*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2017. Том 58, № 1*

*УДК 517*

# О СИСТЕМЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССА А, БИОРТОГОНАЛЬНОЙ С ВЕСОМ ЛАКУНАРНОЙ СИСТЕМЕ СТЕПЕНЕЙ НА ЛУЧЕ

**Ф. Н. Гарифьянов, Е. В. Стрежнева**

**Аннотация.** Построена система целых функций экспоненциального типа из класса А, биортогональная с весом некоторой системе степеней на луче. Их индикаторной диаграммой является отрезок мнимой оси. Функции, аналитические в круговой луночке, представляются биортогональными рядами.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.108

**Ключевые слова:** целые функции класса А, метод регуляризации, проблема моментов.

Хорошо известно, что

$$\int_0^\infty \exp(-x)\sin(x)x^{4n+3}\,dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(см. [1, гл. III, п. 3.2.5]. Применяемый в [1] метод контурного интегрирования позволяет получить и более общие равенства

$$\int_0^\infty F(x)\exp(-x)\sin(x)x^{4n+3}\,dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $F(z)$ — целая функция экспоненциального типа (ц.ф.э.т.), причем $F(iz) = F(z)$ и значение ее индикатора $h(0)$ меньше 1 (более подробно по этому поводу см. [2]). У таких ц.ф.э.т. индикатор имеет период $\frac{\pi}{2}$. Для них совершенно аналогично имеем еще одно соотношение

$$L[F, n] \equiv \int_0^\infty F(x)\exp(-x)\cos(x)x^{4n+1}\,dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{1}$$

Основная цель данной работы — исследовать лакунарную проблему моментов Стильтьеса

$$L[F, n] = \beta_n, \quad n = 0, 1, 2 \dots, \tag{2}$$

в классе четных ц.ф.э.т. $F(z) \in A$ [3, гл. V], индикаторной диаграммой которых является отрезок $\Gamma = [-i, i]$. Это означает, в частности, что их индикатор имеет период $\pi$.

Работа состоит из трех разделов. Пусть $D$ — квадрат с вершинами $-1-i, 1-i, 1+i, i-1$, перечисленными в порядке обхода его положительно ориентированной границы $\partial D$. В разд. 1 рассматривается вспомогательное восьмиэлементное функциональное уравнение

$$(Vf)(z) \equiv (V_1 f)(z) - i(V_1 f)(iz) = g(z), \quad z \in D, \tag{3}$$

где $(V_1 f)(z) \equiv f(z+1+i) + f(z-1+i) + f(z-1-i) + f(z+1-i)$, при следующих предположениях.

1. Решение ищется в классе функций $B$, представимых интегралом типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (\tau - z)^{-1} \phi(\tau)\, d\tau \tag{4}$$

с четной плотностью $\phi(\tau) \in H(\Gamma)$. Другими словами, это класс нечетных функций, голоморфных в плоскости с двубережным разрезом по $\Gamma$ и исчезающих на бесконечности.

2. Свободный член $g(z)$ голоморфен в $D$ и $g(iz) = ig(z)$, а его граничное значение $g^+(t)$ принадлежит $H(\partial D)$.

В разд. 2 рассматривается проблема моментов (2) для ц.ф.э.т., ассоциированных по Борелю [4, § 1] с нижними функциями $f(z) \in B$. В разд. 3 обсуждаются различные интерполяционные задачи, связанные с данной проблемой. В частности, строятся решения однородной проблемы моментов (1), принципиально отличные от указанных выше.

**1.** Используя равенство (4), получим

$$(3) \Leftrightarrow (E\phi)(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} A(z,\tau)\phi(\tau)\, d\tau = g(z), \quad z \in D, \tag{5}$$

где $A(z,\tau) = A_1(z,\tau) - iA_1(iz,\tau)$ и $A_1(z,\tau) = A_1(w) = (w+1+i)^{-1} + (w-1-i)^{-1} + (w-1+i)^{-1} + (w+1-i)^{-1}$, причем $w = \tau - z$. Пусть $t \in \Gamma$ и в соотношении (5) $z \to t \pm 1$. Тогда $(E^+\phi)(t \pm 1) = \pm 2^{-1}\phi(\beta(t)) + (E\phi)(t \pm 1)$ (знаки согласованы). Здесь $\beta(t) = \{t - i, 0 < \operatorname{Im} t < 1; t + i, -1 < \operatorname{Im} t < 0\}$ — нечетный инволютивный сохраняющий ориентацию на $\Gamma$ сдвиг, разрывный в нуле. Поэтому $(E^+\phi)(t+1) - (E^+\phi)(t-1) = (T\phi)(t)$, где

$$(T\phi)(t) \equiv \phi[\beta(t)] + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} K(t,\tau)\phi(\tau)\, d\tau = g^+(t+1) - g^+(t-1), \tag{6}$$

и $K(t,\tau) = (u-2-i)^{-1} + (u-2+i)^{-1} - i(v-1-2i)^{-1} - i(v+1-2i)^{-1} - (u+2+i)^{-1} - (u+2-i)^{-1} + i(v+1+2i)^{-1} + i(v-1+2i)^{-1}$, где $u = \tau - t$, $v = \tau - it$.

**Лемма 1.** *Однородное уравнение Фредгольма $T\phi = 0$ имеет лишь тривиальное решение.*

Доказательство следует из оценки $|K(t,\tau)| \le 0.29584\ldots$.

Единственное решение $\phi(t)$ неоднородного уравнения (6) четно. Действительно, заменим переменные $\tau$ и $t$ на $-\tau$ и $-t$ соответственно. Для функции $\psi(t) = \phi(t) - \phi(-t)$ имеем $T\psi = 0$, т. е. в силу леммы 1 $\psi \equiv 0$. Функция $\phi(\beta(\tau))$ непрерывна в нуле ввиду четности.

Осуществим обратный переход от интегрального уравнения (6) к исходной задаче (3). Вообще говоря, получим $(Vf)(z) = g(z) + \psi(z)$, $z \in D$. Для голоморфной в $D$ функции $\psi(z)$ со свойством $\psi(iz) = \psi(z)$ в силу (5) и (6) выполняются равенства $\psi^+(1+i\alpha) = \psi^+(-1+i\alpha)$ и $\psi^+(\alpha+i) = \psi^+(\alpha-i)$ для всех $\alpha \in (-1,0)\cup(0,1)$. Это позволяет продолжить функцию $\psi(z)$ на всю плоскость до двоякопериодической функции $\psi(z)$ с изолированными особыми точками вида $1+i+2m+2ni$, $1+2m+2ni$, где $m$ и $n$ — целые числа. В каждой из этих точек $\psi(z)$ имеет особенности того же типа, что и интеграл (4) в окрестности концов отрезка Г, т. е. интегрируемые особенности. Следовательно, все особые точки функции $\psi(z)$ устранимые, и целая ограниченная функция $\psi(z)$ по теореме Лиувилля есть константа $c$, которая в силу равенства $c = ic$ равна 0, т. е. получили (3).

**Теорема 1.** *В классе B уравнение* (3) *безусловно разрешимо и имеет единственное решение.*

**2.** Перепишем уравнение (3) в терминах ц.ф.э.т., пользуясь нечетностью решения и формулой преобразования Бореля

$$f(z) = \int_0^\infty F(x)\exp(-zx)\,dx, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Тогда

$$(3) \Leftrightarrow -4\int_0^\infty F(x)\exp(-x)\cos x[\sin(xz) + \operatorname{sh}(xz)]\,dx = g(z), \quad z \in D. \tag{7}$$

Обратим внимание на своеобразие этого уравнения. Его ядро состоит из двух слагаемых. Если бы одно из этих слагаемых отсутствовало, то такое уравнение решалось бы в явном виде с помощью свойств синус-преобразования Фурье. При этом областью сходимости соответствующего несобственного интеграла была бы полоса шириной 2 (вертикальная или горизонтальная, симметричная относительно осей координат). В рассматриваемом случае областью сходимости является квадрат $D$, образованный пересечением горизонтальной и вертикальной полос. Поэтому и возникает необходимость исследования уравнения (3) методом интегральных уравнений.

Положим

$$g(z) = -4\sum_{k=0}^\infty \frac{\beta_k z^{4k+1}}{(4k+1)!}, \tag{8}$$

причем радиус сходимости этого ряда $R$ больше $\sqrt{2}$. Приравнивая коэффициенты Маклорена левой и правой частей равенства (7), получим (2).

**Теорема 2.** *Лакунарная проблема моментов Стильтьеса* (2) *в классе четных ц.ф.э.т. $F(z) \in A$, ассоциированных по Борелю с нижними функциями $f(z) \in B$, безусловно разрешима и имеет единственное решение.*

Пусть $g_m(z) = [(4m+1)!]^{-1}z^{4m+1}$. Возьмем систему интегралов типа Коши (4) $\{f_m(z)\} : (Vf_m)(z) = g_m(z)$, $z \in D$, $m = \overline{0,\infty}$, и систему ц.ф.э.т. $\{F_m(z)\}$, ассоциированных с ними по Борелю. Ясно, что

$$-4L[F_m, k] = \delta_{m,k}. \tag{9}$$

Эти ц.ф.э.т. ограничены по модулю на вещественной оси и вполне регулярного роста [5, гл. 1, § 4, п. 3].

Замечание 1. У ц.ф.э.т. $F_m(z)$ индикатор $h(\theta)$ равен $|\sin\theta|$. В общем случае у ц.ф.э.т. $F(z)$, удовлетворяющих (2), индикатор $h(\theta)$ равен $\gamma|\sin\theta|$, где $\gamma \in [0,1]$.

**Теорема 3.** *Коэффициенты Маклорена ц.ф.э.т.*

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^{4k+1}}{(4k+1)!}, \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[4k+1]{|a_k|} < 1$$

*могут быть найдены из условий биортогональности* (9), *т. е.*

$$a_k = -4(4k+2)! \int_0^{\infty} \Phi(x)\cos(x)\exp(-x)F_k(x)\,dx.$$

Доказательство практически идентично приведенному в [6] в случае двенадцатиэлементного функционального уравнения.

Замечание 2. Основную роль при исследовании таких задач играет лемма 1, т. е. возможность применения принципа сжимающих отображений в банаховом пространстве $C(\Gamma)$ к однородному уравнению Фредгольма $T\phi = 0$. Так, не удается до конца исследовать функциональное уравнение $(V_1 f)(z) + i(V_1 f)(iz) = g(z)$, $z \in D$, где $g(iz) = -ig(z)$ в классе $B$, поскольку при оценке модуля ядра регуляризованного уравнения уже получим $|K(t,\tau)| \le 3.38$. Здесь можно сделать вывод только о том, что исходная задача имеет не более чем конечное число условий разрешимости. Все они являются условиями разрешимости интегрального уравнения Фредгольма, полученного при ее регуляризации.

**3.** Вернемся к однородной проблеме моментов (1) и построим другие ее решения в классе ц.ф.э.т., отличные от указанных во введении. Это, например, функции $F(z) = z^{4j}F_m(z)$ при $j > m$. Они также представляют собой ц.ф.э.т. из класса A, индикаторной диаграммой которых является отрезок Г. Но их нижние функции, ассоциированные с ними по Борелю, уже не представимы в виде интегралов типа Коши (4), плотность которых удовлетворяет ранее наложенным ограничениям.

Четные плотности интегралов типа Коши $f_m(z)$ по самому своему определению удовлетворяют равенствам

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \phi_m(\tau)A_1^{(4k+1)}(\tau)\,d\tau = \delta_{m,k} \Leftrightarrow \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \phi_m[\beta(\tau)]A_1^{(4k+1)}(\beta(\tau))\,d\tau = \delta_{m,k}. \quad (10)$$

Функции $\psi_m(\tau) = \phi_m(\beta(\tau))$ — это значения на Г функций $\psi_m(z)$, голоморфных в квадрате $D$ (см. (6)). Рассмотрим круговую луночку $D_0$, ограниченную дугами $l^{\pm}$ двух окружностей $|z \pm 1| = \sqrt{2}$ $(0 \in D_0)$ (знаки согласованы). Обозначим через $B_1$ класс четных функций $\Phi(z)$, голоморфных в $D_0$, причем $\Phi^+(t) \in C^2(\partial D_0)$. Поставим такой функции в соответствие ряд

$$\Phi(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \theta_m \psi_m(z), \quad z \in D_0, \quad (11)$$

с естественным образом определенными коэффициентами

$$\theta_m = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Phi(t)A_1^{(4m+1)}(\beta(t))\,dt. \quad (12)$$

**Теорема 4.** *Пусть* $\Phi(z) \in B_1$ *и* $\Phi(0) = 0$*. Тогда в формуле* (11) *имеет место знак равенства, причем ряд сходится абсолютно и равномерно в замыкании* $\overline{D_0}$.

Доказательство. При $\tau \in \partial D_0$ в силу (6) существует $C > 0$ такое, что $|\psi_m(\tau)| < C4^m[(4m+1)!]^{-1}$. Заметим, что $A_1(\beta(\tau)) = (\tau-1)^{-1}+(\tau+1)^{-1}+\mu(\tau)$. Здесь $\mu(\tau) = \{(\tau+1+2i)^{-1}+(\tau-1+2i)^{-1}, \operatorname{Im}\tau < 0; (\tau+1-2i)^{-1}+(\tau-1-2i)^{-1}, \operatorname{Im}\tau > 0\}$. Дважды проинтегрируем по частям интеграл в правой части равенства (12), взяв в качестве $u$ соответственно $\Phi$ и $\Phi'$. Внеинтегральное слагаемое, возникающее при первом интегрировании по частям, исчезает, поскольку $\Phi(0) = 0$ и $A_1^{(4k)}(0) = 0$. Затем используем тождество

$$\int\limits_{\Gamma} \Phi''(\tau)[(\tau-1)^{-k} + (\tau+1)^{-k}]\,d\tau = \int\limits_{l^+} \Phi''^{+}(\tau)(\tau+1)^k\,d\tau - \int\limits_{l^-} \Phi''^{+}(\tau)(\tau-1)^{-k}\,d\tau,$$

справедливое в силу теоремы Коши. Здесь $\partial D_0 = l^+ \cup l^-$ — положительно ориентированная граница. Поэтому при $m \to \infty$ имеем $|\theta_m \phi_m(t)| \sim m^{-2}$, $t \in \partial D_0$, откуда следует абсолютная и равномерная сходимость ряда (11).

Докажем, что ряд (11) сходится именно к той функции, по которой он был построен. Предположим противное. Обозначим через $\mu(z)$ разность между исходной функцией и рядом (11). Все коэффициенты (12) разности $\mu$ равны нулю, т. е. для интеграла типа Коши $\mu_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\tau-z)^{-1}\mu(\tau)\,d\tau$ имеем $(V\mu_1)(z) = 0$, $z \in D$. В силу леммы 1 $\mu_1(z) \equiv 0 \Rightarrow \mu(z) \equiv 0$.

Авторы выражают благодарность рецензенту за ценные дополнения.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980.
2. *Гарифьянов Ф. Н.* Моменты Стильтьеса целых функций экспоненциального типа // Мат. заметки. 2000. Т. 67, № 5. С. 674–679.
3. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
4. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1976.
5. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
6. *Гарифьянов Ф. Н.* Моменты Стильтьеса целых функций класса A // Изв. вузов. Математика. 2006. № 9. С. 23–28.


*Статья поступила 13 октября 2015 г.*

Гарифьянов Фархат Нургаязович
Казанский гос. энергетический университет,
ул. Красносельская, 51, Казань 420066
f.garifyanov@mail.ru

Стрежнева Елена Васильевна
Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А. Н. Туполева,
ул. К. Маркса, 10, Казань 420111
strezh@yandex.ru