|z\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})}.$$

Поэтому $\|(\mu I - A_2)^{-1}\|_{\mathscr{L}(C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U}))} \leq \mu^{-1}$ при всех $\mu > 0$. По теореме Хилле — Иосиды оператор A_2 является генератором сжимающей (C_0)-полугруппы операторов. $\square$

Замечание 2.1. Именно ради этой леммы выбрано и далее используется пространство $C^0(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{U})$ функций, удовлетворяющих условию $z(0) = 0$.

Теорема 2.1. *Пусть оператор A порождает (C_0)-полугруппу операторов в $\mathfrak{U}$, $\mathscr{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathscr{L}(\mathfrak{U})) \cap \mathscr{R}^1(\mathbb{R}_+; \mathscr{L}(\mathfrak{U}))$. Тогда определенный в (2.3) оператор B с областью определения $D_B = D_A \times C^{1,0}(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U})$ порождает (C_0)-полугруппу операторов в $\mathfrak{U} \times C^0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U})$.*

Доказательство. Имеем $B = B_0 + B_1$, где

$$B_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ J & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор $B_0 \in \mathscr{C}l(\mathfrak{U} \times C^0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U}))$ порождает (C_0)-полугруппу операторов в пространстве $\mathfrak{U} \times C^0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U})$, поскольку операторы A и A_2 являются генераторами (C_0)-полугрупп на пространствах $\mathfrak{U}$ и $C^0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U})$ соответственно. Оператор B_1 непрерывен на пространстве $\mathfrak{U} \times C^0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U})$ в силу леммы 2.1, поэтому по теореме 2.1 из [11] оператор $B = B_0 + B_1 \in \mathscr{C}l(\mathfrak{U} \times C^0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U}))$ является генератором (C_0)-полугруппы на пространстве $\mathfrak{U} \times C^0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U})$. □

Теорема 2.2. *Пусть оператор A порождает (C_0)-полугруппу операторов в пространстве $\mathfrak{U}$, $u_- \in C^0(\overline{\mathbb{R}}_-; \mathfrak{U}) \cap \mathscr{R}(\mathbb{R}_-; \mathfrak{U})$, $\mathscr{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathscr{L}(\mathfrak{U})) \cap \mathscr{R}^1(\mathbb{R}_+; \mathscr{L}(\mathfrak{U}))$ и выполняется одно из двух условий*

(i) $f \in C^1([0,T); \mathfrak{U})$;

(ii) $f \in C([0,T); D_A)$.

Тогда существует единственное решение задачи (1.1), (1.2) *на промежутке* $[0,T)$.

Доказательство. Выше задача (1.1), (1.2) была редуцирована к задаче Коши

$$w(0) = w_0, \quad w'(t) = Bw(t) + g(t) \tag{2.4}$$

в пространстве $\mathfrak{W} = \mathfrak{U} \times C^0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U})$. Условия теоремы на функции u_- и f означают, что $w_0 = \begin{pmatrix} u_-(0) \\ v(0,\cdot) \end{pmatrix} \in D_B = D_A \times D_{A_2}$, а $g = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in C^1([0,T); \mathfrak{W})$ или $g \in C([0,T); D_B)$. В частности,

$$v(0,s) = \int\limits_{-s}^{0} u_-(\tau)\, d\tau, \quad [A_2 v(0,\cdot)](s) = -\frac{\partial v}{\partial s}(0,s) = -u_-(-s)$$

принадлежат классу $C^0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U})$.

В силу вышеизложенного согласно теореме 5.6 из [12] и теореме 2.1 существует единственное решение $w \in C^1([0,T); \mathfrak{W}) \cap C([0,T); D_B)$ задачи (2.4) на промежутке $[0,T)$, при этом оно имеет вид

$$w(t) = e^{tB} w_0 + \int\limits_0^t e^{(t-s)B} g(s)\, ds,$$

где $\{e^{tB} \in \mathscr{L}(\mathfrak{W}) : t \geq 0\}$ — полугруппа операторов, порождаемая оператором B. Решением исходной задачи (1.1), (1.2) является первая компонента вектор-функции $w(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t,\cdot) \end{pmatrix}$. □

В качестве примера применения теоремы 2.2 рассмотрим начально-краевую задачу

$$z(x,t) = z_-(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_-, \tag{2.5}$$

$$(1-\theta)z(x,t)+\theta\frac{\partial z}{\partial n}(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+,\tag{2.6}$$

для уравнения

$$z_t(x,t)=\triangle z(x,t)+\int\limits_{-\infty}^{t}k(t-s)z(x,s)\,ds,\quad (x,t)\in\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+,\tag{2.7}$$

где ограниченная область $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ имеет гладкую границу, $\theta\in\mathbb{R}$.

Редуцируем задачу (2.5)–(2.7) к задаче (1.1), (1.2). Положим $A=\triangle$, в качестве пространства $\mathfrak{U}$ и области определения D_A возьмем соответственно $L_2(\Omega)$ и

$$H^2_\theta(\Omega)=\big\{u\in H^2(\Omega):(1-\theta)u(x)+\theta\frac{\partial u}{\partial n}(x)=0,\ x\in\partial\Omega\big\}.$$

Применение теоремы 2.2 сразу приводит к следующему результату.

Теорема 2.3. *Пусть $z_-\in C^0(\overline{\mathbb{R}}_-;L_2(\Omega))\cap\mathscr{R}(\mathbb{R}_-;L_2(\Omega))$, $k\in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{R})\cap\mathscr{R}^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$. Тогда существует единственное решение $z\in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;L_2(\Omega))\cap C\big(\overline{\mathbb{R}}_+;H^2_\theta(\Omega)\big)\cap C(\mathbb{R};L_2(\Omega))$ задачи (2.5)–(2.7).*

3. Вырожденное уравнение с памятью

Сформулируем условия на операторы, которые будут использованы в дальнейшем, и соответствующие им утверждения, доказанные ранее в [1].

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — банаховы пространства, $L\in\mathscr{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, $M\in\mathscr{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$. Обозначим $\mathbb{N}_0=\{0\}\cup\mathbb{N}$, $\rho^L(M)=\{\mu\in\mathbb{C}:(\mu L-M)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})\}$, $R^L_\mu(M)=(\mu L-M)^{-1}L$, $L^L_\mu=L(\mu L-M)^{-1}$.

Определение 3.1. Пусть $p\in\mathbb{N}_0$. Оператор M называется *сильно (L,p)-радиальным*, если

(i) $\exists a\in\mathbb{R}\ (a,+\infty)\subset\rho^L(M)$;

(ii) $\exists K\in\mathbb{R}_+\ \forall\mu\in(a,+\infty)\ \forall n\in\mathbb{N}$

$$\max\big\{\big\|\big(R^L_\mu(M)\big)^{n(p+1)}\big\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})},\big\|\big(L^L_\mu(M)\big)^{n(p+1)}\big\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{V})}\big\}\le\frac{K}{(\mu-a)^{n(p+1)}};$$

(iii) существует плотный в $\mathfrak{V}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{V}}$ такой, что при $\mu\in(a,+\infty)$

$$\big\|M(\mu L-M)^{-1}\big(L^L_\mu(M)\big)^{p+1}v\big\|_{\mathfrak{V}}\le\frac{\mathrm{const}(v)}{(\mu-a)^{p+2}}\quad\forall v\in\overset{\circ}{\mathfrak{V}};$$

$$\big\|\big(R^L_\mu(M)\big)^{p+1}(\mu L-M)^{-1}\big\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})}\le\frac{K}{(\mu-a)^{p+2}}.$$

Замечание 3.1. Эквивалентность условий данного определения аналогичным более сложным условиям, использованным в [1, 13], доказана в [14].

Положим $\mathfrak{U}^0=\ker\big(R^L_\mu(M)\big)^{p+1}$, $\mathfrak{V}^0=\ker\big(L^L_\mu(M)\big)^{p+1}$; $\mathfrak{U}^1$ — замыкание образа оператора $\mathrm{im}\big(R^L_\mu(M)\big)^{p+1}$ в пространстве $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}^1$ — замыкание образа $\mathrm{im}\big(L^L_\mu(M)\big)^{p+1}$ в пространстве $\mathfrak{V}$. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ $(D_{M_k}=D_M\cap\mathfrak{U}^k)$, $k=0,1$.

Теорема 3.1 [1]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда*

(i) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1$;

(ii) $LP = QL$, $MPu = QMu$ *для всех* $u \in D_M$, *где* P — *проектор вдоль* $\mathfrak{U}^0$ *на* $\mathfrak{U}^1$, Q — *проектор вдоль* $\mathfrak{V}^0$ *на* $\mathfrak{V}^1$;

(iii) $L_k \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{V}^k)$, $M_k \in \mathscr{C}l(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{V}^k)$, $k = 0, 1$;

(iv) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^0;\mathfrak{U}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$;

(v) *оператор* $H = M_0^{-1}L_0$ *нильпотентен степени не больше* p;

(vi) *существует вырожденная сильно непрерывная полугруппа* $\{U(t) \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$, *разрешающая уравнение* $\frac{d}{dt}Lu(t) = Mu(t)$, *при этом* $\|U(t)\| \leq Ke^{at}$ *для всех* $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, *где константы* a, K *из определения* 3.1;

(vii) *оператор* $L_1^{-1}M_1$ *есть генератор* (C_0)-*полугруппы* $\{U_1(t) \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$, *где* $U_1(t) \equiv U(t)|_{\mathfrak{U}^1}$.

Замечание 3.2. Проекторы могут быть вычислены по формулам

$$P = s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty} \left(\mu R_\mu^L(M)\right)^{p+1}, \quad Q = s\text{-}\lim_{\mu\to+\infty} \left(\mu L_\mu^L(M)\right)^{p+1}.$$

Рассмотрим задачу (1.1) для уравнения с памятью (1.3), где заданы $u_- \in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})$, $\mathscr{K} : \mathbb{R}_+ \to \mathscr{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, $f : [0,T) \to \mathfrak{V}$, $T \leq +\infty$. *Решением задачи* (1.1), (1.3) *на промежутке* $[0,T)$ будем называть функцию $u \in C([0,T);D_M) \cap C((-\infty,T);\mathfrak{U})$, для которой $Lu \in C^1([0,T);\mathfrak{U})$, выполняется (1.1) и при каждом $t \in [0,T)$ — равенство (1.3).

Теорема 3.2. *Пусть* $p \in \mathbb{N}_0$, *оператор* M *сильно* (L,p)-*радиален*, $Pu_- \in C^0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathscr{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, *функция* $(I-P)u_- \in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})$ *ограничена*, $\mathscr{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathscr{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})) \cap \mathscr{R}^1(\mathbb{R}_+;\mathscr{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\operatorname{im}\mathscr{K}(s) \subset \mathfrak{V}^1$ *при* $s \geq 0$, $(I-Q)f \in C^p([0,T);\mathfrak{V})$,

$$(I-P)u_-(0) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)f)^{(k)}(0) \tag{3.1}$$

и выполняется одно из двух условий:

(i) $Qf \in C^1([0,T);\mathfrak{V})$, $\mathscr{K} \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathscr{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$;

(ii) $L_1^{-1}Qf \in C([0,T);D_M)$, $L_1^{-1}\mathscr{K} \in C(\mathbb{R}_+;\mathscr{L}(\mathfrak{U};D_M)) \cap \mathscr{R}(\mathbb{R}_+;\mathscr{L}(\mathfrak{U};D_M))$.

Тогда существует единственное решение задачи (1.1), (1.3) *на промежутке* $[0,T)$.

Доказательство. Обозначим $Pu(t) = u^1(t)$, $(I-P)u(t) = u^0(t)$. Подействуем на обе части уравнения (1.3) оператором $M_0^{-1}(I-Q)$, тогда согласно утверждениям теоремы 3.1 и условию на образ операторов $\mathscr{K}(s)$ получим уравнение

$$\frac{d}{dt}Hu^0(t) = u^0(t) + M_0^{-1}(I-Q)f(t).$$

Оно в силу нильпотентности оператора H имеет единственное решение

$$u^0(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^k h^{(k)}(t) \quad \text{при } t \in [0,T),$$

где $h(t) = M_0^{-1}(I-Q)f(t)$. Отсюда следует, что задача (1.1), (1.3) разрешима только в случае выполнения условия (3.1) согласования в нуле.

Если же на (1.3) подействовать оператором $L_1^{-1}Q$, то получим уравнение

$$\frac{d}{dt}u^1(t) = L_1^{-1}M_1u^1(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} L_1^{-1}\mathscr{K}(t-s)u^1(s)\,ds + g(t), \tag{3.2}$$

$$g(t) = L_1^{-1}Qf(t) + k(t), \quad k(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} L_1^{-1}\mathscr{K}(t-s)u^0(s)\,ds.$$

Таким образом, задача (1.1), (1.3) редуцирована к задаче

$$u^1(t) = Pu_-(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_-, \tag{3.3}$$

для уравнения (3.2). Оператор $L_1^{-1}M_1$ порождает (C_0)-полугруппу по теореме 3.1. Проверим, что для задачи (3.2), (3.3) выполняются остальные условия теоремы 2.2.

В случае непрерывной дифференцируемости функции Qf (условие (i) данной теоремы) для того, чтобы доказать включение $g \in C^1([0,T);\mathfrak{U}^1)$, необходимо доказать, что $k \in C^1([0,T);\mathfrak{U})$. Имеем

$$k'(t) = L_1^{-1}\mathscr{K}(0)u^0(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} L_1^{-1}\mathscr{K}'(t-s)u^0(s)\,ds$$

при условии равномерной сходимости последнего интеграла по параметру $t \in [0,T_1]$ для любого фиксированного $T_1 \in (0,T)$. Так как $L_1^{-1}\mathscr{K}' \in \mathscr{R}(\mathbb{R}_+;\mathscr{L}(\mathfrak{U}))$, то

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists A > 0\, \forall A' > A \int\limits_{A'}^{+\infty} \left\|L_1^{-1}\mathscr{K}'(s)\right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})} ds < \frac{\varepsilon}{\sup\limits_{t\in(-\infty,0]} \|(I-P)u_-(t)\|_{\mathfrak{U}}}.$$

Тогда

$$\forall t \in [0,T_1] \quad \left\| \int\limits_{-\infty}^{-A'} L_1^{-1}\mathscr{K}'(t-s)u^0(s)\,ds \right\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})} < \varepsilon.$$

Отсюда следует требуемое, это означает выполнение условия (i) теоремы 2.2.

При выполнении условий (ii) данной теоремы выполнение условия (ii) теоремы 2.2 с оператором $A = L_1^{-1}M_1$ доказывается аналогично.

Таким образом, в каждом из случаев по теореме 2.2 существует единственное решение задачи (3.2), (3.3), а значит, существует единственное решение исходной задачи. □

Рассмотрим случай, когда $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathscr{K}(s)$.

Теорема 3.3. *Пусть оператор M сильно $(L,0)$-радиален, $(I-P)u_- \in C(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U})$, $Pu_- \in C^0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}) \cap \mathscr{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U})$, $(I-Q)f \in C([0,T);\mathfrak{V})$, $\mathscr{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathscr{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})) \cap \mathscr{R}^1(\mathbb{R}_+;\mathscr{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathscr{K}(s)$ при $s \geq 0$,*

$$(I-P)u_-(0) = -\int\limits_{-\infty}^{0} M_0^{-1}(I-Q)\mathscr{K}(-s)Pu_-(s)\,ds - M_0^{-1}(I-Q)f(0) \tag{3.4}$$

и выполняется одно из двух условий

(i) $Qf \in C^1([0,T);\mathfrak{V})$;

(ii) $L_1^{-1}Qf \in C([0,T);D_M)$.

Тогда существует единственное решение задачи (1.1), (1.3) *на промежутке* $[0,T)$.

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, из уравнения (1.3) получим уравнение

$$\frac{d}{dt}u^1(t) = L_1^{-1}M_1u^1(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} L_1^{-1}Q\mathscr{K}(t-s)u^1(s)\,ds + L_1^{-1}Qf(t) \tag{3.5}$$

с учетом свойств ядер $\ker \mathscr{K}(s)$. Задача (3.3) для этого уравнения в силу теоремы 3.1 удовлетворяет всем условиям теоремы 2.2, поэтому существует ее единственное решение u^1 на промежутке $[0,T)$.

Действием оператора $M_0^{-1}(I-Q)$ на уравнение (1.3) с учетом сильной $(L,0)$-радиальности оператора M получим

$$u^0(t) = -\int\limits_{-\infty}^{t} M_0^{-1}(I-Q)\mathscr{K}(t-s)u^1(s)\,ds - M_0^{-1}(I-Q)f(t).$$

Отсюда следует существование решения задачи (1.1), (1.3) при выполнении условия согласования (3.4). $\square$

При условии $\mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathscr{K}(s)$ интегральный оператор памяти не зависит от значений решения на подпространстве $\mathfrak{U}^0$ и помимо задачи (1.1) для уравнения с памятью можно рассмотреть также обобщенную задачу Шоуолтера [15, 16]

$$Pu(t) = u_-(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_-. \tag{3.6}$$

Решением задачи (1.3), (3.6) *на промежутке* $[0,T)$ будем называть функцию $u \in C([0,T);D_M)$, для которой $Pu \in C((-\infty,T);\mathfrak{U})$, $Lu \in C^1([0,T);\mathfrak{U})$, выполняется (3.6) и при каждом $t \in [0,T)$ — равенство (1.3).

Из доказательства теоремы 3.3 видно, что единственным отличием от нее теоремы о разрешимости задачи (1.3), (3.6) будет отсутствие необходимости выполнения условия согласования (3.4).

Теорема 3.4. *Пусть оператор M сильно $(L,0)$-радиален, $u_- \in C^0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}^1)\cap \mathscr{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U}^1)$, $\mathscr{K} \in C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathscr{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))\cap\mathscr{R}^1(\mathbb{R}_+;\mathscr{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathfrak{U}^0 \subset \ker\mathscr{K}(s)$ при $s \geq 0$, $(I-Q)f \in C([0,T);\mathfrak{V})$ и выполняется одно из двух условий*

(i) $Qf \in C^1([0,T);\mathfrak{V})$;

(ii) $L_1^{-1}Qf \in C([0,T);D_M)$.

Тогда существует единственное решение задачи (1.3), (3.6) *на промежутке* $[0,T)$.

Докажем аналогичную теорему в случае уравнения с бо́льшим вырождением, когда оператор M сильно $(L,1)$-радиален.

Теорема 3.5. *Пусть оператор M сильно $(L,1)$-радиален, $u_- \in C^0(\overline{\mathbb{R}}_-;\mathfrak{U}^1)\cap \mathscr{R}(\mathbb{R}_-;\mathfrak{U}^1)$, $\mathscr{K} \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathscr{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))\cap\mathscr{R}^1(\mathbb{R}_+;\mathscr{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mathfrak{U}^0 \subset \ker\mathscr{K}(s)$ при $s \geq 0$, $(I-Q)f \in C^1([0,T);\mathfrak{V})$ и выполняется одно из двух условий*

(i) $Qf \in C^1([0,T);\mathfrak{V})$;

(ii) $L_1^{-1}Qf \in C([0,T);D_M)$.

Тогда существует единственное решение задачи (1.3), (3.6) *на промежутке* $[0,T)$.

Доказательство. Задача (3.3), (3.5) однозначно разрешима по теореме 2.2 (в данном случае $Pu_- \equiv u_-$ в условии (3.3)). Действием оператора $M_0^{-1}(I-Q)$ на уравнение (1.3) получим уравнение

$$\frac{d}{dt}Hu^0(t) = u^0(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} M_0^{-1}(I-Q)\mathscr{K}(t-s)u^1(s)\,ds + M_0^{-1}(I-Q)f(t), \quad (3.7)$$

где u^1 — решение задачи (3.3), (3.5). Из нильпотентности оператора H степени 1 следует существование решения $u^0(t) = -h(t) - Hh'(t)$ уравнения (3.7), где

$$h(t) = l(t) + M_0^{-1}(I-Q)f(t), \quad l(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} M_0^{-1}(I-Q)\mathscr{K}(t-s)u^1(s)\,ds.$$

Принадлежность функции l классу $C^1([0,T);\mathfrak{U})$ доказывается так же, как аналогичный факт для функции k при доказательстве теоремы 3.2, с учетом ограниченности функции u_-. $\square$

Замечание 3.3. Чтобы получить аналог теорем 3.3–3.5 в случае сильно (L,p)-радиального оператора M с произвольным $p \in \mathbb{N}_0$, надо обобщить теорему 2.2, получив условия существования решения задачи (1.1), (1.2) повышенной гладкости из класса $C^p([0,T);\mathfrak{U})$, для чего надо описать структуру множества D_{B^p}. Это сделано в случае ограниченного оператора A в [10] и использовано для случая (L,p)-ограниченного оператора M при произвольном $p \in \mathbb{N}_0$. В ситуации данной работы оператор $A = L_1^{-1}M_1$ существенно неограниченный. Получить общий результат при неограниченном операторе A авторам на данный момент не представляется возможным.

Замечание 3.4. Из теорем 3.2–3.5 видно, что задача (3.6) (в случаях, когда ее постановка возможна, как в условиях теорем 3.3–3.5, когда интегральный оператор памяти не зависит от функции $(I-P)u_-$) более естественна для уравнения (1.3) в том смысле, что она однозначно разрешима без дополнительных условий согласования в нуле типа условий (3.1), (3.4).

4. Интегродифференциальная система уравнений Осколкова

Рассмотрим задачу

$$v(x,t) = v_-(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_-, \quad (4.1)$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \quad (4.2)$$

для интегродифференциальной системы уравнений движения жидкостей Кельвина — Фойгта ненулевого порядка (см. [3], система (0.30)), линеаризованной в окрестности стационарного решения $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_n)$,

$$(1-\chi\Delta)v_t(x,t) = \nu\Delta v(x,t) - (\tilde{v}\cdot\nabla)v(x,t) - (v\cdot\nabla)\tilde{v}(x,t) - r(x,t) + \int\limits_{-\infty}^{t} K(t-s)\Delta v(x,s)\,ds, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{4.4}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\chi, \nu \in \mathbb{R}$, помимо $\tilde{v}$ задана функция $K : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}$. Искомыми являются вектор-функции скорости $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ жидкости и градиента давления $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$.

Обозначим

$$\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^n, \quad \mathbb{H}^1 = (H^1(\Omega))^n, \quad \mathbb{H}^2 = (H^2(\Omega))^n.$$

Замыкание линеала $\mathscr{L} = \{w \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla \cdot w = 0\}$ по норме пространства $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а по норме $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}^1_\sigma$. Кроме того, будем использовать обозначение $\mathbb{H}^2_\sigma = \mathbb{H}^1_\sigma \cap \mathbb{H}^2$. Имеем представление $\mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \oplus \mathbb{H}_\pi$, где $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$. Обозначим через $\Pi : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\pi$ ассоциированный с этим представлением ортопроектор, $\Sigma = I - \Pi$.

Уравнение несжимаемости (4.4) заменим более общим уравнением

$$\Pi v(\cdot, t) = 0, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{4.5}$$

Действительно, если v — достаточно гладкая функция, то из $\Pi v \equiv 0$ следует равенство (4.4). В общем случае в силу (4.5) v является пределом в смысле $\mathbb{L}_2$ гладких функций, удовлетворяющих условию (4.4).

Обозначим через $A = \Sigma\,\mathrm{diag}\{\Delta, \dots, \Delta\}$ оператор $A \in \mathscr{C}l(\mathbb{H}_\sigma)$ с областью определения $\mathbb{H}^2_\sigma$. Известно, что этот оператор имеет вещественный отрицательный дискретный конечнократный спектр $\sigma(A)$, сгущающийся только на $-\infty$ [17]. Пусть $\tilde{v} \in \mathbb{H}^1$, тогда формулой $Dw = \nu\Delta w - (\tilde{v} \cdot \nabla)w - (w \cdot \nabla)\tilde{v}$ зададим оператор $D \in \mathscr{L}(\mathbb{H}^2_\sigma; \mathbb{L}_2)$.

Учитывая уравнение (4.5), положим $\mathfrak{U} = \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}_\pi$, $\mathfrak{V} = \mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi$, операторы

$$L = \begin{pmatrix} I - \chi A & \mathbb{O} \\ -\chi\Pi\Delta & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \Sigma D & \mathbb{O} \\ \Pi D & -I \end{pmatrix}, \quad \mathscr{K}(s) = \begin{pmatrix} K(s)A & \mathbb{O} \\ K(s)\Pi\Delta & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

при $s \geq 0$ принадлежат $\mathscr{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$. Поскольку функция r задает градиент давления, она ищется как функция от t со значениями в подпространстве градиентных функций $\mathbb{H}_\pi$.

Теорема 4.1. *Пусть* $\chi \neq 0$, $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$, $v_- \in C^0(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{H}^2_\sigma) \cap \mathscr{R}(\mathbb{R}_+; \mathbb{H}^2_\sigma)$, $K \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{R}) \cap \mathscr{R}^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$. *Тогда задача* (4.1)–(4.3), (4.5) *имеет единственное решение* $v \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{H}^2_\sigma) \cap C(\mathbb{R}; \mathbb{H}^2_\sigma)$, $r \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{H}_\pi)$.

Доказательство. В [18] показано, что в условиях данной теоремы оператор M сильно $(L, 0)$-радиален, при этом

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \chi\Pi\Delta(I - \chi A)^{-1}\Sigma D + \Pi D & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ -\chi\Pi\Delta(I - \chi A)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, условие (4.1) представляет собой обобщенное условие Шоуолтера, и $\ker P = \mathfrak{U}^0 \subset \ker \mathscr{K}(s)$ при всех $s \geq 0$. По теореме 3.4 получим требуемое. При этом от функции r не требуется дифференцируемость по определению решения, поскольку она попадает в ядро оператора L. $\square$

5. Алгебродифференциальная система уравнений с частными производными

Рассмотрим задачу

$$z_i(x,t) = z_{i-}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_-, \quad i = 1,2,3, \tag{5.1}$$

$$(1-\theta)z_i(x,t) + \theta \frac{\partial z_i}{\partial n}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \quad i = 1,2,3, \tag{5.2}$$

для интегродифференциальной системы уравнений

$$\begin{aligned} z_{1t}(x,t) &= \triangle z_1(x,t) + \sum_{i=1}^{3} \int_{-\infty}^{t} k_{1i}(t-s) z_i(x,s)\,ds, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \\ z_{3t}(x,t) &= \triangle z_2(x,t) + \sum_{i=1}^{3} \int_{-\infty}^{t} k_{2i}(t-s) z_i(x,s)\,ds, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \\ 0 &= \triangle z_3(x,t) + \sum_{i=1}^{3} \int_{-\infty}^{t} k_{3i}(t-s) z_i(x,s)\,ds, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\theta \in \mathbb{R}$, заданы функции $z_{i-} : \overline{\mathbb{R}}_- \to \mathbb{R}$, $k_{ji} : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}$, $i,j = 1,2,3$.

Положим $\mathfrak{U} = \mathfrak{V} = (L_2(\Omega))^3$, $D_M = \left(H_\theta^2(\Omega)\right)^3$,

$$L = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \triangle & 0 & 0 \\ 0 & \triangle & 0 \\ 0 & 0 & \triangle \end{pmatrix}, \quad \mathscr{K}(s) = \begin{pmatrix} k_{11}(s) & k_{12}(s) & k_{13}(s) \\ k_{21}(s) & k_{22}(s) & k_{23}(s) \\ k_{31}(s) & k_{32}(s) & k_{33}(s) \end{pmatrix}$$

при $s \geq 0$. В [19] показана сильная $(L,1)$-радиальность оператора M в данной ситуации и найдены подпространства

$$\mathfrak{U}^0 = \mathfrak{V}^0 = \{0\} \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega), \quad \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{V}^1 = L_2(\Omega) \times \{0\} \times \{0\}.$$

Поэтому условие $\mathrm{im}\mathscr{K}(s) \subset \mathfrak{U}^1$ в данной ситуации означает, что $k_{2i} \equiv k_{3i} \equiv 0$, $i = 1,2,3$, условие $\ker\mathscr{K}(s) \supset \mathfrak{U}^0$ — что $k_{j2} \equiv k_{j3} \equiv 0$, $j = 1,2,3$. Именно эти два случая позволяют исследовать результаты, полученные в § 3. По теореме 3.2 сразу получим следующий результат.

Теорема 5.1. *Пусть* $z_{1-} \in C^0(\overline{\mathbb{R}}_-; L_2(\Omega)) \cap \mathscr{R}(\mathbb{R}_-; L_2(\Omega))$, *функции* $z_{2-}, z_{3-} \in C(\overline{\mathbb{R}}_-; L_2(\Omega))$ *ограничены,*

$$z_{2-}(\cdot,0) \equiv z_{3-}(\cdot,0) \equiv 0,\ k_{2i} \equiv k_{3i} \equiv 0,\ k_{1i} \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{R}) \cap \mathscr{R}^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}),\ i = 1,2,3.$$

Тогда задача (5.1)–(5.3) *имеет единственное решение*

$$z_1, z_3 \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; L_2(\Omega)) \cap C\big(\overline{\mathbb{R}}_+; H_\theta^2(\Omega)\big) \cap C(\mathbb{R}; L_2(\Omega)),$$

$$z_2 \in C\big(\overline{\mathbb{R}}_+; H_\theta^2(\Omega)\big) \cap C(\mathbb{R}; L_2(\Omega)).$$

Для второго случая аналогичным образом можно исследовать не только задачу (5.1), но, используя теорему 3.5, и обобщенную задачу Шоуолтера

$$z_1(x,t) = z_{1-}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_-. \tag{5.4}$$

Теорема 5.2. *Пусть* $z_{1-} \in C^0(\overline{\mathbb{R}}_-; L_2(\Omega)) \cap \mathscr{R}(\mathbb{R}_-; L_2(\Omega))$, $k_{j2} \equiv k_{j3} \equiv 0$, $k_{j1} \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{R}) \cap \mathscr{R}^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$, $j = 1,2,3$. *Тогда задача* (5.2)–(5.4) *имеет единственное решение*

$$z_1 \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; L_2(\Omega)) \cap C\big(\overline{\mathbb{R}}_+; H^2_\theta(\Omega)\big) \cap C(\mathbb{R}; L_2(\Omega)),$$

$$z_2 \in C\big(\overline{\mathbb{R}}_+; H^2_\theta(\Omega)\big), \quad z_3 \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; L_2(\Omega)) \cap C\big(\overline{\mathbb{R}}_+; H^2_\theta(\Omega)\big).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоров В. Е.* Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, № 3. С. 173–200.
2. *Gurtin M. E., Pipkin A. C.* A general theory of heat conduction with finite wave speeds // Arch. Rational Mech. Anal. 1968. V. 31. P. 113–126.
3. *Осколков А. П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина — Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164.
4. *Giorgi C., Marzocchi A.* Asymptotic behavior of a semilinear problem in heat conduction with memory // Nonlinear Differ. Equ. Appl. 1998. V. 5. P. 333–354.
5. *Gatti S., Grasselli M., Pata V., Squassina M.* Robust exponential attractors for a family of nonconserved phase-field systems with memory // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2005. V. 12, N 5. P. 1019–1029.
6. *Grasselli M., Squassina M.* Exponential stability and singular limit for a linear thermoelastic plate with memory effects // Adv. Math. Sci. Appl. 2006. V. 16, N 1. P. 15–31.
7. *Федоров В. Е., Стахеева О. А.* О разрешимости линейных уравнений соболевского типа с эффектом памяти // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2010. С. 245–261.
8. *Фалалеев М. В., Орлов С. С.* Вырожденные интегродифференциальные операторы в банаховых пространствах и их приложения // Изв. вузов. Математика. 2011. Т. 10. С. 68–79.
9. *Фалалеев М. В.* Интегродифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах и их приложения // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2012. Т. 5, № 1. С. 90–102.
10. *Федоров В. Е., Борель Л. В.* О разрешимости вырожденных линейных эволюционных уравнений с эффектами памяти // Изв. Иркут. гос. ун-та. 2014. Т. 10. С. 106–124.
11. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
12. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
13. *Федоров В. Е.* Линейные уравнения типа Соболева с относительно p-радиальными операторами // Докл. АН. 1996. Т. 351, № 3. С. 316–318.
14. *Федоров В. Е.* Свойства псевдорезольвент и условия существования вырожденных полугрупп операторов // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 11, № 20. С. 12–19.
15. *Showalter R. E.* Nonlinear degenerate evolution equations and partial differential equations of mixed type // SIAM J. Math. Anal. 1975. V. 6, N 1. P. 25–42.
16. *Плеханова М. В., Федоров В. Е.* О существовании и единственности решений задач оптимального управления линейными распределенными системами, не разрешенными относительно производной по времени // Изв. РАН. Сер. мат. 2011. Т. 75, № 2. С. 177–194.
17. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматлит, 1961.
18. *Иванова Н. Д., Федоров В. Е., Комарова К. М.* Нелинейная обратная задача для системы Осколкова, линеаризованной в окрестности стационарного решения // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15, № 26. С. 49–70.

19. *Рузакова О. А., Федоров В. Е.* Об ε-управляемости линейных уравнений, не разрешенных относительно производной в банаховых пространствах // Вычисл. технологии. 2005. Т. 10, № 5. С. 90–102.

Статья поступила 13 июля 2015 г.

Федоров Владимир Евгеньевич
Челябинский гос. университет,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454001;
Южно-Уральский гос. университет,
пр. Ленина, 76, Челябинск 454080
kar@csu.ru

Борель Лидия Викторовна
Челябинский гос. университет,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454001
lidiya904@mail.ru