Сибирский математический журнал
Июль—август, 2016. Том 57, № 4

УДК 531.911.5

ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

И. А. Финогенко

Аннотация. Для неавтономных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями с решениями в смысле Филиппова исследуются предельные дифференциальные включения. С использованием функций Ляпунова со знакопостоянными производными устанавливается аналог принципа инвариантности Ла-Салля. Изучаются как дифференциальные уравнения с измеримой правой частью, так и уравнения с кусочно непрерывными правыми частями.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.413

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с разрывной правой частью, решение в смысле Филиппова, предельное дифференциальное включение, принцип инвариантности.

1. Введение

Принципом инвариантности обычно называют теорему Ла-Салля (см. [1, гл. 7]), в которой требование к производной функции Ляпунова ослаблено настолько, насколько это возможно в прямом методе Ляпунова исследования устойчивости автономных систем дифференциальных уравнений. А именно, предполагается, что эта производная неположительна и может принимать нулевые значения вне положения равновесия системы. Вывод, который можно при этом сделать, состоит в том, что ω-предельное множество ограниченного решения системы принадлежит множеству нулей производной функции Ляпунова. Дополнительный анализ этого множества позволяет делать выводы об асимптотической устойчивости положения равновесия системы так, как сделано в известной теореме Барбашина — Красовского [2].

Теорема Ла-Салля в значительной степени опирается на свойства типа инвариантности решений автономных систем и некоторые другие их свойства, которыми решения неавтономных систем не обладают. По-видимому, впервые топологическая динамика неавтономных дифференциальных уравнений была обоснована в [3] и далее развивалась в [4–7]. Сейчас такой подход часто называют методом предельных уравнений. Применение этого метода к системам с запаздыванием можно найти в обзорной статье [8]. В [9–11] метод предельных уравнений распространяется на неавтономные дифференциальные включения,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13–01–00287).

в том числе на неавтономные функционально-дифференциальные включения. В данной статье эти исследования продолжаются применительно к дифференциальным уравнениям с разрывной правой частью, решения которых понимаются в смысле А. Ф. Филиппова [12]. Здесь учитывается специфика построения соответствующих дифференциальных включений.

2. Некоторые определения и обозначения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное пространство, снабженное евклидовой нормой $\|\cdot\|$. Для любого непустого множества A и точки a из пространства $\mathbb{R}^n$ через $d(b,A) = \inf\limits_{a\in A}\|b-a\|$ обозначается расстояние от точки a до множества A, $A^\epsilon = \{x : d(x,A) < \epsilon\}$ — ϵ-окрестность множества A, $\overline{A}$ — замыкание множества A. Символом $\mathrm{co}\,A$ ($\overline{\mathrm{co}}A$) обозначается выпуклая (соответственно выпуклая замкнутая) оболочка множества A, ϵ-окрестность одноточечного множества $A = \{a\}$ обозначается через a^ϵ.

Для ограниченных множеств $A \subset \mathbb{R}^n$ справедливы равенства (см. [12, § 5])

$$\overline{\mathrm{co}}A = \mathrm{co}\,\overline{A}, \quad (\mathrm{co}\,A)^\epsilon = \mathrm{co}(A^\epsilon).$$

Отметим также достаточно очевидное равенство $(\overline{A})^\epsilon = A^\epsilon$.

Для любых непустых ограниченных подмножеств A и B из пространства $\mathbb{R}^n$ обозначим $\rho(B,A) = \sup\limits_{b\in B} d(b,A)$. Очевидно, что значение $\rho(B,A)$ не изменится, если множество B или A заменить его замыканием, и неравенство $\rho(B,A) < \epsilon$ равносильно тому, что $B \subset A^\epsilon$.

Пусть $\mathrm{comp}\,\mathbb{R}^n$ ($\mathrm{conv}\,\mathbb{R}^n$) — совокупность всех непустых компактных (выпуклых компактных) подмножеств из $\mathbb{R}^n$, X — метрическое пространство с метрикой $\varrho(\cdot,\cdot)$. Отображение $G : X \to \mathrm{comp}\,\mathbb{R}^n$ называется *полунепрерывным сверху* в точке x_0, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $\varrho(x,x_0) < \delta$, выполняется $G(x) \subset G^\epsilon(x_0)$. Здесь и далее для многозначных отображений используем символ $G^\epsilon(x)$ для обозначения ϵ-окрестности $(G(x))^\epsilon$ множества $G(x)$ в каждой точке x. Полунепрерывность сверху означает, что $\lim\limits_{x\to x_0}\rho(G(x), G(x_0)) = 0$, и для ограниченного многозначного отображения необходимым и достаточным условием полунепрерывности сверху является замкнутость графика (см. [13, разд. 1.2.3]).

Метрика Хаусдорфа в пространстве $\mathrm{comp}\,\mathbb{R}^n$ определяется равенством

$$\mathrm{dist}(A,B) = \max\{\rho(B,A), \rho(A,B)\}$$

(см. [14, § 21]). Непрерывность отображений из X в пространство $\mathrm{comp}\,\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа понимается в обычном для метрических пространств смысле.

Пусть $J = [a,b]$ — отрезок числовой прямой $\mathbb{R}^1$, снабженной мерой Лебега. В определении измеримости отображения $H : J \to \mathrm{comp}\,\mathbb{R}^n$ следуем [13]. В дальнейшем учитываем, что для таких отображений измеримость равносильна свойству Лузина и оно имеет измеримый селектор, т. е. существует измеримая функция $h : J \to \mathbb{R}^n$ такая, что $h(t) \in H(t)$ для всех $t \in J$ (см. [13, разд. 1.5.1]). Отметим, что полунепрерывное сверху многозначное отображение $H(t)$ со значениями в $\mathrm{comp}\,\mathbb{R}^n$ измеримо. Многозначное отображение $H : \mathbb{R}^1 \to \mathrm{comp}\,\mathbb{R}^n$ (или его селектор) называется *измеримым*, если его сужение на любой отрезок J измеримо. Символом μ в дальнейшем обозначается мера Лебега как числовых множеств, так и множеств в пространствах $\mathbb{R}^{1+n}$ и $\mathbb{R}^n$.

3. Решения в смысле Филиппова дифференциального уравнения с разрывной правой частью. Общий случай

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в векторной форме:

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

где $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Один из наиболее распространенных подходов к определению решения уравнения (1) с разрывной по переменным (t, x) функцией $f(t, x)$ состоит в замене этой функции многозначным отображением $F(t, x)$, построенным тем или иным способом. Тогда под решением уравнения (1) на интервале (α, β) понимается решение дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t, x). \tag{2}$$

Функция $x(t)$ называется *решением дифференциального включения* (2), если она абсолютно непрерывна на каждом конечном отрезке $I = [a, b] \subset (\alpha, \beta)$ и ее производная существует и удовлетворяет включению $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$ для п. в. $t \in (\alpha, \beta)$. Такое решение называется *обобщенным решением* уравнения (1), или *решением в смысле Филиппова*.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (1) с определенной п. в. и измеримой в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ функцией $f(t, x)$ в правой части. Запишем общую схему доопределения функции f по Филиппову, следуя [12, § 7].

Предположим, что для каждой ограниченной замкнутой области $D \subset G$ существует п. в. конечная функция $m(t)$ такая, что п. в. в D выполняется

$$\|f(t, x)\| \leq m(t). \tag{3}$$

Определим множество

$$F(t, x) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu N = 0} \overline{\mathrm{co}} f(t, x^{\delta} \backslash N). \tag{4}$$

Так как функция $f(t, x)$ измерима в области G, при п. в. t она измерима по x на сечениях G_t множества G плоскостью $t = \mathrm{const}$ и выполняется неравенство $m(t) < +\infty$. Это множество точек t обозначим через E. Для каждого $t \in E$ функция $x \to f(t, x)$ п. в. аппроксимативно непрерывна, т. е. всюду, кроме множества $N_0(t) \subset G_t$ нулевой меры. Тогда для для каждого $t \in E$ вместо множества (4) можно записать

$$F(t, x) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{\mathrm{co}} f(t, x^{\delta} \backslash N_0(t)). \tag{5}$$

Множество $F(t, x)$ непусто, замкнуто, выпукло, ограничено и представляет собой выпуклую замкнутую оболочку множества всех предельных значений функции $f(t, x')$, когда $x' \to x$, пробегая п. в. окрестность точки x. Легко видеть, что в определении $F(t, x)$ вместо пересечения по всем $\delta > 0$ можно брать пересечение по произвольной монотонно убывающей последовательности $\delta_i \to +0$ и определенное равенством (5) многозначное отображение полунепрерывно сверху по x.

Под *решением* уравнения (1) с измеримой по (t, x) функцией $f(t, x)$ в правой части понимается решение дифференциального включения (2) с многозначной функцией $F(t, x)$, определенной равенством (5).

Решение в смысле этого определения существует локально при дополнительном условии суммируемости функции $m(t)$ из неравенства (3) (см. [12, § 7]).

Замечание 1. Многозначное отображение $F(t,x)$ определено для любых $t \in E$ и x таких, что $(t,x) \in G$, т. е. для п. в. t (множество E определено выше). Очевидно, что значения $F(t,x)$ в оставшихся точках $t \notin E$ не изменяют множества решений включения (2), поэтому они могут быть выбраны произвольно. То же самое можно сказать о значениях функции $f(t,x)$ в точках $t \notin E$ и $x \in N_0(t)$. Это обстоятельство в дальнейшем учитывается без оговорок.

4. Предельные дифференциальные включения

Всюду в дальнейшем предполагаем, что область G представляет собой все пространство $\mathbb{R}^{1+n}$. Для многозначного отображения $F(t,x)$ с компактными (не обязательно выпуклыми) значениями введем в рассмотрение многозначное отображение

$$F^*(t,x) = \bigcap_{b\ge 0} \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{a\ge b} F(t+a,x), \tag{6}$$

которое будем называть *предельным*, и для произвольной последовательности $t_n \to +\infty$ (одной и той же для любых (t,x)) определим многозначное отображение

$$F'(t,x) = \bigcap_{n\ge 1} \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{k\ge n} F(t+t_k,x), \tag{7}$$

которое будем называть *предельным относительно последовательности* $\{t_n\}$.

Лемма 1. *Пусть x фиксировано и многозначное отображение $t \to F(t,x)$ с выпуклыми компактными значениями ограничено. Обозначим $H(t) = F(t,x)$, $H^*(t) = F^*(t,x)$ и для произвольной последовательности $\{t_n\}$ обозначим $H'(t) = F'(t,x)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. Множества $H^*(t)$ и $H'(t)$ непустые, выпуклые и компактные, и справедливы равенства

$$\lim_{b\to+\infty} \mathrm{dist}\Big(\overline{\mathrm{co}} \bigcup_{a\ge b} H(t+a), H^*(t)\Big) = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{dist}\Big(\overline{\mathrm{co}} \bigcup_{k\ge n} H(t+t_k), H'(t)\Big) = 0.$$

2. Множество $H^*(t)$ не зависит от t, т. е. $H^*(t) \equiv H^*$ для всех $t \in \mathbb{R}^1$. (В дальнейшем будем полагать, что $H^* = H^*(0) = \bigcap_{b\ge 0} \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{t\ge b} H(t)$.)

3. Для любого t выполняется $H'(t) \subset H^*$.

4. Если существует предел $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{dist}(H(t),P)) = 0$, то

$$H'(t) = H^* = P \tag{8}$$

для любого отображения $H'(t)$ и для любого t.

5. Если существует предел $\lim_{t_n\to+\infty} \mathrm{dist}(H(t+t_n),P(t)) = 0$, то

$$H'(t) = P(t) \tag{9}$$

для любого t.

6. Если отображение $H(t)$ однозначно, то отображение $H'(t)$ в общем случае многозначно. При этом значение H^* (соответственно $H'(t)$) будет однозначно *тогда и только тогда, когда существует предел* $\lim\limits_{t\to+\infty} H(t)$ (*соответственно тогда и только тогда, когда существует предел* $\lim\limits_{t_n\to+\infty} H(t+t_n)$).

7. *Множество* H^* *представляет собой выпуклую замкнутую оболочку всех предельных значений функций* $h(t) \in H(t)$ *при условии, что* $t \to +\infty$.

8. *При любом фиксированном* t *множество* $H'(t)$ *представляет собой выпуклую замкнутую оболочку всех предельных точек последовательностей векторов* $z_n \in H(t+t_n)$, *где* $\{t_n\}$ — *последовательность, которая определяет отображение* $H'(t)$.

Лемма 1 представляет собой переформулировку леммы 1 из [11] применительно к дифференциальным включениям без запаздывания. Утверждения 1, 7 и 8 дают эквивалентные определения предельных отображений $F^*(t,x)$ и $F'(t,x)$. Утверждения 2–6 описывают свойства предельных отображений, которые вытекают непосредственно из их определений.

Замечание 2. Пусть отображение $F(t,x)$ имеет компактные, не обязательно выпуклые, значения. Определим многозначное отображение $(\operatorname{co} F)(t,x) = \operatorname{co} F(t,x)$. Тогда справедливы равенства

$$F^*(x) = (\operatorname{co} F)^*(x), \quad F'(t,x) = (\operatorname{co} F)'(t,x),$$

которые вытекают из определений и достаточно очевидного равенства $\operatorname{co} \cup \operatorname{co} A_j = \operatorname{co} \cup A_j$, верного для любых множеств A_j и для объединений по любым множествам индексов j. Все утверждения леммы 1 останутся справедливыми. Следует лишь учесть, что в равенстве (8) множество P нужно заменить его выпуклой оболочкой $\operatorname{co} P$, а в равенстве (9) отображение $P(t)$ заменить отображением $\operatorname{co} P(t)$.

Дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F^*(x) \tag{10}$$

называется *предельным* для включения (2), а дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F'(t,x) \tag{11}$$

— *предельным относительно последовательности* $\{t_k\}$ для включения (2).

Вопросы существования решений дифференциального уравнения (1) с измеримой функцией $f(t,x)$ сводятся к существованию решений дифференциального включения. Сформулируем общие условия существования решений дифференциальных включений с полунепрерывной сверху выпуклой правой частью, которые в настоящее время хорошо изучены (см., например, [12, 13]).

A1. Для всех (t,x) множество $F(t,x)$ непусто, выпукло и компактно.

A2. При почти каждом фиксированном t многозначное отображение $x \to F(t,x)$ полунепрерывно сверху.

A3. Для любого x существует измеримый селектор многозначного отображения $t \to F(t,x)$.

A4. Для любого ограниченного множества $Q \subset \mathbb{R}^n$ многозначное отображение $F(t,x)$ ограничено на множестве $\mathbb{R}^1 \times Q$, т. е. существует константа M такая, что для любых $(t,x) \in \mathbb{R}^1 \times Q$ и $v \in F(t,x)$ выполняется неравенство $\|v\| \le M$.

При выполнении условий A1–A4 для любых начальных условий (t_0, x_0) существует локальное решение задачи Коши включения (2), которое может быть продолжено на правый максимальный промежуток существования $[t_0, \omega)$, и любое ограниченное непродолжимое вправо решение определено на промежутке $[t_0, +\infty)$.

Сформулируем дополнительное условие, которое потребуется для изучения предельных дифференциальных включений (10) и (11).

A5. Для любых x и $\epsilon > 0$ существуют числа $\delta > 0$ и γ такие, что

$$F(t, x') \subset (F(t, x))^\epsilon \tag{12}$$

для всех $t > \gamma$ и $\|x' - x\| < \delta$.

Условие (12) означает, что $\lim\limits_{t \to +\infty,\, x' \to x} \rho(F(t, x'), F(t, x)) = 0$. Оно выполняется, если отображение $F(t, x)$ полунепрерывно сверху в каждой точке x равномерно относительно t.

Будем говорить, что множество $D \subset \mathbb{R}^n$ *полуинвариантно*, если для любой точки $y_0 \in D$ существует решение $y(t)$ включения (10) такое, что $y(0) = y_0$ и $y(t) \in D$ для всех $t \geq 0$.

Множество $D \subset \mathbb{R}^n$ *квазиинвариантно*, если для любой точки $y_0 \in D$ существует решение $y(t)$ включения (11) с некоторым предельным многозначным отображением $F'(t, x)$ в правой части такое, что $y(0) = y_0$ и $y(t) \in D$ для всех $t \geq 0$.

Точку y назовем *ω-предельной* для решения $x(t)$ включения (2), определенного на промежутке $[t_0, +\infty)$, если существует последовательность $t_n \to +\infty$ такая, что $x(t_n) \to y$. Множество всех ω-предельных точек обозначим через $\Lambda^+(x)$.

Теорема 1. *Пусть для многозначного отображения F выполняются условия* A1–A5. *Тогда верны следующие утверждения.*

1. *Для предельных многозначных отображений F^* и F' выполняются условия* A1–A4.

2. *Дифференциальное включение* (2) *и предельные дифференциальные включения* (10), (11) *для любых начальных данных* (t_0, x_0) *имеют решения, и любое их ограниченное непродолжимое вправо решение определено на правом максимальном промежутке существования* $[t_0, +\infty)$.

3. *Любое решение включения* (11) *является одновременно решением включения* (10).

4. *Если $x(t)$ — ограниченное решение включения* (2) *и $y^k(t) = x(t + t_k)$, то для любой последовательности $t_k \to +\infty$ и для любого числа $T > 0$ из последовательности функций $y^k(t)$ можно выделить равномерно сходящуюся на отрезке $I = [0, T]$ подпоследовательность.*

5. *Предел $y(t)$ любой равномерно сходящейся на отрезке I последовательности функций $y^k(t)$ является решением включения* (11) *с предельным относительно последовательности $\{t_k\}$ многозначным отображением $F'(t, x)$ в правой части и выполняется начальное условие $y(0) = \lim\limits_{k \to +\infty} x(t_k)$.*

6. *Для любого ограниченного решения $x(t)$ включения* (2) *множество $\Lambda^+(x)$ непусто, компактно, связно, квазиинвариантно и $d(x(t), \Lambda^+(x)) \to 0$ при $t \to +\infty$.*

Утверждение 1 теоремы 1 вытекает из леммы 2 в [11], примененной к многозначному отображению $F(t, x)$. Утверждение 2 следует из утверждения 1 и соответствующих теорем существования дифференциальных включений из [13].

Утверждение 3 вытекает из леммы 1. Утверждения 4–6 следуют из теорем 2 и 3 в [11] применительно к дифференциальным включениям без запаздывания.

Замечание 3. В силу утверждения 3 леммы 1 свойство квазиинвариантности влечет свойство полуинвариантности для любого множества D, в том числе и для множества $\Lambda^+(x)$.

Лемма 2. *Пусть $f(t,x)$ определена п. в. и измерима на пространстве $\mathbb{R}^{1+n}$ и для каждого ограниченного множества $Q \subset \mathbb{R}^n$ существует константа M такая, что для п. в. $(t,x) \in \mathbb{R}^1 \times Q$ верно неравенство*

$$\|f(t,x)\| \leq M. \tag{13}$$

Тогда для многозначного отображения $F(t,x)$, определенного равенством (5), *выполняются условия* A1–A4.

Доказательство. Условия A1 и A2 для $F(t,x)$ вытекают непосредственно из его определения (5). Из него же и из (13) (с учетом замечания 1) следует, что для $F(t,x)$ выполняется условие A4.

Существование измеримого селектора у многозначного отображения $t \to F(t,x)$, определенного на некотором конечном отрезке при условии (13), установлено при доказательстве теоремы 9 из [12, § 7]. Неравенство (13) обеспечивает также то, что этот отрезок может быть произвольным. Теперь легко построить измеримый селектор, определенный на всей числовой прямой. Лемма доказана.

Для многозначного отображения $F(t,x)$, определенного равенством (5), потребуется также выполнение условия A5. Обозначим через $Z(t,x)$ множество всех предельных значений функции $f(t,x')$ при условии, что $x' \to x$, $x' \notin N_0(t)$. Тогда можем записать

$$Z(t,x) = \bigcap_{\delta>0} \overline{f(t, x^\delta \setminus N_0(t))}. \tag{14}$$

Лемма 3. *Пусть $f(t,x)$ определена п. в. и измерима на пространстве $\mathbb{R}^{1+n}$, выполняется неравенство* (13) *и для любого $\epsilon > 0$ существуют числа $\gamma > 0$ и $\delta > 0$ такие, что*

$$f(t,x') \in Z^\epsilon(t,x) \tag{15}$$

для всех $t > \gamma$ и $x' \in x^\delta \setminus N_0(t)$. Тогда для многозначного отображения, определенного равенством (5), *выполняется условие* A5.

Доказательство. Непосредственно из определений вытекает, что для многозначного отображения, определенного равенством (5), $F(t,x) = \operatorname{co} Z(t,x)$. Тогда из условия (15) вытекает, что для любых $\epsilon > 0$ и x существуют числа $\delta > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что

$$\overline{\operatorname{co}} f(t, x^\delta \setminus N_0(t)) \subset F^\epsilon(t,x) \tag{16}$$

для всех $t > \gamma$. Легко видеть, что условие (16) влечет выполнение условия (12) для многозначного отображения, определенного равенством (5). Лемма доказана.

Очевидно, что в условиях леммы 3 изначально можно было предположить выполнение условия (16), более общего, чем (15). Отметим, что использование в лемме 3 многозначного отображения $Z(t,x)$, определенного равенством (14), более наглядно, например, для кусочно непрерывных функций $f(t,x)$, которые рассматриваются ниже. Кроме того, из равенства $F(t,x) = \operatorname{co} Z(t,x)$ вытекают равенства $Z^*(t,x) = F^*(t,x)$, $Z'(t,x) = F'(t,x)$, которые в силу леммы 1 и замечания к ней могут облегчить построение и анализ предельных отображений $F^*(t,x)$ и $F'(t,x)$ с использованием многозначного отображения $Z(t,x)$.

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия леммы* 3. *Тогда для многозначного отображения, определенного равенством* (5), *справедливы все утверждения теоремы* 1.

Доказательство вытекает из лемм 2 и 3 и теоремы 1.

Замечание 4. Как отмечено выше, вместо пересечения по всем $\delta > 0$ в равенстве (5) можно брать пересечения по произвольной монотонно убывающей последовательности $\delta_i \to +0$, $i = 1, 2, \ldots$. Выбирая из любой последовательности, сходящейся к $+0$, монотонно убывающую подпоследовательность и используя теорему из [14, § 34], заключаем, что справедливо равенство

$$\lim_{\delta \to +0} \operatorname{dist}(\overline{\operatorname{co}} f(t, x^\delta \backslash N_0(t)), F(t,x)) = 0 \tag{17}$$

для всех t. Так как по построению $F(t,x) \subset \overline{\operatorname{co}} f(t, x^\delta \backslash N_0(t))$ для любого $\delta > 0$ и $\delta \to f(t, x^\delta \backslash N_0(t))$ — убывающая по включению многозначная функция при $\delta \to +0$, условие (17) равносильно следующему: для любых $\epsilon > 0$, x и t существует число $\delta > 0$ такое, что

$$\overline{\operatorname{co}} f(t, x^\delta \backslash N_0(t)) \subset F^\epsilon(t,x). \tag{18}$$

Если предположить, что предел в равенстве (17) равномерный по t, то из (18) будет следовать (16). Таким образом, при некоторых дополнительных предположениях о равномерности предела (17) выполнение условия A5 для многозначного отображения $F(t,x)$ вытекает непосредственно из его построения (5).

5. Принцип инвариантности

Всюду в дальнейшем $V : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — непрерывно дифференцируемая функция. Исследуем дифференциальное включение (2) с правой частью $F(t,x)$, определенной равенством (5). Производную $\dot{V}^+(t,x)$ функции $V(t,x)$ в силу дифференциального включения (2) определим следующим равенством:

$$\dot{V}^+(t,x) = \sup_{y \in F(t,x)} (\langle \nabla_x V, y \rangle + V_t).$$

Здесь $\nabla_x V$ — градиент функции V по переменной x, V_t — частная производная по t, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — знак скалярного произведения.

Через $w : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ будем обозначать измеримую по t, непрерывную по x и ограниченную на каждом множестве $\mathbb{R}^1 \times K$ функцию, где $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество, такую, что для любого x выполняется условие

$$\lim_{t \to +\infty,\, x' \to x} \|w(t,x') - w(t,x)\| = 0. \tag{19}$$

Равенство (19) означает, что для функции w выполняется условие A5.

Лемма 4. *Пусть $f(t,x)$ — измеримая функция, для которой выполняется условие* (3) *и*

$$\dot{V} \triangleq V_t + \langle \nabla_x V, f(t,x) \rangle \le -w(t,x) \tag{20}$$

для $t \in E$, $x \notin N_0(t)$, где множество E такое же, как в замечании 1. Тогда для любого $t \in E$ (т. е. для п. в. t) и любых x справедливо неравенство

$$\dot{V}^+(t,x) \le -w(t,x). \tag{21}$$

Доказательство. Множество $F(t,x)$ представляет собой выпуклую оболочку множества $Z(t,x)$ всех предельных значений функции $f(t,x')$ при условии, что $x' \to x$, $x' \notin N_0(t)$, $t \in E$. При таких предельных переходах неравенство (20), очевидно, сохраняется. Таким образом, для любых $y \in Z(t,x)$ выполняется неравенство

$$V_t + \langle \nabla_x V, y \rangle \le -w(t,x) \tag{22}$$

для всех x и $t \in E$. Так как $F(t,x) = \operatorname{co} Z(t,x)$, в силу леммы 8 из [12, § 5] неравенство (22) также выполняется для любых $y \in F(t,x)$, но тогда справедливо (21). Лемма доказана.

Доказательство сформулированных ниже теорем 3–5 следует из лемм 2–4 и теорем 4–6 в [11], примененных к дифференциальным включениям без запаздывания.

Теорема 3. *Пусть функция $f(t,x)$ определена п. в. и измерима на пространстве $\mathbb{R}^{1+n}$ и выполняются неравенство* (13) *и условие* (15). *Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая функция $V(t,x)$, ограниченная снизу на каждом множестве вида $\mathbb{R}^1 \times K$, где $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество, такая, что выполняется условие* (20).

Тогда для любого ограниченного решения $x(t)$ уравнения (1) *для каждой точки $y \in \Lambda^+(x)$ существуют предельные отображения w', F' (соответствующие одной и той же последовательности $t_n \to +\infty$) и решение $y(t)$ включения* (11) *с начальным условием $y(0) = y$ такое, что*

$$y(t) \in \Lambda^+(x) \tag{23}$$

для всех $t \ge 0$ и

$$w'(t, y(t)) = 0 \tag{24}$$

для п. в. $t \ge 0$.

На числовой прямой отрезки вида $[a,b]$ и только они являются ограниченными, выпуклыми и замкнутыми множествами. Поэтому в силу утверждений 1 и 7 из леммы 1 применительно к функции $w(t,x)$ предельное отображение $w^*(x)$ имеет вид

$$w^*(x) = [\alpha(x), \beta(x)],$$

где

$$\alpha(x) = \lim_{t\to+\infty} \inf_{t\in(b,+\infty)} w(t,x), \quad \beta(x) = \lim_{t\to+\infty} \sup_{t\in(b,+\infty)} w(t,x). \tag{25}$$

Теорема 4. *Пусть выполняются все условия теоремы* 3. *Тогда для любого ограниченного решения $x(t)$ уравнения* (1) *множество $\Lambda^+(x)$ принадлежит наибольшему квазиинвариантному подмножеству множества*

$$E_w = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) = 0\}, \tag{26}$$

где функция $\alpha(x)$ определена в первом из равенств (25).

Отметим, что для каждого фиксированного x значение функции $\alpha(x)$ реализуется на некоторой последовательности $w(t_k, x)$ при $t_k \to +\infty$. Поскольку $w(t,x) \ge 0$, формуле (26) можно придать вид

$$E_w = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t_k \to +\infty \ \lim_{k\to+\infty} w(t_k, x) = 0\}.$$

Рассмотрим случай, когда функция $V = V(x)$ не зависит от t. Отметим, что, тем не менее, производная $\dot V^+(t,x)$ от t зависит. Введем обозначения

$$\dot V^*(x) = \sup_{y\in F^*(x)} \langle \nabla_x V(x), y\rangle, \quad \dot V'(t,x) = \sup_{y\in F'(t,x)} \langle \nabla_x V(x), y\rangle.$$

Теорема 5. *Пусть функция $f(t,x)$ определена п. в. и измерима на пространстве $\mathbb{R}^{1+n}$ и выполняются неравенство (13) и условие (15). Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая функция $V(x)$ такая, что*

$$\dot V \stackrel{\Delta}{=} \langle \nabla_x V(x), f(t,x)\rangle \le 0 \tag{27}$$

для $t \in E$, $x \notin N_0(t)$, где множества E и $N_0(t)$ такие же, как в замечании 1.

Тогда для любого ограниченного решения уравнения (1) с ω-предельным множеством $\Lambda^+(x)$ справедливы следующие утверждения.

1. *Для любой точки $y \in \Lambda^+(x)$ существуют предельное относительно некоторой последовательности $\{t_k\}$ отображение $F'(t,x)$ и решение $y(t)$ включения (11) с начальным условием $y(0) = y$ такое, что выполняются равенства*

$$\dot V'(t, y(t)) = 0, \quad \dot V^*(y(t)) = 0$$

для п. в. $t \ge 0$.

2. *Множество $\Lambda^+(x)$ принадлежит наибольшему полуинвариантному подмножеству множества*

$$E(\dot V^* = 0) \stackrel{\Delta}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : \dot V^*(x) = 0\}.$$

Теоремы 4 и 5 являются аналогами принципа инвариантности применительно к неавтономным дифференциальным уравнениям $\dot x = f(t,x)$ с измеримой функцией $f(t,x)$ и с решениями в смысле Филиппова.

6. Дифференциальные уравнения с кусочно непрерывными правыми частями

Понятие кусочно непрерывной функции в конечной области $G \subset \mathbb{R}^{1+n}$ (см. [12, гл. 2]) вводится следующим образом: функция $f(t,x)$ называется *кусочно непрерывной*, если область G состоит из конечного числа областей G_j $(j = 1,\dots,l)$, в каждой из которых функция f непрерывна вплоть до границы, и множества M меры нуль, состоящего из точек границ этих областей. Функция f *непрерывна вплоть до границы*, если для каждой точки $(t,x) \in M$ существует конечный предел функции f по любой из областей G_j, для которой точка (t,x) является граничной. Если область G бесконечна, то в определении кусочно непрерывной функции каждая конечная часть области G может иметь общие точки лишь с конечным числом областей G_j. Легко видеть, что в этом случае множество областей G_j непрерывности функции f может быть счетным. В данной статье полагаем, что $G = \mathbb{R}^{1+n}$.

Всюду далее рассматриваются кусочно непрерывные функции $f(t,x)$. Обозначим через $F(t,x)$ выпуклую оболочку множества $Z(t,x)$ всех предельных значений функции $f(t,x')$ в точке $(t,x) \in G$, когда $(t,x') \notin M$, $x' \to x$, $t = \mathrm{const}$. Очевидно, множество $Z(t,x)$ состоит из конечного числа точек — предельных значений функции f. Если же в точке (t,x) функция f непрерывна (т. е. если $(t,x) \notin M$), то $F(t,x)$ — множество, состоящее из одной точки $f(t,x)$. Такое доопределение функции f называется *простейшим выпуклым доопределением* в смысле Филиппова [12, § 4], и под решением дифференциального уравнения (1) понимается решение дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t, x). \tag{28}$$

Простейшее выпуклое доопределение можно изменить следующим образом: для каждой точки $(t, x) \in M$ определить множество $F_0(t, x)$ как выпуклую замкнутую оболочку множества $Z_0(t, x)$ всех предельных значений функции $f(t', x')$, когда $(t'x') \to (t, x)$, $(t', x') \notin M$. В этом случае под решением дифференциального уравнения (1) понимается решение дифференциального включения

$$\dot{x} \in F_0(t, x). \tag{29}$$

Многозначное отображение $F(t, x)$ из правой части (28) полунепрерывно сверху по переменной x. Многозначное отображение $F_0(t, x)$ полунепрерывно сверху по совокупности переменных (t, x), что позволяет проще решать вопросы существования решений. Но такой подход не охватывает уравнений с измеримой функцией f, и качественные свойства решений (прежде всего прямым методом Ляпунова) проще решать при простейшем выпуклом доопределении. В [12, § 6] для кусочно непрерывных функций приведено достаточно общее условие равносильности этих двух подходов в том смысле, что включения (28) и (29) имеют одни и те же решения.

Часто множество M точек разрыва кусочно непрерывной функции $f(t, x)$ задается в виде объединения поверхностей в пространстве $\mathbb{R}^{1+n}$, т. е. множеств вида

$$M_i = \{(t, x) : \phi_i(t, x) = 0\}, \quad i = 1, \dots m,$$

определяемых непрерывно дифференцируемыми функциями $\phi_i(t, x)$. Рассмотрим этот случай детально.

Пусть $\phi(t, x)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Обозначим $M = \{(t, x) : \phi(t, x) = 0\}$, и пусть точка $(t, x) \in M$ и произвольный вектор $z \in \mathbb{R}^n$ фиксированы. Дополнительно предположим, что в рассматриваемой точке $\nabla\phi(t, x) \neq 0$. Из условия дифференцируемости функции $\phi(t, x)$ получаем

$$\phi(t + h, x + hz) = \phi(t, x) + \langle \nabla\phi(t, x), z\rangle \cdot h + \frac{\partial\phi}{\partial t} h + o(h),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — знак скалярного произведения, ∇ — знак градиента функции $\phi(t, x)$ по переменной x. Так как $\phi(t, x) = 0$, из последнего равенства получаем

$$\frac{1}{h}\phi(t + h, x + hz) = \langle \nabla\phi(t, x), z\rangle + \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{o(h)}{h}. \tag{30}$$

Обозначим

$$p(t, x, z) = \langle \nabla\phi(t, x), z\rangle + \frac{\partial\phi}{\partial t}.$$

Уравнение $p(t, x, z) = 0$ (при фиксированной точке (t, x)) определяет гиперплоскость в пространстве $\mathbb{R}^n$. Выбирая векторы z_1 и z_2 сначала с одной, а затем с другой стороны этой гиперплоскости, получаем условия $p(t, x, z_1) > 0$ и $p(t, x, z_2) < 0$. Из (30) вытекает, что значения функции $\phi(t + h, x + hz_i)$, $i = 1, 2$, для достаточно малых $h > 0$ будут отличны от нуля и иметь знаки величин $p(t, x, z_i)$, $i = 1, 2$. Если функция $f(t, x)$ кусочно непрерывна с множеством точек разрыва M, то будут существовать пределы

$$\lim_{h\to+0} f(t + h, x + hz_1) = f^+(t, x), \quad \lim_{h\to+0} f(t + h, x + hz_2) = f^-(t, x),$$

при этом

а) $f^+(t,x)$ является предельным значением функции $f(t',x')$ при условии, что $(t',x') \to (t,x)$ и $(t',x') \in M^+ = \{(t,x) : \phi(t,x) > 0\}$,

б) $f^-(t,x)$ является предельным значением функции $f(t',x')$ при условии, что $(t',x') \to (t,x)$ и $(t',x') \in M^- = \{(t,x) : \phi(t,x) < 0\}$.

Из условия дифференцируемости функции $\varphi(t,x)$ вытекает также равенство

$$\frac{1}{h}\phi(t,x+hz) = \langle \nabla\phi(t,x), z\rangle + \frac{o(h)}{h}. \tag{31}$$

Обозначим $p_0(t,x,z) = \langle \nabla\varphi(t,x), z\rangle$. Учитывая, что $\nabla\phi(t,x) \neq 0$, как и выше, выберем векторы z_1 и z_2 так, чтобы $p_0(t,x,z_1) > 0$ и $p_0(t,x,z_2) < 0$. Тогда из (31) следует, что для достаточно малого $h > 0$ выполняются неравенства $\phi(t,x+hz_1) > 0$ и $\phi(t,x+hz_2) < 0$. Из определения кусочной непрерывности функции $f(t,x)$ вытекает единственность пределов функции $f(t,x)$ по областям M^+ и M^- соответственно. Тогда

$$\lim_{h\to+0} f(t,x+hz_1) = f^+(t,x), \quad \lim_{h\to+0} f(t,x+hz_2) = f^-(t,x).$$

Из всего изложенного выше следует

Лемма 5. *Пусть множество M точек разрыва кусочно непрерывной функции $f(t,x)$ представляет собой конечный набор гладких поверхностей M_i, определяемых непрерывно дифференцируемыми функциями $\phi_i(t,x)$. Обозначим $I(t,x) = \{s \in (1,\ldots,m) : \phi_s(t,x) = 0\}$ и предположим, что для каждого $i \in I(t,x)$ выполняется $\nabla\phi_i(t,x) \neq 0$. Тогда $F_0(t,x) = F(t,x)$ во всех точках рассматриваемой области переменных (t,x) и включения* (28) *и* (29) *совпадают.*

В дальнейшем будем предполагать, что выполнены условия (например, условия леммы 5), при которых предельное значение $f_j(t,x)$ функции $f(t,x')$ по области G_j, когда $t = \mathrm{const}$, $x' \to x$, $(t,x') \in G_j$, в любой граничной точке $(t,x) \in M$ множества G_j определено и совпадает с предельным значением функции $f(t',x')$ в каждой точке $(t,x) \in M$, когда $t' \to t$, $x' \to x$, $(t',x') \in G_j$. Желая подчеркнуть, что функция f рассматривается в точках области G_j, используем для нее обозначение f_j во всех точках этой области. Таким образом, для каждого индекса $j = 1,2,\ldots$ определена и, очевидно, непрерывна на множестве $\overline{G}_j$ функция $f_j(t,x)$.

Установим и уточним некоторые свойства многозначных отображений, возникающие при простейшем выпуклом доопределении.

1. Предельные многозначные отображения для кусочно непрерывных функций определяются в общем случае так же, как и для измеримых функций по формулам (6), (7), и обладают свойствами, описанными в лемме 1. Но для кусочно непрерывных функций с конечным множеством областей непрерывности утверждения 7 и 8 леммы 1 могут быть уточнены. Действительно, в этом случае множество функций $f_j(t,x)$ также конечно. Поэтому всякое предельное значение функции $h(t) \in Z(t,x)$ при $t \to +\infty$ в утверждении 7 реализуется как предельное значение для $h(t) = f_j(t,x)$ при некотором фиксированном значении индекса j. Следовательно, $F^*(t,x)$ представляет собой выпуклую замкнутую оболочку всех предельных значений функций $f_j(t,x)$ при $t \to +\infty$, $t \in N_j(x) = \{s : (s,x) \in \overline{G}_j\}$ для всех j таких, что множество $N_j(x)$ непусто и не ограничено сверху.

Аналогично предельная точка последовательности $z_n \in Z(t+t_n, x)$ при $t_n \to +\infty$ в утверждении 8 реализуется в виде предельного значения последовательности $z_n = f_j(t+t_n, x)$, и $F'(t,x)$ представляет собой выпуклую замкнутую оболочку всех предельных значений последовательностей $f_j(t+t_n, x)$ при $t_n \to +\infty$, $t_n \in L_j(t,x) = \{s : (t+s, x) \in \overline{G}_j\}$ для всех j таких, что множество $L_j(t,x)$ непусто и не ограничено сверху.

2. Пусть $M_t = \{x : (t,x) \in M\}$ — сечение множества M плоскостью $t = \text{const}$. Если $x \notin M_t$, то (t,x) — точка непрерывности функции f, а значит, x — точка непрерывности функции $x \to f(t,x)$. Следовательно, простейшее выпуклое доопределение кусочно непрерывных функций совпадает с доопределением измеримых функций по формуле (5), в которой следует положить множество $N_0(t)$ равным M_t. Нужно лишь учесть, что при п. в. t мера множества M_t равна нулю, и для таких t множество $F(t,x)$ определено при любых x.

3. Для ограниченности многозначного отображения $F(t,x)$, полученного в результате простейшего выпуклого доопределения функции $f(t,x)$, достаточно ограниченности этой функции в областях непрерывности.

4. Условие (15) леммы 3 для кусочно непрерывных функций записывается без изменений, если положить в нем $N_0(t) = M_t$. Если множество областей непрерывности G_j конечно, то для выполнения (15) достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: каждая функция $f_j(t,x)$ в своей области определения $\overline{G}_j$ непрерывна в каждой фиксированной точке x равномерно относительно t. Это означает, что при любом фиксированном j для любых x и $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|f_j(t,x') - f_j(t,x)\| < \epsilon$, если $(t,x') \in G_j$, $(t,x) \in G_j$ и $\|x' - x\| < \delta$. В частности, каждая функция $f_j(t,x)$ может удовлетворять на множестве $\overline{G}_j$ условию Липшица по переменной x с постоянной константой Липшица.

5. При проверке неравенств (20) и (27) достаточно убедиться, что они выполняются только в областях непрерывности функции $f(t,x)$.

С учетом вышесказанного для кусочно непрерывных функций справедливы все утверждения разд. 4 и 5, в формулировках которых могут быть учтены приведенные выше свойства 1–5.

Пример. Применим полученные результаты к исследованию линейного осциллятора с сухим трением и с переменным коэффициентом трения $f(t) > 0$. Тело массы m, рассматриваемое как материальная точка, движется по горизонтальной прямой Ox под действием упругой силы $F^e(x) = -kx$ $(k > 0)$ с точкой ненапряженного состояния $x = 0$, $P = mg$ — вес тела, $F^{\text{fr}}(t,v) = -f(t)P \operatorname{sgn} v$ — сила сухого трения Кулона, являющаяся разрывной при $v = 0$ функцией скорости $v = \dot{x}$. Уравнения движения системы, имеющие вид

$$\dot{x} = v, \quad m\dot{v} = F^e(x) + F^{fr}(t,v),$$

будем рассматривать в удобном для дальнейшего анализа виде

$$m\ddot{x} = -kx - f(t)P \operatorname{sgn} \dot{x}. \tag{32}$$

Наша цель — наиболее точно описать множество точек, к которому стремятся ограниченные решения уравнения (32). Доопределение правой части уравнения (32) по Филиппову на прямой $\dot{x} = 0$ приводит к дифференциальному включению

$$m\ddot{x} \in -kx + F^{\text{fr}}(t,\dot{x}), \tag{33}$$

где $F^{\text{fr}}(t,\dot{x}) = -f(t)P \operatorname{sgn} \dot{x}$ при условии $\dot{x} \neq 0$ и $F^{\text{fr}}(t,0) = [-f(t)P, f(t)P]$.

С точки зрения асимптотических свойств решений включения (33) существенными являются свойства функции $f(t)$ при больших значениях переменной t (времени). Будем предполагать выполненными условия

$$\lim_{t\to+\infty}\inf_{s\in(t,+\infty)} f(s) = a > 0, \tag{34}$$

$$\lim_{\xi\to+\infty,\, t\to+0}(f(t+\xi) - f(\xi)) = 0. \tag{35}$$

Относительно (34) отметим, что существует последовательность $t_n^{\inf} \to +\infty$ такая, что $f\bigl(t_n^{\inf}\bigr) \to a$, условие (35) означает следующее: для любого $\epsilon > 0$ существуют числа $\delta > 0$ и $B > 0$ такие, что $|f(t+\xi) - f(\xi)| < \epsilon$ для всех $0 < t < \delta$ и $\xi > B$. (Последнее, очевидно, выполняется, если функция $f(t)$ равномерно непрерывна.) Будем предполагать также, что функция $f(t)$ ограничена на всей числовой прямой. В остальном зависимость функции $f(t)$ от переменной t не существенна, и можно считать ее любой вплоть до измеримости.

Функцию Ляпунова возьмем в виде

$$V(x,\dot x) = \frac{1}{2}(m\dot x^2 + kx^2).$$

Тогда $\dot V(t,x,\dot x) = -f(t)|\dot x| \le 0$ и, полагая $w(t,x,\dot x) = f(t)|\dot x|$, заключаем, что

$$\lim_{t\to+\infty}\inf_{s\in(t,+\infty)} w(s,x,\dot x) = a|\dot x|.$$

Из последнего равенства с учетом (34) вытекает, что $E_w = \{(x,\dot x) : \dot x = 0\}$ (см. формулы (25), (26)).

В соответствии с теоремой 4 ω-предельное множество $\Lambda^+(x,\dot x)$ любого ограниченного решения $(x(t),\dot x(t))$ уравнения (32) принадлежит наибольшему квазиинвариантному подмножеству множества E_w. Выводы, которые из этого можно сделать, следующие.

1. $\Lambda^+(x,\dot x)$ состоит из положений равновесия предельных дифференциальных включений вида (7).

2. Так как $\Lambda^+(x,\dot x)$ принадлежит линии уровня функции Ляпунова $V(x,\dot x) = \frac{1}{2}(m\dot x^2 + kx^2)$ и при этом $\dot x = 0$, то $\Lambda^+(x,\dot x)$ содержит не более двух точек $(x_0,0)$ и $(-x_0,0)$, где x_0 определяется из уравнения $x^2 = c$ для некоторой константы c. В силу связности множества $\Lambda^+(x,\dot x)$ оно всегда состоит лишь из одной точки $(x_0,0)$ или $(-x_0,0)$ — положения равновесия некоторого предельного дифференциального включения вида (7). Очевидно, что это может быть точка $(0,0)$. Для определенности будем считать, что $x_0 > 0$.

3. Поскольку $(x(t),\dot x(t)) \to (x_0,0)$ при $t \to +\infty$, то $(x(t+t_n),\dot x(t+t_n)) \to (x_0,0)$ для любой последовательности $t_n \to +\infty$ и при любом $t \ge 0$. Тем самым из теоремы Дэви [15] (см. также [9]) вытекает, что $(x_0,0)$ — положение равновесия предельного дифференциального включения, определенного любой последовательностью $\{t_n\}$, в том числе последовательностью $\bigl\{t_n^{\inf}\bigr\}$.

4. Обозначим через $f'(t)$ предельное, вообще говоря, многозначное отображение для функции $f(t)$ (коэффициента трения), порожденное последовательностью точек $t_n^{\inf}$. Согласно утверждению 8 леммы 1 множество $f'(t)$ в каждой точке $t \ge 0$ представляет собой выпуклую замкнутую оболочку всех предельных точек последовательности значений $f\bigl(t+t_n^{\inf}\bigr)$. Так как значением отображения $f'(t)$ в каждой точке t является отрезок, можем записать $f'(t) = [m(t), M(t)]$,

где $m(t)$ и $M(t)$ — наибольший и наименьший элементы множества $f'(t)$ соответственно. При этом $f'(0) = a$, $M(0) = m(0) = a$ и $m(t) \geq a$ для любых $t \geq 0$.

Поскольку $(x_0, 0)$ — положение равновесия предельного дифференциального включения, порожденное последовательностью точек $t_n^{\inf}$, для почти всех $t \geq 0$ справедливо включение $0 \in -kx_0 + P[-M(t), M(t)]$ или, эквивалентно,

$$kx_0 \in P[-M(t), M(t)]. \tag{36}$$

Если предположить, что $kx_0 > Pa$, то из условия (36) получаем

$$Pa < kx_0 \leq PM(t) \tag{37}$$

для п. в. $t \geq 0$. Из условия (35) вытекает, что для $\epsilon = kx_0 - Pa > 0$ найдутся число $\delta > 0$ и номер N такие, что $\left|f\left(t + t_n^{\inf}\right) - f\left(t_n^{\inf}\right)\right| < \epsilon/(2P)$ для всех $t \in [0, \delta]$ и $n \geq N$. Отсюда получаем, что $0 \leq z - a \leq \epsilon/(2P)$ для любых $z \in f'(t)$ при всех $t \in [0, \delta]$. Следовательно, при $z = M(t)$ выполняется $PM(t) \leq Pa + \epsilon/2 < Pa + \epsilon = kx_0$ для всех $t \in [0, \delta]$, что противоречит (37).

Проведенный анализ показывает, что любое ограниченное решение $(x(t), \dot{x}(t))$ уравнения (32) стремится к точке $(x_0, 0)$ такой, что $|x_0| \leq Pa/k$, где a — нижний предел функции $f(t)$ при $t \to +\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Руш Н., Абетс М., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.

2. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.

3. *Sell G. R.* Nonautonomous differential equations and topological dynamics. 1, 2 // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 22. P. 241–283.

4. *Artstein Z.* Topological dynamics of an ordinary differential equation // J. Differ. Equations. 1977. V. 23. P. 216–223.

5. *Artstein Z.* Topological dynamics of an ordinary differential equation // J. Differ. Equations. 1977. V. 23. P. 224–243.

6. *Artstein Z.* The limiting equations of nonautonomous ordinary differential equation // J. Differ. Equations. 1977. V. 25. P. 184–202.

7. *Artstein Z.* Uniform asymptotic stability via limiting equations // J. Differ. Equations. 1978. V. 27. P. 172–189.

8. *Андреев А. С.* Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. 2009. № 9. С. 4–55.

9. *Финогенко И. А.* Предельные дифференциальные включения и принцип инвариантности неавтономных систем // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 2. С. 454–471.

10. *Финогенко И. А.* Предельные функционально-дифференциальные включения и принцип инвариантности для неавтономных систем с запаздыванием // Докл. АН. 2014. Т. 455, № 6. С. 637–639.

11. *Финогенко И. А.* Принцип инвариантности для неавтономных функционально-дифференциальных включений // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 271–284.

12. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

13. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005.

14. *Куратовский К.* Топология.. М.: Мир, 1966. Т. 1.

15. *Davy J. L.* Properties of solution set of a generalized differential equation // Bull. Austral. Math. Soc. 1972. V. 6. P. 379–398.

Статья поступила 30 мая 2015 г.

Финогенко Иван Анатольевич
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
fin@icc.ru