Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2017. Том 58, № 3

УДК 517.958

ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОДНОМЕРНОГО ЯДРА УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОВЯЗКОУПРУГОСТИ

Д. К. Дурдиев, Ж. Д. Тотиева

Аннотация. Рассматривается задача определения ядра $K(t)$, $t \in [0, T]$, входящего в систему интегродифференциальных уравнений электровязкоупругости. Предполагается, что коэффициенты уравнений зависят только от одной пространственной переменной. Обратная задача заменяется эквивалентной системой интегральных уравнений для неизвестных функций. К последней в пространстве непрерывных функций с весовыми нормами применяется принцип сжатых отображений. Доказана теорема глобальной однозначной разрешимости и получена оценка устойчивости решения обратной задачи.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.307

Ключевые слова: обратная задача, устойчивость, дельта-функция, модули упругости, ядро.

1. Введение

В настоящее время явление пьезоэлектричества все больше используется в различных областях науки и техники и прежде всего в радиотехнике, акустике, дефектоскопии, метрологии, вычислительной технике и акустооптике. В основе этого явления лежит способность некоторых материалов деформироваться при воздействии на них внешних электрических полей. Известна обратимость этого явления, проявляющаяся в возбуждении электрического поля при деформации пьезоэлектрика внешними механическими нагрузками.

В связи с этим математическое исследование волновых процессов в электромагнитоупругих средах на основе решения тех или иных задач электромагнитоупругости весьма актуально.

Полная система дифференциальных уравнений электромагнитоупругости среды состоит из следующих уравнений:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div} D = 0, \quad \operatorname{div} B = 0. \tag{1.3}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\rho = \rho(x)$ — плотность неоднородной среды, $\rho(x) > 0$, $u = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ — вектор смещений, $E = (E_1(x,t), E_2(x,t), E_3(x,t))$ и $H = (H_1(x,t), H_2(x,t), H_3(x,t))$ — векторы электрической и магнитной напряженности, $D = (D_1(x,t), D_2(x,t), D_3(x,t))$ и $B = (B_1(x,t), B_2(x,t), B_3(x,t))$ — векторы электрической и магнитной индукции, c — скорость света.

В вязкоупругих материалах, имеющих явление пьезоэффекта, для тензора напряжений и компонент электрической и магнитной индукции имеют место следующие представления:

$$T_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} c_{ijkl} \left[S_{kl} + \int_0^t K(t-\tau) S_{kl}(x,\tau)\, d\tau \right] - \sum_{k=1}^{3} e_{kij} E_k, \quad i,j = 1,2,3, \tag{1.4}$$

$$D_j = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{jk} E_k + \sum_{k,l=1}^{3} e_{jkl} S_{kl}, \ j = 1,2,3, \quad B = \mu H,$$

где

$$S_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad k,l = 1,2,3,$$

$c_{ijkl} = c_{ijkl}(x)$ — модули упругости, $K(t)$ — функция релаксации среды, $e_{kij} = e_{kij}(x)$ — пьезоэлектрические модули, $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(x)$ — диэлектрические модули, $\mu = \mu(x)$ — магнитная проницаемость. Далее предполагается, что [1, гл. 6; 2] $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}$, $e_{kij} = e_{kji}$, $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$.

Обратные задачи для гиперболических интегродифференциальных уравнений и систем являются объектом исследований в работах многих авторов. Из наиболее близких к настоящей работе можно выделить работы [3–10]. В [3–5] (см. также литературу в них) рассмотрены задачи об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости в неоднородной изотропной среде. В [6, 7] изучены задачи восстановления одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной и неограниченной областях соответственно. Доказаны теоремы глобальной однозначной разрешимости этих задач в классе непрерывных функций с весовой нормой. Основной чертой, присущей [3–7, 10] и настоящей работам, является использование в них в качестве локализованного в точке или на границе рассматриваемой пространственной области источника, инициирующего физический процесс распространения волн. Это существенно повышает прикладную значимость изучаемых задач.

В пьезоэлектрической среде связь между электрическими и механическими величинами, выражаемая с помощью уравнений (1.1)–(1.3), приводит к взаимодействию упругих и электромагнитных волн. Действительно, из-за первого соотношения (1.4) в уравнении динамики появляется член, содержащий электрическое поле, а вследствие второго соотношения (1.4) в уравнениях Максвелла возникает член, содержащий механическую деформацию. В случае распространения только «медленных» волн пренебрегают малыми поправками $\frac{s}{c}$, $\frac{s}{c^2}$, где s — скорость распространения упругих волн, c — скорость света. Тогда в уравнениях (1.1)–(1.3) скорость света принимается равной бесконечности [2]. Система уравнений (1.1)–(1.3) распадается на две группы. Уравнения (1.1) вместе с квазистатическими уравнениями

$$\operatorname{div} D = 0, \quad \operatorname{rot} E = 0, \quad E = -\nabla\varphi \tag{1.5}$$

образуют первую группу, а вторую группу составляют уравнения

$$\operatorname{rot} H = 0, \quad \operatorname{div} B = 0.$$

Симметричность тензора напряжений уменьшает число независимых модулей упругости с 81 до 21. Если принять, что $c_{\alpha\beta} = c_{ijkl}$, где $\alpha = (ij)$ и $\beta = (kl)$, в соответствии с обозначениями $(11) \to 1$, $(22) \to 2$, $(33) \to 3$, $(23) = (32) \to 4$,

$(13) = (31) \to 5$, $(12) = (21) \to 6$, то матрице независимых модулей упругости можно придать вид симметрической матрицы порядка 6×6, поскольку в паре индексов (i, j) порядок не играет роли и существует только шесть различных парных комбинаций. Полный набор характеристик электромагнитоупругой среды дается в [1, гл. 6]. Как и в [2], будем рассматривать анизотропные среды кубической структуры, т. е. матрица характеристик среды имеет следующий симметрический блочный вид:

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} \end{bmatrix} & \mathrm{O}_{(3\times 3)} & \mathrm{O}_{(3\times 3)} \\ \mathrm{O}_{(3\times 3)} & \begin{bmatrix} c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & e_{14} & 0 \\ 0 & 0 & e_{14} \end{bmatrix} \\ \mathrm{O}_{(3\times 3)} & \begin{bmatrix} e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & e_{14} & 0 \\ 0 & 0 & e_{14} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

где $\mathrm{O}_{(3\times 3)}$ — трехмерная квадратная матрица с нулевыми элементами.

2. Постановка задачи

При $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, $t \in R$, $x_3 > 0$ рассмотрим систему интегродифференциальных уравнений динамической электровязкоупругости (1.1), (1.4), (1.5)

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \ i = 1, 2, 3, \quad x_3 > 0, \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} D = 0, \quad \operatorname{rot} E = 0 \tag{2.2}$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$u_j|_{t<0} \equiv 0, \quad j = 1, 2, 3, \tag{2.3}$$

$$E_j|_{t<0} \equiv 0, \quad j = 1, 2, 3, \tag{2.4}$$

$$T_{j3}|_{x_3=+0} = f_j(x_1, t), \quad j = 1, 2, 3, \tag{2.5}$$

$$\varphi|_{x_3=+0} = \lambda(x_1, t), \quad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right|_{x_3=+0} = 0. \tag{2.6}$$

Далее предполагаем, что модули упругости c_{11}, c_{12}, c_{44}, плотность ρ, пьезоэлектрический модуль e_{14} и диэлектрический модуль ϵ являются функциями только одной переменной x_3, вектор-функция $(c_{11}, c_{12}, c_{44}, e_{14})$ принадлежит классу Λ,

$$\Lambda = \{(c_{11}(x_3), c_{12}(x_3), c_{44}(x_3), e_{14}(x_3)) : c_{44} > 0, c_{11} > c_{12}, c_{11} + 2c_{12} > 0,$$
$$c'_{11}(+0) = 0, c'_{44}(+0) = 0, c_{11}, c_{44}, e_{14} \in C^2(R_+), c_{12} \in C(R_+)\}, \quad R_+ = [0, \infty),$$

и ρ, ϵ — положительные функции из класса $C^2(R_+)$, причем $\rho'(+0) = 0$.

Определим билинейный интегральный оператор L по формуле

$$L[K(t), u(x,t)] = u(x,t) + \int_0^t K(t-\tau) u(x,\tau)\, d\tau.$$

В дальнейшем для сокращения записи иногда в операторе L не будем указывать зависимость функций от переменных, подразумевая зависимость первой — от t, а второй — от x, t.

Равенства (2.1)–(2.6) для анизотропных сред кубической структуры (1.6) можно переписать в следующем виде:

$$\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = L\Big[K, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) + c_{12}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + c_{44}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + c_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (c_{12}+c_{44})\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\Big] + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(e_{14}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) + e_{14}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad (2.7)$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = L\Big[K, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + c_{12}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + c_{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + c_{11}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (c_{12}+c_{44})\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}\Big] + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(e_{14}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) + e_{14}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad (2.8)$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = L\Big[K, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{11}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) + c_{44}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + c_{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + c_{44}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + c_{44}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}\Big] + e_{14}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + e_{14}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(e_{14}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\epsilon\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(e_{12}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(e_{14}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(e_{14}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\epsilon\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(e_{14}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(e_{14}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\epsilon\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right) = 0, \quad (2.10)$$

$$\left(L\left[K, c_{44}\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + c_{44}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right] + e_{14}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)\Big|_{x_3=+0} = f_1(x_1,t), \quad (2.11)$$

$$\left(L\left[K, c_{44}\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + c_{44}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right] + e_{14}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)\Big|_{x_3=+0} = f_2(x_1,t), \quad (2.12)$$

$$\left(L\left[K, c_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{11}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right]\right)\Big|_{x_3=+0} = f_3(x_1,t), \quad (2.13)$$

$$u_i|_{t<0} \equiv 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big|_{t<0} \equiv 0, \quad i = 1,2,3, \quad (2.14)$$

$$\varphi|_{x_3=+0} = \lambda(x_1,t), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\Big|_{x_3=0} = 0. \quad (2.15)$$

Задачу определения вектора смещения $u(x,t)$ и потенциала $\varphi(x,t)$, удовлетворяющих (в обобщенном смысле) равенствам (2.1)–(2.6) при заданных функциях $K(t)$, $\rho(x_3)$, $\epsilon(x_3)$, $c_{11}(x_3)$, $c_{12}(x_3)$, $c_{44}(x_3)$, $e_{14}(x_3))$, $\lambda(x_1,t)$, $f_j(x_1,t)$, $j = 1,2,3$, будем называть *прямой задачей.*

Замечание. Так как коэффициенты уравнений и граничные условия в системе (2.7)–(2.15) не зависят от переменной x_2, решение прямой задачи u, φ также не будет зависеть от x_2 [11].

Запишем соотношения (2.7)–(2.15) в терминах преобразования Фурье по переменной x_1. Имеем

$$\rho\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = L\Big[K, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right) + i\nu c_{12}\frac{\partial U_3}{\partial x_3} + i\nu\frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}U_3\right) - \nu^2 c_{11}U_1\Big], \quad (2.16)$$

$$\rho\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = L\Big[K, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right) - \nu^2 c_{44}U_2\Big] + i\nu\frac{\partial}{\partial x_3}(e_{14}\phi) + i\nu e_{14}\frac{\partial \phi}{\partial x_3}, \quad (2.17)$$

$$\rho\frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} = L\Big[K, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{11}\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right) + i\nu c_{44}\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + i\nu\frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{12}U_1\right) - \nu^2 c_{44}U_3\Big], \quad (2.18)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\epsilon\frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right) + \epsilon\nu^2\phi + i\nu e_{14}\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + i\nu\frac{\partial}{\partial x_3}\left(e_{14}U_2\right) = 0, \quad (2.19)$$

$$L\left[K, ic_{44}\nu U_3 + c_{44}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right]\bigg|_{x_3=+0} = F_1(\nu, t), \quad (2.20)$$

$$\left(L\left[K, c_{44}\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right] + i\nu e_{14}\phi\right)\bigg|_{x_3=+0} = F_2(\nu, t), \quad (2.21)$$

$$L\left[K, i\nu c_{12}U_1 + c_{11}\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right]\bigg|_{x_3=+0} = F_3(\nu, t), \quad (2.22)$$

$$U_j|_{t<0} \equiv 0,\ j = 1, 2, 3, \quad \phi|_{t<0} \equiv 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\bigg|_{t<0} \equiv 0, \quad (2.23)$$

$$\phi|_{x_3=+0} = G(\nu, t), \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0} = 0, \quad (2.24)$$

где

$$U_j(x_3, t, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_3, t)\exp(i\nu x_1)\,dx_1,\ j = 1, 2, 3,$$

$$\phi(x_3, t, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_3, t)\exp(i\nu x_1)\,dx_1,$$

$$F_j(t, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x_1, t)\exp(i\nu x_1)\,dx_1,\ j = 1, 2, 3,$$

$$G(t, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(x_1, t)\exp(i\nu x_1)\,dx_1,$$

ν — параметр, функции U_j, ϕ принадлежат $C^1(R; C(\widetilde{D}))$, $\widetilde{D} = \{(x_3, t) : x_3 \geq 0,\ 0 \leq t \leq T\}$, $T > 0$.

Систему (2.16)–(2.24) можно рассматривать как совокупность двух подсистем. Первая включает равенства (2.16), (2.18), (2.20), (2.22), (2.23) и определяет функции U_1 и U_3. Вторая подсистема (2.17), (2.19), (2.21), (2.23), (2.24) определяет функции U_2 и ϕ. Ядро интегрального оператора $K(t)$ входит в обе подсистемы. В зависимости от вида функций $f_j(x_1, t)$, $j = 1, 2, 3$; $\lambda(x_1, t)$ в (2.11)–(2.13), (2.15) будем рассматривать следующие задачи.

Обратная задача 1. *Пусть*

$$f_j(x_1,t)=\delta_{2j}\delta(t)\delta'(x_1),\quad \lambda(x_1,t)=0,$$

где δ_{2j} — символ Кронекера, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, $\delta'(x_1)$ — производная дельта-функции Дирака. Определить ядро $K(t)$, $t>0$, входящее в равенства (2.1) *посредством формулы* (1.4), *если относительно компоненты U_2 решения прямой задачи известна дополнительная информация*

$$\frac{\partial}{\partial\nu}U_2(x_3,t,\nu)\bigg|_{x_3=+0,\nu=+0}=g(t),\quad t>0, \tag{2.25}$$

где $g(t)$ — заданная функция.

Обратная задача 2. *Пусть*

$$f_j(x_1,t)=0,\quad \lambda(x_1,t)=\delta'(t)\delta(x_1).$$

Определить ядро $K(t)$, $t>0$, входящее в равенства (2.1) *посредством формулы* (1.4), *если относительно компоненты U_2 решения прямой задачи известна дополнительная информация* (2.25).

Далее будем предполагать, что диэлектрическая проницаемость $\epsilon(0)$ ненулевая.

3. Обратная задача 1

Из равенств (2.17), (2.21), (2.23), (2.25) для функции

$$U_2^1=\frac{\partial}{\partial\nu}U_2(x_3,t,\nu)\bigg|_{\nu=+0}$$

получаем

$$\rho\frac{\partial^2U_2^1}{\partial t^2}=L\left[K,\frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial U_2^1}{\partial x_3}\right)\right]+i\frac{\partial}{\partial x_3}(e_{14}\phi^0)+ie_{14}\frac{\partial\phi^0}{\partial x_3},\quad x_3>0, \tag{3.1}$$

$$U_2^1|_{t<0}\equiv0, \tag{3.2}$$

$$\left(L\left[K,c_{44}\frac{\partial U_2^1}{\partial x_3}\right]+ie_{14}\phi^0\right)\bigg|_{x_3=+0}=-i\delta'(t), \tag{3.3}$$

$$U_2^1\big|_{x_3=0}=g(t). \tag{3.4}$$

С учетом последних равенств обратную задачу 1 можно переформулировать следующим образом: *найти функцию $K(t)$, входящую в интегродифференциальное уравнение* (3.1), *такую, что решение задачи* (3.1)–(3.3) *удовлетворяет равенству* (3.4), *где* $g(t)$, $t\in[0,T]$, — известная функция, $\rho(x_3), c_{44}(x_3), e_{14}(x_3)$ — заданные функции из класса Λ, а функция $\phi^0(x_3,t)$ — решение задачи (2.10), (2.14), (2.15) при $\nu=0$:

$$\frac{\partial^2\phi^0}{\partial x_3^2}=0, \tag{3.5}$$

$$\phi^0|_{x_3=+0}=0,\quad \frac{\partial\phi^0}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=+0}=0. \tag{3.6}$$

Заметим, что решением задачи (3.5), (3.6) является функция $\phi^0(t)\equiv0$.

Введем в рассмотрение новую переменную y по формуле

$$y = \psi(x_3) = \int\limits_0^{x_3} \frac{d\xi}{\mathrm{v}(\xi)}, \quad \mathrm{v}(x_3) = \sqrt{\frac{c_{44}(x_3)}{\rho(x_3)}}.$$

Через $\psi^{-1}(y)$ обозначим функцию, обратную к $\psi(x_3)$.

Пусть

$$v(y,t) = \frac{U_2^1(\psi^{-1}(y),t)}{s(y)}, \quad s(y) = \sqrt{\frac{\mathrm{v}(+0)\rho(+0)}{\mathrm{v}(\psi^{-1}(y))\rho(\psi^{-1}(y))}}.$$

Тогда обратная задача (3.1)–(3.4) в терминах вновь введенных функций и переменной y приводится к задаче определения ядра K из следующих соотношений:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = L\left[K, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + q(y)v\right], \quad y > 0,\ t \in R, \tag{3.7}$$

$$v|_{t<0} \equiv 0, \tag{3.8}$$

$$L\left[K, \frac{\partial v(y,t)}{\partial y}\right]_{y=+0} = -ia\delta'(t), \tag{3.9}$$

$$v(y,t)|_{y=+0} = g(t), \tag{3.10}$$

где $q(y) = \frac{s''(y)}{s(y)} - 2\left[\frac{s'(y)}{s(y)}\right]^2$, $a = e_{14}(+0)[c_{44}(+0)\rho(+0)]^{-\frac{1}{2}}$.

Заметим, что исследование этой задачи может быть проведено вполне аналогично исследованию обратной задачи, изученной в [7].

4. Обратная задача 2

В этом случае $\phi^0(x_3,t)$ является обобщенным решением задачи

$$\frac{\partial^2 \phi^0}{\partial x_3^2} = 0, \tag{4.1}$$

$$\phi^0|_{x_3=+0} = \delta'(t), \quad \left.\frac{\partial \phi^0}{\partial x_3}\right|_{x_3=+0} = 0. \tag{4.2}$$

Легко заметить, что $\phi^0(t) = \delta'(t)$ удовлетворяет уравнениям (4.1), (4.2). Тогда обратная задача 2 заключается в нахождении функции $K(t)$, $t > 0$, из следующих соотношений, аналогичных равенствам (3.7)–(3.10) разд. 3:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = L\left[K, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + q(y)v\right] + i\frac{1}{s(y)}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}e_{14}\right]_{x_3=\psi^{-1}(y)}\delta'(t), \quad y > 0,\ t \in R, \tag{4.3}$$

$$v|_{t<0} \equiv 0, \tag{4.4}$$

$$L\left[K, \frac{\partial v(y,t)}{\partial y}\right]_{y=+0} = -ia\delta'(t), \tag{4.5}$$

$$v(y,t)|_{y=+0} = g(t). \tag{4.6}$$

Далее предположим, что функция $g(t)$ имеет структуру $g(t) = ia\delta(t) + \theta(t)g_0(t)$.

Пусть $L[K, v(y,t)]\exp(-K(0)t/2) = w(y,t)$. Как нетрудно видеть,

$$v(y,t) = \exp(K(0)t/2)w(y,t) + \int\limits_0^t r(t-\tau)\exp(K(0)\tau/2)w(y,\tau)\,d\tau,$$

где
$$r(t) = -K(t) - \int_0^t K(t-\tau) r(\tau)\, d\tau. \tag{4.7}$$

Относительно новых функций $w(y,t)$ и $r(t)$ система уравнений (4.3)–(4.6) для $y > 0$, $t \in R$ принимает вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + b(y)w - \int_0^t h(t-\tau) w(y,\tau)\, d\tau$$
$$+ i\frac{1}{s(y)}\left[\frac{\partial}{\partial x_3} e_{14}\right]_{x_3=\psi^{-1}(y)} \left(\delta'(t) - \frac{r(0)}{2}\delta(t)\right), \tag{4.8}$$
$$w|_{t<0} \equiv 0, \tag{4.9}$$
$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=+0} = -ia\left(\delta'(t) - \frac{r(0)}{2}\delta(t)\right), \tag{4.10}$$
$$w|_{y=+0} = \tilde{g}(t) + \int_0^t K_0(t-\tau)\tilde{g}(\tau)\, d\tau, \tag{4.11}$$

где
$$b(y) = q(y) + \frac{r^2(0)}{4} - r'(0), \quad h(t) = r''(t)\exp(r(0)t/2),$$
$$\tilde{g}(t) = ia\delta(t) + \tilde{g}_0(t)\theta(t), \quad \tilde{g}_0(t) = g_0(t)\exp(r(0)t/2),$$
$$K_0(t) = K(t)\exp(r(0)t/2).$$

В (4.8), (4.10) и введенных обозначениях использовано равенство $K(0) = -r(0)$, вытекающее из (4.7).

Решение прямой задачи (4.8)–(4.10) будем искать в виде
$$w(y,t) = w_1(y,t) + w_2(y,t),$$
где $w_1(y,t)$ — решение задачи

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + b(y)w_1 - \int_0^t h(t-\tau) w_1(y,\tau)\, d\tau$$
$$+ i\frac{1}{s(y)}\left[\frac{\partial}{\partial x_3} e_{14}\right]_{x_3=\psi^{-1}(y)} \left(\delta'(t) - \frac{r(0)}{2}\delta(t)\right), \quad y > 0,\ t \in R, \tag{4.12}$$
$$w_1|_{t<0} \equiv 0, \tag{4.13}$$
$$\left.\frac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y=+0} = 0, \tag{4.14}$$

а $w_2(y,t)$ — решение задачи

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + b(y)w_2 - \int_0^t h(t-\tau) w_2(y,\tau)\, d\tau, \quad y > 0,\ t \in R, \tag{4.15}$$
$$w_2|_{t<0} \equiv 0, \tag{4.16}$$

$$\left.\frac{\partial w_2}{\partial y}\right|_{y=+0} = -ia\left(\delta'(t) - \frac{r(0)}{2}\delta(t)\right). \tag{4.17}$$

Продолжим в равенстве (4.12) функции w_1, b, s четным, а e_{14} — нечетным образом по y при $y < 0$. При этом равенство (4.14) будет выполняться автоматически. Тогда решение задачи для $w_1(y,t)$ представляется в виде

$$w_1(y,t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{R^2} \theta(t-\tau-|y-\xi|)\left[b(\xi)w_1(\xi,\tau) - \int\limits_0^\tau h(\tau-\eta)w_1(\xi,\eta)\,d\eta \right.$$
$$\left. + p(\xi)\left(\delta'(\tau) - \frac{r(0)}{2}\delta(\tau)\right)\right] d\tau d\xi, \tag{4.18}$$

где $\frac{1}{2}\theta(t-|y|)$ — фундаментальное решение оператора

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad p(y) = \frac{i}{s(y)}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}e_{14}\right]_{x_3=\psi^{-1}(y)}.$$

Используя свойства дельта-функции, преобразуем слагаемые, содержащие дельта-функцию в равенстве (4.18):

$$\frac{1}{2}\int\limits_R p(\xi)\int\limits_R \theta(t-\tau-|y-\xi|)\delta'(\tau)\,d\tau d\xi = -\frac{1}{2}\int\limits_R p(\xi)\frac{d}{d\tau}\theta(t-\tau-|y-\xi|)\Big|_{\tau=0}\,d\xi$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_R p(\xi)\delta(t-|y-\xi|)\,d\xi = \frac{1}{2}[p(y-t)+p(y+t)], \quad t > |y| > 0,$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{r(0)}{2}\right)\int\limits_R p(\xi)\int\limits_R \theta(t-\tau-|y-\xi|)\delta(\tau)\,d\tau d\xi$$
$$= -\frac{r(0)}{4}\int\limits_R p(\xi)\theta(t-|y-\xi|)\,d\xi = -\frac{r(0)}{4}\int\limits_{y-t}^{y+t} p(\xi)\,d\xi, \quad t > |y| > 0.$$

Таким образом, уравнение (4.18) в области $t > |y| > 0$ эквивалентно следующему интегральному уравнению:

$$w_1(y,t) = \frac{1}{2}[p(y-t)+p(y+t)] - \frac{r(0)}{4}\int\limits_{y-t}^{y+t} p(\xi)\,d\xi$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{y-t}^{y+t}\int\limits_0^{t-|y-\xi|}\left[b(\xi)w_1(\xi,\tau) - \int\limits_0^\tau h(\tau-\eta)w_1(\xi,\eta)\,d\eta\right] d\tau d\xi. \tag{4.19}$$

Из теории гиперболических уравнений следует, что функция $w_2(y,t)$ как решение прямой задачи (4.15)–(4.17) обладает свойством $w_2 \equiv 0$, $t < y$, $y > 0$ и в окрестности характеристической прямой $t = y$ имеет следующую структуру:

$$w_2(y,t) = ia\delta(t-y) + \widetilde{w}_2(y,t)\theta(t-y), \tag{4.20}$$

где $\widetilde{w}_2(y,t)$ — решение задачи

$$\frac{\partial^2 \widetilde{w}_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \widetilde{w}_2}{\partial y^2} + b(y)\widetilde{w}_2 - iah(t-y) - \int\limits_y^t h(t-\tau)\widetilde{w}_2(y,\tau,\nu)\,d\tau, \tag{4.21}$$

$$\widetilde{w}_2|_{t=y+0} = -\frac{iar(0)}{2} + \frac{ia}{2}\int\limits_0^y b(\xi)\,d\xi = \beta(y), \tag{4.22}$$

$$\left.\frac{\partial \widetilde{w}_2}{\partial y}\right|_{y=+0} = 0. \tag{4.23}$$

Дополнительное условие (4.11) выглядит как

$$\widetilde{w}_2|_{y=+0} = \tilde{g}_0(t) + \int\limits_0^t K_0(t-\tau)\tilde{g}_0(\tau)\,d\tau + iaK_0(t) - \widetilde{w}_1(0,t). \tag{4.24}$$

При требовании непрерывности функций $w_2(y,t)$, $\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)(y,t)$ при $y=t=0$ из соотношений (4.22)–(4.24) несложно выразить $r(0), r'(0)$ через известные числа:

$$r(0) = \frac{2}{ia}(g_0(0)-p(0)), \quad r'(0) = -q(0) + \frac{1}{(ia)^2}\left(p^2(0) - g_0^2(0)\right) + \frac{2}{ia}g_0'(0) - \frac{2}{ia}p'(0). \tag{4.25}$$

При выводе последних равенств были использованы следующие соотношения:

$$K'(t) = -r'(t) - r(0)K(t) - \int\limits_0^t r'(t-\tau)K(\tau)\,d\tau, \quad K'(0) = -r'(0) + r^2(0),$$

$$w_1(0,0) = p(0), \quad w_{1t}'(0,0) = p'(0) - \frac{r(0)}{2}p(0).$$

В дальнейшем будем считать, что в соотношениях для $b(y)$ вместо $r(0)$, $r'(0)$ поставлены их значения с помощью равенств (4.25).

4.1. Сведение обратной задачи 2 к эквивалентной системе интегральных уравнений

Лемма. *Пусть функция $g(t)$ представима в виде*

$$g(t) = ia\delta(t) + \theta(t)g_0(t), \quad a = e_{14}(+0)[c_{44}(+0)\rho(+0)]^{-\frac{1}{2}},$$

$g_0(t) \in C^2[0,T]$, $\theta(t)$ — функция Хевисайда и $(\rho, c_{44}, e_{14}) \in C^3[0,\psi^{-1}(T/2]$. Тогда задача (4.8)–(4.11) для $(y,t) \in D_T$, $D_T = ((y,t) \mid 0 \le y \le t \le T-y)$, эквивалентна задаче нахождения вектор-функций $w_2(y,t)$, $\left(\frac{\partial w_2}{\partial t}\right)(y,t)$, $h(t)$, $K_0(t)$, $K_0'(t)$, $K_0''(t)$, $w_1(y,t)$, $\left(\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)(y,t)$ из следующей системы интегральных уравнений:

$$w_2(y,t) = \beta(y) + \int\limits_y^t \frac{\partial w_2}{\partial \tau}(y,\tau)\,d\tau, \tag{4.26}$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t}(y,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{g}_0'(t-y) - r(0)\tilde{g}_0(t-y) - p'(t-y) + \frac{r(0)}{2}p(t-y)\right) - \frac{ia}{2}b\left(\frac{y+t}{2}\right)$$

$$- \frac{ia}{2} h(t-y)y + \frac{ia}{2} K_0'(t-y) + \frac{1}{2} \int\limits_0^{t-y} K_0'(t-y-\tau)\tilde{g}_0(\tau)\, d\tau$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_0^{t-y} \left[b(\xi) w_1(\xi, t-y-\xi) - \int\limits_0^{t-y-\xi} h(\tau) w_1(\xi, t-y-\xi-\tau)\, d\tau \right] d\xi$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_0^{y} \left[b(\xi) w_2(\xi, t-y+\xi) - \int\limits_0^{t-y} h(\tau) w_2(\xi, t-y+\xi-\tau)\, d\tau \right] d\xi$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_y^{\frac{t+y}{2}} \left[b(\xi) w_2(\xi, t+y-\xi) - iah(t+y-2\xi) - \int\limits_0^{t+y-2\xi} h(\tau) w_2(\xi, t+y-\xi-\tau)\, d\tau \right] d\xi, \tag{4.27}$$

$$h(t) = \frac{1}{2} b'\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{2}{ia} \Big[\tilde{g}_0''(t) - r(0)\tilde{g}_0'(t) - p''(t) + \frac{r(0)}{2} p'(t) - b(t)p(t)$$
$$+ \left(\frac{r^2(0)}{2} - r'(0) \right) \tilde{g}_0(t) - \frac{1}{2} b\left(\frac{t}{2}\right) \beta\left(\frac{t}{2}\right) \Big] - 2K_0''(t)$$
$$+ \frac{2}{ia} \int\limits_0^t \left[b(\xi) \frac{\partial w_1}{\partial t}(\xi, t-\xi) - h(t-\xi)p(\xi) - \int\limits_0^{t-\xi} h(\tau) \frac{\partial w_1}{\partial t}(\xi, t-\xi-\tau) d\tau \right] d\xi$$
$$- \frac{2}{ia} \int\limits_0^t K_0''(t-\tau)\tilde{g}_0(\tau) d\tau - \frac{1}{ia} \int\limits_0^t h(\tau) \beta\left(\frac{t-\tau}{2}\right) d\tau$$
$$+ \frac{2}{ia} \int\limits_0^{\frac{t}{2}} \left[b(\xi) \frac{\partial w_2}{\partial t}(\xi, t-\xi) - \int\limits_0^{t-2\xi} h(\tau) \frac{\partial w_2}{\partial t}(\xi, t-\xi-\tau)\, d\tau \right] d\xi, \tag{4.28}$$

$$K_0(t) = -r(0) + \left(\frac{r^2(0)}{2} - r'(0) \right) t + \int\limits_0^t (t-\tau) K_0''(\tau)\, d\tau, \tag{4.29}$$

$$K_0'(t) = \frac{r^2(0)}{2} - r'(0) + \int\limits_0^t K_0''(\tau)\, d\tau, \tag{4.30}$$

$$K_0''(t) = -h(t) + \left(\frac{r^2(0)}{4} - r'(0) \right) K_0(t) - \int\limits_0^t h(t-\tau) K_0(\tau)\, d\tau. \tag{4.31}$$

$$w_1(y,t) = \frac{1}{2}[p(y-t) + p(y+t)] - \frac{r(0)}{4} \int\limits_{y-t}^{y+t} p(\xi)\, d\xi$$
$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{y-t}^{y+t} \int\limits_0^{t-|y-\xi|} \left[b(\xi) w_1(\xi,\tau) - \int\limits_0^{\tau} h(\tau-\eta) w_1(\xi,\eta)\, d\eta \right] d\tau d\xi, \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t}(y,t) = \frac{1}{2}[p'(y-t) - p'(y+t)] - \frac{r(0)}{4}[p(y+t) + p(y-t)] + \frac{1}{2}\int\limits_{y-t}^{y+t}\left[b(\xi)w_1(\xi, t-|y-\xi|) - \int\limits_0^{t-|y-\xi|} h(\tau)w_1(\xi, t-|y-\xi|-\tau)\,d\tau\right]d\xi. \quad (4.33)$$

Для доказательства леммы заметим, что справедливы равенства

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\right)w_2 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}\right)w_2.$$

С учетом этого интегрируем (4.21) вдоль соответствующих характеристик дифференциальных операторов первого порядка для $(y,t) \in D_T$. Интегрирование вдоль характеристики оператора $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}$ совершим от точки (y,t) до точки $((y+t)/2, (y+t)/2)$ на плоскости переменных (ξ,τ). Используя равенство $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\right)w_2((y+t)/2, (y+t)/2) = \frac{ia}{2}b((y+t)/2)$, вытекающее из (4.22) после дифференцирования по y, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\right)w_2(y,t) = \frac{ia}{2}b\left(\frac{y+t}{2}\right) + \int\limits_y^{(y+t)/2}\left[b(\xi)w_2(\xi, t+y-\xi) - iah(t+y-2\xi) - \int\limits_0^{t+y-2\xi} h(\tau)w_2(\xi, t+y-\xi-\tau)\,d\tau\right]d\xi. \quad (4.34)$$

Интегрирование вдоль характеристики оператора $\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}$ совершим от точки $(0, t-y)$ до точки (y,t). Используя равенства (4.23), (4.24), находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}\right)w_2(y,t) = \tilde{g}_0'(t-y) - r(0)\tilde{g}_0(t-y) - w_1'(0, t-y) - iah(t-y)y + iaK_0'(t-y) + \int\limits_0^{t-y} K_0'(t-y-\tau)\tilde{g}_0(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^y\left[b(\xi)w_2(\xi, t-y+\xi) - \int\limits_0^{t-y} h(\tau)w_2(\xi, t-y+\xi-\tau)\,d\tau\right]d\xi. \quad (4.35)$$

Из равенств (4.34) и (4.35) легко можно получить уравнение (4.27). В уравнении (4.34), полагая $y=0$ и используя условия (4.23), (4.24), находим

$$\tilde{g}_0'(t) - r(0)\tilde{g}_0(t) + iaK_0'(t) + \int\limits_0^t K_0'(t-\tau)\tilde{g}_0(\tau)\,dtau - w_1'(0,t) = \frac{ia}{2}b\left(\frac{t}{2}\right) + \int\limits_0^{t/2}\left[b(\xi)w_2(\xi, t-\xi) - iah(t-2\xi) - \int\limits_0^{t-2\xi} h(\tau)w_2(\xi, t-\xi-\tau)\,d\tau\right]d\xi.$$

Дифференцируя это равенство, после несложных выкладок приходим к уравнению (4.28).

При выводе уравнений (4.27), (4.28) вместо слагаемых $w_1'(0,t-y)$, $w_1''(0,t)$ были подставлены выражения, вытекающие из равенства (4.18) после применения операции дифференцирования по переменной t при $y=0$:

$$w_1'(0,t-y) = p'(t-y) - \frac{r(0)}{2}p(t-y) + \int\limits_0^{t-y}\left[b(\xi)w_1(\xi,t-y-|\xi|) - \int\limits_0^{t-y-|\xi|} h(\tau)w_1(\xi,t-y-|\xi|-\tau)\,d\tau\right]d\xi,$$

$$w_1''(0,t) = p''(t) - \frac{r(0)}{2}p'(t) + b(t)p(t) + \int\limits_0^{t}\left[b(\xi)\frac{\partial w_1}{\partial t}(\xi,t-|\xi|) - h(t-|\xi|)p(\xi) - \int\limits_0^{t-|\xi|} h(\tau)\frac{\partial w_1}{\partial t}(\xi,t-|\xi|-\tau)\,d\tau\right]d\xi.$$

В этих двух выражениях знак модуля можно опустить. Далее для замыкания системы интегральных уравнений (4.26)–(4.28), (4.32), (4.33) используются очевидные равенства (4.29)–(4.31).

При выполнении условий леммы эквивалентность системы интегральных уравнений (4.8)–(4.11) и обратной задачи (4.21)–(4.24) устанавливается обычным образом [10]. Лемма доказана.

4.2. Основные результаты. Основные результаты этой статьи составляют следующие теоремы глобальной однозначной разрешимости и устойчивости решения обратной задачи 2.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы. Тогда существует единственное решение обратной задачи 2 $K(t)\in C^2[0,T]$ при любом фиксированном $T>0$.*

Пусть $\Gamma(h_0)$ — множество функций $K(t)\in C^2[0,T]$, удовлетворяющих для $t\in[0,T]$ неравенству $\|K(t)\|_{C^2[0,T]}\le h_0$ с фиксированной положительной постоянной h_0. Эта постоянная определена в (4.42).

Теорема 2. *Пусть $K^1(t)\in\Gamma(h_0)$, $K^2(t)\in\Gamma(h_0)$ — решения обратной задачи 2 с набором данных*

$$\big\{\rho^1(\psi^{-1}(y)),\ c^1_{44}(\psi^{-1}(y)),\ e^1_{14}(\psi^{-1}(y)),\ g^1_0(t)\big\},$$
$$\big\{\rho^2(\psi^{-1}(y)),\ c^2_{44}(\psi^{-1}(y)),\ e^2_{14}(\psi^{-1}(y)),\ g^2_0(t)\big\}$$

соответственно. Тогда найдется такое положительное число $C=C(h_0,h_{00},T)$, $h_{00} = \max\big\{\|\rho^1(y)\|_{C^3[0,\psi^{-1}(T/2)]},\ \big\|c^1_{44}(y)\big\|_{C^3[0,\psi^{-1}(T/2)]},\ \big\|e^1_{14}(y)\big\|_{C^3[0,\psi^{-1}(T/2)]},$ $\big\|g^1_0(t)\big\|_{C^2[0,T]},\ \|\rho^2(y)\|_{C^3[0,\psi^{-1}(T/2)]},\ \big\|c^2_{44}(y)\big\|_{C^3[0,\psi^{-1}(T/2)]},\ \big\|e^2_{14}(y)\big\|_{C^3[0,\psi^{-1}(T/2)]},$ $\big\|g^2_0(t)\big\|_{C^2[0,T]}\big\}$, что справедлива оценка устойчивости

$$\|K^1(t)-K^2(t)\|_{C^3[0,T]} \le C\big[\|\rho^1-\rho^2\|_{C^3[0,\psi^{-1}(T/2)]} + \big\|c^1_{44}-c^2_{44}\big\|_{C^3[0,\psi^{-1}(T/2)]} + \big\|e^1_{14}-e^2_{14}\big\|_{C^3[0,\psi^{-1}(T/2)]} + \big\|g^1_0-g^2_0\big\|_{C^2[0,T]}\big]. \quad (4.36)$$

Доказательство теоремы 1. Запишем систему уравнений (4.26)–(4.33) в виде операторного уравнения

$$\varphi = A\varphi, \quad (4.37)$$

здесь

$$\varphi = [\varphi_1(y,t), \varphi_2(y,t), \varphi_3(t), \varphi_4(t), \varphi_5(t), \varphi_6(t),\ \varphi_7(y,t), \varphi_8(y,t)]$$
$$= \Bigg[w_2(y,t), \frac{\partial w_2}{\partial t}(y,t) + \frac{ia}{2}h(t-y)y - \frac{ia}{2}K_0'(t-y), h(t) + 2K_0''(t),$$
$$K_0(t), K_0'(t), K_0''(t) + h(t) - r_{00}K_0(t), w_1(y,t), \frac{\partial w_1}{\partial t}(y,t)\Bigg]$$

— векторная функция с компонентами φ_i $(i = 1, 2, \dots, 8)$, $r_{00} = \frac{r^2(0)}{4} - r'(0)$, а оператор A определен на множестве функций $\varphi \in C[D_T]$ и в соответствии с равенствами (3.1)–(3.10) имеет вид $A = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8)$, где

$$A_1\varphi = \varphi_{01} + \int\limits_y^t \Big[\varphi_2(y,\tau) - \frac{ia}{2}y(2\varphi_6(\tau-y) - \varphi_3(\tau-y) + 2r_{00}\varphi_4(\tau-y)) + \frac{ia}{2}\varphi_5(\tau-y)\Big]\,d\tau,$$

$$A_2\varphi = \varphi_{02} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{t-y}\varphi_5(t-y-\tau)\tilde{g}_0(\tau)\,d\tau$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t-y}\Bigg[b(\xi)\varphi_7(\xi,t-y-\xi) - \int\limits_0^{t-y-\xi}(2\varphi_6(\tau) - \varphi_3(\tau) + 2r_{00}\varphi_4(\tau))\varphi_7(\xi,t-y-\xi-\tau)\,d\tau\Bigg]d\xi$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{y}\Bigg[b(\xi)\varphi_1(\xi,t-y+\xi)$$
$$-\int\limits_0^{t-y}(2\varphi_6(\tau) - \varphi_3(\tau) + 2r_{00}\varphi_4(\tau))\varphi_1(\xi,t-y+\xi-\tau)\,d\tau\Bigg]d\xi$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_y^{\frac{t+y}{2}}\Bigg[b(\xi)\varphi_1(\xi,t+y-\xi) - ia(2\varphi_6(t+y-2\xi) - \varphi_3(t+y-2\xi) + 2r_{00}\varphi_4(t+y-2\xi))$$
$$-\int\limits_0^{t+y-2\xi}(2\varphi_6(\tau) - \varphi_3(\tau) + 2r_{00}\varphi_4(\tau))\varphi_1(\xi,t+y-\xi-\tau)\,d\tau\Bigg]d\xi, \quad (4.38)$$

$$A_3\varphi = \varphi_{03} + \frac{2}{ia}\int\limits_0^t\Bigg[b(\xi)\varphi_8(\xi,t-\xi) - (2\varphi_6(t-\xi) - \varphi_3(t-\xi) + 2r_{00}\varphi_4(t-\xi))p(\xi)$$
$$-\int\limits_0^{t-\xi}(2\varphi_6(\tau) - \varphi_3(\tau) + 2r_{00}\varphi_4(\tau))\varphi_8(\xi,t-\xi-\tau)\,d\tau\Bigg]d\xi$$
$$-\frac{2}{ia}\int\limits_0^t(\varphi_3(t-\tau) - \varphi_6(t-\tau) - r_{00}\varphi_4(\tau))\tilde{g}_0(\tau)\,d\tau$$
$$-\frac{1}{ia}\int\limits_0^t(2\varphi_6(\tau) - \varphi_3(\tau) + 2r_{00}\varphi_4(\tau))\beta\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\,d\tau$$

$$+\frac{2}{ia}\int\limits_0^{t/2}\Bigg[b(\xi)\left(\varphi_2(\xi,t-\tau)-\frac{ia}{2}\xi(2\varphi_6(t-2\xi)-\varphi_3(t-2\xi)+2r_{00}\varphi_4(t-2\xi))+\frac{ia}{2}\varphi_5(t-2\xi)\right)$$

$$-\int\limits_0^{t-2\xi}(2\varphi_6(\tau)-\varphi_3(\tau)+2r_{00}\varphi_4(\tau))\cdot\Big(\varphi_2(\xi,t-\xi-\tau)$$

$$-\frac{ia}{2}\xi(2\varphi_6(t-2\xi-\tau)-\varphi_3(t-2\xi-\tau)+2r_{00}\varphi_4(t-2\xi-\tau))+\frac{ia}{2}\varphi_5(t-2\xi-\tau)\Big)\,d\tau\Bigg]d\xi,$$

$$A_4\varphi=\varphi_{04}+\int\limits_0^t(t-\tau)(\varphi_3(\tau)-\varphi_6(\tau)-r_{00}\varphi_4(\tau))\,d\tau,$$

$$A_5\varphi=\varphi_{05}+\int\limits_0^t(\varphi_3(\tau)-\varphi_6(\tau)-r_{00}\varphi_4(\tau))\,d\tau,$$

$$A_6\varphi=\varphi_{06}-\int\limits_0^t(2\varphi_6(t-\tau)-\varphi_3(t-\tau)+2r_{00}\varphi_4(t-\tau))\,\varphi_4(\tau)\,d\tau,$$

$$A_7\varphi=\varphi_{07}+\frac{1}{2}\int\limits_{y-t}^{y+t}\int\limits_0^{t-|y-\xi|}\Bigg[b(\xi)\varphi_7(\xi,\tau)$$

$$-\int\limits_0^{\tau}(2\varphi_6(\tau-\eta)-\varphi_3(\tau-\eta)+2r_{00}\varphi_4(\tau-\eta))\varphi_7(\xi,\eta)\,d\eta\Bigg]d\tau d\xi,$$

$$A_8\varphi=\varphi_{08}+\frac{1}{2}\int\limits_{y-t}^{y+t}\Bigg[b(\xi)\varphi_7(\xi,t-|y-\xi|)$$

$$-\int\limits_0^{t-|y-\xi|}(2\varphi_6(\tau)-\varphi_3(\tau)+2r_{00}\varphi_4(\tau))\varphi_7(\xi,t-|y-\xi|-\tau)\,d\tau\Bigg]d\xi.$$

Здесь $\varphi_0(y,t)=(\varphi_{01},\varphi_{02},\varphi_{03},\varphi_{04},\varphi_{05},\varphi_{06},\varphi_{07},\varphi_{08})$, где

$$\varphi_{01}=\beta(y),$$

$$\varphi_{02}=\frac{1}{2}\left(\tilde g_0'(t-y)-r(0)\tilde g_0(t-y)-p'(t-y)+\frac{r(0)}{2}p(t-y)\right)-\frac{ia}{2}b\left(\frac{y+t}{2}\right),$$

$$\varphi_{03}=\frac{1}{2}b'\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$-\frac{2}{ia}\left(\tilde g_0''(t)-r(0)\tilde g_0'(t)-p''(t)+\frac{r(0)}{2}p'(t)-b(t)p(t)+r_{01}\tilde g_0(t)-\frac{1}{2}b\left(\frac{t}{2}\right)\beta\left(\frac{t}{2}\right)\right),$$

$$\varphi_{04}=-r(0)+r_{01}t,\ \varphi_{05}=r_{01},\ \varphi_{06}=0,$$

$$\varphi_{07} = \frac{1}{2}[p(y-t)+p(y+t)] - \frac{r(0)}{4}\int\limits_{y-t}^{y+t} p(\xi)\,d\xi,$$

$$\varphi_{08} = \frac{1}{2}[p'(y-t)-p'(y+t)] - \frac{r(0)}{4}[p(y+t)+p(y-t)], \tag{4.39}$$

$r_{01} = \frac{r^2(0)}{2} - r'(0)$.

Пусть C_σ — банахово пространство непрерывных функций, порожденное семейством весовых норм

$$\|\varphi\|_\sigma = \max\{\sup_{(y,t)\in D_T} |\varphi_i(y,t)e^{-\sigma t}|,\ i=1,2,7,8,$$
$$\sup_{t\in[0,T]} |\varphi_j(t)e^{-\sigma t}|,\ j=3,4,5,6\ \},\quad \sigma\geq 0.$$

Очевидно, что при $\sigma = 0$ это пространство является пространством непрерывных функций с обычной нормой. Эту норму будем обозначать далее через $\|\varphi\|$. В силу неравенства

$$e^{-\sigma T}\|\varphi\| \leq \|\varphi\|_\sigma \leq \|\varphi\| \tag{4.40}$$

нормы $\|\varphi\|_\sigma$ и $\|\varphi\|$ эквивалентны для любого фиксированного $T\in(0,\infty)$. Число σ выберем позже. Пусть $Q_\sigma(\varphi_0,\|\varphi_0\|) = \{\varphi|\ \|\varphi-\varphi_0\|_\sigma \leq \|\varphi_0\|\}$ — шар радиуса $\|\varphi_0\|$ с центром в точке φ_0 некоторого весового пространства C_σ ($\sigma\geq 0$), где функция φ_0 определена с помощью (4.39) и

$$\|\varphi_0\| = \max_{1\leq i\leq 8}\{\|\varphi_{0i}\|\}.$$

Нетрудно заметить, что для $\varphi\in Q_\sigma(\varphi_0,\|\varphi_0\|)$ имеет место оценка $\|\varphi\|_\sigma \leq \|\varphi_0\|_\sigma + \|\varphi_0\| \leq 2\|\varphi_0\|$.

Пусть $\varphi(y,t)\in Q_\sigma(\varphi_0,\|\varphi_0\|)$. Покажем, что при подходящем выборе $\sigma>0$ оператор A переводит шар в шар, т. е. $A\varphi\in Q_\sigma(\varphi_0,\|\varphi_0\|)$. В самом деле, составляя норму разностей с помощью равенств (4.38), для $(y,t)\in D_T$ имеем

$$\|A_1\varphi-\varphi_{01}\|_\sigma = \sup_{(y,t)\in D_T}|(A_1\varphi-\varphi_{01})e^{-\sigma t}| = \sup_{(y,t)\in D_T}\Bigg|\int\limits_y^t\Big[\varphi_2(y,\tau)e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\tau)}$$
$$-\left(\frac{ia}{2}y(2\varphi_6(\tau-y)-\varphi_3(\tau-y)+2r_{00}\varphi_4(\tau-y))+\frac{ia}{2}\varphi_5(\tau-y)\right)e^{-\sigma(\tau-y)}e^{-\sigma(t-\tau+y)}\Big]\,d\tau\Bigg|$$
$$\leq \|\varphi_2\|_\sigma\int\limits_y^t e^{-\sigma(t-\tau)}\,d\tau$$
$$+\left(\frac{Ta}{4}\,(2\|\varphi_6\|_\sigma+\|\varphi_3\|_\sigma+2r_{00}\|\varphi_4\|_\sigma)+\frac{a}{2}\|\varphi_5\|_\sigma\right)\int\limits_y^t e^{-\sigma(t-\tau+y)}\,d\tau$$
$$\leq \|\varphi_2\|_\sigma\frac{1}{\sigma}(1-e^{-\sigma(t-y)})$$
$$+\left(\frac{Ta}{4}\,(2\|\varphi_6\|_\sigma+\|\varphi_3\|_\sigma+2r_{00}\|\varphi_4\|_\sigma)+\frac{a}{2}\|\varphi_5\|_\sigma\right)\frac{1}{\sigma}(e^{-\sigma y}-e^{-\sigma t})$$
$$\leq\left(\|\varphi_2\|_\sigma+\frac{Ta}{4}(2\|\varphi_6\|_\sigma+\|\varphi_3\|_\sigma+2r_{00}\|\varphi_4\|_\sigma)+\frac{a}{2}\|\varphi_5\|_\sigma\right)\frac{1}{\sigma}$$

$$\leq 2\|\varphi_0\|\left(1+\frac{Ta(3+2r_{00})+2a}{4}\right)\frac{1}{\sigma}=2\|\varphi_0\|\mu_1(a,r_{00},T)\frac{1}{\sigma},$$

$$\|A_2\varphi-\varphi_{02}\|_\sigma=\sup_{(y,t)\in D_T}|(A_2\varphi-\varphi_{02})e^{-\sigma t}|$$

$$=\sup_{(y,t)\in D_T}\Bigg|\frac{1}{2}\int_0^{t-y}\varphi_5(t-y-\tau)\tilde{g}_0(\tau)e^{-\sigma(t-y-\tau)}e^{-\sigma(y+\tau)}\,d\tau$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{t-y}\Bigg[b(\xi)\varphi_7(\xi,t-y-\xi)e^{-\sigma(t-y-\xi)}e^{-\sigma(y+\xi)}$$

$$-\int_0^{t-y-\xi}(2\varphi_6(\tau)-\varphi_3(\tau)+2r_{00}\varphi_4(\tau))e^{-\sigma\tau}\varphi_7(\xi,t-y-\xi-\tau)e^{-\sigma(t-y-\xi-\tau)}e^{-\sigma(y+\xi)}\,d\tau\Bigg]d\xi$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{y}\Bigg[b(\xi)\varphi_1(\xi,t-y+\xi)e^{-\sigma(t-y+\xi)}e^{-\sigma(y-\xi)}$$

$$-\int_0^{t-y}(2\varphi_6(\tau)-\varphi_3(\tau)+2r_{00}\varphi_4(\tau))e^{-\sigma\tau}\varphi_1(\xi,t-y+\xi-\tau)e^{-\sigma(t-y+\xi-\tau)}e^{-\sigma(y-\xi)}\,d\tau\Bigg]d\xi$$

$$+\frac{1}{2}\int_y^{\frac{t+y}{2}}\Bigg[b(\xi)\varphi_1(\xi,t+y-\xi)e^{-\sigma(t+y-\xi)}e^{-\sigma(\xi-y)}$$

$$-ia(2\varphi_6(t+y-2\xi)-\varphi_3(t+y-2\xi)+2r_{00}\varphi_4(t+y-2\xi))e^{-\sigma(t+y-2\xi)}e^{-\sigma(2\xi-y)}$$

$$-\int_0^{t+y-2\xi}(2\varphi_6(\tau)-\varphi_3(\tau)+2r_{00}\varphi_4(\tau))e^{-\sigma\tau}\varphi_1(\xi,t+y-\xi-\tau)e^{-\sigma(t+y-\xi-\tau)}e^{-\sigma(\xi-y)}d\tau\Bigg]d\xi\Bigg|$$

$$\leq\frac{1}{2}g_{00}\|\varphi_5\|_\sigma\frac{1}{\sigma}(e^{-\sigma y}-e^{-\sigma t})+\frac{1}{2}b_0\|\varphi_7\|_\sigma\frac{1}{\sigma}(e^{-\sigma y}-e^{-\sigma t})$$

$$+\frac{1}{2}(2\|\varphi_6\|_\sigma+\|\varphi_3\|_\sigma+2r_{00}\|\varphi_4\|_\sigma)\|\varphi_7\|_\sigma\frac{1}{\sigma}(e^{-\sigma y}-e^{-\sigma t})T$$

$$+\frac{1}{2}b_0\|\varphi_1\|_\sigma\frac{1}{\sigma}(1-e^{-\sigma y})+\frac{1}{2}(2\|\varphi_6\|_\sigma+\|\varphi_3\|_\sigma+2r_{00}\|\varphi_4\|_\sigma)\|\varphi_1\|_\sigma\frac{1}{\sigma}(1-e^{-\sigma y})T$$

$$+\frac{1}{2}b_0\|\varphi_1\|_\sigma\frac{1}{\sigma}(1-e^{-\sigma\frac{t-y}{2}})+\frac{a}{2}(2\|\varphi_6\|_\sigma+\|\varphi_3\|_\sigma+2r_{00}\|\varphi_4\|_\sigma)\frac{1}{\sigma}(e^{-\sigma y}-e^{-\sigma t})$$

$$+\frac{1}{2}(2\|\varphi_6\|_\sigma+\|\varphi_3\|_\sigma+2r_{00}\|\varphi_4\|_\sigma)\|\varphi_1\|_\sigma\frac{1}{\sigma}(1-e^{-\sigma\frac{t-y}{2}})T$$

$$\leq 2\|\varphi_0\|\left[\frac{1}{2}g_{00}+\frac{3}{2}b_0+(3+2r_{00})\left(\frac{a}{2}+3T\|\varphi_0\|\right)\right]\frac{1}{\sigma}$$

$$=2\|\varphi_0\|\mu_2(a,g_{00},b_0,r_{00},T,\|\varphi_0\|)\frac{1}{\sigma}.$$

Пользуясь подобными вычислениями, для остальных уравнений получаем

$$\|A_3\varphi-\varphi_{03}\|_\sigma=\sup_{t\in[0,T]}|(A_3\varphi-\varphi_{03})e^{-\sigma t)}|$$

$$\leq 2\|\varphi_0\|\Bigg[\frac{2b_0}{a}+\frac{2}{a}(3+2r_{00})(p_0+2T\|\varphi_0\|)+\frac{2}{a}g_{00}(2+r_{00})+\frac{\beta_0}{a}(3+2r_{00})$$

$$+\frac{2}{a}\left(1+\frac{a}{2}+\frac{aT}{4}(3+2r_{00})\right)(b_0+2T\|\varphi_0\|(3+2r_{00}))\Big]\frac{1}{\sigma}$$

$$=2\|\varphi_0\|\mu_3(a,b_0,g_{00},p_0,\beta_0,r_{00},T,\|\varphi_0\|)\frac{1}{\sigma},$$

$$\|A_4\varphi-\varphi_{04}\|_\sigma=\sup_{t\in[0,T]}|(A_4\varphi-\varphi_{04})e^{-\sigma t)}|\le 2\|\varphi_0\|[(2+r_{00})T]\frac{1}{\sigma}=2\|\varphi_0\|\mu_4(r_{00},T)\frac{1}{\sigma},$$

$$\|A_5\varphi-\varphi_{05}\|_\sigma=\sup_{t\in[0,T]}|(A_5\varphi-\varphi_{05})e^{-\sigma t)}|\le 2\|\varphi_0\|[2+r_{00}]\frac{1}{\sigma}=2\|\varphi_0\|\mu_5(r_{00})\frac{1}{\sigma},$$

$$\|A_6\varphi-\varphi_{06}\|_\sigma=\sup_{t\in[0,T]}|(A_6\varphi-\varphi_{06})e^{-\sigma t)}|$$

$$\le 2\|\varphi_0\|[(3+2r_{00})(r(0)+r_{00}T+2T^2\|\varphi_0\|(2+r_{00}))]\frac{1}{\sigma}$$

$$=2\|\varphi_0\|\mu_6(r(0),r_{00},T,\|\varphi_0\|)\frac{1}{\sigma},$$

$$\|A_7\varphi-\varphi_{07}\|_\sigma=\sup_{(y,t)\in D_T}|(A_7\varphi-\varphi_{07})e^{-\sigma t)}|$$

$$\le 2\|\varphi_0\|\left[\frac{b_0}{2}T+(3+2r_{00})\|\varphi_0\|T^2\right]\frac{1}{\sigma}=2\|\varphi_0\|\mu_7(b_0,r_{00},T,\|\varphi_0\|)\frac{1}{\sigma},$$

$$\|A_8\varphi-\varphi_{08}\|_\sigma=\sup_{(y,t)\in D_T}|(A_8\varphi-\varphi_{08})e^{-\sigma t)}|$$

$$\le 2\|\varphi_0\|\left[\frac{b_0}{2}+(3+2r_{00})\|\varphi_0\|T\right]\frac{1}{\sigma}=2\|\varphi_0\|\mu_8(b_0,r_{00},T,\|\varphi_0\|)\frac{1}{\sigma},$$

где $b_0=\max\limits_{y\in[0,T/2]}|b(y)|$, $p_0=\max\limits_{y\in[0,T/2]}|p(y)|$, $\beta_0=\max\limits_{y\in[0,T/2]}|\beta(y)|$, $g_{00}=\max\limits_{t\in[0,T]}|\tilde g_0(t)|$.

Шестое неравенство получено с помощью четвертого уравнения системы (4.38). Выбирая

$$\sigma\ge\sigma_0=2\max_{1\le j\le 8}\{\mu_j\},$$

получим, что A переводит шар $Q_\sigma(\varphi_0,\|\varphi_0\|)$ в шар $Q_\sigma(\varphi_0,\|\varphi_0\|)$. Пусть φ^1, φ^2 — любые два элемента из $Q_\sigma(\varphi_0,\|\varphi_0\|)$. Используя вспомогательные неравенства вида

$$\left|\varphi_i^1\varphi_j^1-\varphi_i^2\varphi_j^2\right|e^{-\sigma t}\le\left|\varphi_i^1\right|\left|\varphi_j^1-\varphi_j^2\right|e^{-\sigma t}+\left|\varphi_j^2\right|\left|\varphi_i^1-\varphi_i^2\right|e^{-\sigma t}\le 4\|\varphi_0\|\|\varphi^1-\varphi^2\|_\sigma,$$

приходим к неравенству

$$\|(A\varphi^1-A\varphi^2)\|_\sigma\le\frac{\sigma_{00}}{\sigma}\|\varphi^1-\varphi^2\|_\sigma,$$

где

$$\sigma_{00}=\max\{\mu_1(a,r_{00},T),\ \mu_2(a,g_{00},p_0,b_0,r_{00},T,2\|\varphi_0\|),$$
$$\mu_3(a,b_0,g_{00},p_0,\beta_0,r_{00},T,2\|\varphi_0\|),\ \mu_4(r_{00},T),$$
$$\mu_5(r_{00}),\ \mu_6(r(0),r_{00},T,2\|\varphi_0\|),\ \mu_7(b_0,r_{00},T,2\|\varphi_0\|),\ \mu_8(b_0,r_{00},T,2\|\varphi_0\|)\}.$$

Как следует из полученных оценок, если число σ выбрано из условия $\sigma>\sigma^*=\max\{\sigma_0,\sigma_{00}\}$, то оператор A сжимающий на $Q_\sigma(\varphi_0,\|\varphi_0\|)$. Тогда согласно принципу Банаха уравнение (4.37) имеет, и притом единственное, решение в $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ при любом фиксированном $T > 0$.

Так как $K_0(t) = \exp(r(0)t/2)K(t)$, по найденной функции $K_0(t)$ функция $K(t)$ находится по формуле

$$K(t) = \exp[-r(0)t/2]K_0(t). \tag{4.41}$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Поскольку условия теоремы 1 выполнены, решение (4.37) принадлежит множеству $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ и $\|\varphi_i\|_\sigma \leq 2\|\varphi_0\|$, $i = 1, 2, \dots, 8$. Таким образом,

$$\max_{t\in[0,T]} |K(t)| \leq 2\|\varphi_0\| \exp(|r(0)|T) = h_0. \tag{4.42}$$

Пусть φ^j, $j = 1, 2$, — вектор функций, которые являются решениями (4.37) с набором данных $\{\rho^j(\psi^{-1}(y)), c^j_{44}(\psi^{-1}(y)), e^j_{14}(\psi^{-1}(y)), g^j_0(t)\}$, $j = 1, 2$, соответственно, т. е. справедливы уравнения $\varphi^j = A\varphi^j$ для $j = 1, 2$. Известные функции $\rho^j[\psi^{-1}(y)]$, $c^j_{44}[\psi^{-1}(y)]$, $e^j_{14}(\psi^{-1}(y))$, $j = 1, 2$, в свободные члены этих интегральных уравнений входят соответствующим образом через сложные функции $b^j(y)$, $q^j(y)$, $p^j(y)$, $s^j(y)$, $j = 1, 2$. Переходя в этих выражениях к разностям $\rho^1 - \rho^2$, $c^1_{44} - c^2_{44}$, $e^1_{14} - e^2_{14}$, подобно тому, как это сделано в [12, гл. 3], из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 1, для $\sigma \geq \sigma^*$ приходим к оценке

$$\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma \leq C_0\gamma + \frac{\sigma^*}{\sigma}\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\sigma, \tag{4.43}$$

где

$$\gamma = \|\rho^1 - \rho^2\|_{C^3[0,\psi^{-1}(T/2)]} + \left\|c^1_{44} - c^2_{44}\right\|_{C^3[0,\psi^{-1}(T/2)]}\left\|e^1_{14} - e^2_{14}\right\|_{C^3[0,\psi^{-1}(T/2)]} + \left\|g^1_0 - g^2_0\right\|_{C^2[0,T]}$$

и постоянная C_0 зависит от тех же параметров, что и C в теореме 2. Из неравенств (4.40) и (4.43) следует оценка

$$\left\|K^1_0 - K^2_0\right\| \leq C_1\gamma$$

с постоянной $C_1 = \sigma C_0/(\sigma - \sigma^*)$. Рассматривая уравнение (4.41) для $\{K^1, K^1_0\}$, $\{K^2, K^2_0\}$ и используя (4.43), получим оценку (4.36).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982.
2. *Яхно В. Г., Меражов И. З.* Некоторые прямые задачи и одномерная обратная задача электроупругости для «медленных» волн // Мат. тр. 1999. Т. 2, № 2. С. 148–213.
3. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1. С. 86–98.
4. *Lorensi A., Romanov V. G.* Stability estimates for an inverse problem related to viscoelastic media // J. Inv. Ill-Posed Probl. 2006. V. 14, N 1. P. 57–82.
5. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* Задача об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости // Владикавк. мат. журн. 2015. Т. 17, № 4. С. 18–43.
6. *Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш.* Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 6. С. 855–867.
7. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 2. С. 72–82.

8. *Janno J., Von Wolfersdorf L.* An inverse problem for identification of a time- and space-dependent memory kernel in viscoelasticity // Inverse Probl. 2001. V. 17. P. 13–24.
9. *Colombo F., Guidetti D.* Some results on the identification of memory kernels // Oper. Theory: Adv. Appl. 2011. V. 216. P. 121–138.
10. *Дурдиев Д. К.* Обратная задача определения двух коэффициентов в одном интегро-дифференциальном волновом уравнении // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 3. С. 28–49.
11. *Туаева Ж. Д.* Многомерная математическая модель сейсмики с памятью // Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию. Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008. С. 297–306.
12. *Яхно В. Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука, 1990.

Статья поступила 6 мая 2016 г., окончательный вариант — 24 октября 2016 г.

Дурдиев Дурдимурод Каландарович
Бухарский гос. университет,
ул. М. Икбол, 11, Бухара 200117, Узбекистан
durdiev65@mail.ru

Тотиева Жанна Дмитриевна
Геофизический институт ВНЦ РАН,
ул. Маркова, 93а, Владикавказ 362002;
Северо-Осетинский гос. университет,
ул. Ватутина, 46, Владикавказ 362025
jannatuaeva@inbox.ru