Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2017. Том 58, № 2

УДК 510.5

ОБ ОДНОЙ СВОДИМОСТИ И ЭКЗИСТЕНЦИАЛЬНОЙ ИНТЕРПРЕТИРУЕМОСТИ СТРУКТУР

А. С. Морозов

Аннотация. Доказывается вложимость структуры тьюринговых степеней в структуру степеней по экзистенциальной интерпретируемости. В доказательстве естественным образом возникает понятие слабо ограниченной тьюринговой сводимости (wbT-сводимости). Доказывается, что эта сводимость расположена строго между ограниченной табличной и тьюринговой сводимостями, а также отличается от табличной сводимости.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.210

Ключевые слова: экзистенциальная интерпретируемость структур, слабо ограниченная тьюрингова сводимость.

Понятие экзистенциальной интерпретируемости (называемой также $\exists$-интерпретируемостью) на структурах введено А. С. Морозовым, А. Ж. Сатекбаевой и Д. А. Тусуповым в [1]. Там же обсуждается связь этого понятия с теоретическим программированием и доказывается, что любое конечное частично упорядоченное множество изоморфно вкладывается в упорядоченное множество степеней $\exists$-интерпретируемости для вычислимых структур. Отсюда, в частности, следует существование двух вычислимых структур, не $\exists$-интерпретируемых друг в друге. В этой же работе доказывается существование универсальных вычислимых структур, т. е. вычислимых структур, в которых $\exists$-интерпретируется любая вычислимая структура.

В данной работе строится изоморфное вложение структуры тьюринговых степеней в структуру по $\exists$-интерпретируемости. При рассмотрении используемого в этом доказательстве естественного класса структур возникает некоторая новая алгоритмическая сводимость на множествах натуральных чисел, очень похожая на тьюрингову, которая здесь названа *слабо ограниченной тьюринговой сводимостью.* В работе выяснены соотношения между этой сводимостью и табличной ограниченной, табличной и тьюринговой сводимостями.

Перейдем к определениям и обозначениям. Экзистенциальная интерпретируемость на алгебраических структурах определяется только для структур конечных предикатных сигнатур, и фактически она представляет собой некоторый вариант обычной интерпретируемости одной структуры в другой при помощи Δ-условий первого порядка (при этом основное множество может интерпретироваться при помощи $\exists$-формулы). Из определения будет видно, что эта

Работа поддержана проектом «Алгоритмические и теоретико-модельные свойства алгебраических систем» Республики Казахстан.

интерпретируемость является частным случаем Σ-определимости одной структуры в наследственно конечной надстройке над другой (см. [2]).

Напомним определение $\exists$-интерпретируемости.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_1$ — структуры конечных предикатных сигнатур и $\langle P_1, \ldots, P_k\rangle$ — сигнатура $\mathfrak{A}_0$. Будем говорить, что $\mathfrak{A}_0$ *экзистенциально интерпретируема* (*$\exists$-интерпретируема*) в $\mathfrak{A}_1$ и использовать обозначение $\mathfrak{A}_0 \prec_\exists \mathfrak{A}_0$, если существуют

$n \in \omega$ и конечный набор параметров $\bar{p} \in \mathfrak{A}_1$,
$\exists$-формула $U(\bar{x}, \bar{y})$ такая, что $|\bar{x}| = n$ и $|\bar{y}| = |\bar{p}|$,
$\exists$-формулы $E^+(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{y})$ и $E^-(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{y})$ такие, что $|\bar{x}_0| = |\bar{x}_1| = n$,
$\exists$-формулы $P^+(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m, \bar{y})$ и $P^-(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m, \bar{y})$, $|\bar{x}_1| = \cdots = |\bar{x}_m| = n$, для каждого предикатного символа P сигнатуры структуры $\mathfrak{A}_0$, где m — число аргументов P,

такие, что если $A = \{\bar{x} \mid \mathfrak{A}_1 \models U(\bar{x}, \bar{p})\}$, то верно следующее.

1. Множество A^2 является дизъюнктным объединением множеств $\{\langle \bar{x}_0, \bar{x}_1\rangle \mid \mathfrak{A}_1 \models E^\varepsilon(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{p})\}$, $\varepsilon \in \{+, -\}$.

2. Для каждого m-местного предикатного символа P из $\mathfrak{A}_0$ множество A^m является дизъюнктным объединением множеств $\{\langle \bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_m\rangle \mid \mathfrak{A}_1 \models P^\varepsilon(\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_m, \bar{p})\}$, $\varepsilon \in \{+, -\}$.

3. Пусть $\widehat{P}_i = \{\langle \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m\rangle \mid \mathfrak{A}_1 \models P_i^+(x_1, \ldots, \bar{x}_m, \bar{p})\}$ для $i = 1, \ldots, k$. Тогда $E = \{\langle \bar{x}_0, \bar{x}_1\rangle \mid \mathfrak{A}_1 \models E^+(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{p})\}$ является конгруэнцией на структуре $\mathfrak{B} = \langle A, \widehat{P}_1, \ldots, \widehat{P}_k\rangle$ и существует изоморфизм α из фактор-структуры $\mathfrak{B}/E$ на $\mathfrak{A}_0$.

Будем говорить, что структуры $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *экзистенциально эквивалентны* (*$\exists$-эквивалентны*), если они $\exists$-интерпретируются друг в друге. Экзистенциальную эквивалентность структур $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ будем записывать в виде $\mathfrak{M} \equiv_\exists \mathfrak{N}$. Как обычно, $\exists$-*степенью* структуры $\mathfrak{M}$ назовем класс всех структур, $\exists$-эквивалентных ей. Как отмечалось в [1], отношение $\exists$-интерпретируемости является предпорядком на классе всех структур, поэтому, факторизуя этот порядок по отношению $\equiv_\exists$, получим отношение частичного порядка на $\exists$-степенях.

Следующее ниже предложение 1 предполагает знакомство с наследственно конечными надстройками над структурами и определением Σ-представимости структуры над допустимым множеством (см. [2, 3]), но его понимания не требуется для дальнейшего понимания работы. Как упоминалось, в [1] доказано существование двух вычислимых структур, не $\exists$-интерпретируемых друг в друге. С другой стороны, заметим, что для любых двух вычислимых структур $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ структура $\mathfrak{A}$ Σ-определима в наследственно конечной надстройке над $\mathfrak{B}$ (достаточно рассмотреть ее вычислимое представление на натуральных числах, рассматриваемых как элементы надстройки). Поэтому справедливо следующее

Предложение 1. *Существуют две вычислимые структуры, взаимно Σ-определимые в наследственно конечных надстройках друг над другом, но не $\exists$-интерпретируемые друг в друге.*

Таким образом, понятия Σ-определимости и $\exists$-интерпретируемости различаются уже на вычислимых структурах.

Приведем некоторые обозначения, используемые в работе. Характеристическую функцию множества $A \subseteq \omega$, т. е. функцию, принимающую значение 1 на его элементах и 0 на элементах из его дополнения, будем обозначать через χ_A. Предполагаем зафиксированной некоторую геделеву нумерацию всех конечных функций из ω в ω и иногда даже будем отождествлять такие функции с их номерами. Через $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ в зависимости от ситуации будем обозначать как n-ку, состоящую из элементов $x_1, \dots, x_n$, так и ее номер в некоторой эффективной кодировке. Надеемся, что это соглашение не приведет к путанице. Через $(x)_i$ будем обозначать функцию, выдающую по коду n-ки ее i-ю координату: $(\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle)_i = x_i$. Область определения функции f будем обозначать через $\mathrm{dom}(f)$. Будем использовать некоторые хорошо известные алгоритмические сводимости на множествах такие, как сводимость по Тьюрингу (T-сводимость), табличная сводимость (*tt*-сводимость), ограниченная сводимость (*btt*-сводимость), а также m- и 1-сводимости. Соответствующие определения содержатся, например, в [4].

Определим некоторую модификацию тьюринговой сводимости, так называемую *слабо ограниченную тьюрингову сводимость* на множествах натуральных чисел, и докажем некоторые ее свойства. Оправданием изучения этой сводимости являются доказываемый ниже результат о точном соответствии между этой сводимостью и $\exists$-интерпретируемостью на некотором определяемом ниже естественном классе структур, параметризуемом множествами натуральных чисел (см. предложение 3) и используемом для получения изоморфного вложения структур степеней.

Нам будет удобно работать со следующим вариантом определения обычной тьюринговой сводимости, эквивалентным классическому.

Определение 2. Пусть $A, B \subseteq \omega$. Тогда A *сводится по Тьюрингу* (T-*сводится*) к B, если существует такое вычислимо перечислимое множество W, что для любых $x, y \in \omega$

$$\chi_A(x) = y \Leftrightarrow \exists f \subseteq \chi_B(|f| < \omega \wedge \langle x, y, f \rangle \in W). \tag{1}$$

При этом будем говорить, что множество W *задает* T-*сводимость* A *к* B.

В соответствии с соглашением, принятым выше, здесь отождествляем конечную функцию f с ее кодом, а также кортежи элементов с их номерами, поэтому условие $\langle x, y, f \rangle \in W$ имеет вполне понятный смысл.

Заметим, что произвольное вычислимо перечислимое множество W задает T-сводимость A к B тогда и только тогда, когда множество

$$W^{\text{ир}} = \{\langle x, y, f \rangle \mid \exists f_0 \subseteq f(\langle x, y, f_0 \rangle \in W)\}$$

также задает T-сводимость A к B. Это следует из того, что правая часть эквивалентности (1) после замены W на $W^{\text{ир}}$ остается эквивалентной исходной правой части.

Равномерно ограничивая сверху все мощности функций f некоторым натуральным числом, приходим к определению слабо ограниченной тьюринговой сводимости.

Определение 3. Пусть $A, B \subseteq \omega$. Будем говорить, что A *слабо ограниченно сводится по Тьюрингу к* B (и записывать это как $A \leq_{\mathrm{wbT}} B$), если существуют такие $m < \omega$ и вычислимо перечислимое множество W, что для любых $x, y \in \omega$

$$\chi_A(x) = y \Leftrightarrow \exists f \subseteq \chi_B(|f| \leq m \wedge \langle x, y, f \rangle \in W). \tag{2}$$

При этом будем говорить, что множество W *задает* wbT-*сводимость* A *к* B.

Заметим, что если заменим в данном определении условие $|f| \leq m$ на $|f| = m$, то полученное определение окажется эквивалентно данному. Действительно, если $A \leq_{\mathrm{wbT}} B$ в смысле исходного определения, то A и B удовлетворяют также новому определению, в котором W заменено перечислимым множеством

$$W' = \{\langle x, y, f\rangle \mid |f| = m \wedge \exists f_0 \subseteq f(\langle x, y, f_0\rangle \in W)\}.$$

С другой стороны, если A и B удовлетворяют новому определению, то они удовлетворяют и исходному определению, в котором W заменено перечислимым множеством

$$W' = \{\langle x, y, f\rangle \in W \mid |f| = m\}.$$

Легко доказывается следующее

Предложение 2. *Отношение $\leq_{\mathrm{wbT}}$ рефлексивно и транзитивно.*

Из предложения 2 следует, что отношение, определенное на множествах как $A \equiv_{\mathrm{wbT}} B \Leftrightarrow A \leq_{\mathrm{wbT}} B \wedge B \leq_{\mathrm{wbT}} A$, является эквивалентностью и, как обычно, можно говорить о wbT-степенях и упорядочении на них. Назовем множество $\deg_{\mathrm{wbT}}(A) = \{B \mid A \equiv_{\mathrm{wbT}} B\}$ wbT-*степенью множества A*. Порядок на степенях определяется обычным образом:

$$\deg_{\mathrm{wbT}}(A) \leq \deg_{\mathrm{wbT}}(B) \Leftrightarrow A \leq_{\mathrm{wbT}} B.$$

Для произвольного $A \subseteq \omega$ положим

$$A^\sharp = \{f \subseteq \chi_A \mid |f| < \omega\}.$$

Некоторые свойства нашей сводимости суммируются в следующей теореме.

Теорема 1. 1. *$A^\sharp \leq_{\mathrm{tt}} A$, $A \leq_1 A^\sharp$, $A^\sharp \equiv_{\mathrm{tt}} A$.*

2. *$A \leq_{\mathrm{b}tt} B \Rightarrow A \leq_{\mathrm{wbT}} B \Rightarrow A \leq_T B$.*

3. *$A \leq_T B \Leftrightarrow A^\sharp \leq_{\mathrm{wbT}} B^\sharp$.*

4. *Существует вычислимо перечислимое множество $A \subseteq \omega$ такое, что $A^\sharp \not\leq_{\mathrm{wbT}} A$.*

5. wbT-*сводимость не совпадает ни с тьюринговой сводимостью, ни с tt-сводимостью, ни с btt-сводимостью. В частности, все импликации из п. 2 настоящего утверждения необратимы.*

Доказательство. 1. Докажем, что $A^\sharp \leq_{tt} A$. Пусть дана произвольная функция g из конечного подмножества ω в $\{0, 1\}$,

$$g = \{\langle a_0, \varepsilon_0\rangle, \langle a_1, \varepsilon_1\rangle, \ldots, \langle a_{k-1}, \varepsilon_{k-1}\rangle\}, \quad k < \omega,\ a_0 < a_1 < \cdots a_{k-1}.$$

Тогда $g \in A^\sharp$ эквивалентно утверждению $(\neg)^{1-\varepsilon_0}(a_0 \in A) \wedge \ldots \wedge (\neg)^{1-\varepsilon_{k-1}}(a_{k-1} \in A)$, откуда получаем $A^\sharp \leq_{tt} A$.

Сводимость $A \leq_1 A^\sharp$ следует из очевидной эквивалентности

$$x \in A \Leftrightarrow \{\langle x, 1\rangle\} \in A^\sharp.$$

Последнее утверждение п. 1 вытекает непосредственно из уже доказанного.

2. Доказательство оставлено читателю.

3. ($\Leftarrow$) Очевидно.

($\Rightarrow$) Пусть $A \leq_T B$. Зафиксируем какое-нибудь множество W, задающее T-сводимость A к B. Имеем

$$\chi_{A^\sharp}(g) = 1 \Leftrightarrow g \in A^\sharp \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in \mathrm{dom}(g)} \exists f \subseteq \chi_B(\langle i, g(i), f\rangle \in W)$$

$$\Leftrightarrow \exists f \subseteq \chi_B \bigwedge_{i \in \mathrm{dom}(g)} \langle i, g(i), f\rangle \in W^{\mathrm{u}p},$$

$$\chi_{A^\sharp}(g) = 0 \Leftrightarrow g \notin A^\sharp \Leftrightarrow \exists i \in \mathrm{dom}(g)(\chi_A(i) = 1 - g(i))$$
$$\Leftrightarrow \exists f \subseteq \chi_B \bigvee_{i \in \mathrm{dom}(g)} (\langle i, 1 - g(i), f\rangle \in W).$$

Отсюда легко увидеть, что множество

$$W' = \Big\{\langle g, 1, \{\langle f, 1\rangle\}\rangle \mid \bigwedge_{i\in\mathrm{dom}(g)} \langle i, g(i), f\rangle \in W^{\mathrm{up}}\Big\}$$
$$\cup \Big\{\langle g, 0, \{\langle f, 1\rangle\}\rangle \mid \bigvee_{i\in\mathrm{dom}(g)} (\langle i, 1 - g(i), f\rangle \in W)\Big\}$$

перечислимо и обладает свойством

$$\chi_{A^\sharp}(g) = y \Leftrightarrow \exists F \subseteq B^\sharp(|F| = 1 \wedge \langle g, y, F\rangle \in W'),$$

т. е. W' задает wbT-сводимость $A^\sharp$ к $B^\sharp$.

4. Для доказательства необходимо построить перечислимое множество A так, чтобы удовлетворить все требования $R_{m,n}$, $m, n < \omega$, определяемые как

$$\mathbf{R}_{m,n} :\neg\forall x \forall y(\chi_{A^\sharp}(x) = y \Leftrightarrow \exists g(g \subseteq \chi_A \wedge |g| \le m \wedge \langle x, y, g\rangle \in W_n)).$$

В ходе построения будем создавать и уничтожать так называемые m, n-*запреты* — некоторые конечные множества натуральных чисел. Будем говорить, что требование $R_{m,n}$ или m, n-запрет *имеет более высокий приоритет, чем* $R_{p,q}$ или p, q-запрет, если код пары $\langle m, n\rangle$ меньше, чем код пары $\langle p, q\rangle$.

На каждом шаге t построения будем создавать некоторую конечную последовательность c_t из 0 и 1, которая будет отождествляться с функцией из конечного начального отрезка множества ω в $\{0, 1\}$, последовательность значений которой совпадает с c_t. В ходе построения некоторые значения этой последовательности будут изменяться с 0 на 1, а сама последовательность будет достраиваться приписыванием к ней справа новых символов. Отсюда видно, что множество, характеристической функцией которого является предельная функция, будет вычислимо перечислимым.

Зафиксируем некоторую вычислимую функцию $\ell(x)$, принимающую каждое значение бесконечное число раз. Если $\ell(x) = k$, то будем говорить, что x *находится в* k*-м ряду*.

Через W_n^t будем обозначать конечную часть вычислимо перечислимого множества W_n, перечисленную за первые t шагов.

Будем говорить, что *требование* $R_{m,n}$ *требует внимания на шаге* t, если

1) к началу этого шага не существует m, n-запретов;

2) существуют начальный отрезок $h \subseteq c_t$ и конечная функция $g \subseteq c_t$ такие, что $|g| < m$, $\langle h, 1, g\rangle \in W_n^t$, и существует число $k \in \mathrm{dom}(h) \setminus \mathrm{dom}(g)$, не находящееся под запретом с приоритетом выше, чем у $R_{m,n}$, находящееся в $\langle m, n\rangle$-м ряду, такое, что $h(k) = 0$.

Шаг 0. Положим $c_0 = \varnothing$.

Шаг $t+1$. Если существует требование $R_{m,n}$ с $\langle m, n\rangle < t$, требующее внимания на шаге $t+1$, то выбираем среди таких требований требование с наивысшим приоритетом, для которого выбираем соответствующую тройку h, g, k с наименьшим кодом и проделываем следующее:

- отменяем (уничтожаем) все запреты с приоритетом ниже, чем у $R_{m,n}$;

• заменяем в c_t k-е значение на 1 и дописываем в конце ее 0; получившуюся в результате последовательность обозначим через c_{t+1};

• создаем m,n-запрет из элементов множества $\mathrm{dom}(h) \cup \mathrm{dom}(g)$.

Если требований, требующих внимания на шаге $t+1$, не существует, то просто дописываем 0 в конце последовательности c_t, получая в результате последовательность c_{t+1}.

Описание построения окончено.

Полагаем A равным множеству с характеристической функцией f, задаваемой равенством

$$f(n) = \lim_{t\to\infty} c_t(n).$$

Из построения видно, что A вычислимо перечислимо.

Следующая лемма стандартна в доказательствах методом приоритета.

Лемма 1. *Каждый запрет создается и отменяется конечное число раз.*

Доказательство. Лемма доказывается по индукции с использованием того, что все условия упорядочены по приоритету по типу ω и для разрушения любого запрета в ходе построения каждый раз обязательно создается новый запрет с более высоким приоритетом.

Лемма 2. *Каждый ряд содержит лишь конечное число элементов, принадлежащих A.*

Доказательство. Каждый раз, когда очередной элемент из $\langle m,n\rangle$-го ряда перечисляется в множество A (т. е. в последовательности c_t происходит замена некоторого 0 на 1), создается некоторый новый $\langle m,n\rangle$-запрет, а по лемме 1 это может произойти лишь конечное число раз. Поэтому в A попадет лишь конечное число элементов из $\langle m,n\rangle$-го ряда.

Лемма 3. *Все требования $R_{m,n}$ удовлетворяются.*

Доказательство. Предположим, что существуют требования, которые не удовлетворяются, и пусть $R_{m,n}$ — требование с максимальным приоритетом среди всех таких требований. Тогда

$$\forall h \forall y (\chi_{A^\sharp}(h) = y \Leftrightarrow \exists g \subseteq \chi_A (\wedge |g| \leq m \wedge \langle h, y, g\rangle \in W_n)). \tag{3}$$

Следующая лемма очевидна.

Лемма 4. *Пока существует запрет Z, ни одно из значений $c_t(i)$, $i \in Z$, в ходе построения измениться не может.*

Лемма 5. *Если m,n-запрет на каком–то шаге создается и в дальнейшем никогда не отменяется, то требование $R_{m,n}$ удовлетворится.*

Доказательство. Действительно, когда m,n-запрет создается в последний раз, изменяем значение характеристической функции множества A на некотором элементе из $\mathrm{dom}(h) \setminus \mathrm{dom}(g)$ (в обозначениях из описания построения) и, таким образом, получаем, что $h \notin A^\sharp$. Имеем $g \subseteq \chi_A$, и после этого значение характеристической функции множества A на $\mathrm{dom}(g)$ уже не будет меняться, так как этому помешает постоянно действующий m,n-запрет, откуда по (3) следует, что $h \in A^\sharp$; противоречие. Лемма доказана.

Предположим, что после некоторого шага m,n-запрет уже никогда не создается. Тогда для всех начальных отрезков $h \subseteq \chi_A$ найдется $g \subseteq \chi_A$ такое, что $|g| \leq m$ и $\langle h, 1, g\rangle \in W_n$. После того, как запреты более высокого, чем у $R_{m,n}$, приоритета не будут ни создаваться, ни отменяться, только конечное множество элементов войдет в запреты более высокого приоритета и множество таких элементов уже меняться не будет. С учетом того, что в каждом ряду находится бесконечное множество натуральных чисел и только конечное число их попадет в A, после всех этих стабилизаций наступит шаг, когда $R_{m,n}$ потребует внимания и m, n-запрет будет создан еще раз; противоречие.

5. Возьмем произвольные множества A и B такие, что $A \leq_T B$, но $A \nleq_{tt} B$ (такие множества существуют, см. [4, следствие XVIII]). По доказанному имеем $A^\sharp \leq_{\mathrm{wbT}} B^\sharp$. Покажем, что $A^\sharp \nleq_{tt} B^\sharp$. Если $A^\sharp \leq_{tt} B^\sharp$, то, используя эту сводимость, каждый вопрос «$x \in A$?» можно эффективно сводить к булевой комбинации условий вида $g \in B^\sharp$. Каждый из этих вопросов эффективно сводится к булевой комбинации вопросов вида «$y \in B$?». Стало быть, $A \leq_{tt} B$; противоречие. Значит, отношения $\leq_{tt}$ и $\leq_{\mathrm{wbT}}$ различаются на паре множеств $A^\sharp$ и $B^\sharp$. Из $A^\sharp \nleq_{tt} B^\sharp$ получаем $A^\sharp \nleq_{btt} B^\sharp$, и, значит, $\leq_{btt}$ и $\leq_{\mathrm{wbT}}$ различаются на паре множеств $A^\sharp$ и $B^\sharp$.

В п. 4 построено множество A такое, что $A^\sharp \nleq_{\mathrm{wbT}} A$. Учитывая, что $A^\sharp \leq_T A$, получаем, что сводимости $\leq_T$ и $\leq_{\mathrm{wbT}}$ не совпадают. Теорема доказана.

Пусть $A \subseteq \omega$. Определим $\mathfrak{M}(A) = \langle \omega; +, \times, A\rangle$, где здесь и далее $+$ и $\times$ суть графики операций сложения и умножения соответственно, а A — унарный предикат, выделяющий A.

Предложение 3. *Для любых $A, B \subseteq \omega$ условие $\mathfrak{M}(A) \prec_\exists \mathfrak{M}(B)$ эквивалентно $A \leq_{\mathrm{wbT}} B$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}(A) \prec_\exists \mathfrak{M}(B)$. Зафиксируем некоторую $\exists$-интерпретацию $\mathfrak{M}(A)$ в $\mathfrak{M}(B)$. Пусть в этой интерпретации элементы из $\mathfrak{M}(A)$ интерпретируются классами эквивалентности множества $\mathfrak{M}(B)^k$, $k < \omega$.

Легко видеть, что существует эффективная процедура, позволяющая по любому натуральному числу $a \in \mathfrak{M}(B)$ равномерно находить некоторую k-ку из множества кортежей, обозначающую a, которую будем обозначать через $\rho(a)$.

Укажем способ построения вычислимо перечислимого множества W, которое задает wbT-сводимость A к B. Для этого достаточно указать процедуру, позволяющую равномерно по произвольному $a \in \omega$ перечислять множество V_a, состоящее из всех элементов вида $\langle a, \varepsilon, f\rangle$, принадлежащих W, и положить $W = \bigcup\limits_{a<\omega} V_a$.

Утверждение $a \in A$ эквивалентно истинности на $\mathfrak{M}(B)$ некоторой $\exists$-формулы $\exists \bar{y}\gamma(\rho(a), \bar{y})$. При этом можно считать, что $\gamma(\rho(a), \bar{y})$ — дизъюнктивная нормальная форма. Напомним, что в рассматриваемой нами сигнатуре присутствуют только предикатные символы. Будем перебирать всевозможные наборы значений для переменных кортежа $\bar{y}$, для которых истинна формула $\gamma(\rho(a), \bar{y})$ и для каждого такого набора $\bar{y}$ и каждой элементарной конъюнкции формулы $\gamma(\rho(a), \bar{y})$, которая истинна на $\bar{y}$, проделываем следующее: выбираем в ней все конъюнктивные члены, содержащие B. Они имеют вид $n \in B$ либо $\neg(n \in B)$, причем одновременное выполнение обоих случаев невозможно. Определим конечную функцию f так: $f(n) = 1$, если наша элементарная конъюнкция содержит $n \in B$, и $f(n) = 0$, если она содержит $\neg(n \in B)$. В остальных случаях f не определена. Добавим $\langle a, 1, f\rangle$ к перечислению V_a.

Далее, утверждение $a \notin A$ эквивалентно истинности некоторой $\exists$-формулы $\exists \bar{y} \gamma'(\rho(a), \bar{y})$. Для этой формулы одновременно осуществляем аналогичный процесс с той лишь разницей, что будем добавлять к перечислению множества V_a элементы вида $\langle a, 0, f\rangle$.

Нетрудно видеть, что

$$\chi_A(x) = y \Leftrightarrow \exists f \subseteq \chi_B(\langle x, y, f\rangle \in W).$$

Кроме того, мощность всех возникающих в этом процессе функций f ограничена сверху хотя бы суммой длин формул γ и γ'. Отсюда получим, что $A \leq_{\mathrm{wbT}} B$.

Докажем обратную импликацию. Предположим, что $A \leq_{\mathrm{wbT}} B$.

Лемма 6. *Для любого $k < \omega$ график любой частично рекурсивной функции из ω^k в ω определим $\exists$-формулой на структуре $\langle \omega; +, \times\rangle$.*

Доказательство. По индукции легко устанавливается, что любое отношение вида $p(\bar{x}) = y$, где p — полином с натуральными коэффициентами, выразимо в рассматриваемой модели $\exists$-формулой. Как известно, функция $c(x, y) = ((x+y)^2 + 3x + y)/2$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между ω^2 и ω. Из только что сделанного замечания легко получить, что график функции $c(x, y)$ определим $\exists$-формулой в нашей структуре. Наконец, используя тот факт, что любое вычислимо перечислимое множество можно определить формулой вида $\exists \bar{y}(p(x, \bar{y}) = q(x, \bar{y}))$, где p и q — подходящие полиномы с натуральными коэффициентами [5], без труда получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

Определим интерпретацию $\mathfrak{M}(A)$ в $\mathfrak{M}(B)$ следующим образом. Каждый элемент будет интерпретировать сам себя. Осталось только определить $\exists$-формулами множество A и его дополнение. Поскольку $A \leq_{\mathrm{wbT}} B$, существуют перечислимое множество W и $m < \omega$ такие, что выполнены эквивалентности

$$x \in A \Leftrightarrow \exists f \subseteq \chi_B(|f| = m \wedge \langle x, 1, f\rangle \in W), \tag{4}$$

$$x \notin A \Leftrightarrow \exists f \subseteq \chi_B(|f| = m \wedge \langle x, 0, f\rangle \in W). \tag{5}$$

Для завершения доказательства достаточно убедиться, что утверждения в правых частях (4) и (5) выразимы $\exists$-формулами. Без ограничения общности можно считать, что если $\langle x, \varepsilon, f\rangle \in W$, то $|f| = m$, поэтому условия $|f| = m$ в обеих эквивалентностях излишни. Ввиду леммы 6 условие $\langle x, 1, f\rangle \in W$ можно выразить $\exists$-формулой, эквивалентной $\exists z(z = \langle x, 1, f\rangle \wedge z \in W)$, поскольку обе части внутри скобок являются перечислимыми отношениями от своих аргументов. Осталось записать $\exists$-формулой условие $f \subseteq \chi_B$. Это можно сделать, например, так: сначала заметим, что

$$f \subseteq \chi_B \Leftrightarrow (f \text{ — код функции}) \wedge (\mathrm{dom}(f) = \{0, \dots, m-1\}) \\ \wedge \bigwedge_{i<m} \exists uv(u = ((f)_i)_0 \wedge v = ((f)_i)_1 \wedge (u \in B \leftrightarrow v = 1)),$$

после чего остается заметить, что отношения «f — код функции», $\mathrm{dom}(f) = \{0, \dots, m-1\}$, $u = ((f)_i)_0$, $v = ((f)_i)_1$ и $v = 1$ выразимы в структуре $\mathfrak{M}(B)$ $\exists$-формулами. Аналогично поступаем с условием $x \notin A$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Упорядоченные структуры тьюринговых степеней и степеней по слабо ограниченной сводимости изоморфно вкладываются в полурешетку по $\exists$-интерпретируемости алгебраических структур.*

Доказательство. Утверждение следует из эквивалентностей

$$A \leq_{\mathrm{wbT}} B \Leftrightarrow \mathfrak{M}(A) \prec_{\exists} \mathfrak{M}(B),$$

$$A \leq_T B \Leftrightarrow A^\sharp \leq_{\mathrm{wbT}} B^\sharp \Leftrightarrow \mathfrak{M}(A^\sharp) \prec_{\exists} \mathfrak{M}(B^\sharp).$$

Теорема доказана.

Предложение 4. *Степени по* wbT*-сводимости образуют верхнюю полурешетку, в которую естественным образом вкладывается полурешетка T-степеней. При этом*

$$\sup\{\deg_{\mathrm{wbT}}(A), \deg_{\mathrm{wbT}}(B)\} = \deg_{\mathrm{wbT}}(A \oplus B),$$

где $A \oplus B = \{2x \mid x \in A\} \cup \{2x+1 \mid x \in B\}$.

Доказательство. По п. 3 теоремы 1 отображение

$$\theta : \deg_T(A) \mapsto \deg_{\mathrm{wbT}}(A^\sharp),$$

где $\deg_T(A)$ — тьюрингова степень множества A, является изоморфным вложением упорядоченных множеств.

Для доказательства того, что точная верхняя грань двух степеней вычисляется так, как это указано в формулировке предложения, достаточно проверить следующие утверждения:

1) $A, B \leq_{\mathrm{wbT}} A \oplus B$;

2) если $A, B \leq_{\mathrm{wbT}} C$, то $A \oplus B \leq_{\mathrm{wbT}} C$.

Утверждение 1 следует из легко проверяемого свойства $\mathfrak{M}(A), \mathfrak{M}(B) \prec_{\exists} \mathfrak{M}(A \oplus B)$ и предложения 3.

Докажем утверждение 2. Пусть сводимости $A \leq_{\mathrm{wbT}} C$ и $B \leq_{\mathrm{wbT}} C$ задаются перечислимыми множествами W_A и W_B соответственно. Тогда легко проверяется, что множество

$$\{\langle 2x, y, f\rangle \mid \langle x, y, f\rangle \in W_A\} \cup \{\langle 2x+1, y, f\rangle \mid \langle x, y, f\rangle \in W_B\}$$

задает сводимость $A \oplus B \leq_{\mathrm{wbT}} C$.

Проверим, что отображение θ сохраняет точные верхние грани. Доказательство следующей леммы оставляем читателю.

Лемма 7. *Множества $(A \oplus B)^\sharp$ и $A^\sharp \oplus B^\sharp$ m-эквивалентны и, следовательно* wbT*-эквивалентны.*

Используя эту лемму, имеем

$$\begin{aligned}\theta(\sup\{\deg_T(A), \deg_T(B)\}) &= \theta(\deg_T(A \oplus B)) \\ &= \deg_{\mathrm{wbT}}((A \oplus B)^\sharp) = \deg_{\mathrm{wbT}}(A^\sharp \oplus B^\sharp) \\ &= \sup\{\deg_{\mathrm{wbT}}(A^\sharp), \deg_{\mathrm{wbT}}(B^\sharp)\} = \sup\{\theta(\deg_T(A)), \theta(\deg_T(B))\}.\end{aligned}$$

Предложение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tussupov J. A., Morozov A. S., Satekbaeva A. Z.* On the existential interpretability of structures // Sib. Electronic Math. Reports. 2014. N 11. P. 557–566.

2. *Ershov Yu. L.* Σ-Definability of algebraic structures // Handbook of Recursive Mathematics. V. 1 (Recursive Model Theory). Ser. Stud. Logic Found. Math. Amsterdam; Lausanne; New York; Oxford; Shannon; Singapore; Tokyo: Elsevier, 1998. P. 235–260.

3. *Ершов Ю. Л.* Определимость и вычислимость. Новосибирск: Науч. книга, 1996.

4. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.

5. *Матиясевич Ю. В.* Диофантовость перечислимых множеств // Докл. АН СССР. 1970. Т. 191, № 2. С. 279–282.

Статья поступила 5 мая 2016 г.

Морозов Андрей Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
morozov@math.nsc.ru