*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2016. Том 57, № 5*

*УДК 519.17+512.54*

# ПОСТРОЕНИЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ С ЛИНЕЙНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

**Б. Г. Гребенщиков**

**Аннотация.** Рассматривается проблема построения почти периодических решений для одной сложной неоднородной системы с линейным запаздыванием.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.507

**Ключевые слова:** запаздывание, почти периодические решения, устойчивость.

**Введение.** Изучена возможность построения почти периодического решения для одной неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием, являющимся линейной функцией аргумента (времени) при некоторых предположениях относительно правой части данной системы. Доказано, что это решение асимптотически устойчиво.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается следующая линейная неоднородная система с линейным запаздыванием:

$$\begin{gathered}\frac{d\hat{x}(\vartheta)}{d\vartheta}=\frac{1}{\vartheta_0}[A_1\hat{x}(\vartheta)+A_2\hat{x}(\mu\vartheta)+B_1(\vartheta)\hat{y}(\vartheta)+B_2\hat{y}(\mu\vartheta)+\hat{f}_1(\vartheta)],\\ \frac{d\hat{y}(\theta)}{d\vartheta}=A_3\hat{x}(\vartheta)+A_4\hat{x}(\mu\vartheta)+B_3\hat{y}(\vartheta)+B_4y(\mu\vartheta)+\hat{f}_2(\vartheta),\\ \theta_0=\mathrm{const},\quad \vartheta\geq\vartheta_0>0,\quad \mu=\mathrm{const},\quad 0<\mu<1.\end{gathered}\tag{1.1}$$

Запаздывание $\hat{\tau}(\vartheta)=(1-\mu)\vartheta$ является линейной функцией времени (аргумента) $\vartheta$; $A_k, B_j$ $(k,j=1,2,3,4)$ — постоянные $(m\times m)$-матрицы; $\{\hat{x}(\vartheta),\hat{y}(\vartheta)\}^\top$ — $m$-мерные вектор-функции, определенные соответственно начальными вектор-функциями $\{\{\hat{\phi}_1(\hat{\eta}),\hat{\phi}_2(\hat{\eta})\}\}^\top$; $\hat{\eta}\in[\mu\vartheta_0,\vartheta_0]$, $\{\hat{\phi}_i(\vartheta)\}^\top$ — непрерывные $m$-мерные вектор-функции времен (аргумента $\vartheta$); $\hat{f}_i(\vartheta)$ — непрерывные достаточное число раз дифференцируемые $m$-мерные вектор-функции времени (аргумента) $\vartheta$ $(i=1,2)$; $\top$ — знак транспонирования.

Заменой аргумента $t=\ln(\vartheta/\vartheta_0)$ сведем данную систему к системе с постоянным запаздыванием $\tau=-\ln(\mu)$:

$$\begin{gathered}\frac{dx(t)}{dt}=A_1x(t)+A_2x(t-\tau)+B_1y(t)+B_2y(t-\tau)+f_1(t),\\ \frac{dy(t)}{dt}=\vartheta_0e^t[A_3x(t)+A_4x(t-\tau)+B_3y(t)+B_4y(t-\tau)+f_2(t)],\\ t\geq0,\quad \{x(t),y(t)\}^\top=\{\phi_1(\eta),\phi_2(\eta)\}^\top,\ \eta\in[-\tau,0].\end{gathered}\tag{1.2}$$

Норму вектора $w = \{w_j\}^\top$ (здесь $w_j$ — компоненты вектора $w$) определим равенством $\|w\| = \sum\limits_{j=1}^{m} |w_j|$. Норму матрицы $D = \{d_{ij}\}$ $(i, j = 1, \dots, m)$ определим в соответствии с нормой вектора [1], а именно $\|D\| = \max\limits_{j} \sum\limits_{i} |d_{ij}|$. Очевидно, что $\|\{x, y\}^\top\| = \|x\| + \|y\|$.

Рассмотрим полученную систему (1.2). Полагаем, что справедливы следующие условия:

1) вещественные части собственных значений $\lambda$ характеристического уравнения

$$|A_1 + A_2 e^{-\lambda\tau} - \lambda E| = 0 \tag{1.3}$$

имеют отрицательную вещественную часть, т. е. справедливо неравенство

$$\mathrm{Re}(\lambda) < -\gamma_1, \quad \gamma_1 = \mathrm{const},\ \gamma_1 > 0; \tag{1.4}$$

2) собственные значения $\nu$ матрицы $B_3$ также имеют отрицательную вещественную часть, т. е. справедлива оценка

$$\mathrm{Re}(\nu) < -\gamma_2, \quad \gamma_2 = \mathrm{const},\ \gamma_2 > 0; \tag{1.5}$$

3) корни $p$ характеристического уравнения

$$\bigl|B_3 + B_4 e^{-p\tau} - (A_3 + A_4 e^{-p\tau})(A_1 + A_2 - pE)^{-1}\bigl(B_1^0 + B_2^0\bigr)\bigr| = 0 \tag{1.6}$$

удовлетворяют неравенству

$$\mathrm{Re}(p) < -\gamma_3, \quad \gamma_3 = \mathrm{const},\ \gamma_3 > 0. \tag{1.7}$$

Тогда решение $\{x^0(t), y^0(t)\}^\top$ однородной системы

$$\begin{aligned} \frac{dx^0(t)}{dt} &= A_1 x^0(t) + A_2 x^0(t-\tau) + B_1 y^0(t) + B_2 y^0(t-\tau), \\ \frac{dy^0(t)}{dt} &= \vartheta_0 e^t [A_3 x^0(t) + A_4 x^0(t-\tau) + B_3 y^0(t) + B_4 y^0(t-\tau)] \end{aligned} \tag{1.8}$$

экспоненциально устойчиво, причем справедлива оценка [2]

$$\|x^0(t)\| + \|y^0(t)\| \le L e^{-\beta(t-t_0)} \sup_{\eta} \|\phi(\eta)\|, \quad L = \mathrm{const},\ L \ge 1,\ \beta = \mathrm{const},\ \beta > 0. \tag{1.9}$$

Отметим, что константы $L$, $\beta$ одни и те же для любых начальных моментов $\vartheta_0 \ge \vartheta_0^* > 0$.

**2. Асимптотические свойства неоднородной дифференциально-разностной системы.** Чтобы лучше понять асимптотические свойства исходной системы, перейдем от системы (1.2) — конечной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием на бесконечном промежутке времени — к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, заданной на конечном промежутке времени $[0, \tau]$, полагая [3] $x_{n+1}(t) = x(n\tau + t)$, $y_{n+1}(t) = y(n\tau + t)$, $f^i_{n+1}(t) = f^i(t + n\tau)$, $t \in [0, \tau]$, $i = 1, 2$. Получаем совокупность двух подсистем $m$-го порядка:

$$\frac{dx_{n+1}(t)}{dt} = A_1 x_{n+1}(t) + A_2 x_n(t) + B_1 y_{n+1}(t) + B_2 y_n(t) + f^1_{n+1}(t), \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_n \frac{dy_{n+1}(t)}{dt} = e^t\left[A_3x_{n+1}(t) + A_4x_n(t) + B_3y_{n+1}(t) + B_4y_n(t) + f^2_{n+1}(t)\right], \quad t \in [0, \tau]. \tag{2.2}$$

Очевидно, что

$$\varepsilon_n = \frac{\mu^n}{\vartheta_0},\ \lim \varepsilon_n = 0,\ n \to \infty \vee \theta_0 \to \infty,\ x_{n+1}(0) = x_n(\tau),\ y_{n+1}(0) = y_n(\tau). \tag{2.3}$$

Ввиду свойств параметра $\varepsilon_n$, описанных в (2.3), подсистема (2.2) сингулярно возмущенная [4], совокупность решений системы (2.1), (2.2) можно рассматривать как систему, содержащую медленные $(x_n(t))$ и быстрые $(y_n(t))$ переменные [4]; поскольку нас часто будут интересовать асимптотические свойства решений при достаточно малом $\varepsilon_n$, без ограничения общности считаем начальный момент $\vartheta_0$ достаточно большим.

Наряду с приведенной выше нормой будем рассматривать норму вектор-функции $x(t)$ на отрезке [3], определенную следующим образом:

$$\|x\|_\tau = \sup_{t\in[0,\tau]} \|x(t)\|. \tag{2.4}$$

Если учесть норму вектор-функции, определенную равенством (2.4), то при такой нормировке линейное пространство непрерывных вектор-функций будет пространством Банаха [1, с. 162]. Обозначим его через $\mathbb{C}_{2m}$. В этом пространстве решение однородной линейной системы, соответствующей системе (2.2), можно представить в операторном виде:

$$\begin{pmatrix} x^0_{n+1}(t) \\ y^0_{n+1}(t)^0 \end{pmatrix} = T_n(t) \begin{pmatrix} x^0_n(s), y^0_{n+1}(s), y^0_n(s) \\ y^0_n(s), x^0_{n+1}(s), x^0_n(s) \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где линейный оператор сдвига $T_n(t)$ определен следующим образом:

$$T_n(t) = \begin{pmatrix} T^1_n(t) \\ T^2_n(t) \end{pmatrix},$$

$$T^1_n(t) = U(t)u_n(\tau) + \int_0^t U(t-s)A_2u_n(s)\,ds + \int_0^t U(t-s)(B_1v_{n+1}(s) + B_2v_n(s))\,ds, \tag{2.6}$$

$$T^2_n(t) = e^{B_3(\varepsilon_n)^{-1}(e^t-1)}v_n(\tau) + \int_0^t e^{B_3(\varepsilon_n)^{-1}(e^t-e^s)}e^s(\varepsilon_n)^{-1}(B_4v_n(s) + A_3u_{n+1}(s) + A_4u_n(s))\,ds.$$

Здесь $U(t)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы

$$d\bar{u}_{n+1}/dt = A_1\bar{u}_{n+1}(t) + A_2\bar{u}_n(t),\ 0 \le t \le \tau, \quad \bar{u}_{n+1}(0) = \bar{u}_n(\tau), \tag{2.7}$$

при этом (ввиду неравенства (1.4)) справедлива оценка

$$\|U(t-s)\| \le M_1e^{-\gamma_1(t-s)}, \quad M_1 = \text{const},\ M_1 > 0,\ 0 \le s \le t. \tag{2.8}$$

Свойства оператора сдвига $T_n(t)$ (а также асимптотические свойства системы (2.1)) подробно изложены в [3, 5, 6], в частности, доказана его равномерная ограниченность, а именно $\|T_n(t)\| \le \overline{M}$, $\overline{M} = \mathrm{const}$, $\overline{M} > 0$. В пространстве $\mathbb{C}_{2m}$ определено произведение операторов, тогда из неравенства (1.9) для произведения операторов $T_j(s_j)$ следует оценка

$$\left\| \prod_{j=1}^{n} T_j(s_j) T_0(s_0) w^0(s) \right\| \le L_0 q^n (\|x^0(s)\|_\tau + \|y^0(s)\|_\tau), \tag{2.9}$$

$$w^0(s) = \{x^0(s), y^0(s)\}^\top, \quad q = e^{-\beta\tau},\ 0 < q < 1,\ s \in [-\tau, 0],$$
$$j = 0, 1, 2, \dots, n,\ 0 \le s \le s_1 \le \dots \le s_{n-1} \le s_n.$$

**Теорема 1.** *При выполнении неравенств* (1.4), (1.5) *и* (1.7) *решение неоднородной системы* (2.1), (2.2) *ограничено.*

Доказательство. Запишем решение конечно-разностной системы (2.1), (2.2) по шагам в операторной форме. Обозначив $z_n(t) = \{x_n(t), y_n(t)\}^\top$, $\bar f_n(t) = \left\{f_n^1(t), f_n^2(t)\right\}^\top$, последовательно имеем

$$\begin{gathered} z_1(t) = T_0(t)\phi(s) + \bar f_1(t), \\ z_2(t) = T_1(t) z_1(s_1) + \bar f_2(t) = T_1(t)(T_0(s)\phi(s) + \bar f_1(s)) + \bar f_2(t), \\ \dots \end{gathered} \tag{2.10}$$

$$z_{n+1}(t) = T_n(t) \prod_{j=0}^{n-1} T_j(s_j)\phi(s) + T_n(t) \prod_{j=1}^{n-1} T_j(s_j) \bar f_1(s_0) + T_n(t) \prod_{j=2}^{n-1} T_j(s_j) \bar f_2(s_1) + \dots + \bar f_{n+1}(t).$$

Отсюда, учитывая оценку (2.9), получаем цепочку неравенств

$$\|z_{n+1}(t)\|_\tau \le L_0 q^n \sup_\eta \|\phi(\eta)\| + L_0[q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1] \sup_{0 \le t < \infty} \|\bar f(t)\| < L_0 q^n \sup_\eta \|\phi(\eta)\| + \frac{L_0}{1-q} \sup_{0 \le t < \infty} \|\bar f(t)\|. \tag{2.11}$$

Из оценки (2.11) следует утверждение теоремы.

Рассмотрим систему (2.1), (2.2). Если при каждом $n$ сделать замену аргумента $t = \varepsilon_n \hat\theta$, то получим систему с ограниченными коэффициентами

$$\frac{dx_{n+1}(\hat\theta)}{d\hat\theta} = \varepsilon_n \bigl(A_1 x_{n+1}(\hat\theta) + A_2 x_n(\hat\theta) + B_1 y_{n+1}(\hat\theta) + B_2 y_n(\hat\theta) + f_{n+1}^1(\hat\theta)\bigr), \tag{2.12}$$

$$\frac{dy_{n+1}(\hat\theta)}{d\hat\theta} = e^{\varepsilon_n \hat\theta} \bigl(A_3 x_{n+1}(\hat\theta) + A_4 x_n(\hat\theta) + B_3 y_{n+1}(\hat\theta) + B_4 y_n(\hat\theta) + f_{n+1}^2(\hat\theta)\bigr), \tag{2.13}$$

$\hat\theta \in [0, \tau/\varepsilon_n]$. Рассмотрим подсистему (2.12). Ввиду оценки (2.11) ее правая часть ограничена при любых $n$. Но тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{dx_n(\hat\theta)}{d\hat\theta} \to 0. \tag{2.14}$$

**Следствие.** *Если* $\lim\limits_{n\to\infty}\|\bar f_n(t)\| = 0$ *(т. е.* $\|\bar f_n(t)\|$ *является исчезающей вектор-функцией), то* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n(t) = 0$.

Доказательство. Пусть

$$\hat\varepsilon_{\widehat N} = \sup\{\|\bar f_{\widehat N+1}(t)\|_\tau, \|\bar f_{\widehat N+2}(t)\|_\tau, \dots, \|\bar f_{\widehat N+k}(t)\|_\tau\},$$

$\widehat N$ — достаточно большое натуральное число, $k = 1, 2, \dots$. Очевидно, что $\lim\limits_{\widehat N\to\infty}\hat\varepsilon_{\widehat N} = 0$. Из (2.10), (2.11) имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned}\|z_{\widehat N+k+1}\|_\tau \le L_0 q^{\widehat N+k}\sup_\eta\|\phi(\eta)\| + L_0[q^{\widehat N+k-1}\|\bar f_1(t)\|_\tau \\ + q^{\widehat N+k-2}\|\bar f_2(t)\|_\tau + \dots + q^{\widehat N}\|\bar f_k(t)\|_\tau] \\ + L_0[q^{\widehat N-1}\|\bar f_{k+1}(t)\|_\tau + q^{\widehat N-2}\|\bar f_{k+2}(t)\|_\tau + \dots + \|\bar f_{\widehat N+k}(t)\|_\tau] \\ \le L_0 q^{\widehat N+k}\sup_\eta\|\phi(\eta)\| + \frac{L_0 q^{\widehat N}}{1-q}\sup_{0\le t<\infty}\|\bar f(t)\| + \frac{L_0}{1-q}\hat\varepsilon_{\widehat N}.\end{aligned} \quad (2.15)$$

Устремляя $\widehat N$ к бесконечности, из (2.15) получаем, что $\lim\limits_{\widehat N\to\infty}\|z_{\widehat N+k+1}\|_\tau = 0$. Следствие доказано.

**3. Существование почти периодических решений.** Пусть наряду с неравенствами (1.5) и (1.7) вектор-функция $f_2(\vartheta)$ почти периодическая, имеющая $k$ производных, т. е. $f_2(\vartheta) \in \Pi^{(k)}$ [7] ($k$ — достаточно большое число). Рассмотрим первую из подсистем в (1.1). Очевидно (ввиду оценки (2.14)), что единственным почти периодическим решением данной подсистемы является $\hat x(\vartheta) \equiv \overline C$. Следовательно (по аналогии с системами, содержащими подсистемы с малым параметром при производной), будем искать почти периодическое решение исходной системы (1.1) как решение системы «быстрых» движений [8]: $\hat x \equiv \overline C$, $\overline C$ — $m$-мерный постоянный вектор, и вектор-функции $\bar y(\vartheta)$ — почти периодическое решение второй подсистемы при выполнении условий

$$\bar x(\vartheta) \equiv \overline C, \quad \hat\phi_2(\hat\eta) \equiv 0. \quad (3.1)$$

**Теорема 2.** *Вторая из подсистем в* (1.1) *при условиях, перечисленных в этом разделе, допускает почти периодическое решение* $\bar y(\vartheta)$. *Данное решение может быть найдено методом последовательных приближений.*

Доказательство. Покажем, что из неравенства (1.7) следует, что собственные значения $\rho$ матрицы $B_3^{-1}B_4$ меньше единицы по модулю. Рассмотрим равенство (1.6). Известно [2], что корни данного характеристического уравнения существуют и при достаточно больших $\mathrm{Im}(p)$. Но тогда при $|\mathrm{Im}(p)| \to \infty$ ($\mathrm{Re}(p)$ фиксированная) получаем предельное равенство

$$|B_3 + B_4 e^{-p\tau}| = 0 \Longrightarrow \mathrm{Re}(p) < -\gamma_4, \quad 0 < \gamma_4 < \gamma_3. \quad (3.2)$$

Ввиду того, что величина $e^{-p\tau}$ ограничена в полосе $-C_1 < \mathrm{Re}(p) < -\gamma_4$ ($C_1 = \mathrm{const}$, $C_1 > 0$), из асимптотического равенства (3.2) выводим, что собственные значения $\rho$ матрицы $B_3^{-1}B_4$ меньше единицы по модулю.

Далее, методами, аналогичными приведенным в [9], можно показать, что к почти периодическому решению $\bar y(\vartheta)$ сходятся последовательные приближения $\bar y_n(\vartheta)$, определяемые соотношениями

$$\frac{d\bar y_{n+1}(\vartheta)}{d\vartheta} = B_3\bar y_{n+1}(\vartheta) + B_4\bar y_n(\mu\vartheta) + F(\vartheta), \quad \bar y_0(\vartheta) \equiv 0, \quad (3.3)$$

где $F(\vartheta) = (A_3 + A_4)\overline{C} + \hat{f}_2(\vartheta)$. Там же доказана асимптотическая устойчивость полученного (предельного) почти периодического решения. Теорема 2 доказана.

Получим достаточные условия существования почти периодического решения у исходной системы (1.1), имеющего вид

$$\{\Lambda; \bar{y}(\vartheta)\} \tag{3.4}$$

($\Lambda$—постоянный $m$-вектор). Рассмотрим, каким условиям должен удовлетворять постоянный вектор $\Lambda$, чтобы (3.4) было решением системы (1.1). Подставим данное выражение в первое из соотношений (1.2). Очевидно, что (в соответствии с (3.3)) вектор $\Lambda$ входит в выражение $\bar{y}(\vartheta)$, а именно

$$\frac{d\bar{y}_{n+1,\Lambda}(\vartheta)}{d\vartheta} = B_3\bar{y}_{n+1,\Lambda}(\vartheta) + B_4\bar{y}_{n,\Lambda}(\mu\vartheta) + (A_3 + A_4)\Lambda. \tag{3.5}$$

Здесь $\bar{y}_{n+1,\Lambda}(\vartheta)$ — приближение $(n+1)$-го порядка почти периодической вектор-функции, обусловленной постоянным вектором $\Lambda$. Пусть в (3.5) $n = 0$. Известно [7], что единственным почти периодическим решением данной вспомогательной подсистемы является выражение

$$\bar{y}_{0,\Lambda}(\vartheta) = \int\limits_{-\infty}^{\vartheta} e^{B_3(\vartheta - s)}(A_3 + A_4)\Lambda\, ds. \tag{3.6}$$

Из (3.6) имеем $\bar{y}_{0,\Lambda}(\vartheta) = (B_3)^{-1}(A_3 + A_4)\Lambda$. Тогда из (3.5) для $\bar{y}_{1,\Lambda}(\vartheta)$ получаем

$$\bar{y}_{1,\Lambda}(\vartheta) = -(B_3)^{-1}B_4(B_3)^{-1}(A_3 + A_4)\Lambda - B_3^{-1}(A_3 + A_4)\Lambda.$$

Далее, для $\bar{y}_{2,\Lambda}(\vartheta)$

$$\begin{aligned} \bar{y}_{2,\Lambda}(\vartheta) = &-((B_3)^{-1}B_4)^2(B_3)^{-1}(A_3 + A_4)\Lambda \\ &+ (B_3)^{-1}B_4(B_3)^{-1}(A_3 + A_4)\Lambda - (B_3)^{-1}(A_3 + A_4)\Lambda, \end{aligned}$$

и т. д. Наконец, для $\bar{y}_{n,\Lambda}(\vartheta)$

$$\begin{aligned} \bar{y}_{n,\Lambda}(\vartheta) = &(-1)^{n+1}((B_3)^{-1}B_4)^n(B_3)^{-1}(A_3 + A_4)\Lambda \\ &+ (-1)^n((B_3)^{-1}B_4)^{n-1}(B_3)^{-1}(A_3 + A_4)\Lambda + \cdots - (B_3)^{-1}(A_3 + A_4)\Lambda. \end{aligned}$$

Отсюда ввиду сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}((B_3)^{-1}B_4)^n$ получаем предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty}\bar{y}_{n,\Lambda}(\vartheta) = -[(B_3)^{-1}B_4 + E]^{-1}(B_3)^{-1}(A_3 + A_4)\Lambda = [B_4 + B_3]^{-1}(A_3 + A_4)\Lambda. \tag{3.7}$$

Таким образом,

$$y(\vartheta) = \bar{y}_0(\vartheta) + [B_3 + B_4]^{-1}(A_3 + A_4)\Lambda + \hat{y}(\vartheta), \quad \lim_{\vartheta\to\infty}\hat{y}(\vartheta) = 0,$$

т. е. $\hat{y}(\vartheta)$ — исчезающая вектор-функция. Далее, полагаем $x(\vartheta) = \Lambda + \hat{x}(\vartheta)$. Покажем, что при некоторых предположениях относительно вектора $\Lambda$ справедливо предельное равенство $\lim\limits_{\vartheta\to\infty}\hat{x}(\vartheta) = 0$. Подставим данные выражения в исходную систему (1.1) и рассмотрим первую из получившихся неоднородных подсистем:

$$\begin{aligned} d\hat{x}(\vartheta)/d\vartheta = \frac{1}{\vartheta}\{&A_1\hat{x}(\vartheta) + A_2\hat{x}(\mu\vartheta) + B_1\hat{y}(\vartheta) + B_2\hat{y}(\mu\vartheta) + (A_1 + A_2)\Lambda \\ &+ B_1\bar{y}_0(\vartheta) + B_2\bar{y}_0(\mu\vartheta) + \hat{f}_1(\vartheta) - (B_1 + B_2)[B_3 + B_4]^{-1}\Lambda\}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Известно [7], что почти периодическая функция может быть равномерно приближена тригонометрическим полиномом на всей оси. Пусть, например,

$$\hat{f}_1(\vartheta) \approx \sum_{j=1}^{N_1} \hat{\gamma}_j^1 e^{i\omega_j^1 \vartheta}, \quad i = \sqrt{-1},\ \omega_j = \mathrm{const},\ \omega_1^1 < \omega_2^1 < \dots < \omega_{N_1}^1, \tag{3.9}$$

$N_1$ — достаточно большое натуральное число, $\gamma_j^1$ — $m$-мерные постоянные.

Рассмотрим, например, поведение частного решения системы (3.8), обусловленного величиной $e^{i\omega_j\vartheta}$, $\omega_j^1 \neq 0$. Вновь перейдем к системе, подобной (2.1). Покажем, что матрица $(A_1 + A_2)^{-1}$ существует. Для этого, рассмотрев подсистему (2.12) и воспользовавшись формулой Лагранжа [4], получаем асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} x_n(t) = x_{n+1}(t-\tau) &= x_{n+1}(t) - \tau x_n'(\eta_n) \\ &= x_{n+1}(t) + \mathbf{O}(\varepsilon_n)[\|x_n\|_\tau + \|y_{n+1}\|_\tau + \|y_n\|_\tau], \quad \eta_n \in (0,\tau). \end{aligned}$$

Таким образом, для достаточно малого $\varepsilon_n$ и $n > 1$ в формуле (2.6) $U(t) \approx \exp\{(A_1 + A_2)t\}$, и ввиду экспоненциальной оценки (2.8) матрица $[A_1 + A_2]^{-1}$ существует. Следовательно, в силу того, что система (1.8) устойчива по первому приближению [6], $x(t-\tau) \approx x(t)$.

Рассмотрим интеграл

$$I_{\omega_j^1}(t) = \int_{t_0}^{t} \exp((A_1 + A_2)(t-s))\hat{\gamma}_j^1 \exp(e^{i\omega_j^1 s})\, ds, \quad \omega_j^1 = \mathrm{const},\ \omega_j^1 \neq 0$$

(он представляет собой частное решение подсистемы первого приближения, соответствующей первой подсистеме в (1.2) при $f_1(t) = \gamma_j^1 \exp(e^{i\omega_j^1 t})$). Интегрируя его по частям, получаем равенство

$$\begin{aligned} I_{\omega_j^1}(t) &= e^{-t}\frac{\hat{\gamma}_j^1}{\omega_j^1}\exp\bigl(i\omega_j^1 e^t\bigr) - \exp(A_1 + A_2)\frac{\hat{\gamma}_j^1}{\omega_j^1}\exp\left(i\omega_j^1\right) \\ &\quad + \int_0^t (A_1 + A_2)\exp((A_1 + A_2)(t-s))e^{-s}\frac{\hat{\gamma}_j^1}{\omega_j^1}\exp\left(i\omega_j^1 e^s\right) ds \\ &\quad + \int_0^t \exp((A_1 + A_2)(t-s))e^{-s}\frac{\hat{\gamma}_j^1}{\omega_j^1}\exp\left(i\omega_j^1 e^s\right) ds. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Рассмотрим интегралы в правой части равенства (3.10). Например, для первого из них имеем оценку (считаем, что $\gamma_1^1 \neq 1$)

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t (A_1 + A_2)\exp\{(A_1 + A_2)(t-s)\}e^{-s}\frac{\hat{\gamma}_j^1}{\omega_j^1}\exp\left(i\omega_j^1 e^s\right) ds \right\| \\ &\qquad \le \int_0^t \|A_1 + A_2)\| M_1 \exp\{-\gamma_1(t-s)\}e^{-s}\left\|\frac{\hat{\gamma}_j^1}{\omega_j^1}\right\| ds \\ &\qquad = \frac{M_1}{\gamma_1 - 1}\|A_1 + A_2\|\left\|\frac{\hat{\gamma}_j^1}{\omega_j^1}\right\|(e^{-t} - e^{-\gamma_1 t}). \end{aligned}$$

Отсюда данный интеграл имеет оценку $\mathbf{O}(e^{-\bar\beta(t-t_0)})$, $\bar\beta = \min\{1,\gamma_1\} - \varepsilon$; $\bar\beta > 0$. Аналогичную оценку можно доказать и для второго интеграла в правой части (3.10). Тем самым имеем окончательную оценку

$$I_{\omega_j^1}(t) = \mathbf{O}(e^{-\bar\beta(t-t_0)}), \quad \bar\beta = \min\{1,\gamma_1\} - \varepsilon,\ \bar\beta > 0. \tag{3.11}$$

Положим $\omega_1^1 = 0$. По аналогии с равенством (3.6) ищем почти периодическое решение в виде

$$\bar x(\vartheta) = \int\limits_{-\infty}^{\vartheta} \exp\{(A_1 + A_2)(t-s)\}\gamma_1^1\, ds = -(A_1 + A_2)^{-1}\gamma_1^1.$$

Тогда частное решение (3.7), обусловленное почти периодической вектор-функцией $\hat f_1(\vartheta)$ при $\omega_1 = 0$, имеет при $t \to \infty$ асимптотическое представление

$$\bar x_{\hat f_1(t)}(t) = -(A_1 + A_2)^{-1}\gamma_1^1 + \mathbf{O}(e^{-\bar\beta(t-t_0)}), \quad \bar\beta = \min\{1,\gamma_1\} - \varepsilon,\ \bar\beta > 0. \tag{3.12}$$

Пусть

$$\bar y_0(\vartheta) \approx \sum_{j=1}^{N_2} \hat\gamma_j^2 e^{i\omega_j^2\vartheta}, \quad i = \sqrt{-1},\ \omega_j^2 = \mathrm{const},\ 0 = \omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots < \omega_{N_2}^2 \tag{3.13}$$

($N_2$ — достаточно большое натуральное число, $\gamma_j^2$ — $m$-мерные постоянные). Методами, аналогичными только что приведенным, можно получить оценку и для частного решения (3.7), обусловленного почти периодической вектор-функцией $\bar y_0(\vartheta)$, именно при $0 = \omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots < \omega_{N-2}^2$ справедливо асимптотическое представление

$$\bar x(t)_{\bar y_0(\vartheta)} = -(A_1 + A_2)^{-1}(B_1 + B_2)\gamma_1^2 + \mathbf{O}(e^{-\bar\beta(t-t_0)}), \quad \bar\beta = \min\{1,\gamma_1\} - \varepsilon,\ \bar\beta > 0. \tag{3.14}$$

Наконец, частное решение, обусловленное постоянной величиной $(A_1 + A_2)\Lambda$, имеет вид

$$\bar x(t)_{(A_1+A_2)\Lambda} = \Lambda + \mathbf{O}(e^{-(t-t_0)}). \tag{3.15}$$

Принимая во внимание оценки (3.11), (3.14) и (3.15), покажем, что справедлива

**Теорема 3.** *Пусть постоянный $m$-вектор $\Lambda$ удовлетворят векторному уравнению*

$$(A_1 + A_2)\Lambda - (B_1 + B_2)(B_3 + B_4)^{-1}\Lambda - (A_1 + A_2)^{-1}\big(\gamma_1^1 + (B_1 + B_2)(B_3 + B_4)^{-1}\gamma_1^2\big) = 0 \tag{3.16}$$

*при условии, что хотя бы одна из величин $\gamma_1^1$, $\gamma_1^2$ не равна нулевому вектору размерности $m$ и при этом*

$$\det\{E - (A_1 + A_2)^{-1}(B_1 + B_2)(B_3 + B_4)^{-1}\} \neq 0. \tag{3.17}$$

*Тогда существует (частное) почти периодическое решение, имеющее вид* (3.4), *которое может быть найдено из теоремы 2 и линейного векторного уравнения* (3.16). *Данное решение асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Построение данного почти периодического решения изложено выше. Для доказательства асимптотической устойчивости данного решения рассмотрим поведение частного решения, обусловленного постоянной величиной $(B_3 + B_4)^{-1}(A_3 + A_4)\Lambda$. Очевидно, для данного частного решения справедлива асимптотическая оценка, подобная (3.15). Тогда, учитывая (3.11) и (3.13), из следствия теоремы 1 и экспоненциальной устойчивости неоднородной системы

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A_1\hat{x}(t) + A_2\hat{x}(t-\tau) + B_1\hat{y}(t) + B_2\hat{y}(t-\tau) + P_1(t),$$

$$\frac{d\hat{y}(t)}{dt} = \vartheta_0 e^t[A_3\hat{x}(t) + A_4\hat{x}(t-\tau) + B_3\hat{y}(t) + B_4\hat{y}(t-\tau)] + P_2(t),$$

где $P_k(t)$ — исчезающие вектор-функции, $k = 1, 2$, получаем асимптотическую устойчивость почти периодического решения (3.4). Теорема 3 доказана.

## *ЛИТЕРАТУРА*


**1.** *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.

**2.** *Гребенщиков Б. Г., Новиков С. И.* О неустойчивости системы с линейным запаздыванием, приводимой к сингулярно возмущенной системе // Изв. вузов. Математика. 2010. № 2. С. 3–13.

**3.** *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

**4.** *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Вища школа, 1971.

**5.** *Гребенщиков Б. Г.* О существовании асимптотически периодического решения одной системы с запаздыванием // Изв. УрГУ. Математика и механика. 2002. Т. 26, № 5. С. 44–54.

**6.** *Гребенщиков Б. Г.* К вопросу об асимптотической устойчивости одной нестационарной системы с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 2013. № 8. С. 24–33.

**7.** *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

**8.** *Геращенко Е. И., Геращенко С. М.* Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем. М.: Наука, 1975.

**9.** *Гребенщиков Б. Г., Рожков В. И.* Почти периодические решения одной квазилинейной системы с линейным запаздыванием // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 4. С. 768–773.


*Статья поступила 14 апреля 2015 г.*

Гребенщиков Борис Георгиевич
Уральский федеральный университет, энергетический институт,
кафедра прикладной математики,
ул. Мира, 19, Екатеринбург 620002
ABLozhnikov@yandex.ru