Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2016. Том 57, № 5

УДК 519.17

ОПИСАНИЕ 4–ЦЕПЕЙ В 3–МНОГОГРАННИКАХ МИНИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ 5

О. В. Бородин, А. О. Иванова

Аннотация. В 1922 г. Франклин доказал, что каждый 3-многогранник минимальной степени 5 содержит 5-вершину, смежную с двумя вершинами степени не больше 6, причем результат неулучшаем. Далее эта теорема была обобщена и уточнена в нескольких направлениях. В частности, Йендроль и Мадараш (1996 г.) доказали существование 4-цепи с суммой степеней вершин не более 23.

В статье доказано, что каждый 3-многогранник минимальной степени 5 содержит $(6,5,6,6)$-цепь или $(5,5,5,7)$-цепь. Результат неулучшаем и уточняет упомянутые выше теоремы.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.504

Ключевые слова: плоский граф, плоская карта, структурные свойства, 3-многогранник, 4-цепь.

1. Введение

Степень вершины или грани x в плоском графе, т. е. число инцидентных x ребер, обозначим через $d(x)$. k-*Вершина* — это вершина v с $d(v) = k$, k^+-*вершина* (k^--*вершина*) имеет степень не менее k (не более k); аналогичные обозначения используются и для граней.

k-*Цепь* есть цепь на k вершинах. Цепь $v_1 \dots v_k$ называется $(d_1, \dots, d_k)$-*цепью*, если $d(v_i) \le d_i$ при всех $1 \le i \le k$. *Вес* подграфа H графа G есть сумма степеней вершин из H в G. Через $\mathbf{P}_5$ обозначим класс 3-многогранников с минимальной степенью 5.

В 1904 г. Вернике [1] доказал, что если $P_5 \in \mathbf{P}_5$, то P_5 содержит 5-вершину, смежную с 6^--вершиной. Этот результат был усилен Франклином [2] в 1922 г., доказавшим существование $(6,5,6)$-цепи в любом P_5 из $\mathbf{P}_5$. Описание k-цепей называется *неулучшаемым*, если ни один параметр в нем не может быть уменьшен и ни один член — отброшен.

Теорема 1 [2]. *Каждый* 3-*многогранник с минимальной степенью* 5 *содержит* $(6,5,6)$-*цепь, причем результат неулучшаем.*

Неулучшаемость полученного Франклином описания подтверждается конструкцией, получаемой из додекаэдра помещением 5-вершины в каждую грань.

Теорема 1 Франклина фундаментальна в структурной теории плоских графов; она была обобщена или уточнена в нескольких направлениях (см. [3–24]).

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 16–01–00499, 15–01–05867), работа второго автора выполнена в рамках государственной работы «Организация проведения научных исследований».

В частности, имеют место следующие неулучшаемые результаты. О. В. Бородин [3] доказал, что существует 3-грань веса не более 17. Йендроль и Мадараш [4] в каждом P_5 из $\mathbf{P}_5$ нашли 5-вершину с весом трех ее соседей не более 18, а также 4-цепь веса не более 23, а Мадараш [5] — 5-цепь веса не более 29.

Цель данной статьи — дать совместное уточнение теоремы 1 и упомянутого выше результата Йендроля и Мадараша [4] о 4-цепи веса не более 23.

Теорема 2. *Каждый* 3-*многогранник с минимальной степенью* 5 *содержит* $(6, 5, 6, 6)$-*цепь или* $(5, 5, 5, 7)$-*цепь, причем результат неулучшаем.*

2. Доказательство теоремы 2

Представленная на рис. 1 половина триангуляции, состоящей только из 5- и 7^+-вершин, не содержит $(5, 5, 5, 5)$-цепей и тем самым подтверждает неулучшаемость члена $(5, 5, 5, 7)$ в теореме 2. Действительно, достаточно сдвинуть одну из таких половин на одну позицию по отношению к другой вдоль внешнего цикла. Неулучшаемость члена $(6, 5, 6, 6)$ следует из известного 3-многогранника, в котором имеются только 5- и 6-вершины, причем 5-вершины находятся произвольно далеко друг от друга.

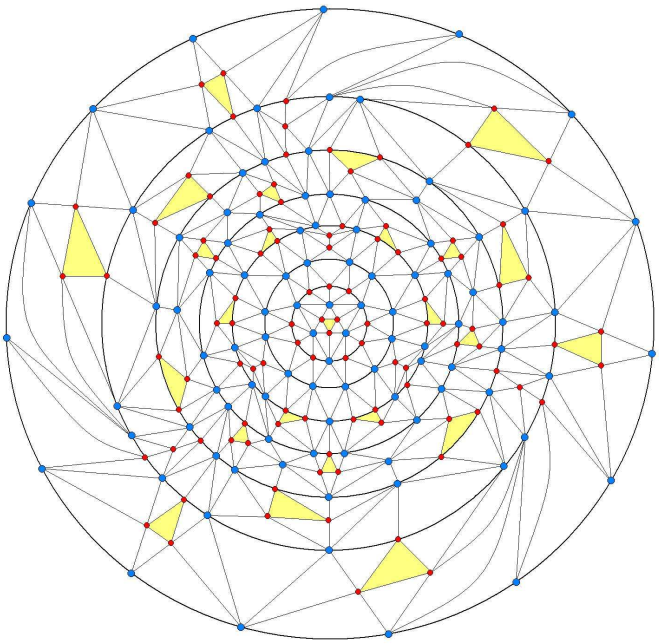

Рис. 1. Конструкция, подтверждающая точность члена $(5, 5, 5, 7)$ в теореме 2.

Пусть 3-многогранник P_5' противоречит теореме 2, избегая $(6, 5, 6, 6)$- и $(5, 5, 5, 7)$-цепей. Пусть P_5 — контрпример к теореме 2 на том же множестве вершин, что и P_5', имеющий наибольшее число ребер.

В процессе доказательства мы должны следить за тем, чтобы никакая запрещенная 4-цепь не вырождалась в 3-цикл. В большинстве случаев это обеспечивается тем, что находим запрещенную 4-цепь в окрестности некоторой вершины, а все вершины в окрестности любой вершины попарно различны ввиду отсутствия петель и кратных ребер в P_5.

Пусть $v_1, \dots, v_{d(x)}$ — соседние (инцидентные) вершины для вершины (грани) x в циклическом порядке вокруг x.

Утверждение 3. *P_5 — триангуляция.*

Доказательство. Действительно, пусть P_5 содержит 4^+-грань $f = v_1, \dots, v_{d(f)}$. Заметим, что $v_i \neq v_j$ при всех $1 \leq i < j \leq d(f)$ ввиду отсутствия точек сочленения в P_5. Если $d(v_1) + d(v_3) \geq 11$, то добавление диагонали v_1v_3 порождает контрпример P_5^* к теореме 2 с большим, чем в P_5, числом ребер, поскольку v_1v_3 в P_5^* соединяет 6^+-вершину с 7^+-вершиной вопреки максимальности графа P_5. Таким образом, $d(v_1) = d(v_3) = 5$ в P_5. Из симметрии получаем также $d(v_2) = d(v_4) = 5$. Следовательно, P_5 содержит $(5,5,5,5)$-цепь; противоречие. $\square$

Утверждение 4. *P_5 не содержит разделяющего 3-цикла $C = xyz$, в котором $d(x) = d(y) = 5$ и $d(z) = 6$.*

Доказательство. Предположим противное. Через $d_{\text{int}}(x)$ и $d_{\text{ext}}(x)$ обозначим число соседей вершины x, лежащих снаружи и внутри C соответственно. Аналогичные обозначения используем для y и z. Очевидно, что $d_{\text{int}}(x) + d_{\text{ext}}(x) = d_{\text{int}}(y) + d_{\text{ext}}(y) = 3$ и $d_{\text{int}}(z) + d_{\text{ext}}(z) = 4$.

Поскольку P_5 является 3-связным, а C — разделяющим, имеем $d_{\text{int}} \geq 1$ и $d_{\text{ext}} \geq 1$ для каждой из вершин x, y, z.

Если $d_{\text{int}}(x) = d_{\text{int}}(y) = 1$, то внутри C найдется вершина w такая, что существуют грани wxy, wxz и wyz, откуда следует, что $d(w) = 3$; противоречие.

По симметрии то же верно для внешности цикла C, поэтому можно считать, что $d_{\text{int}}(x) = 1$ и $d_{\text{int}}(y) = 2$. Существуют грани wxy, wxz, uyz и uwy. Если $d_{\text{int}}(z) = 2$, то $d(w) = 4$ и $d(u) = 3$; противоречие. В противном случае $d_{\text{int}}(z) + d_{\text{ext}}(z) \geq 6$ благодаря симметрии. $\square$

Обозначим множества вершин, ребер и граней 3-многогранника P_5 через V, E и F соответственно. Формулу Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ для P_5 перепишем в виде

$$\sum_{v \in V} (d(v) - 6) = -12. \tag{1}$$

Припишем *начальный заряд* $\mu(v) = d(v) - 6$ каждой вершине $v \in V$. Заметим, что лишь 5-вершины имеют отрицательный начальный заряд.

Используя свойства контрпримера P_5 к теореме 2, локально перераспределим заряды, сохраняя их сумму, так, что *финальный заряд* $\mu'(v)$ для всех $v \in V$ станет неотрицательным. Последнее будет противоречить тому, что согласно (1) сумма финальных зарядов равна -12.

Назовем 5-вершину v *сильной*, если она имеет не менее четырех 7^+-соседей, а в противном случае — *слабой*. Будем использовать следующие правила перераспределения зарядов (рис. 2).

R1. Каждая 6^+-вершина v_1 дает $\frac{1}{4}$ каждой смежной 5-вершине v, за следующими исключениями:

($e1$) $d(v_1) \geq 8$ и v инцидентна 3-грани vv_1v_2, где $d(v_2) \geq 8$, и в этом случае v_1 дает $\frac{3}{8}$ вершине v (то же верно для v_2);

($e2$) $d(v_1) = 6$ и v сильная, тогда v_1 ничего не дает вершине v.

R2. Каждая 7^+-вершина v_1 дает каждой смежной 6-вершине v:

(a) $\frac{1}{8}$, если v смежна со слабой 5-вершиной, за исключением случая, когда существуют 3-грани v_1vv_2, v_1v_2x, где $d(v_1) = 7$ и $d(v_2) = d(x) = 5$, а тогда v_1 ничего не дает вершине v;

(b) 0, если существуют 3-грани v_1vv_2 и v_1vv_6 с $d(v_2) = d(v_6) = 5$.

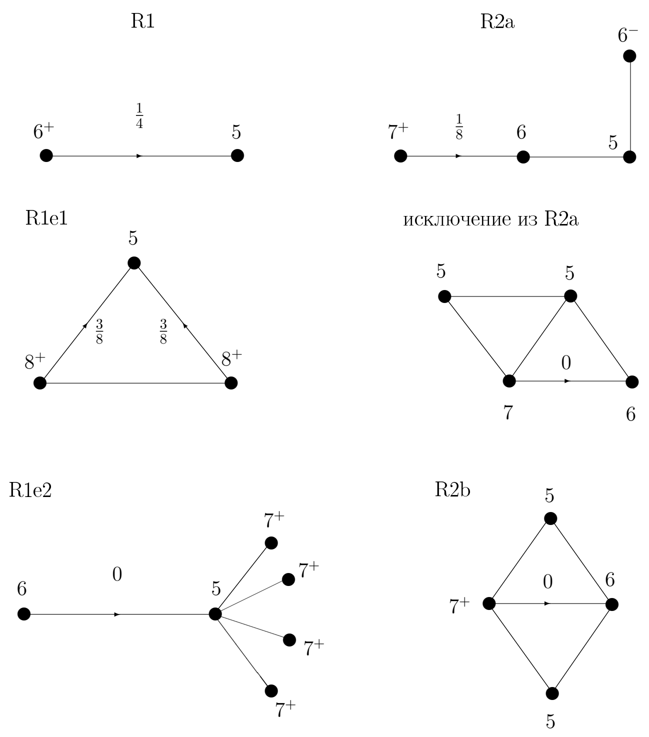

Рис. 2. Правила перераспределения зарядов.

Теперь проверим, что $\mu'(v) \geq 0$ для всех $v \in V$.

Случай 1: $d(v) = 5$. Заметим, что v имеет не более двух 5-соседей ввиду отсутствия $(5, 5, 5, 5)$-цепей в триангуляции P_5.

Если v имеет в точности двух 5-соседей, то все другие ее соседи имеют степени не менее 8 в силу отсутствия $(5, 5, 5, 7)$-цепей в окрестности вершины v, откуда $\mu'(v) \geq -1 + 2 \times \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = 0$ по R1.

Пусть v имеет в точности одного 5-соседа. Поскольку правило R1e2 здесь не применимо, получаем $\mu'(v) \geq -1 + 4 \times \frac{1}{4} = 0$ согласно R1.

Пусть, наконец, у v нет 5-соседей. Если найдется не более одного 6-соседа, то v получает $\frac{1}{4}$ по меньшей мере четырежды от своих 7^+-соседей по R1. В противном случае v получает $\frac{1}{4}$ от каждого соседа согласно R1, а значит, $\mu'(v) \geq -1 + 5 \times \frac{1}{4} > 0$.

Случай 2: $d(v) = 6$. Если у v нет 5-соседей, то $\mu'(v) = \mu(v) = 6 - 6 = 0$.

Подслучай 2.1: v имеет в точности одного 5-соседа, а именно v_1. Заметим, что здесь R2b не применимо, а v_1 может иметь не более одного 6^--соседа, отличного от v, ввиду отсутствия $(6, 5, 6, 6)$-цепей в окрестности вершины v_1.

Если у v_1 есть 6^--сосед, отличный от v, скажем x (не исключено, что x смежна с v), то ввиду симметрии можем считать, что $d(v_2) \geq 7$ из-за отсутствия $(6,5,6,6)$-цепей в окрестности вершины v.

Кроме того, хотя бы одна из вершин v_3, v_4, v_5 является 7^+-вершиной. Действительно, если $x \notin \{v_3, v_4, v_5\}$, то имеется запрещенная цепь xv_1vv_3. В противном случае без ограничения общности можно считать, что $x = v_3$. Теперь возникает запрещенная цепь vv_1xv_4; противоречие.

Если $d(x) = 6$, то исключение из R2a не возникает и v получает $\frac{1}{8}$ от каждой из двух 7^+-вершин, так что $\mu'(v) \geq 0 - \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{8} = 0$ по R2.

Если $d(x) = 5$, то $d(v_i) \geq 7$ при любых $2 \leq i \leq 6$, поскольку запрещенная $(5,5,6,6)$-цепь, проходящая через x, v_1 и v, невозможна. Здесь исключение из R2a может применяться лишь к вершинам v_2 и v_6, но это означает, что $\mu'(v) \geq 0 - \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} > 0$ согласно R2a и R1.

Если v_1 не имеет 6^--соседей (т. е. v_1 сильная), то v ничего не дает вершине v_1 по R1e2, следовательно, $\mu'(v) = \mu(v) = 6 - 6 = 0$.

Подслучай 2.2: v имеет не менее двух 5-соседей, а именно x и y. Если v инцидента 3-грани xyv, то v имеет четырех 7^+-соседей благодаря отсутствию $(6,5,6,6)$-цепей в окрестности вершины v. Заметим, что x не может быть смежна с 5-вершиной, отличной от y, ввиду отсутствия $(5,5,5,6)$-цепей в окрестности вершины x. По симметрии это же верно для y. Следовательно, исключение из R2a здесь не применяется (как и исключение R2b), и $\mu'(v) \geq 0 - 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} = 0$ по R2a и R1.

В противном случае согласно утверждению 4 не существует 3-цикла xyv. Более того, каждый 5-сосед вершины v является сильным, поскольку не существует $(6,5,6,5)$-цепей в P_5. Отсюда следует, что v ничего не дает своим 5-соседям согласно R1e2, а значит, $\mu'(v) = \mu(v) = 6 - 6 = 0$.

Случай 3: $d(v) = 7$. Заметим, что v имеет не более двух последовательных 5-соседей ввиду отсутствия $(5,5,5,7)$-цепей в окрестности вершины v, а следовательно, не более четырех 5-соседей.

Подслучай 3.1: v имеет не более одного 5-соседа. Тогда $\mu'(v) \geq 1 - \frac{1}{4} - 6 \times \frac{1}{8} = 0$ по R1, R2.

Подслучай 3.2: v имеет в точности двух 5-соседей. Тогда v имеет не более четырех 6-соседей из-за отсутствия $(6,5,6,6)$-цепей вокруг v, откуда $\mu'(v) \geq 1 - 2 \times \frac{1}{4} - 4 \times \frac{1}{8} = 0$.

Подслучай 3.3: v смежна в точности с тремя 5-вершинами. Предположим, что $d(v_1) = d(v_2) = 5$. Если $d(v_4) = 5$, то $d(v_3) \geq 7$, а в множестве $\{v_5, v_6, v_7\}$ существует другая 7^+-вершина. Если $d(v_5) = 5$, то найдется 7^+-вершина в каждом из множеств $\{v_3, v_4\}$ и $\{v_6, v_7\}$.

Пусть $d(v_1) = d(v_3) = d(v_5) = 5$. Тогда 7^+-вершина найдется в каждом из множеств $\{v_2, v_4\}$ и $\{v_6, v_7\}$. Это значит, что v имеет не более двух 6-соседей, поэтому $\mu'(v) \geq 1 - 3 \times \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{8} = 0$.

Подслучай 3.4: v имеет в точности четырех 5-соседей. Можно считать, что $d(v_1) = d(v_2) = d(v_4) = d(v_6) = 5$ или $d(v_1) = d(v_2) = d(v_5) = d(v_6) = 5$. Следовательно, $d(v_3) \geq 7$ и $d(v_7) \geq 7$ в обоих случаях, поэтому достаточно заметить, что единственно возможный 6-сосед (v_5 или v_4) ничего не получает по R2b или исключению из R2a соответственно. Таким образом, $\mu'(v) \geq 1 - 4 \times \frac{1}{4} = 0$.

Случай 4: $d(v) \geq 8$. Если R1e1 применяется к ребру vv_1, то $d(v_2) \geq 8$ ввиду симметрии, а v_2 ничего не получает от v. Чтобы оценить общий заряд, передаваемый от v, усредним получаемый 5-вершиной v_1 заряд в R1e1 до $\frac{1}{4}$ следующим образом: v дает $\frac{1}{4}$ на v_1 и $\frac{1}{8}$ — на v_2. Заметим, что при таком усреднении v_2 получает не более $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$. Это означает, что $\mu'(v) \geq d(v) - 6 - d(v) \times \frac{1}{4} = \frac{3(d(v)-8)}{4} \geq 0$, что и требовалось.

Противоречие $0 \leq -12$ с (1) завершает доказательство теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wernicke P.* Über den Kartographischen Vierfarbensatz // Math. Ann. 1904. V. 58. P. 413–426.
2. *Franklin P.* The four color problem // Amer. J. Math. 1922. V. 44. P. 225–236.
3. *Бородин О. В.* Решение задач Коцига и Грюнбаума об отделимости цикла в плоском графе // Мат. заметки. 1989. V. 46, N 5. P. 9–12.
4. *Jendrol' S., Madaras T.* On light subgraphs in plane graphs with minimum degree five // Discuss. Math. Graph Theory. 1996. V. 16. P. 207–217.
5. *Madaras T.* Note on the weight of paths in plane triangulations of minimum degree 4 and 5 // Discuss. Math. Graph Theory. 2000. V. 20, N 2. P. 173–180.
6. *Ando K., Iwasaki S., Kaneko A.* Every 3-connected planar graph has a connected subgraph with small degree sum (Japanese) // Annual meeting of Mathematical Society of Japan. 1993.
7. *Borodin O. V.* Structural properties of plane maps with minimum degree 5 // Math. Nachr. 1992. V. 18. P. 109–117.
8. *Borodin O. V.* Structural theorem on plane graphs with application to the entire coloring // J. Graph Theory. 1996. V. 23, N 3. P. 233–239.
9. *Borodin O. V.* Minimal vertex degree sum of a 3-path in plane maps // Discuss. Math. Graph Theory. 1997. V. 17, N 2. P. 279–284.
10. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Describing $(d-2)$-stars at d-vertices, $d \leq 5$, in normal plane maps // Discrete Math. 2013. V. 313, N 17. P. 1700–1709.
11. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Describing 4-stars at 5-vertices in normal plane maps with minimum degree 5 // Discrete Math. 2013. V. 313, N 17. P. 1710–1714.
12. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Describing 3-faces in normal plane maps with minimum degree 4 // Discrete Math. 2013. V. 313, N 23. P. 2841–2847.
13. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Describing tight descriptions of 3-paths in triangle-free normal plane maps // Discrete Math. 2015. V. 338, N 11. P. 1947–1952.
14. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Jensen T. R.* 5-stars of low weight in normal plane maps with minimum degree 5 // Discuss. Math. Graph Theory. 2014. V. 34, N 3. P. 539–546.
15. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Jensen T. R., Kostochka A. V., Yancey M. P.* Describing 3-paths in normal plane maps // Discrete Math. 2013. V. 313, N 23. P. 2702–2711.
16. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Kostochka A. V.* Describing faces in plane triangulations // Discrete Math. 2014. V. 319. P. 47–61.
17. *Borodin O. V., Woodall D. R.* Short cycles of low weight in normal plane maps with minimum degree 5 // Discuss. Math. Graph Theory. 1998. V. 18, N 2. P. 159–164.
18. *Ferencová B., Madaras T.* Light graphs in families of polyhedral graphs with prescribed minimum degree, face size, edge and dual edge weight // Discrete Math. 2010. V. 310, N 12. P. 1661–1675.
19. *Hudak P., Madaras T.* On doubly light triangles in plane graphs // Discrete Math. 2013. V. 313, N 19. P. 1978–1988.
20. *Jendrol' S.* Paths with restricted degrees of their vertices in planar graphs // Czech. Math. J. 1999. V. 49. P. 481–490.
21. *Jendrol' S.* A structural property of convex 3-polytopes // Geom. Dedicata. 1997. V. 68. P. 91–99.
22. *Jendrol' S., Voss H.-J.* Light subgraphs of graphs embedded in the plane – a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 406–421.
23. *Lebesgue H.* Quelques conséquences simples de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 19. P. 27–43.

24. *Madaras T.* Two variations of Franklin's theorem // Tatra Mt. Math. Publ. 2007. V. 36. P. 61–70.

Статья поступила 23 ноября 2015 г.

Бородин Олег Вениаминович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
brdnoleg@math.nsc.ru

Иванова Анна Олеговна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
shmgnanna@mail.ru