Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2017. Том 58, № 1

УДК 517.962.22+517.547.9

ТЕОРЕМА РИМАНА — РОХА ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА ДЫННИКОВА — НОВИКОВА

Д. В. Егоров

Аннотация. Доказывается аналог теоремы Римана — Роха для дискретного комплексного анализа Дынникова — Новикова.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.111

Ключевые слова: дискретная голоморфная функция, дискретная теорема Римана — Роха.

В работе доказан дискретный аналог теоремы Римана — Роха для дискретизации комплексного анализа, предложенного И. А. Дынниковым и С. П. Новиковым [1]. Ранее дискретные аналоги теоремы Римана — Роха рассматривались для другой дискретизации комплексного анализа в работе А. Бобенко и М. Скопенкова [2] и для графов в работе Бейкера и Норина [3].

Будем рассматривать триангуляции компактных римановых поверхностей, где треугольники имеют черно-белую раскраску и к каждой вершине симплициального комплекса примыкает четное число граней, не меньшее четырех. Данные конечные симплициальные комплексы будем называть *дискретными римановыми поверхностями*.

Незначительно изменим определение дискретного оператора Дольбо из [1].

Вещественные функции на вершинах и гранях дискретной римановой поверхности C будем называть *дискретными функциями* и *1-формами на* C соответственно.

Векторные пространства функций и 1-форм на C будем обозначать через $\Omega^0(C)$ и $\Omega^1(C)$ соответственно. Пространство 1-форм, равных нулю на всех черных или белых симплексах, будем обозначать через Ω^1_W или Ω^1_B соответственно: $\Omega^1 = \Omega^1_W \oplus \Omega^1_B$.

Оператор $Q : \Omega^0(C) \to \Omega^1_W(C)$ ставит в соответствие каждому белому треугольнику сумму чисел в его вершинах, каждому черному — нуль. Оператор Q^+ действует аналогично с заменой цветов.

Рассмотрим двойственный комплекс C^* (вообще говоря, не симплициальный), вершинам и граням которого соответствуют грани и вершины C и вершины которого соединяются ребром, если грани C имеют общее ребро. Раскраска граней C индуцирует раскраску вершин C^*.

Работа выполнена частично при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–4382.2014.1) и стипендии фонда «Династия» для молодых математиков.

Вещественные функции на гранях двойственного комплекса C^* будем называть 2-*формами на* C.

Дискретные операторы Дольбо Q и Q^+ действуют из $\Omega^1(C)$ в $\Omega^2(C)$ по следующему правилу: Q ставит в соответствие каждой грани C^* сумму чисел в его черных вершинах, Q^+ — сумму в белых вершинах.

Нетрудно заметить, что $Q^2 = (Q^+)^2 = 0$ и $QQ^+ = Q^+Q$, поэтому $(Q + Q^+)^2 \neq 0$.

По аналогии с непрерывным случаем будем говорить, что дискретная функция является *голоморфной на* C, если $Q^+f = 0$ на всех черных треугольниках из C. Если $f \neq 0$ на некотором черном треугольнике Q^+, то будем считать, что данный черный треугольник является *полюсом* f, а сама функция *мероморфна* (идея определения взята из [4]).

Очевидно, что произвольная дискретная функция мероморфна.

Аналогично функциям определим голоморфные и мероморфные 1-формы с дополнительным условием, что они принадлежат $\Omega^1_W(C)$. Нули и полюсы мероморфных 1-форм лежат на белых вершинах и гранях C^* соответственно.

Так как нули и полюсы принадлежат различным пространствам и не определены старшие порядки, изменим классическое определение дивизора.

Дивизором (функций) D на поверхности C будем называть пару $D = (V(D), F(D))$, где $V(D)$ и $F(D)$ — множества попарно различных вершин и симплексов C соответственно.

Везде далее будем рассматривать только «голоморфные» дивизоры D такие, что $F(D)$ содержит только черные треугольники.

Через $h^0(C, D)$ будем обозначать размерность векторного пространства мероморфных функций $f \in \Omega^0(C)$ таких, что (а) множество нулей f содержит $V(D)$; (б) множество полюсов f является подмножеством $F(D)$.

Дискретную риманову поверхность, полученную обращением цветов граней, будем обозначать через $\overline{C}$. Через $\overline{D}$ будем обозначать образ дивизора D при отображении на $\overline{C}$.

Через $h^1(C, D)$ будем обозначать размерность векторного пространства мероморфных 1-форм $\mu \in \Omega^1_W(\overline{C})$ таких, что (а) множество нулей μ содержит $F(\overline{D})$; (б) множество полюсов μ является подмножеством $V(\overline{D})$. Здесь мы неявно использовали двойственность между C и C^*.

Дискретная теорема Римана — Роха. *Пусть C — дискретная риманова поверхность и D — дивизор на ней. Тогда верна следующая формула:*

$$h^0(C, D) - h^1(C, D) = \deg D + \chi(C), \qquad (\star)$$

где $\deg D = |F(D)| - |V(D)|$; $\chi(C)$ — эйлерова характеристика C.

Доказательство. Из определения величины $h^0(C, D)$ следует, что она является размерностью пространства решений системы линейных уравнений $Q^+f = 0$, в которой переменных столько, сколько вершин в C за вычетом тех, что в $V(D)$, а уравнений столько, сколько черных треугольников за вычетом тех, что в $F(D)$. Из теоремы о ранге и дефекте из линейной алгебры следует, что

$$h^0(C, D) = \#\{\text{вершин}\} - |V(D)| - \operatorname{rk} Q^+.$$

Покажем, что $h^1(C, D)$ является размерностью пространства решений для системы с транспонированной матрицей. Для этого заметим, что

$$(\alpha^0, (Q^+)^t\beta^1) = (Q^+\alpha^0, \beta^1) = (\alpha^0, *Q^+*\beta^1), \quad \alpha^0 \in \Omega^0(C),\ \beta^1 \in \Omega^1(C),$$

где $(\cdot,\cdot)$ — стандартное евклидово скалярное произведение; $* : \Omega^i(C) \to \Omega^{2-i}(\overline{C})$ является композицией отображений двойственности и обращения цветов («звездочка Ходжа»). Следовательно,

$$h^1(C,D) = \#\,\{\text{черных треугольников}\} - |F(D)| - \operatorname{rk} Q^+.$$

Таким образом,

$$h^0 - h^1 = \#\{\text{вершин}\} - \#\{\text{треугольников}\}/2 + \deg D = \chi(C) + \deg D,$$

где мы использовали равенство $2\#\{\text{ребер}\} = 3\#\{\text{треугольников}\}$, верное для симплициального комплекса C. $\square$

Автор благодарен И. А. Дынникову за проявленный интерес к данной работе и ценные замечания и И. А. Тайманову за поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dynnikov I. A., Novikov S. P.* Geometry of the triangle equation on two-manifolds // Mosc. Math. J. 2003. V. 3, N 2. P. 419–438.
2. *Bobenko A., Skopenkov M.* Discrete Riemann surfaces: linear discretization and its convergence // J. Reine Angew. Math. 2014. DOI 10.1515/crelle-2014-0065.
3. *Baker M., Norine S.* Riemann–Roch and Abel–Jacobi theory on a finite graph // Adv. Math. 2007. V. 215, N 2. P. 766–788.
4. *Grinevich P. G., Novikov R. G.* The Cauchy kernel for the Novikov–Dynnikov DN-discrete complex analysis in triangular lattices // Russ. Math. Surv. 2007. V. 62, N 4. P. 799–801.

Статья поступила 3 мая 2016 г.

Егоров Дмитрий Владимирович
Институт математики и информатики,
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
egorov.dima@gmail.com