Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2016. Том 57, № 5

УДК 517.51

ОГРАНИЧЕННОСТЬ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА КОНУСЕ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

В. Д. Степанов, Г. Э. Шамбилова

Аннотация. Изучена задача о характеризации весовых неравенств на конусах Лебега монотонных функций на полуоси для одного класса квазилинейных интегральных операторов.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.519

Ключевые слова: неравенство Харди, весовое пространство Лебега, квазилинейный интегральный оператор.

§ 1. Введение

Обозначим через $\mathfrak{M}^+$ множество всех неотрицательных измеримых по Лебегу функций на $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ и через $\mathfrak{M}^\downarrow \subset \mathfrak{M}^+$ — подмножество всех невозрастающих функций.

При $v \in \mathfrak{M}^+$ и $0 < p \leq \infty$ определим

$$L_v^p := \left\{ f \in \mathfrak{M} : \|f\|_{L_v^p} := \left(\int_0^\infty |f(x)|^p v(x)\, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

$$L_v^\infty := \{ f \in \mathfrak{M} : \|f\|_{L_v^\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{x \geq 0} v(x)|f(x)| < \infty \}.$$

Пусть $u, v, w, \rho \in \mathfrak{M}^+$, $0 < p, r, q \leq \infty$. В работе изучается задача о характеризации неравенства

$$\|Rf\|_{L_\rho^r} \leq C\|f\|_{L_v^p}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \tag{1}$$

где константа C не зависит от f и полагается выбранной наименьшей из возможных. В качестве R рассматриваются квазилинейные интегральные операторы вида

$$Tf(x) := \left(\int_x^\infty k_1(y, x) w(y) \left(\int_0^y k_2(y, z) f(z) u(z)\, dz \right)^q dy \right)^{\frac{1}{q}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \tag{2}$$

$$\mathscr{T} f(x) := \left(\int_0^x k_1(x, y) w(y) \left(\int_y^\infty k_2(z, y) f(z) u(z)\, dz \right)^q dy \right)^{\frac{1}{q}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \tag{3}$$

Работа выполнена в Российском университете дружбы народов при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 16–41–02004).

© 2016 Степанов В. Д., Шамбилова Г. Э.

$$Sf(x) := \left(\int\limits_x^\infty k_1(y,x)w(y) \left(\int\limits_y^\infty k_2(z,y)f(z)u(z)\,dz \right)^q dy \right)^{\frac{1}{q}}, \quad f \in \mathfrak{M}^{\downarrow}, \tag{4}$$

$$\mathscr{S}f(x) := \left(\int\limits_0^x k_1(x,y)w(y) \left(\int\limits_0^y k_2(y,z)f(z)u(z)\,dz \right)^q dy \right)^{\frac{1}{q}}, \quad f \in \mathfrak{M}^{\downarrow}, \tag{5}$$

где ядра $k_i(x,y) \geq 0$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условию Ойнарова [1]:

$$k_i(x,y) \approx k_i(x,z) + k_i(z,y), \quad 0 \leq y \leq z \leq x, \ i = 1, 2. \tag{6}$$

Эта задача появилась в связи с необходимостью исследовать весовые интегральные неравенства на конусах монотонных и квазивогнутых функций, которые возникают при изучении классических операторов в весовых пространствах Лебега и Лоренца (см., например, [2–12]). Недавно она была решена при $k_1(x,y) = k_2(x,y) = 1$, $0 \leq y \leq x$ (см. [13]), методом редукции (об этом методе см., например, [14–17]) к весовым неравенствам аналогичного вида на конусах неотрицательных функций. Последние интенсивно изучаются [18–24] и нашли различные применения [25–27]. В частности, результаты из [20] существенно использовались в [13]. Однако для характеризации неравенства (1) с двухядерными операторами (2)–(5) потребовалась более сложная техника из [23, 24]. Как и в [13], основные результаты имеют редукционный вид, т. е. неравенство (1) для каждого из операторов (2)–(5) сводится к выполнению аналогичных неравенств на конусе неотрицательных функций, критерии для которых известны. В отличие от [13, предложения 1–3] здесь мы не приводим примера точного выполнения этих критериев, чтобы не загромождать работу техническими деталями, но указываем источники, по которым их можно восстановить. Однако приводим схему и некоторые детали доказательства предельных случаев параметров суммирования, которые не были акцентированы в [13], поскольку, например, случай $q = \infty$ так называемых супремальных операторов имеет важные приложения (см., например, [28] и библиографию там же).

В § 2 получен критерий выполнения неравенства (1) с оператором T, в § 3 — с оператором S, а в § 4 сформулированы результаты для операторов (3) и (5).

Всюду в работе произведения вида $0 \cdot \infty$ полагаются равными 0. Соотношение $A \lesssim B$ означает $A \leq cB$ с константой c, зависящей только от p, q и r; $A \approx B$ равносильно $A \lesssim B \lesssim A$. $\mathbb{Z}$ обозначает множество всех целых чисел, χ_E — характеристическую функцию (индикатор) множества $E \subset (0, \infty)$. Используем значки $:=$ и $=:$ для определения новых величин. Если $1 \leq p \leq \infty$, то $p' := \frac{p}{p-1}$ при $1 < p < \infty$, $p' := \infty$ при $p = 1$ и $p' := 1$ при $p = \infty$.

§ 2. Оператор T

Положим

$$V(t) := \int\limits_0^t v, \quad U(t) := \int\limits_0^t u, \quad W(t) := \int\limits_t^\infty w, \quad 0 < t < \infty.$$

Будем считать для простоты, что $0 < \int\limits_0^x \rho < \infty$, $0 < \int\limits_x^\infty w < \infty$ при любом $x > 0$ и

$\int\limits_0^\infty \rho = \infty$, $\int\limits_0^\infty w = \infty$. Определим последовательность $\{a_n\} \subset (0;\infty)$ из уравнений

$$\int\limits_0^{a_n} \rho = 2^n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Пусть функции $\sigma : [0;\infty) \to [0;\infty)$ и $\sigma^{-1} : [0;\infty) \to [0;\infty)$ задаются формулами (здесь $\inf \varnothing = \infty$)

$$\sigma(x) := \inf\left\{ y > 0 : \int\limits_0^y \rho \geq 2 \int\limits_0^x \rho \right\}, \ \sigma^{-1}(x) := \inf\left\{ y > 0 : \int\limits_0^y \rho \geq \frac{1}{2} \int\limits_0^x \rho \right\}, \ x \geq 0. \tag{8}$$

Тогда σ и σ^{-1} — возрастающие функции, причем $\int\limits_0^{\sigma(x)} \rho = 2 \int\limits_0^x \rho$, $\int\limits_0^{\sigma^{-1}(x)} \rho = \frac{1}{2} \int\limits_0^x \rho$. В частности, $\sigma(a_n) = a_{n+1}$, $a_n = \sigma^{-1}(a_{n+1})$.

Для $0 < c < d \leq \infty$, $0 < t < \infty$, $h \in \mathfrak{M}^+$ положим

$$\mathscr{T}_t h(x) := \chi_{[t,\infty)}(x) \left(\int\limits_0^x k_2(x,s) u(s) \left(\int\limits_s^\infty h \right)^{\frac{1}{p}} ds \right)^p, \tag{9}$$

$$\mathscr{T}_{[c,d]} h(x) := \chi_{[c,d]}(x) \left(\int\limits_{\sigma^{-1}(c)}^x k_2(x,s) u(s) \left(\int\limits_s^d h \right)^{\frac{1}{p}} ds \right)^p, \tag{10}$$

$$\|\mathscr{T}_t\|_{L^p_v \to L^q_w} := \sup_{0 \neq h \in \mathfrak{M}^+} \frac{\left(\int\limits_0^\infty [\mathscr{T}_t h]^q w \right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int\limits_0^\infty [h]^p v \right)^{\frac{1}{p}}} \tag{11}$$

и аналогично для $\|\mathscr{T}_{[c,d]}\|_{L^p_v \to L^q_w}$.

Теорема 1. *Пусть $0 < q < \infty$, $0 < p < \infty$, $0 < r < \infty$. Тогда для наилучшей константы C_T в неравенстве*

$$\left(\int\limits_0^\infty [Tf(x)]^r \rho(x)\, dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq C_T \left(\int\limits_0^\infty [f(x)]^p v(x)\, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \tag{12}$$

выполняется оценка

$$C_T \approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + B,$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — наилучшие константы в следующих неравенствах:

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x) \left(\int\limits_x^\infty k_1(y,x) k_2(y,x)^q w(y)\, dy \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_0^x \left(\int\limits_s^\infty h \right)^{\frac{1}{p}} u(s)\, ds \right)^r dx \right)^{\frac{p}{r}} \leq A_1^p \int\limits_0^\infty hV, \tag{13}$$

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x) \left(\int\limits_x^\infty k_1(y,x) w(y)\, dy \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_0^x k_2(x,s) \left(\int\limits_s^\infty h \right)^{\frac{1}{p}} u(s)\, ds \right)^r dx \right)^{\frac{p}{r}} \leq A_2^p \int\limits_0^\infty hV, \tag{14}$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left(\int_x^\infty k_1(y,x)w(y)\left(\int_0^y k_2(y,s)u(s)\,ds\right)^q\left(\int_y^\infty h\right)^{\frac{q}{p}} dy\right)^{\frac{r}{q}} dx\right)^{\frac{p}{r}} \le A_3^p\int_0^\infty hV, \tag{15}$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)k_1(\sigma^2(x),x)^{\frac{r}{q}}\left[\int_{\sigma^2(x)}^\infty w(y)\left(\int_0^y k_2(y,s)u(s)\left(\int_s^\infty h\right)^{\frac{1}{p}}\right)^q dy\right]^{\frac{r}{q}} dx\right)^{\frac{p}{r}} \le A_4^p\int_0^\infty hV \tag{16}$$

при $h\in\mathfrak{M}^+$, а константа B имеет вид

$$B := \begin{cases} \sup\limits_{t>0}\left(\int_0^t\rho\right)^{\frac{1}{r}}\|\mathscr{T}_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1_V\to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot,t)w(\cdot)}}, & p\le r,\\ \left(\int_0^\infty\rho(x)\left[\left(\int_0^x\rho\right)\|\mathscr{T}_{[\sigma^{-1}(x),\sigma^2(x)]}\|_{L^1_V\to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot,\sigma^{-1}(x))w(\cdot)}}\right]^{\frac{s}{p}} dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r<p, \end{cases}$$

где $\frac{1}{s} := \frac{1}{r}-\frac{1}{p}$.

Доказательство. Замена $f^p\to f$ в неравенстве (12) приведет к неравенству

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left(\int_x^\infty k_1(y,x)w(y)\left(\int_0^y k_2(y,s)f^{\frac{1}{p}}(s)u(s)\,ds\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}} dx\right)^{\frac{p}{r}} \le C_T^p\int_0^\infty fv.$$

Используя предложение 2.1 из [17] и теорему о монотонной сходимости, получим эквивалентное неравенство

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left(\int_x^\infty k_1(y,x)w(y)\left(\int_0^y k_2(y,s)u(s)\left(\int_s^\infty h\right)^{\frac{1}{p}} ds\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}} dx\right)^{\frac{p}{r}} \le C_T^p\int_0^\infty hV \tag{17}$$

при $h\in\mathfrak{M}^+$.

Оценка сверху. В дальнейшем будем пользоваться известным соотношением (см., например, [8, предложение 2.1])

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}2^n\Big(\sum_{i\ge n}a_i\Big)^s \approx \sum_{n\in\mathbb{Z}}2^n a_n^s, \tag{18}$$

верным для любых последовательностей неотрицательных чисел и любого $s>0$. Обозначим

$$\mathfrak{T}_p h(y) := \left(\int_0^y k_2(y,s)u(s)\left(\int_s^\infty h\right)^{\frac{1}{p}} ds\right)^p.$$

Имеем

$$J := \sum_n\int_{a_n}^{a_{n+1}}\rho(x)\left(\int_x^\infty k_1(y,x)w(y)(\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{q}{p}}dy\right)^{\frac{r}{q}}dx$$

$$\ll \sum_n 2^n\left(\int_{a_n}^\infty k_1(y,a_n)w(y)(\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{q}{p}}dy\right)^{\frac{r}{q}}$$

$$\approx \sum_n 2^n \left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+2}} k_1(y,a_n) w(y) (\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$+ \sum_n 2^n \left(\int\limits_{a_{n+2}}^{\infty} k_1(y,a_n) w(y) (\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{r}{q}} =: J_1 + J_2,$$

$$J_1 \approx \sum_n 2^n \left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+2}} k_1(y,a_n) w(y) \left(\int\limits_0^{a_{n-1}} k_2(y,s) u(s) \left(\int\limits_s^{\infty} h \right)^{\frac{1}{p}} ds \right)^q dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$+ \sum_n 2^n \left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+2}} k_1(y,a_n) w(y) \left(\int\limits_{a_{n-1}}^{y} k_2(y,s) u(s) \left(\int\limits_s^{\infty} h \right)^{\frac{1}{p}} ds \right)^q dy \right)^{\frac{r}{q}} =: J_{1,1} + J_{1,2}.$$

Далее, учитывая, что $k_2(y,s) \approx k_2(y,x) + k_2(x,s)$ при $s \le x \le y$, имеем

$$J_{1,1} \approx \sum_n \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} \rho(x)\,dx \left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+2}} k_1(y,a_n) w(y) \left(\int\limits_0^{a_{n-1}} k_2(y,s) u(s) \left(\int\limits_s^{\infty} h \right)^{\frac{1}{p}} ds \right)^q dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$\approx \sum_n \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} \rho(x)\,dx \left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+2}} k_1(y,a_n) k_2^q(y,x) w(y) \left(\int\limits_0^{a_{n-1}} \left(\int\limits_s^{\infty} h \right)^{\frac{1}{p}} u(s)\,ds \right)^q dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$+ \sum_n \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} \rho(x)\,dx \left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+2}} k_1(y,a_n) w(y) \left(\int\limits_0^{a_{n-1}} k_2(x,s) u(s) \left(\int\limits_s^{\infty} h \right)^{\frac{1}{p}} ds \right)^q dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$\ll \int\limits_0^{\infty} \rho(x) \left(\int\limits_x^{\infty} k_1(y,x) k_2^q(y,x) w(y)\,dy \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_0^{x} \left(\int\limits_s^{\infty} h \right)^{\frac{1}{p}} u(s)\,ds \right)^r dx$$

$$+ \int\limits_0^{\infty} \rho(x) \left(\int\limits_x^{\infty} k_1(y,x) w(y)\,dy \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_0^{x} k_2(x,s) u(s) \left(\int\limits_s^{\infty} h \right)^{\frac{1}{p}} ds \right)^r dx$$

$$\ll \left(A_1^r + A_2^r \right) \|h\|_{L_V^1}^{\frac{r}{p}}. \quad (19)$$

Запишем

$$J_{1,2} \approx \sum_n 2^n \left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+2}} k_1(y,a_n) w(y) \left(\int\limits_{a_{n-1}}^{y} k_2(y,s) u(s) \left(\int\limits_s^{a_{n+2}} h \right)^{\frac{1}{p}} ds \right)^q dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$+ \sum_n 2^n \left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+2}} k_1(y,a_n) w(y) \left(\int\limits_{a_{n-1}}^{y} k_2(y,s) u(s) \left(\int\limits_{a_{n+2}}^{\infty} h \right)^{\frac{1}{p}} ds \right)^q dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$=: J_{1,2,1} + J_{1,2,2}.$$

Имеем

$$J_{1,2,2} \approx \sum_n \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} \rho(x) \left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+2}} k_1(y,a_n) w(y) \left(\int\limits_{a_{n-1}}^{y} k_2(y,s) u(s)\, ds \right)^q \left(\int\limits_{a_{n+2}}^{\infty} h \right)^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$\leq \int\limits_0^\infty \rho(x) \left(\int\limits_x^\infty k_1(y,x) w(y) \left(\int\limits_0^y k_2(y,s) u(s)\, ds \right)^q \left(\int\limits_y^\infty h \right)^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{r}{q}} dx \leq A_3^r \|h\|_{L_V^1}^{\frac{r}{p}}. \tag{20}$$

Далее, используя обозначения (9) и (10), запишем

$$J_{1,2,1} = \sum_n 2^n \left[\left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+2}} k_1(y,a_n) w(y) (\mathscr{T}_{[a_n,a_{n+2}]} h(y))^{\frac{q}{p}}\, dy \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{r}{p}}$$

$$\leq \sum_n 2^n \|\mathscr{T}_{[a_n,a_{n+2}]}\|^{\frac{r}{p}}_{L_V^1[a_{n-1},a_{n+2}] \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot,a_n)w(\cdot)}[a_n,a_{n+2}]} \left(\int\limits_{a_{n-1}}^{a_{n+2}} hV \right)^{\frac{r}{p}}.$$

При $p \leq r$, применяя неравенство Йенсена, получим

$$J_{1,2,1} \leq \sup_n \left(\int\limits_0^{a_{n-1}} \rho \right) \|\mathscr{T}_{[a_n,a_{n+2}]}\|^{\frac{r}{p}}_{L_V^1 \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot,a_n)w(\cdot)}} \left(\int\limits_0^\infty hV \right)^{\frac{r}{p}}$$

$$\leq \sup_{t>0} \left(\int\limits_0^t \rho \right) \|\mathscr{T}_t\|^{\frac{r}{p}}_{L_V^1 \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot,t)w(\cdot)}} \left(\int\limits_0^\infty hV \right)^{\frac{r}{p}}.$$

Следовательно,

$$J_{1,2,1}^{\frac{p}{r}} \leq B^p \int\limits_0^\infty hV. \tag{21}$$

При $r < p$, учитывая неравенство Гёльдера $\left(\frac{1}{s} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)$, имеем

$$J_{1,2,1} \leq \left(\sum_n 2^{\frac{ns}{r}} \|\mathscr{T}_{[a_n,a_{n+2}]}\|^{\frac{s}{p}}_{L_V^1 \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot,a_n)w(\cdot)}} \right)^{\frac{r}{s}} \left(\int\limits_0^\infty hV \right)^{\frac{r}{p}},$$

так как

$$\sum_n 2^{\frac{ns}{r}} \|\mathscr{T}_{[a_n,a_{n+2}]}\|^{\frac{s}{p}}_{L_V^1 \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot,a_n)w(\cdot)}}$$

$$\approx \sum_n \left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} \rho \right) \left(\int\limits_0^{a_n} \rho \right)^{\frac{s}{p}} \|\mathscr{T}_{[\sigma^{-1}(a_{n+1}),\sigma^2(a_n)]}\|^{\frac{s}{p}}_{L_V^1 \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot,\sigma^{-1}(a_{n+1}))w(\cdot)}}$$

$$\leq \sum_n \int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} \rho(x) \left[\left(\int\limits_0^x \rho \right) \|\mathscr{T}_{[\sigma^{-1}(x),\sigma^2(x)]}\|_{L_V^1 \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot,\sigma^{-1}(x))w(\cdot)}} \right]^{\frac{s}{p}} dx$$

$$= \int\limits_0^\infty \rho(x) \left[\left(\int\limits_0^x \rho \right) \|\mathscr{T}_{[\sigma^{-1}(x),\sigma^2(x)]}\|_{L_V^1 \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot,\sigma^{-1}(x))w(\cdot)}} \right]^{\frac{s}{p}} dx = B^s.$$

Поэтому
$$J_{1,2,1}^{\frac{p}{r}} \le B^p \int_0^\infty hV. \tag{22}$$
Рассмотрим
$$\begin{aligned}
J_2 = \sum_n 2^n \left(\int_{a_{n+2}}^{\infty} k_1(y,a_n) w(y) (\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{r}{q}} \\
= \sum_n 2^n \left(\sum_{i\ge n} \int_{a_{i+2}}^{a_{i+3}} k_1(y,a_n) w(y) (\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{r}{q}} \\
\approx \sum_n 2^n \left(\sum_{i\ge n} \int_{a_{i+2}}^{a_{i+3}} k_1(y,a_{i+1}) w(y) (\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{r}{q}} \\
+ \sum_n 2^n \left(\sum_{i\ge n} \int_{a_{i+2}}^{a_{i+3}} k_1(a_{i+1},a_n) w(y) (\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{r}{q}} =: J_{2,1} + J_{2,2}.
\end{aligned}$$
Применяя соотношение (18), получим
$$\begin{aligned}
J_{2,1} \le \sum_n 2^n \left(\int_{a_{n+1}}^{a_{n+3}} k_1(y,a_{n+1}) w(y) (\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{r}{q}} \approx J_1 \\
\le \left(A_1^r + A_2^r + A_3^r + B^r \right) \|h\|_{L_V^1}^{\frac{r}{p}}.
\end{aligned} \tag{23}$$
Для оценки $J_{2,2}$, используя неравенство (см. [17, лемма 3.1])
$$k_1(a_{i+1},a_n) \ll \left(\sum_{j=n}^{i} k_1(a_{j+1},a_j)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha \in (0,1), \tag{24}$$
и неравенство Минковского, получим
$$\begin{aligned}
J_{2,2} = \sum_n 2^n \left(\sum_{i\ge n} k_1(a_{i+1},a_n) \int_{a_{i+2}}^{a_{i+3}} w(y) (\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{r}{q}} \\
\ll \sum_n 2^n \left(\sum_{i\ge n} \left(\sum_{j=n}^{i} k_1(a_{j+1},a_j)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \int_{a_{i+2}}^{a_{i+3}} w(y) (\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{r}{q}} \\
\le \sum_n 2^n \left(\sum_{j\ge n} k_1(a_{j+1},a_j)^\alpha \left(\sum_{i\ge j} \int_{a_{i+2}}^{a_{i+3}} w(y) (\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\alpha} \right)^{\frac{r}{\alpha q}} \\
= \sum_n 2^n \left(\sum_{j\ge n} k_1(a_{j+1},a_j)^\alpha \left(\int_{a_{j+2}}^{\infty} w(y) (\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\alpha} \right)^{\frac{r}{\alpha q}} \\
\overset{(18)}{\approx} \sum_n 2^n \left(k_1(a_{n+1},a_n) \left(\int_{a_{n+2}}^{\infty} w(y) (\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{q}{p}} dy \right) \right)^{\frac{r}{q}}
\end{aligned}$$

$$\approx \sum_n \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} \rho(x) k_1(a_{n+1}, a_n)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_{a_{n+2}}^{\infty} w(y) (\mathfrak{T}_p h(y)^{\frac{q}{p}}\, dy) \right)^{\frac{r}{q}} dx$$

$$\le \sum_n \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} \rho(x) k_1(\sigma^2(x), x)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_{\sigma^2(x)}^{\infty} w(y) (\mathfrak{T}_p h(y)^{\frac{q}{p}}\, dy) \right)^{\frac{r}{q}} dx$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \rho(x) k_1(\sigma^2(x), x)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_{\sigma^2(x)}^{\infty} w(y) (\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{q}{p}}\, dy \right)^{\frac{r}{q}} dx \le A_4^r \|h\|_{L^1_V}^{\frac{r}{p}}. \quad (25)$$

Из (19)–(25) следует, что оценка сверху $C_T \ll A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + B$ доказана.

Оценка снизу. В неравенстве (17) сузим области интегрирования:

(1) $[0, y] \to [0, x]$ и получим $C_T \ge A_1 + A_2$ (учитывая, что $k_2(y, s) \approx k_2(x, s) + k_2(y, x)$ при $0 < s \le x \le y$);

(2) $[s, \infty) \to [y, \infty)$ и получим $C_T \ge A_3$;

(3) $[x, \infty) \to [\sigma^2(x), \infty)$ и получим $C_T \ge A_4$ (учитывая, что $k_1(y, x) \gtrsim k_1(\sigma^2(x), x)$ при $x < \sigma^2(x) \le y$).

Из неравенства (17) при $h \in \mathfrak{M}^+$ вытекает, что

$$\left(\int\limits_0^t \rho \right)^{\frac{p}{r}} \left(\int\limits_t^{\infty} k_1(y, t) w(y) \left(\int\limits_0^y k_2(y, s) u(s) \left(\int\limits_s^{\infty} h \right)^{\frac{1}{p}} ds \right)^q dy \right)^{\frac{p}{q}} \le C_T^p \int\limits_{\sigma^{-1}(t)}^{\infty} hV,$$

поэтому $C_T \gg B$ и теорема доказана при $p \le r$.

Осталось получить доказательство оценки снизу для B при $r < p$. Имеем

$$B^s = \int\limits_0^{\infty} \rho(x) \left[\left(\int\limits_0^x \rho \right) \|\mathscr{T}_{[\sigma^{-1}(x), \sigma^2(x)]}\|_{L^1_V \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot, \sigma^{-1}(x)) w(\cdot)}} \right]^{\frac{s}{p}} dx$$

$$= \sum_n \int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} \rho(x) \left[\left(\int\limits_0^x \rho \right) \|\mathscr{T}_{[\sigma^{-1}(x), \sigma^2(x)]}\|_{L^1_V \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot, \sigma^{-1}(x)) w(\cdot)}} \right]^{\frac{s}{p}} dx$$

$$\le \sum_n \int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} \rho(x)\, dx \left(\int\limits_0^{a_{n+1}} \rho \right)^{\frac{s}{p}} \|\mathscr{T}_{[\sigma^{-1}(a_n), \sigma^2(a_{n+1})]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_V \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot, \sigma^{-1}(a_n)) w(\cdot)}}$$

$$\approx \sum_n 2^{\frac{ns}{r}} \|\mathscr{T}_{[a_{n-1}, a_{n+3}]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_V \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot, a_{n-1}) w(\cdot)}}.$$

Отсюда

$$B^s \ll \sum_n 2^{\frac{ns}{r}} \|\mathscr{T}_{[a_{n-1}, a_{n+3}]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_V \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot, a_{n-1}) w(\cdot)}} =: \mathscr{B}^s.$$

Пусть $\theta \in (0, 1)$ — произвольное фиксированное число, тогда для любого $n \in \mathbb{Z}$ существует функция $h_n \in L^1_V[a_{n-2}, a_{n+3}]$ такая, что $\|h_n\|_{L^1_V[a_{n-2}, a_{n+3}]} = 1$ и

$$\|\mathscr{T}_{[a_{n-1}, a_{n+3}]} h_n\|_{L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot, a_{n-1}) w(\cdot)}} \ge \theta \|\mathscr{T}_{[a_{n-1}, a_{n+3}]}\|_{L^1_V \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot, a_{n-1}) w(\cdot)}}.$$

Положим

$$g_n := 2^{\frac{ns}{r}} \|\mathscr{T}_{[a_{n-1}, a_{n+3}]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_V \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot, a_{n-1}) w(\cdot)}} h_n, \quad g := \sum g_n,$$

$$\mathbf{T}_n := \|\mathscr{T}_{[a_{n-1},a_{n+3}]}\|_{L^1_V \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot,a_{n-1})w(\cdot)}}.$$

Тогда

$$\|g\|_{L^1_V} \ll \sum_n \int\limits_{a_{n-2}}^{a_{n+3}} g_n V = \sum_n 2^{\frac{ns}{r}} \mathbf{T}_n^{\frac{s}{p}} = \mathscr{B}^s.$$

С другой стороны,

$$D := \int\limits_0^\infty \rho(x) \left(\int\limits_x^\infty k_1(y,x) w(y) (\mathfrak{T}_p g(y))^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{r}{q}} dx$$

$$\gg \sum_n \int\limits_{a_{n-2}}^{a_{n-1}} \rho(x)\, dx \left[\left(\int\limits_{a_{n-1}}^{a_{n+3}} k_1(y,a_{n-1}) w(y) (\mathfrak{T}_p g(y))^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{r}{p}}$$

$$\gg \sum_n 2^n \left[\left(\int\limits_{a_{n-1}}^{a_{n+3}} k_1(y,a_{n-1}) w(y) \left[\left(\int\limits_{a_{n-2}}^{y} k_2(y,s) u(s) \left(\int\limits_s^{a_{n+3}} g_n \right)^{\frac{1}{p}} ds \right)^p \right]^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{r}{p}}$$

$$= \sum_n 2^n \left[\left(\int\limits_{a_{n-1}}^{a_{n+3}} k_1(y,a_{n-1}) w(y) (\mathscr{T}_{[a_{n-1},a_{n+3}]} g_n)^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{r}{p}}$$

$$= \sum_n 2^n 2^{\frac{ns}{p}} \mathbf{T}_n^{\frac{sr}{p^2}} \|\mathscr{T}_{[a_{n-1},a_{n+3}]} h_n\|^{\frac{r}{p}}_{L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot,a_{n-1})w(\cdot)}} \ge \theta^{\frac{r}{p}} \sum_n 2^{\frac{ns}{r}} \mathbf{T}_n^{\frac{s}{p}} = \theta^{\frac{r}{p}} \mathscr{B}^s.$$

Из неравенства (17) имеем $\mathscr{B}^s C_T^p \gg C_T^p \|g\|_{L^1_V} \overset{(17)}{\ge} D^{\frac{p}{r}} \gg \theta \mathscr{B}^{\frac{sp}{r}}$. Следовательно, $C_T \gg \theta^{\frac{1}{p}} \mathscr{B} \ge \theta^{\frac{1}{p}} B$. Отсюда в силу произвольности $\theta \in (0,1)$ получаем, что $C_T \gg B$. $\square$

Для предельных значений параметров имеет место следующее

Замечание 1. (1) При $q = \infty$

$$C_T \approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + B,$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x) [\operatorname*{ess\,sup}_{y \ge x} k_1(y,x) k_2(y,x) w(y)]^r \left(\int\limits_0^x \left(\int\limits_s^\infty h \right)^{\frac{1}{p}} u(s)\, ds \right)^r dx \right)^{\frac{p}{r}} \le A_1^p \int\limits_0^\infty hV, \tag{26}$$

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x) [\operatorname*{ess\,sup}_{y \ge x} k_1(y,x) w(y)]^r \left(\int\limits_0^x k_2(x,s) \left(\int\limits_s^\infty h \right)^{\frac{1}{p}} u(s)\, ds \right)^r dx \right)^{\frac{p}{r}} \le A_2^p \int\limits_0^\infty hV, \tag{27}$$

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x) \left[\operatorname*{ess\,sup}_{y \ge x} k_1(y,x) w(y) \left(\int\limits_0^y k_2(y,s) u(s)\, ds \right) \left(\int\limits_y^\infty h \right)^{\frac{1}{p}} \right]^r dx \right)^{\frac{p}{r}} \le A_3^p \int\limits_0^\infty hV, \tag{28}$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)k_1(\sigma^2(x),x)^r\left[\operatorname*{ess\,sup}_{y\ge\sigma^2(x)} w(y)\left(\int_0^y k_2(y,s)u(s)\left(\int_s^\infty h\right)^{\frac1p} ds\right)\right]^r dx\right)^{\frac pr} \le A_4^p\int_0^\infty hV \tag{29}$$

при $h\in\mathfrak{M}^+$, а константа B имеет вид

$$B:=\begin{cases}\sup\limits_{t>0}\left(\int\limits_0^t\rho\right)^{\frac1r}\|\mathscr{T}_t\|^{\frac1p}_{L^1_V\to L^\infty_{k_1(\cdot,t)w(\cdot)}}, & p\le r,\\ \left(\int\limits_0^\infty\rho(x)\left[\left(\int\limits_0^x\rho\right)\|\mathscr{T}_{[\sigma^{-1}(x),\sigma^2(x)]}\|_{L^1_V\to L^\infty_{k_1(\cdot,\sigma^{-1}(x))w(\cdot)}}\right]^{\frac sp}dx\right)^{\frac1s}, & r<p.\end{cases}$$

(2) При $p=\infty$ или $r=\infty$ имеем

$$C_T=\left\|T\left(\frac1v\right)\right\|_{L^r_\rho},\quad p=\infty,$$

$$C_T\approx\sup_{t>0}R(t)\|\mathscr{T}_t\|^{\frac1p}_{L^1_V\to L^{\frac qp}_w},\quad r=\infty,$$

где $R(t):=\operatorname*{ess\,sup}\limits_{0<z<t}\rho(z)$.

Доказательство. (1) При $q=\infty$ имеем

$$J:=\sum_n\int_{a_n}^{a_{n+1}}\rho(x)[\operatorname*{ess\,sup}_{y\ge x}k_1(y,x)w(y)(\mathfrak{T}_ph(y))^{\frac1p}]^r\,dx$$
$$\ll\sum_n 2^n[\operatorname*{ess\,sup}_{y\in[a_n,a_{n+2})}k_1(y,a_n)w(y)(\mathfrak{T}_ph(y))^{\frac1p}]^r$$
$$+\sum_n 2^n[\operatorname*{ess\,sup}_{y\in[a_{n+2},\infty)}k_1(y,a_n)w(y)(\mathfrak{T}_ph(y))^{\frac1p}]^r=:J_1+J_2.$$

Аналогично теореме 1 доказывается неравенство

$$J_1\ll\big(A_1^r+A_2^r+A_3^r+B^r\big)\|h\|^{\frac rp}_{L^1_V}. \tag{30}$$

Для оценки J_2 вместо (18) воспользуемся соотношением

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}2^n(\sup_{i\ge n}a_i)^s\approx\sum_{n\in\mathbb{Z}}2^na_n^s. \tag{31}$$

Имеем

$$J_2=\sum_n 2^n[\operatorname*{ess\,sup}_{y\in[a_{n+2},\infty)}k_1(y,a_n)w(y)(\mathfrak{T}_ph(y))^{\frac1p}]^r$$
$$=\sum_n 2^n[\sup_{i\ge n}\operatorname*{ess\,sup}_{y\in[a_{i+2},a_{i+3})}k_1(y,a_n)w(y)(\mathfrak{T}_ph(y))^{\frac1p}]^r$$
$$\approx\sum_n 2^n[\sup_{i\ge n}\operatorname*{ess\,sup}_{y\in[a_{i+2},a_{i+3})}k_1(y,a_{i+1})w(y)(\mathfrak{T}_ph(y))^{\frac1p}]^r$$
$$+\sum_n 2^n[\sup_{i\ge n}\operatorname*{ess\,sup}_{y\in[a_{i+2},a_{i+3})}k_1(a_{i+1},a_n)w(y)(\mathfrak{T}_ph(y))^{\frac1p}]^r=:J_{2,1}+J_{2,2}.$$

Применяя соотношение (31) аналогично теореме 1, получим

$$J_{2,1}\le\big(A_1^r+A_2^r+A_3^r+B^r\big)\|h\|^{\frac rp}_{L^1_V}. \tag{32}$$

Для оценки $J_{2,2}$ воспользуемся неравенством Минковского и неравенством (24):

$$J_{2,2}=\sum_n 2^n[\sup_{i\ge n}\operatorname*{ess\,sup}_{y\in[a_{i+2},a_{i+3})}k_1(a_{i+1},a_n)w(y)(\mathfrak{T}_ph(y))^{\frac1p}]^r$$

$$
\begin{aligned}
&\ll \sum_n 2^n \left[\sup_{i\ge n} \left(\sum_{j=n}^{i} k_1(a_{j+1},a_j)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \operatorname*{ess\,sup}_{y\in[a_{i+2},a_{i+3})} k_1(a_{i+1},a_n) w(y) (\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{1}{p}} \right]^r \\
&\le \sum_n 2^n \Big[\sum_{j\ge n} k_1(a_{j+1},a_j)^\alpha (\sup_{i\ge j} \operatorname*{ess\,sup}_{y\in[a_{i+2},a_{i+3})} w(y)(\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{1}{p}})^\alpha \Big]^{\frac{r}{\alpha}} \\
&= \sum_n 2^n \Big[\sum_{j\ge n} k_1(a_{j+1},a_j) \operatorname*{ess\,sup}_{y\ge a_{j+2}} w(y)(\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{1}{p}} \Big]^r \\
&\overset{(18)}{\approx} \sum_n 2^n k_1(a_{n+1},a_n)^r [\operatorname*{ess\,sup}_{y\ge a_{n+2}} w(y)(\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{1}{p}}]^r \\
&\approx \sum_n \int_{a_{n-1}}^{a_n} \rho(x)\,dx k_1(a_{n+1},a_n)^r [\operatorname*{ess\,sup}_{y\ge a_{n+2}} w(y)(\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{1}{p}}]^r \\
&\le \sum_n \int_{a_{n-1}}^{a_n} \rho(x) k_1(\sigma^2(x),x)^r [\operatorname*{ess\,sup}_{y\ge \sigma^2(x)} w(y)(\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{1}{p}}]^r dx \\
&= \int_0^\infty \rho(x) k_1(\sigma^2(x),x)^r [\operatorname*{ess\,sup}_{y\ge \sigma^2(x)} w(y)(\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{1}{p}}]^r dx \le A_4^r \|h\|_{L_V^1}^{\frac{r}{p}}. \quad (33)
\end{aligned}
$$

Из (30)–(33) следует оценка сверху $C_T \ll A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + B$. Оценка снизу доказывается аналогично теореме 1. $\square$

Замечание 2. Точные двусторонние оценки наилучших констант в неравенствах (13)–(15), (26)–(28) и констант B явными интегральными функционалами находятся с помощью редукционных теорем из [20–22] и критериев ограниченности интегральных операторов типа Харди [1, 29–31]. Однако неравенства (16) и (29) содержат в левой части дополнительную итерацию, поэтому мы приводим редукционную теорему для этого случая (см. ниже лемму 1).

Пусть $\lambda, \mu, \nu, \eta \in \mathfrak{M}^+$ и ядро $k(x,y)$ удовлетворяет условию Ойнарова (6), а последовательность a_n и функция $\sigma(x)$ заданы по формулам (7) и (8) с λ вместо ρ. Для $0 < c < d \le \infty$, $0 < t, q < \infty$, $h \in \mathfrak{M}^+$ положим

$$
\mathscr{T}_t h(x) := \chi_{[t,\infty)}(x) \left(\int_0^x k(x,s)\nu(s) \left(\int_s^\infty h \right)^q ds \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{34}
$$

$$
\mathscr{T}_{[c,d]} h(x) := \chi_{[c,d]}(x) \left(\int_{\sigma^{-1}(c)}^x k(x,s)\nu(s) \left(\int_s^d h \right)^q ds \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{35}
$$

Имеет место

Лемма 1. *Пусть $0 < p, q, r < \infty$. Тогда для наилучшей константы C в неравенстве*

$$
\left(\int_0^\infty \lambda(x) \left(\int_x^\infty \mu(y) \left(\int_0^y k(y,s)\nu(s) \left(\int_s^\infty h \right)^q ds \right)^{\frac{r}{q}} dy \right)^{\frac{p}{r}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \le C \int_0^\infty h\eta, \ h \in \mathfrak{M}^+, \tag{36}
$$

выполняется оценка

$$
C \approx G_1 + G_2 + G_3 + G,
$$

где G_1, G_2, G_3 — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int_0^\infty \lambda(x)\left(\int_x^\infty \mu(y)[k(y,x)]^{\frac{r}{q}}\,dy\right)^{\frac{p}{r}}\left(\int_0^x \nu(s)\left(\int_s^\infty h\right)^q ds\right)^{\frac{p}{q}} dx\right)^{\frac{1}{p}} \le G_1\int_0^\infty h\eta,$$

$$\left(\int_0^\infty \lambda(x)\left(\int_x^\infty \mu\right)^{\frac{p}{r}}\left(\int_0^x k(x,s)\nu(s)\left(\int_s^\infty h\right)^q ds\right)^{\frac{p}{q}} dx\right)^{\frac{1}{p}} \le G_2\int_0^\infty h\eta,$$

$$\left(\int_0^\infty \lambda(x)\left(\int_x^\infty \mu(y)\left(\int_0^y k(y,s)\nu(s)\,ds\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_y^\infty h\right)^r dy\right)^{\frac{p}{r}} dx\right)^{\frac{1}{p}} \le G_3\int_0^\infty h\eta$$

при $h \in \mathfrak{M}^+$, а константа G имеет вид

$$G := \begin{cases} \sup\limits_{t>0}\left(\int_0^t \lambda\right)^{\frac{1}{p}}\|\mathscr{T}_t\|_{L^1_\eta\to L^r_\mu}, & p \ge 1,\\ \left(\int_0^\infty \lambda(x)\left[\left(\int_0^x \lambda\right)\|\mathscr{T}_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\|_{L^1_\eta\to L^r_\mu}\right]^{\frac{p}{1-p}} dx\right)^{\frac{1-p}{p}}, & 0 < p < 1.\end{cases}$$

Доказательство. Оценка сверху. Имеем

$$\begin{aligned} J^p :&= \int_0^\infty \lambda(x)\left(\int_x^\infty \mu(y)\left(\int_0^y k(y,s)\nu(s)\left(\int_s^\infty h\right)^q ds\right)^{\frac{r}{q}} dy\right)^{\frac{p}{r}} dx \\ &\approx \sum_n 2^n\left(\int_{a_n}^{a_{n+1}} \mu(y)\left(\int_0^y k(y,s)\nu(s)\left(\int_s^\infty h\right)^q ds\right)^{\frac{r}{q}} dy\right)^{\frac{p}{r}} \\ &\approx \sum_n 2^n\left(\int_{a_n}^{a_{n+1}} \mu(y)\left(\int_{a_{n-1}}^y k(y,s)\nu(s)\left(\int_s^\infty h\right)^q ds\right)^{\frac{r}{q}} dy\right)^{\frac{p}{r}} \\ &\quad+ \sum_n 2^n\left(\int_{a_n}^{a_{n+1}} \mu(y)\left(\int_0^{a_{n-1}} k(y,s)\nu(s)\left(\int_s^\infty h\right)^q ds\right)^{\frac{r}{q}} dy\right)^{\frac{p}{r}} =: J_1^p + J_2^p. \end{aligned}$$

Оценка J_2:

$$J_2^p \approx \sum_n \int_{a_{n-1}}^{a_n} \lambda(x)\,dx\left(\int_{a_n}^{a_{n+1}} \mu(y)\left(\int_0^{a_{n-1}} k(y,s)\nu(s)\left(\int_s^\infty h\right)^q ds\right)^{\frac{r}{q}} dy\right)^{\frac{p}{r}}.$$

Учитывая, что $k(y,s) \approx k(y,x) + k(x,s)$ при $s \le a_{n-1} \le x \le a_n \le y$, получим

$$\begin{aligned} J_2^p \approx \sum_n \int_{a_{n-1}}^{a_n} \lambda(x)\left(\int_{a_n}^{a_{n+1}} \mu(y)[k(y,x)]^{\frac{r}{q}}\,dy\right)^{\frac{p}{r}} dx\left(\int_0^{a_{n-1}} \nu(s)\left(\int_s^\infty h\right)^q ds\right)^{\frac{p}{q}} \\ + \sum_n \int_{a_{n-1}}^{a_n} \lambda(x)\left(\int_0^{a_{n-1}} k(x,s)\nu(s)\left(\int_s^\infty h\right)^q ds\right)^{\frac{p}{q}} dx\left(\int_{a_n}^{a_{n+1}} \mu\right)^{\frac{p}{r}} \end{aligned}$$

$$\ll \sum_n \int_{a_{n-1}}^{a_n} \lambda(x) \left(\int_x^\infty \mu(y)[k(y,x)]^{\frac{r}{q}} dy \right)^{\frac{p}{r}} \left(\int_0^x \nu(s) \left(\int_s^\infty h \right)^q ds \right)^{\frac{p}{q}} dx$$

$$+ \sum_n \int_{a_{n-1}}^{a_n} \lambda(x) \left(\int_x^\infty \mu \right)^{\frac{p}{r}} \left(\int_0^x k(x,s)\nu(s) \left(\int_s^\infty h \right)^q ds \right)^{\frac{p}{q}} dx$$

$$= \int_0^\infty \lambda(x) \left(\int_x^\infty \mu(y)[k(y,x)]^{\frac{r}{q}} dy \right)^{\frac{p}{r}} \left(\int_0^x \nu(s) \left(\int_s^\infty h \right)^q ds \right)^{\frac{p}{q}} dx$$

$$+ \int_0^\infty \lambda(x) \left(\int_x^\infty \mu \right)^{\frac{p}{r}} \left(\int_0^x k(x,s)\nu(s) \left(\int_s^\infty h \right)^q ds \right)^{\frac{p}{q}} dx \le \left(G_1^p + G_2^p \right) \left(\int_0^\infty h\eta \right)^p.$$

Оценка J_1:

$$J_1^p \approx \sum_n 2^n \left(\int_{a_n}^{a_{n+1}} \mu(y) \left(\int_{a_{n-1}}^{y} k(y,s)\nu(s)\,ds \right)^{\frac{r}{q}} dy \right)^{\frac{p}{r}} \left(\int_{a_{n+1}}^\infty h \right)^p$$

$$+ \sum_n 2^n \left(\int_{a_n}^{a_{n+1}} \mu(y) \left(\int_{a_{n-1}}^{y} k(y,s)\nu(s) \left(\int_s^{a_{n+1}} h \right)^q ds \right)^{\frac{r}{q}} dy \right)^{\frac{p}{r}} =: J_{1,1}^p + J_{1,2}^p.$$

Оценка $J_{1,1}$:

$$J_{1,1}^p \approx \sum_n \int_{a_{n-1}}^{a_n} \lambda(x)\,dx \left(\int_{a_n}^{a_{n+1}} \mu(y) \left(\int_{a_{n-1}}^{y} k(y,s)\nu(s)\,ds \right)^{\frac{r}{q}} dy \right)^{\frac{p}{r}} \left(\int_{a_{n+1}}^\infty h \right)^p$$

$$\ll \int_0^\infty \lambda(x) \left(\int_x^\infty \mu(y) \left(\int_0^y k(y,s)\nu(s)\,ds \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_y^\infty h \right)^r dy \right)^{\frac{p}{r}} \le G_3^p \left(\int_0^\infty h\eta \right)^p.$$

Оценка $J_{1,2}$. Используя обозначения (34) и (35), запишем

$$J_{1,2}^p = \sum_n 2^n \left(\int_{a_n}^{a_{n+1}} \mu(y)[\mathscr{T}_{[a_n,a_{n+1}]} h(y)]^r dy \right)^{\frac{p}{r}}$$

$$\le \sum_n 2^n \|\mathscr{T}_{[a_n,a_{n+1}]}\|^p_{L^1_\eta \to L^r_\mu} \left(\int_{a_{n-1}}^{a_{n+1}} h\eta \right)^p.$$

При $p \ge 1$, применяя неравенство Йенсена, имеем

$$J_{1,2}^p \ll \sup_n \left(\int_0^{a_n} \lambda \right) \|\mathscr{T}_{[a_n,a_{n+1}]}\|^p_{L^1_\eta \to L^r_\mu} \left(\int_0^\infty h\eta \right)^p \ll G^p \left(\int_0^\infty h\eta \right)^p.$$

При $0 < p < 1$, учитывая неравенство Гёльдера, получим

$$J_{1,2}^p \ll \left(\sum_n \left(\int_{a_n}^{a_{n+1}} \lambda(x)\,dx \right)^{\frac{1}{1-p}} \|\mathscr{T}_{[a_n,a_{n+1}]}\|^{\frac{p}{1-p}}_{L^1_\eta \to L^r_\mu} \right)^{1-p} \left(\int_0^\infty h\eta \right)^p \ll G^p \left(\int_0^\infty h\eta \right)^p.$$

Следовательно, оценка сверху $C \ll G_1 + G_2 + G_3 + G$ доказана. Для оценки снизу достаточно повторить соответствующее рассуждение из доказательства теоремы 1. $\square$

Аналогично редуцируется неравенство (29).

§ 3. Основные результаты для оператора S

Пусть

$$\tilde{u} := \frac{u}{V^{\frac{2}{p}}}, \quad \widetilde{U}(t) := \int\limits_t^\infty \tilde{u}, \quad 0 < t < \infty.$$

Для $0 < c < d \le \infty$, $0 < t < \infty$, $h \in \mathfrak{M}^+$ положим

$$T_t h(x) := \chi_{[t,\infty)}(x) \left(\int\limits_x^\infty k_2(s,x) \left(\int\limits_0^s hV \right)^{\frac{1}{p}} \tilde{u}(s)\, ds \right)^p, \tag{37}$$

$$T_{[c,d]} h(x) := \chi_{[c,d]}(x) \left(\int\limits_x^{\sigma(d)} k_2(s,x) \left(\int\limits_c^s hV \right)^{\frac{1}{p}} \tilde{u}(s)\, ds \right)^p, \tag{38}$$

$$\|T_t\|_{L^p_v \to L^q_w} := \sup_{0 \ne h \in \mathfrak{M}^+} \frac{\left(\int_0^\infty [T_t h]^q w \right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int_0^\infty [h]^p v \right)^{\frac{1}{p}}} \tag{39}$$

и аналогично для $\|T_{[c,d]}\|_{L^p_v \to L^q_w}$.

Теорема 2. *Пусть $0 < q < \infty$, $0 < p < \infty$, $0 < r < \infty$. Тогда для наилучшей константы C_S в неравенстве*

$$\left(\int\limits_0^\infty [Sf(x)]^r \rho(x)\, dx \right)^{\frac{1}{r}} \le C_S \left(\int\limits_0^\infty [f(x)]^p v(x)\, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}^{\downarrow}, \tag{40}$$

выполняется оценка

$$C_S \approx \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_3 + \mathbb{A}_4 + \mathbb{B},$$

где $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_3$, $\mathbb{A}_4$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x) \left(\int\limits_x^{\sigma^3(x)} k_1(y,x) k_2(\sigma^3(x),x)^q w(y)\, dy \right)^{\frac{r}{q}} \right.$$
$$\left. \times \left(\int\limits_{\sigma^3(x)}^\infty \left(\int\limits_0^s hV \right)^{\frac{1}{p}} \tilde{u}(s)\, ds \right)^r dx \right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbb{A}_1^p \int\limits_0^\infty h,$$

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x) \left(\int\limits_x^{\sigma^3(x)} k_1(y,x) w(y)\, dy \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_{\sigma^3(x)}^\infty k_2(s,\sigma^3(x)) \right. \right.$$
$$\left. \left. \times \left(\int\limits_0^s hV \right)^{\frac{1}{p}} \tilde{u}(s)\, ds \right)^r dx \right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbb{A}_2^p \int\limits_0^\infty h,$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left(\int_x^\infty k_1(y,x)w(y)\left(\int_y^\infty k_2(s,y)\tilde{u}(s)\,ds\right)^q \times \left(\int_0^y hV\right)^{\frac{q}{p}} dy\right)^{\frac{r}{q}} dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbb{A}_3^p \int_0^\infty h,$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)k_1(\sigma^2(x),x)^{\frac{r}{q}}\left[\int_{\sigma^2(x)}^\infty w(y)\left(\int_y^\infty k_2(s,y)\tilde{u}(s) \times \left(\int_0^s hV\right)^{\frac{1}{p}}\right)^q dy\right]^{\frac{r}{q}} dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbb{A}_4^p \int_0^\infty h$$

при $h \in \mathfrak{M}^+$, *а константа* $\mathbb{B}$ *имеет вид*

$$\mathbb{B} := \begin{cases} \sup\limits_{t>0}\left(\int_0^t \rho\right)^{\frac{1}{r}} \|T_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1\to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot,t)w(\cdot)}}, & p \le r, \\ \left(\int_0^\infty \rho(x)\left[\left(\int_0^x \rho\right)\|T_{[\sigma^{-1}(x),\sigma^2(x)]}\|_{L^1\to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot,\sigma^{-1}(x))w(\cdot)}}\right]^{\frac{s}{p}} dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r < p. \end{cases}$$

Доказательство. В отличие от теоремы 1 здесь применим теорему 3.2 из [17], тогда неравенство (40) при $h \in \mathfrak{M}^+$ эквивалентно неравенству

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty k_1(y,x)w(y)\left(\int_y^\infty k_2(s,y)\left(\int_0^s hV\right)^{\frac{1}{p}} \tilde{u}(s)\,ds\right)^q w(y)\,dy\right)^{\frac{r}{q}} \rho(x)\,dx\right)^{\frac{p}{r}} \le C_S^p \int_0^\infty h. \quad (41)$$

Оценка сверху. Обозначим

$$T_p h(y) := \left(\int_y^\infty k_2(s,y)\tilde{u}(s)\left(\int_0^s hV\right)^{\frac{1}{p}} ds\right)^p.$$

Имеем

$$I := \sum_n \int_{a_n}^{a_{n+1}} \rho(x)\left(\int_x^\infty k_1(y,x)w(y)(T_p h(y))^{\frac{q}{p}} dy\right)^{\frac{r}{q}} dx$$
$$\ll \sum_n 2^n \left(\int_{a_n}^\infty k_1(y,a_n)w(y)(T_p h(y))^{\frac{q}{p}} dy\right)^{\frac{r}{q}}$$
$$\approx \sum_n 2^n \left(\int_{a_n}^{a_{n+2}} k_1(y,a_n)w(y)(T_p h(y))^{\frac{q}{p}} dy\right)^{\frac{r}{q}} + \sum_n 2^n \left(\int_{a_{n+2}}^\infty k_1(y,a_n)w(y)(T_p h(y))^{\frac{q}{p}} dy\right)^{\frac{r}{q}} =: I_1 + I_2,$$

$$I_1 \approx \sum_n 2^n \left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+2}} k_1(y,a_n)w(y) \left(\int\limits_y^{a_{n+3}} k_2(s,y)\tilde{u}(s) \left(\int\limits_0^s hV \right)^{\frac{1}{p}} ds \right)^q dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$+\sum_n 2^n \left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+2}} k_1(y,a_n)w(y) \left(\int\limits_{a_{n+3}}^{\infty} k_2(s,y)\tilde{u}(s) \left(\int\limits_0^s hV \right)^{\frac{1}{p}} ds \right)^q dy \right)^{\frac{r}{q}} =: I_{1,1}+I_{1,2}.$$

Учитывая, что $k_2(s,y) \approx k_2(\sigma^3(x),y) + k_2(s,\sigma^3(x))$ при $x \le y \le \sigma^3(x) \le s$, получим

$$I_{1,2} \approx \sum_n \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} \rho(x)\,dx \left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+2}} k_1(y,a_n)w(y) \left(\int\limits_{a_{n+3}}^{\infty} k_2(s,y)\tilde{u}(s) \left(\int\limits_0^s hV \right)^{\frac{1}{p}} ds \right)^q dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$\approx \sum_n \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} \rho(x)\,dx \left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+2}} k_1(y,a_n)k_2^q(\sigma^3(x),y)w(y) \left(\int\limits_{a_{n+3}}^{\infty} \left(\int\limits_0^s hV \right)^{\frac{1}{p}} \tilde{u}(s)\,ds \right)^q dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$+\sum_n \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} \rho(x)\,dx \left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+2}} k_1(y,a_n)w(y) \left(\int\limits_{a_{n+3}}^{\infty} k_2(s,\sigma^3(x))\tilde{u}(s) \left(\int\limits_0^s hV \right)^{\frac{1}{p}} ds \right)^q dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$\ll \int\limits_0^{\infty} \rho(x) \left(\int\limits_x^{\sigma^3(x)} k_1(y,x)k_2^q(\sigma^3(x),y)w(y)\,dy \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_{\sigma^3(x)}^{\infty} \left(\int\limits_0^s hV \right)^{\frac{1}{p}} \tilde{u}(s)\,ds \right)^r dx$$

$$+ \int\limits_0^{\infty} \rho(x) \left(\int\limits_x^{\sigma^3(x)} k_1(y,x)w(y)\,dy \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_{\sigma^3(x)}^{\infty} k_2(s,\sigma^3(x))\tilde{u}(s) \left(\int\limits_0^s hV \right)^{\frac{1}{p}} ds \right)^r dx$$

$$\ll \left(\mathbb{A}_1^r + \mathbb{A}_2^r\right)\|h\|_{L^1}^{\frac{r}{p}}. \quad (42)$$

Запишем

$$I_{1,1} \approx \sum_n 2^n \left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+2}} k_1(y,a_n)w(y) \left(\int\limits_y^{a_{n+3}} k_2(s,y)\tilde{u}(s) \left(\int\limits_0^{a_n} hV \right)^{\frac{1}{p}} ds \right)^q dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$+\sum_n 2^n \left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+2}} k_1(y,a_n)w(y) \left(\int\limits_y^{a_{n+3}} k_2(s,y)\tilde{u}(s) \left(\int\limits_{a_n}^s hV \right)^{\frac{1}{p}} ds \right)^q dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$=: I_{1,1,1} + I_{1,1,2}.$$

Имеем

$$I_{1,1,1} \approx \sum_n \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} \rho(x) \left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+2}} k_1(y,a_n)w(y) \left(\int\limits_y^{a_{n+3}} k_2(s,y)u(s)\,ds \right)^q \left(\int\limits_0^{a_n} hV \right)^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$\le \int\limits_0^{\infty} \rho(x) \left(\int\limits_x^{\infty} k_1(y,x)w(y) \left(\int\limits_y^{\infty} k_2(s,y)\tilde{u}(s)\,ds \right)^q \left(\int\limits_0^y hV \right)^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{r}{q}} dx \le \mathbb{A}_3^r\|h\|_{L^1}^{\frac{r}{p}}. \quad (43)$$

Далее, с учетом обозначений (37) и (38)

$$I_{1,1,2} = \sum_n 2^n \left[\left(\int_{a_n}^{a_{n+2}} k_1(y, a_n) w(y) (T_{[a_n, a_{n+2}]} h(y))^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{r}{p}}$$

$$\leq \sum_n 2^n \|T_{[a_n, a_{n+2}]}\|^{\frac{r}{p}}_{L^1[a_n, a_{n+3}] \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot, a_n) w(\cdot)}[a_n, a_{n+2}]} \left(\int_{a_n}^{a_{n+3}} h \right)^{\frac{r}{p}}.$$

При $p \leq r$, применяя неравенство Йенсена, получим

$$I_{1,1,2} \leq \sup_n 2^n \|T_{[a_n, a_{n+2}]}\|^{\frac{r}{p}}_{L^1 \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot, a_n) w(\cdot)}} \left(\int_0^\infty h \right)^{\frac{r}{p}}$$

$$\leq \sup_{t>0} \left(\int_0^t \rho \right) \|T_t\|^{\frac{r}{p}}_{L^1 \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot, t) w(\cdot)}} \left(\int_0^\infty h \right)^{\frac{r}{p}}.$$

Следовательно,

$$I_{1,1,2}^{\frac{p}{r}} \leq \mathbb{B}^p \int_0^\infty h. \tag{44}$$

При $r < p$, учитывая неравенство Гёльдера $\left(\frac{1}{s} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)$, имеем

$$I_{1,1,2} \leq \left(\sum_n 2^{\frac{ns}{r}} \|T_{[a_n, a_{n+2}]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1 \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot, a_n) w(\cdot)}} \right)^{\frac{r}{s}} \left(\int_0^\infty h \right)^{\frac{r}{p}}.$$

Так как

$$\sum_n 2^{\frac{ns}{r}} \|T_{[a_n, a_{n+2}]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1 \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot, a_n) w(\cdot)}}$$

$$\approx \sum_n \left(\int_{a_n}^{a_{n+1}} \rho \right) \left(\int_0^{a_n} \rho \right)^{\frac{s}{p}} \|T_{[\sigma^{-1}(a_{n+1}), \sigma^2(a_n)]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1 \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot, \sigma^{-1}(a_{n+1})) w(\cdot)}}$$

$$\leq \sum_n \int_{a_n}^{a_{n+1}} \rho(x) \left[\left(\int_0^x \rho \right) \|T_{[\sigma^{-1}(x), \sigma^2(x)]}\|_{L^1 \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot, \sigma^{-1}(x)) w(\cdot)}} \right]^{\frac{s}{p}} dx$$

$$= \int_0^\infty \rho(x) \left[\left(\int_0^x \rho \right) \|T_{[\sigma^{-1}(x), \sigma^2(x)]}\|_{L^1 \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot, \sigma^{-1}(x)) w(\cdot)}} \right]^{\frac{s}{p}} dx = B^s,$$

то

$$I_{1,1,2}^{\frac{p}{r}} \leq \mathbb{B}^p \int_0^\infty h. \tag{45}$$

Рассмотрим

$$I_2 = \sum_n 2^n \left(\int_{a_{n+2}}^\infty k_1(y, a_n) w(y) (T_p h(y))^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$= \sum_n 2^n \left(\sum_{i \ge n} \int\limits_{a_{i+2}}^{a_{i+3}} k_1(y, a_n) w(y) (T_p h(y))^{\frac{q}{p}} \, dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$\approx \sum_n 2^n \left(\sum_{i \ge n} \int\limits_{a_{i+2}}^{a_{i+3}} k_1(y, a_{i+1}) w(y) (T_p h(y))^{\frac{q}{p}} \, dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$+ \sum_n 2^n \left(\sum_{i \ge n} \int\limits_{a_{i+1}}^{a_{i+2}} k_1(a_{i+1}, a_n) w(y) (T_p h(y))^{\frac{q}{p}} \, dy \right)^{\frac{r}{q}} =: I_{2,1} + I_{2,2}.$$

Применяя (18), получим

$$I_{2,1} \le \sum_n 2^n \left(\int\limits_{a_{n+1}}^{a_{n+3}} k_1(y, a_{n+1}) w(y) (T_p h(y))^{\frac{q}{p}} \, dy \right)^{\frac{r}{q}} \approx I_1$$

$$\le \left(\mathbb{A}_1^r + \mathbb{A}_2^r + \mathbb{A}_3^r + \mathbb{B}^r \right) \|h\|_{L^1}^{\frac{r}{p}}. \quad (46)$$

Для оценки $I_{2,2}$, используя неравенство (24) и неравенство Минковского, получим

$$I_{2,2} = \sum_n 2^n \left(\sum_{i \ge n} k_1(a_{i+1}, a_n) \int\limits_{a_{i+2}}^{a_{i+3}} w(y) (T_p h(y))^{\frac{q}{p}} \, dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$\ll \sum_n 2^n \left(\sum_{i \ge n} \left(\sum_{j=n}^{i} k_1(a_{j+1}, a_j)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \int\limits_{a_{i+2}}^{a_{i+3}} w(y) (T_p h(y))^{\frac{q}{p}} \, dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$\le \sum_n 2^n \left(\sum_{j \ge n} k_1(a_{j+1}, a_j)^\alpha \left(\sum_{i \ge j} \int\limits_{a_{i+2}}^{a_{i+3}} w(y) (T_p h(y))^{\frac{q}{p}} \, dy \right)^\alpha \right)^{\frac{r}{\alpha q}}$$

$$= \sum_n 2^n \left(\sum_{j \ge n} k_1(a_{j+1}, a_j)^\alpha \left(\int\limits_{a_{j+2}}^{\infty} w(y) (T_p h(y))^{\frac{q}{p}} \, dy \right)^\alpha \right)^{\frac{r}{\alpha q}}$$

$$\overset{(18)}{\approx} \sum_n 2^n \left(k_1(a_{n+1}, a_n) \left(\int\limits_{a_{n+2}}^{\infty} w(y) (T_p h(y))^{\frac{q}{p}} \, dy \right) \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$\approx \sum_n \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} \rho(x) k_1(a_{n+1}, a_n)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_{a_{n+2}}^{\infty} w(y) (T_p h(y))^{\frac{q}{p}} \, dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$\le \sum_n \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} \rho(x) k_1(\sigma^2(x), x)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_{\sigma^2(x)}^{\infty} w(y) (T_p h(y))^{\frac{q}{p}} \, dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$= \int\limits_0^\infty \rho(x) k_1(\sigma^2(x), x)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_{\sigma^2(x)}^{\infty} w(y) (T_p h(y))^{\frac{q}{p}} \, dy \right)^{\frac{r}{q}} \le \mathbb{A}_4^r \|h\|_{L^1}^{\frac{r}{p}}. \quad (47)$$

Из (42)–(47) следует, что оценка сверху $C_S \ll \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_3 + \mathbb{A}_4 + \mathbb{B}$ доказана.

Оценка снизу. В неравенстве (41) сузим области интегрирования:

(1) $[x,\infty) \to [x,\sigma^3(x)]$, $[y,\infty) \to [\sigma^3(x),\infty)$ и получим $C_S \geq \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2$ (учитывая, что $k_2(s,y) \approx k_2(\sigma^3(x),y) + k_2(s,\sigma^3(x))$ при $x \leq y \leq \sigma^3(x) \leq s$);

(2) $[0,s] \to [0,y]$ и получим $C_S \geq \mathbb{A}_3$;

(3) $[x,\infty) \to [\sigma^2(x),\infty)$ и получим $C_S \geq \mathbb{A}_4$ (учитывая $k_1(y,x) \gtrsim k_1(\sigma^2(x),x)$ при $x < \sigma^2(x) \leq y$).

Аналогично теореме 1 доказывается $C_S \geq \mathbb{B}$. $\square$

Для предельных значений параметров имеем

Замечание 3. (1) При $q = \infty$

$$C_S \approx \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_3 + \mathbb{A}_4 + \mathbb{B},$$

где $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{A}_3$, $\mathbb{A}_4$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)[\operatorname*{ess\,sup}_{x<y<\sigma^3(x)} k_1(y,x)k_2(\sigma^3(x),x)w(y)]^r \right.$$
$$\left. \times \left(\int_{\sigma^3(x)}^\infty \left(\int_0^s hV\right)^{\frac{1}{p}} \tilde{u}(s)\,ds\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \leq \mathbb{A}_1^p \int_0^\infty h,$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)[\operatorname*{ess\,sup}_{x<y<\sigma^3(x)} k_1(y,x)w(y)]^r \left(\int_{\sigma^3(x)}^\infty k_2(s,\sigma^3(x))\right.\right.$$
$$\left.\left. \times \left(\int_0^s hV\right)^{\frac{1}{p}} \tilde{u}(s)\,ds\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \leq \mathbb{A}_2^p \int_0^\infty h,$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left[\operatorname*{ess\,sup}_{y\geq x} k_1(y,x)w(y)\left(\int_y^\infty k_2(s,y)\tilde{u}(s)\,ds\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. \times \left(\int_0^y hV\right)^{\frac{1}{p}}\right]^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \leq \mathbb{A}_3^p \int_0^\infty h,$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)k_1(\sigma^2(x),x)^r \left[\operatorname*{ess\,sup}_{y\geq\sigma^2(x)} w(y)\left(\int_y^\infty k_2(s,y)\tilde{u}(s)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. \times \left(\int_0^s hV\right)^{\frac{1}{p}} ds\right)\right]^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \leq \mathbb{A}_4^p \int_0^\infty h \quad (48)$$

при $h \in \mathfrak{M}^+$, а константа $\mathbb{B}$ имеет вид

$$\mathbb{B} := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int_0^t \rho\right)^{\frac{1}{r}} \|T_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1 \to L^\infty_{k_1(\cdot,t)w(\cdot)}}, & p \leq r, \\ \left(\int_0^\infty \rho(x)\left[\left(\int_0^x \rho\right)\|T_{[\sigma^{-1}(x),\sigma^2(x)]}\|_{L^1\to L^\infty_{k_1(\cdot,\sigma^{-1}(x))w(\cdot)}}\right]^{\frac{s}{p}} dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r < p. \end{cases}$$

(2) При $p=\infty$ и $r=\infty$ имеем

$$C_S = \left\| S\left(\frac{1}{v}\right)\right\|_{L^r_\rho}, \ p=\infty, \quad C_S \approx \sup_{t>0} R(t)\|T_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1_V \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\cdot,t)w(\cdot)}}, \ r=\infty,$$

где $R(t) := \operatorname*{ess\,sup}_{0<z<t} \rho(z)$.

Пусть $\lambda,\mu,\nu,\eta \in \mathfrak{M}^+$, ядро $k(x,y)$ удовлетворяет условию Ойнарова (6), а последовательность a_n и функция $\sigma(x)$ заданы по формулам (7) и (8) с λ вместо ρ. Для $0<c<d\le\infty$, $0<t$, $q<\infty$, $h\in\mathfrak{M}^+$ положим

$$\mathscr{T}_t^* h(x) := \chi_{[t,\infty)}(x)\left(\int_x^\infty k(x,s)\nu(s)\left(\int_0^s h\right)^q ds\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\mathscr{T}_{[c,d]}^* h(x) := \chi_{[c,d]}(x)\left(\int_x^{\sigma(d)} k(x,s)\nu(s)\left(\int_c^s h\right)^q ds\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Аналогично замечанию 2 приводим ниже лемму, позволяющую редуцировать неравенства с константами $\mathbb{A}_4$.

Лемма 2. *Пусть $0<p,q,r<\infty$. Тогда для наилучшей константы C^* в неравенстве*

$$\left(\int_0^\infty \lambda(x)\left(\int_x^\infty \mu(y)\left(\int_y^\infty k(y,s)\nu(s)\left(\int_0^s h\right)^q ds\right)^{\frac{r}{q}} dy\right)^{\frac{p}{r}} dx\right)^{\frac{1}{p}} \le C^*\int_0^\infty h\eta, \ h\in\mathfrak{M}^+,$$

выполняется оценка

$$C^* \approx G_1^* + G_2^* + G_3^* + G^*,$$

где G_1^*, G_2^*, G_3^* — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int_0^\infty \lambda(x)\left(\int_x^{\sigma^2(x)} \mu(y)[k(\sigma^2(x),y)]^{\frac{r}{q}} dy\right)^{\frac{p}{r}}\left(\int_{\sigma^2(x)}^\infty \nu(s)\left(\int_s^\infty h\right)^q ds\right)^{\frac{p}{q}} dx\right)^{\frac{1}{p}} \le G_1^*\int_0^\infty h\eta,$$

$$\left(\int_0^\infty \lambda(x)\left(\int_x^{\sigma^2(x)} \mu\right)^{\frac{p}{r}}\left(\int_{\sigma^2(x)}^\infty k(s,\sigma^2(x))\nu(s)\left(\int_0^s h\right)^q ds\right)^{\frac{p}{q}} dx\right)^{\frac{1}{p}} \le G_2^*\int_0^\infty h\eta,$$

$$\left(\int_0^\infty \lambda(x)\left(\int_x^\infty \mu(y)\left(\int_y^\infty k(y,s)\nu(s)\,ds\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_0^y h\right)^r dy\right)^{\frac{p}{r}} dx\right)^{\frac{1}{p}} \le G_3^*\int_0^\infty h\eta$$

при $h\in\mathfrak{M}^+$, а константа G^* имеет вид

$$G^* := \begin{cases} \sup\limits_{t>0}\left(\int_0^t \lambda\right)^{\frac{1}{p}} \|\mathscr{T}^*{}_t\|_{L^1_\eta \to L^r_\mu}, & p\ge 1, \\ \left(\int_0^\infty \lambda(x)\left[\left(\int_0^x \lambda\right)\|\mathscr{T}^*_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\|_{L^1_\eta\to L^r_\mu}\right]^{\frac{p}{1-p}} dx\right)^{\frac{1-p}{p}}, & 0<p<1. \end{cases}$$

Аналогично редуцируется неравенство (48).

§ 4. Основные результаты для операторов $\mathscr{T}$ и $\mathscr{S}$

Характеризация неравенства (1) для операторов $\mathscr{T}$ и $\mathscr{S}$ доказывается аналогично, приведем соответствующие результаты.

Будем считать, что $0 < \int_x^\infty \rho < \infty$ при любом $x > 0$ и $\int_0^\infty \rho = \infty$. Определим последовательность $\{b_n\} \subset (0;\infty)$ из уравнений

$$\int_{b_n}^\infty \rho = 2^{-n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пусть функции $\zeta : [0;\infty) \to [0;\infty)$ и $\zeta^{-1} : [0;\infty) \to [0;\infty)$ задаются формулами (здесь $\sup \varnothing = 0$)

$$\zeta(x) := \sup\left\{y > 0 : \int_y^\infty \rho \geq \frac{1}{2}\int_x^\infty \rho\right\}, \quad \zeta^{-1}(x) := \sup\left\{y > 0 : \int_y^\infty \rho \geq 2\int_x^\infty \rho\right\}. \tag{49}$$

Для $0 < c < d \leq \infty$, $0 < t, p < \infty$, $h \in \mathfrak{M}^+$ положим

$$\widetilde{T}_t h(x) := \chi_{(0,t]}(x)\left(\int_x^\infty k_2(s,x)\tilde{u}(s)\left(\int_0^s hV\right)^{\frac{1}{p}} ds\right)^p, \tag{50}$$

$$\widetilde{T}_{[c,d]} h(x) := \chi_{[c,d]}(x)\left(\int_x^{\zeta(d)} k_2(s,x)\tilde{u}(s)\left(\int_c^s hV\right)^{\frac{1}{p}} ds\right)^p. \tag{51}$$

Теорема 3. *Пусть $0 < q < \infty$, $0 < p < \infty$, $0 < r < \infty$. Тогда для наилучшей константы $C_{\mathscr{T}}$ в неравенстве*

$$\left(\int_0^\infty [\mathscr{T} f(x)]^r \rho(x)\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq C_{\mathscr{T}}\left(\int_0^\infty [f(x)]^p v(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}^{\downarrow}, \tag{52}$$

выполняется оценка

$$C_{\mathscr{T}} \approx \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_3 + \mathscr{A}_4 + \mathscr{B},$$

где $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_3$, $\mathscr{A}_4$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left(\int_0^x k_1(x,y)k_2(x,y)^q w(y)\,dy\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_x^\infty\left(\int_0^s hV\right)^{\frac{1}{p}}\tilde{u}(s)\,ds\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \leq \mathscr{A}_1^p \int_0^\infty h,$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left(\int_0^x k_1(x,y)w(y)\,dy\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_x^\infty k_2(s,x)\left(\int_0^s hV\right)^{\frac{1}{p}}\tilde{u}(s)\,ds\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \leq \mathscr{A}_2^p \int_0^\infty h,$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left(\int_0^x k_1(x,y)w(y)\left(\int_y^\infty k_2(s,y)\tilde{u}(s)\,ds\right)^q\left(\int_0^y hV\right)^{\frac{q}{p}} dy\right)^{\frac{r}{q}} dx\right)^{\frac{p}{r}} \leq \mathscr{A}_3^p \int_0^\infty h,$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)k_1(x,\zeta^{-2}(x))^{\frac{r}{q}}\left[\int_0^{\zeta^{-2}(x)} w(y)\left(\int_y^\infty k_2(s,y)\tilde{u}(s)\left(\int_0^s hV\right)^{\frac{1}{p}}\right)^q dy\right]^{\frac{r}{q}} dx\right)^{\frac{p}{r}} \leq \mathscr{A}_4^p \int_0^\infty h$$

при $h \in \mathfrak{M}^+$, *а константа* $\mathscr{B}$ *имеет вид*

$$\mathscr{B} := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int\limits_t^\infty \rho\right)^{\frac{1}{r}} \|\widetilde{T}_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1 \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(t,\cdot)w(\cdot)}}, & p \le r, \\ \left(\int\limits_0^\infty \rho(x) \left[\left(\int\limits_x^\infty \rho\right) \|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(x), \zeta^2(x)]}\|_{L^1 \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\zeta^2(x),\cdot)w(\cdot)}}\right]^{\frac{s}{p}} dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r < p, \end{cases}$$

где $\frac{1}{s} := \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$.

Замечание 4. (1) При $q = \infty$ имеем

$$C_{\mathscr{T}} \approx \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_3 + \mathscr{A}_4 + \mathscr{B},$$

где $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_3$, $\mathscr{A}_4$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x) [\operatorname*{ess\,sup}_{y\in(0,x)} k_1(x,y)k_2(x,y)w(y)\, dy]^r \left(\int\limits_x^\infty \left(\int\limits_0^s hV\right)^{\frac{1}{p}} \tilde{u}(s)\, ds\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathscr{A}_1^p \int\limits_0^\infty h,$$

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x) [\operatorname*{ess\,sup}_{y\in(0,x)} k_1(x,y)w(y)\, dy]^r \left(\int\limits_x^\infty k_2(s,x) \left(\int\limits_0^s hV\right)^{\frac{1}{p}} \tilde{u}(s)\, ds\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathscr{A}_2^p \int\limits_0^\infty h,$$

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x) \left[\operatorname*{ess\,sup}_{y\in(0,x)} k_1(x,y)w(y) \left(\int\limits_y^\infty k_2(s,y)\tilde{u}(s)\, ds\right) \left(\int\limits_0^y hV\right)^{\frac{1}{p}} dy\right]^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathscr{A}_3^p \int\limits_0^\infty h,$$

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x) k_1(x,\zeta^{-2}(x))^r \left[\operatorname*{ess\,sup}_{y\in(0,\zeta^{-2}(x))} w(y) \left(\int\limits_y^\infty k_2(s,y)\tilde{u}(s) \left(\int\limits_0^s hV\right)^{\frac{1}{p}}\right)\right]^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathscr{A}_4^p \int\limits_0^\infty h$$

при $h \in \mathfrak{M}^+$, а константа $\mathscr{B}$ имеет вид

$$\mathscr{B} := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int\limits_t^\infty \rho\right)^{\frac{1}{r}} \|\widetilde{T}_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1 \to L^\infty_{k_1(t,\cdot)w(\cdot)}}, & p \le r, \\ \left(\int\limits_0^\infty \rho(x) \left[\left(\int\limits_x^\infty \rho\right) \|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(x), \zeta^2(x)]}\|_{L^1 \to L^\infty_{k_1(\zeta^2(x),\cdot)w(\cdot)}}\right]^{\frac{s}{p}} dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r < p. \end{cases}$$

(2) При $p = \infty$ и $r = \infty$ имеем

$$C_{\mathscr{T}} = \left\|\mathscr{T}\left(\frac{1}{v}\right)\right\|_{L^r_\rho}, \ p = \infty, \quad C_{\mathscr{T}} \approx \sup_{t>0} \mathscr{R}(t) \|\widetilde{T}_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1_V \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(t,\cdot)w(\cdot)}}, \ r = \infty,$$

где $\mathscr{R}(t) := \operatorname*{ess\,sup}_{z \ge t} \rho(z)$.

Для $0 < c < d \le \infty$, $0 < t < \infty$, $h \in \mathfrak{M}^+$ положим

$$\widetilde{\mathscr{T}_t} h(x) := \chi_{(0,t]}(x) \left(\int\limits_0^x k_2(x,s)u(s) \left(\int\limits_s^\infty h\right)^{\frac{1}{p}} ds\right)^p, \tag{53}$$

$$\widetilde{\mathscr{T}}_{[c,d]} h(x) := \chi_{[c,d]}(x) \left(\int\limits_{\zeta^{-1}(c)}^x k_2(x,s)u(s) \left(\int\limits_s^d h\right)^{\frac{1}{p}} ds\right)^p. \tag{54}$$

Теорема 4. *Пусть $0 < q < \infty$, $0 < p < \infty$, $0 < r < \infty$. Тогда для наилучшей константы $C_{\mathscr{S}}$ в неравенстве*

$$\left(\int\limits_0^\infty [\mathscr{S} f(x)]^r \rho(x)\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \le C_{\mathscr{S}} \left(\int\limits_0^\infty [f(x)]^p v(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}^{\downarrow}, \tag{55}$$

выполняется оценка

$$C_{\mathscr{S}} \approx \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4 + \mathbf{B},$$

где $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x)\left(\int\limits_{\zeta^{-3}(x)}^x k_1(x,y)k_2^q(y,\zeta^{-3}(x))w(y)\,dy\right)^{\frac{r}{q}} \times \left(\int\limits_0^{\zeta^{-3}(x)} \left(\int\limits_s^\infty h\right)^{\frac{1}{p}} u(s)\,ds\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbf{A}_1^p \int\limits_0^\infty hV,$$

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x)\left(\int\limits_{\zeta^{-3}(x)}^x k_1(x,y)w(y)\,dy\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_0^{\zeta^{-3}(x)} k_2(\zeta^{-3}(x),s)u(s) \times \left(\int\limits_s^\infty h\right)^{\frac{1}{p}} ds\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbf{A}_2^p \int\limits_0^\infty hV,$$

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x)\left(\int\limits_0^x k_1(x,y)w(y)\left(\int\limits_0^y k_2(y,s)u(s)\,ds\right)^q \left(\int\limits_y^\infty h\right)^{\frac{q}{p}} dy\right)^{\frac{r}{q}} dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbf{A}_3^p \int\limits_0^\infty hV,$$

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x)k_1(x,\zeta^{-2}(x))^{\frac{r}{q}} \left[\int\limits_0^{\zeta^{-2}(x)} w(y)\left(\int\limits_0^y k_2(y,s)u(s) \times \left(\int\limits_s^\infty h\right)^{\frac{1}{p}}\right)^q dy\right]^{\frac{r}{q}} dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbf{A}_4^p \int\limits_0^\infty hV$$

при $h \in \mathfrak{M}^+$, а константа $\mathbf{B}$ имеет вид

$$\mathbf{B} := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int\limits_t^\infty \rho\right)^{\frac{1}{r}} \|\widetilde{\mathscr{T}_t}\|^{\frac{1}{p}}_{L_V^1 \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(t,\cdot)w(\cdot)}}, & p \le r, \\ \left(\int\limits_0^\infty \rho(x)\left[\left(\int\limits_x^\infty \rho\right)\|\widetilde{\mathscr{T}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta^2(x)]}}\|_{L_V^1 \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(\zeta^2(x),\cdot)w(\cdot)}}\right]^{\frac{s}{p}} dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r < p, \end{cases}$$

где $\frac{1}{s} := \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$.

Замечание 5. (1) При $q = \infty$ имеем

$$C_{\mathscr{S}} \approx \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4 + \mathbf{B},$$

где $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x)[\operatorname*{ess\,sup}_{y\in(\zeta^{-3}(x),x)} k_1(x,y)k_2(y,\zeta^{-3}(x))w(y)]^r \times \left(\int\limits_0^{\zeta^{-3}(x)} \left(\int\limits_s^\infty h\right)^{\frac{1}{p}} u(s)\,ds\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbf{A}_1^p \int\limits_0^\infty hV,$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)[\operatorname*{ess\,sup}_{y\in(\zeta^{-3}(x),x)} k_1(x,y)w(y)]^r \times \left(\int_0^{\zeta^{-3}(x)} k_2(\zeta^{-3}(x),s)u(s)\left(\int_s^\infty h\right)^{\frac{1}{p}} ds\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbf{A}_2^p \int_0^\infty hV,$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left[\operatorname*{ess\,sup}_{y\in(0,x)} k_1(x,y)w(y)\left(\int_0^y k_2(y,s)u(s)\,ds\right)\left(\int_y^\infty h\right)^{\frac{1}{p}}\right]^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbf{A}_3^p \int_0^\infty hV,$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)k_1(x,\zeta^{-2}(x))^r \left[\operatorname*{ess\,sup}_{y\in(0,\zeta^{-2}(x))} w(y) \times \left(\int_0^y k_2(y,s)u(s)\left(\int_s^\infty h\right)^{\frac{1}{p}} ds\right)\right]^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbf{A}_4^p \int_0^\infty hV$$

при $h \in \mathfrak{M}^+$, а константа $\mathbf{B}$ имеет вид

$$\mathbf{B} := \begin{cases} \sup\limits_{t>0}\left(\int_t^\infty \rho\right)^{\frac{1}{r}} \|\widetilde{\mathscr{T}_t}\|^{\frac{1}{p}}_{L^1_V \to L^\infty_{k_1(t,\cdot)w(\cdot)}}, & p \le r,\\ \left(\int_0^\infty \rho(x)\left[\left(\int_x^\infty \rho\right)\|\widetilde{\mathscr{T}}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta^2(x)]}\|_{L^1_V \to L^\infty_{k_1(\zeta^2(x),\cdot)w(\cdot)}}\right]^{\frac{s}{p}} dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r < p. \end{cases}$$

(2) При $p=\infty$ и $r=\infty$ имеем

$$C_{\mathscr{S}} = \left\|\mathscr{S}\left(\frac{1}{v}\right)\right\|_{L^r_\rho},\ p=\infty, \quad C_{\mathscr{S}} \approx \sup_{t>0}\mathscr{R}(t)\|\widetilde{\mathscr{T}_t}\|^{\frac{1}{p}}_{L^1_V \to L^{\frac{q}{p}}_{k_1(t,\cdot)w(\cdot)}},\ r=\infty,$$

где $\mathscr{R}(t) := \operatorname*{ess\,sup}_{z\ge t}\rho(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ойнаров Р.* Двусторонние оценки нормы некоторых классов интегральных операторов // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1993. Т. 204. С. 240–250.
2. *Sawyer E.* Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces // Stud. Math. 1990. V. 96. P. 145–158.
3. *Степанов В. Д.* Об ограниченности линейных интегральных операторов на классе монотонных функций // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 3. С. 222–224.
4. *Stepanov V. D.* Integral operators on the cone of monotone functions // J. London Math. Soc. 1993. V. 48, N 3. P. 465–487.
5. *Carro M., Soria J.* Weighted Lorentz spaces and the Hardy operator // J. Funct. Anal. 1993. V. 112. P. 480–494.
6. *Carro M., Soria J.* Boundedness of some integral operators // Canad. J. Math. 1993. V. 45. P. 1155–1166.
7. *Carro M., Soria J.* The Hardy–Littlewood maximal function and weighted Lorentz spaces // J. London Math. Soc. 1997. V. 55. P. 146–158.
8. *Goldman M. L., Heinig H. P., Stepanov V. D.* On the principle of duality in Lorentz spaces // Canad. J. Math. 1996. V. 48, N 5. P. 959–979.
9. *Sinnamon G.* Embeddings of concave functions and duals of Lorentz spaces // Publ. Mat. 2002. V. 46. P. 489–515.
10. *Гольдман М. Л., Сорокина М. В.* Трехвесовые неравенства типа Харди на конусе квазимонотонных функций // Докл. АН. 2005. Т. 401, № 3. С. 301–305.
11. *Попова О. В.* Неравенства типа Харди на конусах монотонных функций // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 187–204.
12. *Burenkov V. I., Oinarov R.* Necessary and sufficient conditions for boundedness of the Hardy-type operator from a weighted Lebesgue space to a Morrey-type space // Math. Inequal. Appl. 2013. V. 16. P. 1–19.

13. *Шамбилова Г. Э.* Весовые неравенства для одного класса квазилинейных интегральных операторов на конусе монотонных функций // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 4. С. 912–936.

14. *Гогатишвили А., Степанов В. Д.* Об операторах на конусах монотонных функций // Докл. АН. 2012. Т. 445, № 6. С. 618–621.

15. *Гогатишвили А., Степанов В. Д.* Об интегральных операторах на конусах монотонных функций // Докл. АН. 2012. Т. 446, № 4. С. 367–370.

16. *Gogatishvili A., Stepanov V. D.* Reduction theorems for operators on the cones of monotone functions // J. Math. Anal. Appl. 2013. V. 405, N 1. P. 156–172.

17. *Гогатишвили А., Степанов В. Д.* Редукционные теоремы для весовых интегральных неравенств на конусе монотонных функций // Успехи мат. наук. 2013. Т. 68, № 4. С. 3–68.

18. *Gogatishvili A., Mustafayev R., Persson L.-E.* Some new iterated Hardy-type inequalities // J. Funct. Spaces Appl. 2012. V. 2012. Art. ID 734194. 30 p.

19. *Gogatishvili A., Mustafayev R., Persson L.-E.* Some new iterated Hardy-type inequalities: the case $\theta = 1$ // J. Inequalities Appl. 2013. 2013:515. 29 p. arXiv:1302.3436[math.CA].

20. *Прохоров Д. В., Степанов В. Д.* О весовых неравенствах Харди в смешанных нормах // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2013. Т. 283. С. 155–170.

21. *Прохоров Д. В., Степанов В. Д.* Весовые оценки одного класса сублинейных операторов // Докл. АН. 2013. Т. 453, № 4. С. 486–488.

22. *Прохоров Д. В., Степанов В. Д.* Оценки одного класса сублинейных интегральных операторов // Докл. АН. 2014. Т. 456, № 6. С. 645–649.

23. *Прохоров Д. В.* Об ограниченности одного класса сублинейных операторов // Докл. АН. 2015. Т. 464, № 6. С. 668–671.

24. *Прохоров Д. В.* О одном классе весовых неравенств, содержащих квазилинейные операторы // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2016. Т. 293. С. 280–295.

25. *Burenkov V. I., Gogatishvili A., Guliev V. S., Mustafaeyev R. Ch.* Boundedness of the fractional maximal operator in local Morrey-type spaces // Complex Variables Elliptic Equ. 2010. V. 55, N 8–10. P. 739–758.

26. *Burenkov V. I., Gogatishvili A., Guliev V. S., Mustafaeyev R. Ch.* Boundedness of the Riesz potential in local Morrey-type spaces // Potential Anal. 2011. V. 35. P. 67–87.

27. *Persson L.-E., Shambilova G. E., Stepanov V. D.* Hardy-type inequalities on the weighted cones of quasi-concave functions // Banach J. Math. Anal. 2015. V. 9, N 2. P. 21–34.

28. *Gogatishvili A., Opic B., Pick L.* Weighted inequalities for Hardy-type operators involving suprema // Collect. Math. 2006. V. 57. P. 227–255.

29. *Sinnamon G., Stepanov V. D.* The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$ // J. London Math. Soc. 1996. V. 54, N 2. P. 89–101.

30. *Stepanov V. D., Ushakova E. P.* Kernel operators with variable intervals of integration in Lebesgue spaces and applications // Math. Inequal. Appl. 2010. V. 13, N 3. P. 449–510.

31. *Прохоров Д. В.* О одном весовом неравенстве для оператора типа Харди // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2014. Т. 284. С. 216–223.

Статья поступила 16 февраля 2016 г., окончательный вариант — 16 июня 2016 г.

Степанов Владимир Дмитриевич
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва 117198;
Математический институт им. В. А. Стеклова,
ул. Губкина, 8, Москва 119991
`stepanov@mi.ras.ru`

Шамбилова Гульдарья Эрмаковна
Финансовый университет при Правительстве РФ,
Ленинградский пр., 49, Москва 125993
`shambilova@mail.ru`