Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2017. Том 58, № 2

УДК 517.983+517.968.25

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО РОДА С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В. Б. Коротков

Аннотация. Рассматриваются линейные функциональные уравнения 3-го рода в L_2 с произвольными измеримыми коэффициентами и неограниченными интегральными операторами с ядрами, удовлетворяющими широким условиям. Предлагаются методы редукции этих уравнений линейными непрерывными обратимыми преобразованиями либо к эквивалентным интегральным уравнениям 1-го рода с ядерными операторами, либо к эквивалентным интегральным уравнениям 2-го рода с квазивырожденными карлемановскими ядрами. К получающимся после редукции интегральным уравнениям применимы различные точные и приближенные методы решения, в частности, два приближенных метода, разработанных в этой статье.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.207

Ключевые слова: линейные интегральные уравнения 1-го, 2-го, 3-го родов, коэффициент, интегральный оператор, карлемановский интегральный оператор, квазивырожденное карлемановское ядро, ядерный оператор, приближенные методы решения интегральных уравнений.

Пусть (X,μ) — пространство с σ-конечной положительной мерой μ. *Атомом меры* μ называется измеримое множество положительной меры, не представимое в виде объединения двух непересекающихся множеств с положительными мерами. Будем говорить, что мера μ *не является чисто атомической*, если в X имеется множество положительной меры, не содержащее атомов меры μ.

Обозначим через $L_0(\mu) := L_0(X,\mu)$ совокупность всех измеримых почти всюду конечных функций на X с обычным отождествлением функций, отличающихся одна от другой лишь на множестве меры 0. Через $L_2(\mu) := L_2(X,\mu)$ обозначим пространство всех элементов f из $L_0(\mu)$ с конечной нормой

$$\|f\| = \left(\int\limits_X |f(t)|^2\,d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Интеграл здесь и всюду далее понимается в лебеговом смысле. Через $(\cdot,\cdot)$ будем обозначать скалярное произведение в $L_2(\mu)$. Меру μ будем называть *сепарабельной*, если $L_2(\mu)$ — сепарабельное пространство. Через $B(L_2(\mu))$ обозначим совокупность всех линейных непрерывных операторов, действующих из $L_2(\mu)$ в $L_2(\mu)$, через χ_e — характеристическую функцию множества e, через P_e — оператор умножения на χ_e: $P_e f = \chi_e f$.

Линейный оператор $L : D_L \subset L_2(\mu) \to L_0(\mu)$ называется *интегральным*, если существует функция $K(s,t) \in L_0(X\times X, \mu\times\mu)$ такая, что для всех $f \in D_L$

$$Lf(s) = \int\limits_X K(s,t)f(t)\,d\mu(t) \tag{1}$$

для почти всех $s \in X$. Функция $K(s,t)$ называется *ядром интегрального оператора* L. Будем говорить, что ядро K порождает интегральный оператор L по формуле (1).

Интегральный оператор называется *карлемановским*, если его ядро $K(s,t)$ удовлетворяет условию Карлемана

$$\int\limits_X |K(s,t)|^2\, d\mu(t) < \infty$$

для почти всех $s \in X$.

Интегральный оператор $M \in B(L_2(\mu))$ называется *оператором Гильберта — Шмидта*, если его ядро $M(s,t)$ удовлетворяет условию Гильберта — Шмидта

$$\int\limits_X \int\limits_X |M(s,t)|^2\, d\mu(t) d\mu(s) < \infty.$$

Каждый интегральный оператор Гильберта — Шмидта — компактный карлемановский интегральный оператор.

Оператор $J \in B(L_2(\mu))$ называется *ядерным*, если он представим в виде произведения двух интегральных операторов Гильберта — Шмидта из $B(L_2(\mu))$.

Ядерный оператор является интегральным оператором Гильберта — Шмидта, и его ядро $J(s,t)$ удовлетворяет условию $|J(s,t)| \leq \Lambda(s)\Lambda(t)$ для $(\mu\times\mu)$-почти всех $(s,t) \in X \times X$, где $\Lambda \in L_2(\mu)$. Оператор $J \in B(L_2(\mu))$ ядерный тогда и только тогда, когда найдутся последовательности $\{w_n\}$, $\{v_n\}$ из $L_2(\mu)$ такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|w_n\|\,\|v_n\| < \infty \tag{2}$$

и для всех $f \in L_2(\mu)$

$$Jf = \sum_{n=1}^{\infty} (f, w_n) v_n. \tag{3}$$

Число $\inf \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|w_n\|\,\|v_n\|$, где инфимум берется по всем $\{w_n\}$, $\{v_n\}$, удовлетворяющим (2), (3), называется *ядерной нормой* оператора J и обозначается через $\|J\|_1$. Ясно, что $\|J\| \leq \|J\|_1$, где $\|J\|$ — операторная норма.

Пусть H, H_1 — гильбертовы пространства с нормами $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_{H_1}$. Линейный оператор $V : H \to H_1$ называется *унитарным*, если $VH = H_1$ и $\|Vh\|_{H_1} = \|h\|_H$ для любого $h \in H$.

Оператор $T : D_T \subset H \to H$ называется *замыкаемым*, если из $\{f_n\} \subset D_T$, $f_n \to 0$ и $Tf_n \to f$ следует $f = 0$. Оператор $S : D_S \subset H \to H$ называется *замкнутым*, если из того, что $\{f_n\} \subset D_S$, $f_n \to u$, $Sf_n \to v$, вытекает, что $u \in D_S$ и $v = Su$. Известно [1, теорема VIII.1], что оператор, сопряженный к плотно определенному замыкаемому линейному оператору, плотно определен и замкнут.

Лемма. *Пусть мера μ сепарабельна и не является чисто атомической, H — сепарабельное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_H$, $\{T_\delta : D_{T_\delta} \subset H \to H,\ \delta \in \Delta\}$ — семейство плотно определенных в H замыкаемых линейных операторов и существует ортонормированный базис $\{h_n\}$ в H, удовлетворяющий условиям*

$$\{h_n\} \subset \bigcap_{\delta\in\Delta} D_{T_\delta^*}, \tag{4}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \sup_{\delta\in\Delta} \|T_\delta^* h_n\|_H = 0, \tag{5}$$

где T_δ^* — сопряженный к T_δ оператор с областью определения $D_{T_\delta^*}$. Пусть $\{e_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить единый для всего семейства унитарный оператор $U : H \to L_2(\mu)$ такой, что $UT_\delta U^{-1} = N_\delta + C_\delta$ для каждого $\delta \in \Delta$, где $N_\delta \in B(L_2(\mu))$ — ядерный интегральный оператор с ядерной нормой, меньшей чем ε,

$$C_\delta f(s) = \int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \overline{\varphi_{n,\delta}(t)} f(t)\, d\mu(t), \quad f \in UD_{T_\delta},\ \{\varphi_{n,\delta}\} \subset L_2(\mu). \tag{6}$$

Доказательство. В силу (5) найдется подпоследовательность $\{h_{n_k}\}$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\delta\in\Delta} \|T_\delta^* h_{n_k}\|_H = 0.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем подпоследовательность $\{u_n\} \subset \{h_{n_k}\}$, удовлетворяющую условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\delta\in\Delta} \|T_\delta^* u_n\|_H < \varepsilon. \tag{7}$$

Пусть $\{u_n^\perp\}$ — ортонормированный базис в ортогональном дополнении к замкнутой линейной оболочке $[u_{2n}]$ ортонормированной последовательности $\{u_{2n}\}$, состоящий из элементов последовательности $\{h_n\} \setminus \{u_{2n}\}$. Обозначим через $\{e_n^\perp\}$ ортонормированный базис в ортогональном дополнении к замкнутой линейной оболочке ортонормированной последовательности $\left\{\frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}}\right\}$. Определим унитарный оператор $U : H \to L_2(\mu)$ равенствами

$$Uu_n^\perp = \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}}, \quad Uu_{2n} = e_n^\perp, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Зафиксируем $\delta \in \Delta$. Для любой функции $f \in UD_{T_\delta}$ имеем

$$\begin{aligned} UT_\delta U^{-1} f &= \sum_{n=1}^{\infty} \big(UT_\delta U^{-1} f, e_n^\perp\big) e_n^\perp + \sum_{n=1}^{\infty} \left(UT_\delta U^{-1} f, \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}}\right) \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (f, UT_\delta^* u_{2n}) e_n^\perp + \sum_{n=1}^{\infty} \big(f, UT_\delta^* u_n^\perp\big) \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}} = N_\delta f + C_\delta f, \end{aligned}$$

где $N_\delta f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (f, UT_\delta^* u_{2n}) e_n^\perp$ — ядерный интегральный оператор, ядерная норма которого в силу (7) меньше чем ε,

$$C_\delta f = \int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \overline{UT_\delta^* u_n^\perp(t)} f(t)\, d\mu(t). \quad \square$$

Пусть (Y, ν) — пространство с σ-конечной положительной мерой ν. Рассмотрим в $L_2(\nu) := L_2(Y, \nu)$ линейное интегральное уравнение 3-го рода

$$a(\xi) x(\xi) - \lambda \int\limits_Y K(\xi, \eta) x(\eta)\, d\nu(\eta) = f(\xi), \tag{8}$$

где правая часть f принадлежит $L_2(\nu)$, интегральный оператор T с ядром $K(\xi,\eta)$ плотно определен в $L_2(\nu)$ и действует в $L_2(\nu)$, λ — спектральный параметр, функция $a(\xi)$, называемая коэффициентом, принадлежит $L_0(\nu) := L_0(Y,\nu)$, решение $x(\xi)$ ищется в пересечении области определения D_T оператора T и области определения D_A максимального оператора умножения на функцию $a := a(\xi)$:

$$Ah = ah, \quad h \in D_A := \{v \mid v \in L_2(\nu),\ av \in L_2(\nu)\}.$$

Определение. Число β называется *существенным значением функции* $a(\xi)$, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\nu\{\xi \mid \xi \in Y,\ |a(\xi) - \beta| < \varepsilon\} > 0.$$

Теорема 1. *Пусть меры μ, ν сепарабельны, σ-конечны и не являются чисто атомическими, $a \in L_0(\nu)$, $T : D_T \subset L_2(\nu) \to L_2(\nu)$ — плотно определенный замыкаемый интегральный оператор с ядром $K(\xi,\eta)$, удовлетворяющим условию: существует всюду положительная функция $b \in L_0(\nu)$ такая, что*

$$\int\limits_Y |K(\xi,\eta)| b(\xi)\, d\nu(\xi) \in L_2(\nu). \tag{9}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется не зависящий от λ и f унитарный оператор $U : L_2(\nu) \to L_2(\mu)$ такой, что замена $y = Ux$, $g = Uf$ приводит уравнение (8) к эквивалентному интегральному уравнению

$$\alpha y(s) + \int\limits_X \left[B(s,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \overline{\varphi_n(t)} \right] y(t)\, d\mu(t) \\ - \lambda \int\limits_X \left[N(s,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \overline{\psi_n(t)} \right] y(t)\, d\mu(t) = g(s), \tag{10}$$

где α — не зависящее от ε существенное значение функции $a(s)$, ядра $B(s,t)$, $N(s,t)$ порождают ядерные операторы из $B(L_2(\mu))$ с ядерной нормой, меньшей чем ε, $\{e_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами, $\{\varphi_n\} \subset L_2(\mu)$, $\{\psi_n\} \subset L_2(\mu)$.

Доказательство. Покажем, что в силу условия (9) интегральный оператор $T : D_T \subset L_2(\nu) \to L_2(\nu)$ продолжается до интегрального оператора $\widetilde{T}$ с тем же ядром $K(\xi,\eta)$, определенного на всем $L_2(\nu)$, со значениями в $L_0(\nu)$. Действительно,

$$\int\limits_Y \int\limits_Y |K(\xi,\eta)|\, |h(\eta)|\, d\nu(\eta) b(\xi)\, d\nu(\xi) = \int\limits_Y |h(\eta)| \int\limits_Y |K(\xi,\eta)| b(\xi)\, d\nu(\xi) d\nu(\eta) < \infty$$

для любой функции $h \in L_2(\nu)$. Следовательно, для почти всех $\xi \in Y$ имеем

$$\int\limits_Y |K(\xi,\eta)|\, |h(\eta)|\, d\nu(\eta) < \infty.$$

По теореме I.6.2 из [2] существует разбиение $\{Y_n\}$ множества Y на попарно не пересекающиеся множества с положительными мерами такое, что $P_{Y_n}\widetilde{T} : L_2(\nu) \to$

$L_2(\nu)$ — компактные операторы для любого n; здесь $P_{Y_n}h = \chi_{Y_n}h$, $h \in L_2(\nu)$. Обозначим через $\{Z_n\}$ разбиение множества Y на попарно не пересекающиеся множества с положительными мерами такое, что все функции $\chi_{Z_n}a$ принадлежат $L_\infty(\nu)$. Тогда найдется общее разбиение $\{F_n\}$ множества Y на попарно не пересекающиеся множества с положительными мерами такое, что $\chi_{F_n}a \in L_\infty(\nu)$ и $P_n\widetilde{T} : L_2(\nu) \to L_2(\nu)$ — компактные операторы, $n = 1, 2, \ldots$; здесь $P_nh = \chi_{F_n}h$, $h \in L_2(\nu)$. Кроме того, так как мера ν не является чисто атомической, можно считать без ограничения общности, что F_1 не содержит атомов меры ν.

Пусть α — какое-нибудь существенное значение сужения функции $a(\xi)$ на F_1. Тогда найдутся монотонно убывающая к 0 последовательность чисел ε_n и разбиение множества F_1 на попарно не пересекающиеся множества F_{1n}, $n = 1, 2, \ldots$, с положительными мерами такие, что

$$|a(\xi) - \alpha| < \varepsilon_n \text{ для почти всех } \xi \in F_{1n},\ n = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Положим $Q_n = P_{F_{1n}}$, где $P_{F_{1n}}h = \chi_{F_{1n}}h$, $h \in L_2(\nu)$, и рассмотрим операторы $Q_n\widetilde{T} : L_2(\nu) \to L_2(\nu)$. Так как $Q_n\widetilde{T} = Q_nP_1\widetilde{T}$, где $P_1h = \chi_{F_1}h$, $h \in L_2(\nu)$, и оператор $P_1\widetilde{T}$ компактен, все операторы $Q_n\widetilde{T} : L_2(\nu) \to L_2(\nu)$ компактны. Следовательно, $(Q_n\widetilde{T})^* : L_2(\nu) \to L_2(\nu)$ — компактные операторы. Пусть $\{\tilde{p}_{nk}\}_{k=1}^\infty$ — произвольный ортонормированный базис в $L_2(F_{1n}, \nu)$. Введя функции $p_{nk} = \chi_{F_{1n}}\widetilde{p}_{nk}$, получим ортонормированную последовательность $\{p_{nk}\}_{k=1}^\infty \subset L_2(\nu)$ функций с носителями в F_{1n}. Пусть T_1, T_2 — линейные операторы в $L_2(\nu)$ с областями определения D_{T_1}, D_{T_2}. Будем писать $T_1 \subseteq T_2$, если $D_{T_1} \subseteq D_{T_2}$ и для любого $h \in D_{T_1}$ имеет место равенство $T_1h = T_2h$. Так как $Q_nT \subseteq Q_n\widetilde{T}$, то $(Q_n\widetilde{T})^* \subseteq (Q_nT)^* = T^*Q_n$. Но оператор $(Q_n\widetilde{T})^*$ определен на всем $L_2(\nu)$. Следовательно, $T^*Q_n = (Q_n\widetilde{T})^*$. Отсюда вытекает, что $p_{nk} = Q_np_{nk} \in D_{T^*}$ для всех k, n. Кроме того, $T^*p_{nk} = T^*Q_np_{nk} = (Q_n\widetilde{T})^*p_{nk} \to 0$ при $k \to \infty$, поскольку $(Q_n\widetilde{T})^*$ — компактный оператор. Выберем k_n так, что

$$|||T^*p_{nk_n}||| < \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

где $|||\cdot|||$ — норма в $L_2(\nu)$. Тогда в силу (11)

$$|||(A^* - \bar{\alpha}1)p_{nk_n}||| < \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

где A — введенный выше максимальный оператор умножения на функцию $a(\xi)$.

Пусть $\{\tilde{q}_{mj}\}$ — произвольный ортонормированный базис в $L_2(F_m, \nu)$, $m = 2, \ldots$. Введем функции $q_{mj} = \chi_{F_m}\tilde{q}_{mj}$. Покажем, что все q_{mj} принадлежат D_{T^*}. Действительно, подобно предыдущему $T^*q_{mj} = T^*P_mq_{mj} = (P_m\widetilde{T})^*q_{mj}$, где $P_mh = \chi_{F_m}h$, $h \in L_2(\nu)$, $m = 2, \ldots$. Рассмотрим семейство

$$\left(\bigcup_{n=1}^\infty \{p_{nk}\}\right) \cup \left(\bigcup_{m=2}^\infty \{q_{mj}\}\right).$$

В силу того, что множества F_{1n}, F_m, $n = 1, 2, \ldots$, $m = 2, 3, \ldots$, попарно не пересекаются, это семейство ортонормированное. Записав его в виде последовательности $\{h_n\}$, получим ортонормированный базис в $L_2(\nu)$, принадлежащий пересечению областей определения операторов $A^* - \bar{\alpha}1$ и T^*. При этом базис $\{h_n\}$ содержит подпоследовательность $\{p_{nk_n}\}$, удовлетворяющую (12), (13). Отсюда по лемме, примененной к семейству из двух операторов $A - \alpha 1$ и T, получим, что найдется не зависящий от λ и f унитарный оператор $U : L_2(\nu) \to L_2(\mu)$ такой, что

$$U(A - \alpha 1)U^{-1} = B + C, \quad UTU^{-1} = N + D, \tag{14}$$

где B, N — ядерные интегральные операторы из $B(L_2(\mu))$ с ядрами $B(s,t)$, $N(s,t)$ и ядерной нормой, меньшей чем ε,

$$\begin{aligned} Ch(s) &= \int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \overline{\varphi_n(t)} h(t)\, d\mu(t), \\ Dh(s) &= \int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \overline{\psi_n(t)} h(t)\, d\mu(t), \end{aligned} \tag{15}$$

$\{\varphi_n\} \subset L_2(\mu)$, $\{\psi_n\} \subset L_2(\mu)$. Записав (8) в виде $\alpha x + (A - \alpha 1)x - \lambda T x = f$ и сделав замену $y = Ux$, получим

$$\alpha U^{-1} y + (A - \alpha 1) U^{-1} y - \lambda T U^{-1} y = f.$$

Применив к обеим частям этого уравнения оператор U, придем к уравнению

$$\alpha y + U(A - \alpha 1) U^{-1} y - \lambda U T U^{-1} y = Uf = g.$$

Отсюда, пользуясь (14), (15), получим уравнение (10), эквивалентное интегральному уравнению (8). $\square$

Замечание. Условие (9) выполняется, если ядро $K(s,t)$ удовлетворяет условию Карлемана

$$\Lambda(\xi) := \left(\int\limits_Y |K(\xi,\eta)|^2\, d\nu(\eta) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

для почти всех $\xi \in Y$. В этом случае в качестве разбиения $\{Y_n\}$ в доказательстве теоремы можно выбрать любое разбиение со свойством $\chi_{Y_n} \Lambda \in L_2(\nu)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Теорема 2. *Пусть меры μ, ν сепарабельны, σ-конечны и не являются чисто атомическими, коэффициент $a(\xi)$ в уравнении (8) принадлежит $L_\infty(\nu)$, ядро $K(\xi,\eta)$ в (8) порождает плотно определенный замыкаемый интегральный оператор T в $L_2(\nu)$ и удовлетворяет более слабому, чем (9), условию: существует не содержащее атомов меры ν множество E, $\nu E > 0$, такое, что*

$$\int\limits_E |K(\xi,\eta)|\, d\nu(\xi) \in L_2(\nu).$$

Тогда справедливо утверждение теоремы 1.

Доказательство. Ядро $\chi_E(\xi) K(\xi,\eta)$ удовлетворяет условию типа условия (9) с $b(\xi) = \chi_Y(\xi)$, поэтому, как в доказательстве теоремы 1, оператор $P_E T$ продолжается до интегрального оператора $\tau : L_2(\nu) \to L_0(\nu)$. По теореме I.6.2 из [2] найдется множество $E_1 \subset E$, $\nu E_1 > 0$, такое, что $P_{E_1} \tau : L_2(\nu) \to L_2(\nu)$ — компактный оператор. Подобно предыдущему $T^* P_{E_1} = (P_{E_1} T)^* = (P_{E_1} \tau)^*$. Значит, $T^* P_{E_1} : L_2(\nu) \to L_2(\nu)$ — компактный оператор.

Пусть α — какое-нибудь существенное значение сужения функции $a(\xi)$ на E_1. Выберем последовательность попарно не пересекающихся множеств $E_{1n} \subset E_1$ с положительными мерами такую, что

$$|a(\xi) - \alpha| < \varepsilon_n \quad \text{для почти всех } \xi \in E_{1n}, \; n = 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Пользуясь компактностью оператора $T^*P_{E_1}$, выберем для любого n функцию y_n, $|||y_n||| = 1$, с носителем в E_{1n} так, что $|||T^*y_n||| = |||T^*P_{E_1}y_n||| < \varepsilon_n$. Отсюда и из (16) имеем

$$|||T^*y_n||| < \varepsilon_n, \quad |||(A^* - \bar{\alpha}1)y_n||| < \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{17}$$

Выберем подпоследовательность $\{w_n\} \subset \{y_n\}$ так, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |||T^*w_n||| < \infty$. Обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение в $L_2(\nu)$ и рассмотрим ограниченный оператор

$$\Gamma h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, w_n \rangle T^* w_n, \quad h \in L_2(\nu),$$

и замкнутый оператор $Q = T^* - \Gamma$ с областью определения $D_Q = D_{T^*}$. Тогда $Qw_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть $W^\perp$ — ортогональное дополнение к замкнутой линейной оболочке W последовательности $\{w_n\}$ и $P^\perp$ — ортопроектор на $W^\perp$. В силу замкнутости Q имеем $W \subset D_Q$, поэтому $P^\perp D_Q \subset D_Q$. Обозначив через $\overline{F}$ замыкание множества $F \subset L_2(\nu)$ по норме, получим $W^\perp \supseteq \overline{W^\perp \cap D_Q} \supseteq \overline{P^\perp D_Q} = \overline{P^\perp D_{T^*}} = W^\perp$, так как $\overline{D_{T^*}} = L_2(\nu)$. Таким образом, $\overline{W^\perp \cap D_Q} = W^\perp$, т. е. множество $W^\perp \cap D_Q$ плотно в $W^\perp$. Пусть $\{w_n^\perp\}$ — любой ортонормированный базис подпространства $W^\perp$, состоящий из элементов D_Q. Рассмотрим ортонормированный базис $\{h_n\}$ пространства $L_2(\nu)$, являющийся объединением $\{w_n^\perp\}$ и $\{w_n\}$. Имеем $\{h_n\} \subset D_Q = D_{T^*}$, и $\{h_n\}$ принадлежит области определения оператора $A^* - \bar{\alpha}1$, совпадающей с $L_2(\nu)$ в силу того, что $a \in L_\infty(\nu)$. Кроме того, $\{w_n\} \subset \{h_n\}$ и из $\{w_n\} \subset \{y_n\}$ и (17) следует, что $T^*w_n \to 0$, $(A^* - \bar{\alpha}1)w_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда, как в доказательстве теоремы 1, по лемме получим справедливость теоремы 2. $\square$

Назовем *квазивырожденным карлемановским ядром* функцию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \overline{b_n(t)},$$

где $\{e_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами, $\{b_n\} \subset L_2(\mu)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *или теоремы* 2. *Тогда интегральное уравнение* 3*-го рода* (8) *эквивалентно либо интегральному уравнению Фредгольма* 1*-го рода с ядерным оператором, либо интегральному уравнению* 2*-го рода с квазивырожденным карлемановским ядром.*

Доказательство. При выполнении условий теоремы 1 или теоремы 2 уравнение (8) эквивалентно уравнению (10). Если α в (10) равно 0, то, умножив обе части (10) на функцию

$$\chi_{e_0}(s) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (\|\varphi_n\| + \|\psi_n\| + 1)^{-1} \chi_{e_n}(s),$$

где $e_0 = X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n$, получим эквивалентное интегральное уравнение 1-го рода с ядерным оператором.

Пусть α в (10) не равно 0. Зафиксируем λ и выберем $\varepsilon < |\alpha|/(1+|\lambda|)$. Запишем уравнение (10) в виде

$$\alpha\left(1+\frac{1}{\alpha}B_\lambda\right)y(s)+\int\limits_X\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}}\overline{\varphi_{n,\lambda}(t)}y(t)\,d\mu(t)=g(s), \tag{18}$$

где $\varphi_{n,\lambda}=\varphi_n-\bar{\lambda}\psi_n$, $B_\lambda=B-\lambda N$, B — интегральный оператор с ядром $B(s,t)$ и ядерной нормой, меньшей чем ε, N — интегральный оператор с ядром $N(s,t)$ и ядерной нормой, меньшей чем ε. Тогда $\left\|\frac{1}{\alpha}B_\lambda\right\|\le\frac{1}{|\alpha|}(\varepsilon+|\lambda|\varepsilon)<1$. Отсюда следует, что оператор $F_\lambda=1+\frac{1}{\alpha}B_\lambda$ имеет обратный оператор F_λ^{-1}, принадлежащий $B(L_2(\mu))$. Сделав в (18) замену $z=F_\lambda y$, получим эквивалентное интегральное уравнение 2-го рода

$$\alpha z(s)+\int\limits_X\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}}\overline{\psi_{n,\lambda}(t)}z(t)\,d\mu(t)=g(s),$$

где $\psi_{n,\lambda}=\left(F_\lambda^{-1}\right)^*\varphi_{n,\lambda}$. $\square$

Интегральное уравнение 1-го рода с ядерным оператором может быть решено с помощью теоремы Э. Пикара (см. [3, гл. 3, § 7, п. 1]) или приближенных методов, например, метода А. Н. Тихонова (см. [4, гл. 4, п. 4.3]). Для решения интегрального уравнения 2-го рода с квазивырожденным карлемановским ядром ниже предлагаются два приближенных метода.

Рассмотрим уравнение

$$z(s)-\lambda\int\limits_X\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}}\overline{b_n(t)}z(t)\,d\mu(t)=g(s)\in L_2(\mu), \tag{19}$$

где $\{b_n\}\subset L_2(\mu)$, к которому приводятся изучавшиеся в статье интегральные уравнения 3-го рода. Решение уравнения (19) будем искать в линейном многообразии

$$D_K:=\left\{h\mid h\in L_2(\mu),\ \sum_{n=1}^{\infty}|(h,b_n)|^2<\infty\right\} \tag{20}$$

— максимальной области определения интегрального оператора K с квазивырожденным карлемановским ядром

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}}\overline{b_n(t)}.$$

Введем интегральные уравнения с вырожденными ядрами

$$z(s)-\lambda_m\int\limits_X\sum_{n=1}^{m}\frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}}\overline{b_n(t)}z(t)\,d\mu(t)=g(s), \tag{21}$$

$m=1,2,\dots$. Как известно [5, II.2.3], решение интегрального уравнения с вырожденным ядром сводится к решению конечной системы линейных алгебраических уравнений. Выберем $\lambda_m\to\lambda$ так, чтобы уравнения (21) имели решения $z_m\in L_2(\mu)$. Тогда в силу (21) для всех m и почти всех $s\in X$

$$z_m(s)=\lambda_m\sum_{n=1}^{m}\frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}}(z_m,b_n)+g(s). \tag{22}$$

Без ограничения общности будем считать, что равенства (22) выполняются для всех $s \in X$.

Пусть $\{z_m\}$ — ограниченная в $L_2(\mu)$ последовательность, $\zeta_i := z_{m_i}$, $i = 1, 2, \ldots,$ — любая слабо сходящаяся в $L_2(\mu)$ ее подпоследовательность. Обозначим через z предел подпоследовательности $\{\zeta_i\}$. Отметим, что $z \in D_K$. Функции $\zeta_i(s)$ равны $g(s)$ для каждой точки $s \in e_0 := X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n$, и для любой точки $s \in e_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ выполняется равенство

$$\zeta_i(s) = \lambda_{m_i} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} (\zeta_i, b_n) + g(s).$$

Кроме того, при $i \to \infty$ имеем $(\zeta_i, b_n) \to (z, b_n)$ для всех n. Таким образом, для любого $s \in X$ при $i \to \infty$

$$\zeta_i(s) \to \zeta(s) := \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} (z, b_n) + g(s). \tag{23}$$

Так как $\{\chi_{e_n} \zeta_i\}$ для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ сходится при $i \to \infty$ к $\chi_{e_n} \zeta$ по норме $L_2(\mu)$, то $\{\chi_{e_n} \zeta_i\}$ слабо сходится к $\chi_{e_n} \zeta$ при $i \to \infty$. Но $\{\chi_{e_n} \zeta_i\}$ слабо сходится к $\chi_{e_n} z$ при $i \to \infty$ для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$. Отсюда $\chi_{e_n} z = \chi_{e_n} \zeta$ и из произвольности $n = 0, 1, 2, \ldots$ получаем, что $\zeta(s) = z(s)$ для почти всех $s \in X$. Следовательно, $\zeta \in D_K$, и в силу (23) для всех $s \in X$ имеем

$$\zeta(s) - \lambda \int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \overline{b_n(t)} \zeta(t)\, d\mu(t) = g(s).$$

Таким образом, ζ является решением уравнения (19).

Отметим, что функции $z_{m_i}(s) = \zeta_i(s)$ сходятся к решению $\zeta(s)$ не только слабо в $L_2(\mu)$, но и в каждой точке $s \in X$, причем поточечная сходимость на любом множестве e_n, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ равномерна.

Отметим еще, что аналогичные построения можно провести и в случае, когда ограничена не вся последовательность $\{z_m\}$, а лишь некоторая ее подпоследовательность.

Итак, если последовательность $\{z_m\}$ (или ее подпоследовательность) ограничена в $L_2(\mu)$, то любая слабо сходящаяся их подпоследовательность сходится слабо и поточечно к решению уравнения (19). Покажем, что ограниченность последовательности норм резольвент интегральных операторов, порожденных ядрами уравнений (21), обеспечивает сходимость всей последовательности $\{z_m\}$ к решению уравнения (19) по норме $L_2(\mu)$ и с регулятором (последовательность $\{f_m(s)\}$ сходится на X к функции $f(s)$ с регулятором $r(s)$ [6], если для всех m и $s \in X$ выполняется неравенство $|f_m(s) - f(s)| \le r(s)\varepsilon_m$, где $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$).

Пусть K — интегральный оператор с областью определения (20), порожденный ядром уравнения (19), K_m — интегральные операторы в $L_2(\mu)$, порожденные ядрами уравнений (21). Выберем $\lambda_m \to \lambda$ так, чтобы λ_m^{-1} не являлась точкой спектра конечномерного оператора K_m, $m = 1, 2, \ldots$. Предположим, что

$$\|(1 - \lambda_m K_m)^{-1}\| \le C, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{24}$$

Пусть $S := 1 - \lambda K$, $S_m := 1 - \lambda_m K_m$, $z_m = S_m^{-1} g$, $m = 1, 2, \ldots$. Тогда $\|z_m\| \le \left\|S_m^{-1}\right\| \|g\| \le C\|g\|$ для всех m. Отсюда по доказанному выше следует, что уравнение (19) имеет решение $z \in L_2(\mu)$. Покажем, что $\|z - z_m\| \to 0$. В силу (24) имеем

$$\begin{aligned}\|z - z_m\| = \left\|z - S_m^{-1} g\right\| = \left\|S_m^{-1}(S_m z - g)\right\| \le C\|S_m z - g\| = C\|z - \lambda_m K_m z - g\| \\ = C\|\lambda K z - \lambda_m K_m z\| \le C(|\lambda|\|(K - K_m)z\| + |\lambda - \lambda_m|\|K_m z\|) \\ \le C(|\lambda|\|\chi_{E_m} K z\| + |\lambda - \lambda_m|\|Kz\|),\end{aligned}$$

где $E_m = \bigcup\limits_{n=m+1}^{\infty} e_n$. Из этой оценки $E_m \downarrow \varnothing$ и $|\lambda_m - \lambda| \to 0$ при $m \to \infty$ следует $\|z - z_m\| \to 0$; здесь $\varnothing$ — пустое множество.

Покажем, что при выполнении условия (24) последовательность $\{z_m(s)\}$ сходится с регулятором

$$r(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}}$$

к определяемому равенством (23) решению $\zeta(s)$, отличающемуся от решения $z(s)$ лишь на множестве меры 0. При этом, как раньше, считаем, что равенства (22) выполнены для всех m и $s \in X$. Тогда для любого $s \in e_n$, $n = 1, 2, \dots$,

$$|\zeta(s) - z_m(s)| = \frac{1}{\sqrt{\mu e_n}}\|\chi_{e_n}(z - z_m)\| \le \frac{1}{\sqrt{\mu e_n}}\|z - z_m\|.$$

Кроме того, $|\zeta(s) - z_m(s)| = 0$ для всех $s \in X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n$. Таким образом,

$$|\zeta(s) - z_m(s)| \le r(s)\|z - z_m\| \quad \text{для всех } s,\ m.$$

Если $\mu X = \infty$ и $\mu e_n \ge \gamma > 0$, $n = 1, 2, \dots$, то сходимость $z_m(s)$ к $\zeta(s)$ на X будет равномерной.

Второй метод (с очевидными изменениями) применим, когда вместо условия (24) имеет место ограниченность какой-нибудь последовательности $\{\|(1 - \lambda_{m_k} K_{m_k})^{-1}\|\}$.

При выполнении указанных выше условий оба метода работают при любом λ, в том числе, когда λ^{-1} принадлежит спектру оператора K, при этом K может быть как ограниченным, так и неограниченным оператором.

Замечания. 1. Все результаты статьи справедливы и в случае, когда H, $L_2(X, \mu)$, $L_2(Y, \nu)$ — вещественные сепарабельные пространства.

2. Отметим три важных частных случая условий теорем 1–3: 1) $Y = X$, $\nu = \mu$; 2) X — измеримое по Лебегу множество евклидова пространства, μ — мера Лебега; 3) $X = (a, b)$ — конечный или бесконечный интервал, в этом случае в качестве $\{e_n\}$ удобно выбрать последовательность попарно не пересекающихся конечных интервалов (длины 1, если (a, b) — бесконечный интервал).

3. Результаты статьи дополняют и развивают результаты работ [7; 8; 2, гл. IV, § 7] об интегральных уравнениях 3-го рода в L_2 с неограниченными интегральными операторами.

4. Интегральные уравнения 3-го рода в L_2 с произвольными ограниченными измеримыми коэффициентами и произвольными ограниченными интегральными операторами, а также системы таких уравнений изучались в [9; 10; 3, гл. I, § 1, гл. III, § 7]. В связи с этими результатами отметим очень интересную работу И. М. Новицкого [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
2. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.
3. *Коротков В. Б.* Некоторые вопросы теории интегральных операторов. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988.
4. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. Киев: Наук. думка, 1986.
5. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
6. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматлит, 1961.
7. *Коротков В. Б.* Об интегральных уравнениях первого и третьего рода // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: Наука, 1978. С. 61–68.
8. *Коротков В. Б.* Об общих интегральных уравнениях третьего рода // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 6. С. 1097–1105.
9. *Коротков В. Б.* О линейных функциональных уравнениях 1-го, 2-го и 3-го родов в L_2 // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1294–1303.
10. *Коротков В. Б.* О системах линейных функциональных уравнений третьего рода в L_2 // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 3. С. 549–556.
11. *Новицкий И. М.* A kernel smoothing method for general integral equations // Дальневост. мат. журн. 2012. Т. 12, № 2. С. 255–261.

Статья поступила 19 апреля 2016 г.

Коротков Виталий Борисович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090