Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2017. Том 58, № 3

УДК 517.98

C–ПОЛУГРУППЫ–РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И C–ПОЛУГРУППЫ–УЛЬТРАРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М. Костич, С. Пилипович, Д. Велинов

Аннотация. Исследуются C-полугруппы-распределения и C-полугруппы-ультрараспределения в секвенциально полных локально выпуклых пространствах. Получено несколько важных теоретических результатов в этой области, даны некоторые интересные примеры. Рассмотрены стационарные плотные операторы в секвенциально полных локально выпуклых пространствах.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.311

Ключевые слова: C-полугруппа-распределение, C-полугруппа-ультрараспределение, проинтегрированная C-полугруппа, сверточная C-полугруппа, корректность, локально выпуклое пространство.

1. Введение и предварительные сведения

Как известно, класс полугрупп-распределений в банаховых пространствах был введен Лионсом [1] в 1960 г. в качестве попытки найти решения абстрактных дифференциальных уравнений 1-го порядка, некорректных в обычном смысле, т. е. уравнений, решения которых не управляются сильно непрерывными полугруппами линейных операторов. После этого полугруппы привлекали внимание многих математиков (более подробно о полугруппах-распределениях в банаховых пространствах с плотно определенными генераторами см. [2–6]). Вслед за пионерскими работами да Прато и Синестрари [7], Арендта [8], Дэвиса и Панга [9] возник все возрастающий интерес к проблеме избавления от обычных условий плотности в теории дифференциальных уравнений 1-го порядка и обсуждению различных обобщений сильно непрерывных полугрупп таких, как проинтегрированные полугруппы, C-регуляризованные полугруппы и K-сверточные полугруппы (исчерпывающий обзор результатов можно найти в [10]). Класс полугрупп-распределений с необязательно плотно определенными генераторами введен независимо Кунстманном [11] и Вангом [12], а класс C-полугрупп-распределений — первым автором в [13] (дальнейшие сведения на эту тему см. в [10, 11, 14–18]). Полугруппы-ультрараспределения в банаховых пространствах с плотно или неплотно определенными генераторами и в абстрактных пространствах Берлинга были рассмотрены в [19–24] (см. также [10, 16, 25, 26]). С другой стороны, изучение полугрупп-распределений в локально выпуклых пространствах было начато в [27–29]. Насколько известно авторам, нет значительных работ, касающихся полугрупп-ультрараспределений в локально выпуклых пространствах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и технологического развития Сербии (грант 174024).

В настоящей статье мы вводим и систематически анализируем классы C-полугрупп-распределений в секвенциально полных локально выпуклых пространствах, а также дополнительно даем большое количество ссылок, касающихся затрагиваемых в статье вопросов. При рассмотрении некорректных граничных задач или, более общо, семейств ограниченных операторов, связанных с некоторыми некорректными задачами Коши, обычно используются проинтегрированные полугруппы или C-регуляризованные полугруппы. Эти типы полугрупп позволяют строить решения задач, но на подходящих подмножествах $D(A)$, т. е. для проинтегрированных полугрупп на $D(A^n)$ и для C-регуляризованных полугрупп $CD(A)$. Примеры локально равностепенно непрерывных α раз проинтегрированных C-полугрупп можно использовать для построения C-полугрупп-распределений по теореме 3.15 данной статьи. Более того, оказывается, что в интересных примерах C не нужно. Например, никакого C не нужно для $-\Delta^{2n}$, но конструкция C_n [30, с. 215] существенна в анализе пространств, в которых $-\Delta^{2n}$ порождает подходящие семейства операторов [10, пример 2.8.2]. Мы представляем несколько теоретических новшеств. Например, понятия полугруппы-предраспределения и неплотной полугруппы-распределения, по-видимому, новые и не рассматривались ранее, за исключением классического случая, когда E — банахово пространство. В силу предложения 3.5 можно ввести интегральный генератор C-полугруппы-предраспределения (C-полугруппы-предультрараспределения) на произвольном секвенциально компактном локально выпуклом пространстве. Все наши методы работают, только когда E — банахово пространство. Сравнивая с [11, 25, 29], получаем обобщение в двух направлениях: 1) если взять в качестве инъективного оператора $C \in L(E)$ тождественный оператор пространства E, то получатся обычные полугруппы-распределения (полугруппы-ультрараспределения); 2) E имеет более сложную топологическую структуру, чем банаховы пространства. Согласно новым методам, использованным в данной работе, мы указали аспекты новизны нашего подхода в замечаниях 3.7(iii), 3.9 и 3.17.

Коротко организация статьи описывается следующим образом. В разд. 2 исследуется C-корректность задачи Коши первого порядка в смысле распределений. Особое внимание обращается на C-обобщенные резольвенты линейных операторов в п. 2.1. Разд. 3 посвящен изучению основных структурных свойств C-полугрупп-распределений и C-полугрупп-ультрараспределений.

1.1. Обозначения. Всюду в статье используются стандартные обозначения. Если не оговорено противное, всегда будем предполагать, что E — хаусдорфово секвенциально полное локально выпуклое пространство над полем комплексных чисел (СПЛВП). Если X также СПЛВП, то обозначим символом $L(E, X)$ пространство всех непрерывных линейных отображений из E в X, $L(E) \equiv L(E, E)$. Символ $\circledast_E$ ($\circledast$, если нет риска путаницы) обозначает фундаментальную систему полунорм, определяющую топологию пространства E. Пусть $L_{\circledast}(E)$ — подпространство в $L(E)$, состоящее из непрерывных линейных отображений T из E в E, удовлетворяющих следующему условию: для всякого $p \in \circledast$ существует $c_p > 0$ такое, что $p(Tx) \leq c_p p(x)$, $x \in E$. Пусть $\mathscr{B}$ — семейство ограниченных подмножеств в E, $p_B(T) := \sup_{x \in B} p(Tx)$, $p \in \circledast_X$, $B \in \mathscr{B}$, $T \in L(E, X)$. Тогда $p_B(\cdot)$ — полунорма в $L(E, X)$ и система $(p_B)_{(p,B) \in \circledast_X \times \mathscr{B}}$ индуцирует хаусдорфову локально выпуклую топологию на $L(E, X)$. Если E — банахово пространство, то $\|x\|$ — норма элемента $x \in E$. Хаусдорфова локально выпуклая топология на E^*, сопряженном пространстве к E, определяет систему $(|\cdot|_B)_{B\in\mathscr{B}}$ полунорм на E^*, где $|x^*|_B := \sup_{x\in B}|\langle x^*, x\rangle|$, $x^* \in E^*$, $B \in \mathscr{B}$. Здесь $\langle\,,\rangle$ означает скобку двойственности между E и E^*; иногда также будем писать $\langle x, x^*\rangle$ или $x^*(x)$ для обозначения значения $\langle x^*, x\rangle$. Напомним, что пространства $L(E)$ и E^* секвенциально полны, если E бочечное [31]. Символом E^{**} обозначим второе двойственное пространство к E. Напомним, что поляры непустых множеств $M \subseteq E$ и $N \subseteq E^*$ определяются следующим образом: $M^\circ := \{y \in E^* : |y(x)| \leq 1 \text{ для всех } x \in M\}$ и $N^\circ := \{x \in E : |y(x)| \leq 1 \text{ для всех } y \in N\}$. Если A — линейный оператор на E, то область определения, ядро и множество значений A обозначаются символами $D(A)$, $N(A)$ и $R(A)$ соответственно. Поскольку путаница маловероятна, будем отождествлять оператор A с его графиком. В оставшейся части данного раздела предполагаем, что оператор A замкнут. Положим $p_A(x) := p(x)+p(Ax)$, $x \in D(A)$, $p \in ⊛$. Тогда $(p_A)_{p\in ⊛}$ индуцирует хаусдорфову секвенциально полную локально выпуклую топологию на $D(A)$; обозначим полученное пространство символом $[D(A)]$.

Если оператор $C \in L(E)$ инъективен, то определим C-резольвентное множество оператора A, для краткости $\rho_C(A)$, формулой

$$\rho_C(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ инъективен и } (\lambda - A)^{-1}C \in L(E)\}. \tag{1.1}$$

По теореме о замкнутом графике [31] справедливо следующее утверждение: если E — борнологическое пространство с сетью (это, в частности, выполнено, если E — пространство Фреше), то C-резольвентное множество A состоит из тех комплексных чисел λ, для которых оператор $\lambda - A$ инъективен и $R(C) \subseteq R(\lambda - A)$. Резольвентное множество оператора A, обозначаемое символом $\rho(A)$, есть не что иное, как I-резольвентное множество A, где I — тождественный оператор на E. Если не оговорено противное, всегда будем предполагать, что $CA \subseteq AC$. Символы $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ и $\sigma_r(A)$ обозначают точечный, непрерывный и остаточный спектры оператора A соответственно. Для замкнутого линейного оператора A введем подмножество A^* в $E^* \times E^*$ формулой

$$A^* := \{(x^*, y^*) \in E^* \times E^* : x^*(Ax) = y^*(x) \text{ для всех } x \in D(A)\}.$$

Если оператор A плотно задан, то A^* также называется *оператором, сопряженным к* A, и является замкнутым оператором на E^*.

Экспоненциальная область $E(a, b)$ была впервые определена в [32]:

$$e(a, b) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq b,\ |\operatorname{Im}\lambda| \leq e^{a\operatorname{Re}\lambda}\} \quad (a, b > 0).$$

1.2. Структурные свойства. Понятия различных типов пространств обобщенных функций и важнейшие свойства пространств векторнозначных распределений и векторнозначных ультрараспределений можно найти в [3, 10, 16, 20, 26, 31, 33–40] и указанных там ссылках.

Напомним необходимые ниже факты о преобразовании Лапласа (ультра) распределений (ср. с [41]). Пусть

$$\widehat{\varphi}(\lambda) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t}\varphi(t)\,dt, \quad \lambda \in \mathbb{C},\ \varphi \in \mathscr{D} \ \ (\varphi \in \mathscr{D}^*).$$

Положим $\mathbf{D} := \{\widehat{\varphi} : \varphi \in \mathscr{D}\}$ и $\mathbf{D}^* := \{\widehat{\varphi} : \varphi \in \mathscr{D}^*\}$, $\widehat{\varphi} + \widehat{\psi} := \widehat{\varphi + \psi}$, $\lambda\widehat{\varphi} := \widehat{\lambda\varphi}$ $(\lambda \in \mathbb{C};\ \varphi,\ \psi \in \mathscr{D}\ (\mathscr{D}^*))$. Тогда отображение $\widehat{\ }: \mathscr{D} \to \mathbf{D}$ $(\widehat{\ }: \mathscr{D}^* \to \mathbf{D}^*)$

является линейным изоморфизмом между векторными пространствами $\mathscr{D}$ и $\mathbf{D}$ ($\mathscr{D}^*$ и $\mathbf{D}^*$). Говорят, что подмножество $\mathbf{T} = \{\widehat{\varphi} : \varphi \in \mathscr{T}\}$ в $\mathbf{D}$ ($\mathbf{D}^*$) открыто, если множество $\mathscr{T}$ открыто в $\mathscr{D}$ ($\mathscr{D}^*$). Тогда отображение $\widehat{\cdot}$ становится линейным топологическим гомеоморфизмом между хаусдорфовыми локально выпуклыми пространствами $\mathscr{D}$ ($\mathscr{D}^*$) и $\mathbf{D}$ ($\mathbf{D}^*$). Пусть $\mathbf{D}'(E) := L(\mathbf{D}, E)$ и $\mathbf{D}'^*(E) := L(\mathbf{D}^*, E)$. Существует линейный топологический гомеоморфизм $\widehat{\cdot} : \mathscr{D}'(E) \to \mathbf{D}'(E)$ ($\widehat{\cdot} : \mathscr{D}'^*(E) \to \mathbf{D}'^*(E)$), определяемый формулой $\widehat{G}(\widehat{\varphi}) := G(\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{D}$ ($\widehat{G}(\widehat{\varphi}) := G(\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{D}^*$) для всех $G \in \mathscr{D}'(E)$ ($G \in \mathscr{D}'^*(E)$). Функционал $\widehat{G}$ называется *обобщенным преобразованием Лапласа* G. Для каждого непустого подмножества Ω в $\mathbb{R}$ положим $\mathbf{D}'_\Omega(E) := \{\widehat{G} : G \in \mathscr{D}'_\Omega(E)\}$ ($\mathbf{D}'^*_\Omega(E) := \{\widehat{G} : G \in \mathscr{D}'^*_\Omega(E)\}$); $\mathbf{D}'_0(E) \equiv \mathbf{D}'_{[0,\infty)}(E)$ ($\mathbf{D}'^*_0(E) \equiv \mathbf{D}'^*_{[0,\infty)}(E)$). Тогда $\mathbf{D}'_0(E)$ ($\mathbf{D}'^*_0(E)$) — замкнутое подпространство в $\mathbf{D}'(E)$ ($\mathbf{D}'^*(E)$), топологически гомеоморфное $\mathscr{D}'_0(E)$ ($\mathscr{D}'^*_0(E)$) посредством отображения $\widehat{\cdot}$. Если $F \in \mathscr{D}'$ ($F \in \mathscr{D}'^*$) и $x \in E$, то определим $F \otimes x \in \mathscr{D}'(E)$ ($F \otimes x \in \mathscr{D}'^*(E)$) и $\widehat{F} \otimes x \in \mathbf{D}'(E)$ ($\widehat{F} \otimes x \in \mathbf{D}'^*(E)$) формулами $\langle F \otimes x, \varphi\rangle := \langle F, \varphi\rangle x$, $\varphi \in \mathscr{D}$ ($\varphi \in \mathscr{D}^*$) и $\langle \widehat{F} \otimes x, \widehat{\varphi}\rangle := \langle F, \varphi\rangle x$, $\varphi \in \mathscr{D}$ ($\varphi \in \mathscr{D}^*$). Здесь $\mathscr{D}^*$ и $\mathscr{D}'^*$ обозначают оба случая: пространства пробных функций и пространства ультрараспределений Берлинга и Румье соответственно.

Для $T \in \mathscr{E}'(E)$ ($T \in \mathscr{E}'^*(E)$) определим преобразование Лапласа распределения T по формуле $\widehat{T}(\lambda) := \langle T(x), e^{\lambda x}\rangle$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Теорема 1.1 [41]. *Пусть $k > 0$. E-значная целая функция $f(\lambda)$ является преобразованием Лапласа распределения $T \in \mathscr{D}'_{[-k,k]}(E)$ тогда и только тогда, когда для каждого $x^* \in E^*$ существуют $n \in \mathbb{N}$ и $c > 0$ такие, что*

$$|\langle x^*, f(\lambda)\rangle| \le c(1 + |\lambda|)^n e^{k|\operatorname{Re}\lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Доказательство следующей теоремы Пэли — Винера для E-значных ультрараспределений с компактным носителем можно вывести с помощью соответствующего утверждения для скалярнозначных ультрараспределений [42, теорема 1.1] и идеи из [41]. Этот результат может рассматриваться как имеющий некоторый самостоятельный интерес; изложим все необходимые детали доказательства для полноты изложения.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены* (M.1)–(M.3), *пусть $\mathscr{R}$ — множество, состоящее из положительных монотонно возрастающих последовательностей, и пусть*

$$M(\rho) = \sup_{p\in\mathbb{N}} \ln \frac{\rho^p}{M_p}, \quad M_{r_p}(\rho) = \sup_{p\in\mathbb{N}} \left\{ \ln \frac{\rho^p}{M_p \prod_{i=1}^{p} r_i} \right\}, \quad \rho > 0.$$

E-значная целая функция $\hat{u}(\lambda)$ является обобщенным преобразованием Лапласа E-значного ультрараспределения u класса $*$ с носителем, содержащимся в непустом компактном подмножестве $K \subseteq \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда для любого $x^* \in E^*$ существуют $h > 0$ и $c > 0$ в случае ультрараспределений Берлинга и существуют $(r_p) \in \mathscr{R}$ и $c_{r_p} > 0$ в случае ультрараспределений Румье такие, что

$$\begin{gathered} |\langle x^*, \hat{u}(\lambda)\rangle| \le c e^{M(\lambda/h) + H_K(i\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \\ \text{соответственно } |\langle x^*, \hat{u}(\lambda)\rangle| \le c_{r_p} e^{M_{r_p}(\lambda) + H_K(i\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь $H_K(\lambda) := \sup_{x\in K} \operatorname{Im}(x\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Необходимость немедленно вытекает из теоремы Пэли — Винера для скалярнозначных ультрараспределений (см. [42, теорема 1.1]). Достаточность докажем только в случае ультрараспределений Румье. Пусть $\hat{u}(\lambda)$ — E-значная целая функция, удовлетворяющая (1.2). Достаточно показать (см. [41, пример; 35, лемма 3.3]), что $\hat{u}(\lambda)$ обладает следующим свойством: для любой непрерывной полунормы p на E существуют $(r_p) \in \mathscr{R}$ и $c_{r_p} > 0$ такие, что

$$p(\hat{u}(\lambda)) \leq c_{r_p} e^{M_{r_p}(\lambda)+H_K(i\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.3}$$

Предположим противное, т. е. пусть (1.2) выполнено, а (1.3) неверно. Построим последовательности (r_n), (c_n), (ε_n), (λ_n) и (x_n^*) с соответствующими свойствами. Пусть $\varepsilon_1 := 1/2$. Ясно, что существуют $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, $r_1 > 0$ и $c_1 > 0$ такие, что для некоторых полунорм q на E выполнено

$$q(\hat{u}(\lambda_1)) > c_{r_1} e^{M_{r_1}(\lambda_1)+H_K(i\lambda_1)}.$$

Заметим также, что $q(x) = \sup_{x^*\in U^\circ} |\langle x^*, x\rangle|$ для всех $x \in E$, где $U = \{x \in E : q(x) \leq 1\}$. Выберем $x_1^* \in U^\circ$ так, что $|\langle x_1^*, \hat{u}(\lambda)\rangle| > c_{r_1} e^{M_{r_1}(\lambda_1)+H_K(i\lambda_1)}$. Предположим, что (r_i), (C_i), (ε_i), (λ_i) и (x_i^*) определены для $1 \leq i \leq N-1$. Тогда существуют $c_{r_N} > c_{r_{N-1}} + 1$ и $r_N > r_{N-1} + 1$ такие, что

$$|\langle x_{N-1}^*, \hat{u}(\lambda)\rangle| \leq c_{r_N} e^{M_{r_N}(\lambda)+H_K(i\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.4}$$

Ввиду ограниченности множества $\{|\langle x^*, \hat{u}(\lambda_i)\rangle| : 1 \leq i \leq N-1,\ x^* \in U^\circ\}$ найдется $\varepsilon_N \leq 1/2^N$ такое, что

$$\sup_{1\leq i\leq N-1, x^*\in U^\circ} |\langle x^*, \hat{u}(\lambda_i)\rangle| \leq \frac{1}{2^N \varepsilon_N}.$$

В силу предположения существуют $\lambda_N \in \mathbb{C}$ такое, что

$$q(\hat{u}(\lambda_N)) > \frac{3C_{r_N}}{\varepsilon_N} e^{M_{r_N}(\lambda_N)+H_K(i\lambda_N)},$$

и $x_N^* \in U^\circ$ такое, что

$$|\langle \hat{u}(\lambda_N), x_N^*\rangle| > \frac{3C_{r_N}}{\varepsilon_N} e^{M_{r_N}(\lambda_N)+H_K(i\lambda_N)}.$$

Положим $x_\infty^* := \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n^*$. Поскольку U° выпукло, сбалансировано, σ-компактно и $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \leq 1$, имеем $x_\infty^* \in U^\circ$. Значит, в силу (1.4)

$$\begin{aligned}
|\langle \hat{u}(\lambda_N), x_\infty^*\rangle| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} \langle \hat{u}(\lambda_N), \varepsilon_n x_n^*\rangle\right| \\
&\geq |\langle \hat{u}(\lambda_N), \varepsilon_N x_N^*\rangle| - \sum_{n=1}^{N-1} |\langle \hat{u}(\lambda_N), \varepsilon_n x_n^*\rangle| - \sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle \hat{u}(\lambda_N), \varepsilon_n x_n^*\rangle| \\
&> 3C_{r_N} e^{M_{r_N}(\lambda_N)+H_K(i\lambda_N)} - \sum_{n=1}^{N-1} |\varepsilon_n e^{M_{r_N}(\lambda_N)+H_K(i\lambda_N)}| \\
&\qquad - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} > C_{r_N} e^{M_{r_N}(\lambda_N)+H_K(i\lambda_N)},
\end{aligned}$$

что противоречит (1.2). □

Мы отсылаем читателя к [35, § 9] за дальнейшими сведениями о теореме Пэли — Винера для ультрадифференцируемых функций и бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем.

2. C-корректность задачи Коши 1-го порядка в смысле теории распределений и ультрараспределений

В этом разделе продолжаем исследование Усидзимы [28, § 1, 2] корректности задачи Коши в пространствах абстрактных распределений. Отметим, что в ряде утверждений, содержащихся в имеющейся литературе об абстрактных дифференциальных уравнениях в локально выпуклых пространствах (например, в [41, предложение 1.2] или [28, предложения 1.1, 1.3, 1.4, 1.6, теорема 2.1]), секвенциальная полнота пространства E не предполагалась. Мы не будем здесь следовать этому общему подходу.

Определение 2.1 (ср. с [16, определение 2.1.4] для случая распределений, где $C = I$). Пусть A — замкнутый линейный оператор на E, $C \in L(E)$ — инъективный оператор и $CA \subseteq AC$. Говорят, что оператор A *C-корректен для абстрактной задачи Коши $u' - Au = G$ при $t = 0$ в смысле распределений* (*ультрараспределений $*$-класса*), если для любого $G \in \mathscr{D}'_0(E)$ ($G \in {\mathscr{D}'}^*_0(E)$) существует единственное распределение $U_G \in \mathscr{D}'_0(E)$ ($U_G \in {\mathscr{D}'}^*_0(E)$), удовлетворяющее следующим условиям:

(i) $U_G(\varphi) \in D(A)$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}$ ($\varphi \in \mathscr{D}^*$),

(ii) отображение $G \mapsto U_G$, $G \in \mathscr{D}'_0(E)$ ($G \in {\mathscr{D}'}^*_0(E)$) принадлежит $L(\mathscr{D}'_0(E))$ ($L({\mathscr{D}'}^*_0(E))$),

(iii) $U'_G(\varphi) - AU_G(\varphi) = CG(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}$ ($\varphi \in \mathscr{D}^*$).

Определение 2.2 (ср. с [16, п. 2.1.3] для случая распределений, где $C = I$). Пусть A — замкнутый линейный оператор на E, $C \in L(E)$ и $CA \subseteq AC$. Говорят, что оператор A *экспоненциально C-корректен для абстрактной задачи Коши $u' - Au = G$ при $t = 0$ в смысле распределений* (*ультрараспределений $*$-класса*), если для любого $G \in \mathscr{D}'_0(E)$ ($G \in {\mathscr{D}'}^*_0(E)$) существует единственное распределение $U_G \in \mathscr{D}'_0(E)$ ($U_G \in {\mathscr{D}'}^*_0(E)$), удовлетворяющее пп. (i)–(iii) из определения 2.1 и следующему условию:

(iv) существует $a \geq 0$ такое, что $e^{-a\cdot}U_G \in \mathscr{S}'(E)$ ($e^{-a\cdot}U_G \in {\mathscr{S}'}^*(E)$).

2.1. C-обобщенные резольвенты линейных операторов. В этом пункте предполагаем, что X и Y — хаусдорфовы локально выпуклые пространства над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, а также что A — линейный оператор на Y и оператор $C \in L(Y)$ инъективен. Пусть Z — нетривиальное подпространство в $L(X, Y)$ такое, что $CU \in Z$ для $U \in Z$, и пусть $\mathbf{B}$ — семейство всех ограниченных подмножеств в X. Символом I_X (I_Y, I_Z) обозначим тождественный оператор на X (Y, Z). Тогда Z — хаусдорфово локально выпуклое пространство над полем $\mathbb{K}$ с фундаментальной системой полунорм, определяющей топологию Z, а именно $(P_B)_{P \in \circledast_Y, B \in \mathbf{B}}$, где $P_B(T) := \sup_{x \in B} P(Tx)$, $T \in Z$ ($P \in \circledast_Y$, $B \in \mathbf{B}$). В [41, определение 4.1] проанализирован случай $X = \mathscr{D}_{(-\infty,a]}$, $Z = L(\mathscr{D}_{(-\infty,a]}, Y)$ для некоторого $a > 0$ и $C = I_Y$, в то время как в [28] исследован случай $X = \mathscr{D}$, $Z = \mathscr{D}'_0(Y)$ и $C = I_Y$.

В данном пункте на основе идей из [41, 28] (ср. с определением 1 в [29]) разовьем общий подход к понятиям C-обобщенных резольвент линейных операторов. Определим линейный оператор $A_{X,Z}$ на Z формулой

$$A_{X,Z} := \{(U,V) \in Z \times Z : Ux \in D(A) \text{ для всех } x \in X \text{ и } Vx = A(Ux),\ x \in X\}.$$

Немедленно проверяется, что $D_{X,Z} \in L(Z)$ для любого оператора $D \in L(Y)$ такого, что $DU \in Z$ для всех $U \in Z$ и что оператор $C_{X,Z} \in L(Z)$ инъективен. Из предположения $CA \subseteq AC$ ($C^{-1}AC = A$) следует, что $C_{X,Z}A_{X,Z} \subseteq A_{X,Z}C_{X,Z}$ ($C_{X,Z}^{-1}A_{X,Z}C_{X,Z} = A_{X,Z}$). Если для отображений из X в Y выполняется теорема о замкнутом графике, то $D(A_{X,Z})$ состоит в точности из тех отображений $U \in Z$, для которых $R(U) \subseteq D(A)$ и $AU \in Z$; в этом случае $A_{X,Z} = AU$ для всех $U \in D(A_{X,Z})$.

Определение 2.3. *$C_{X,Z}$-резольвентное множество оператора A*, коротко $\rho_{C_{X,Z}}(A)$, определяется как множество тех скаляров $\lambda \in \mathbb{K}$, для которых оператор $\lambda I_Z - A_{X,Z}$ инъективен, $R(C_{X,Z}) \subseteq R(\lambda I_Z - A_{X,Z})$ и $(\lambda I_Z - A_{X,Z})^{-1}C_{X,Z} \in L(Z)$. Если $C = I_Y$, то $C_{X,Z}$-резольвентное множество оператора A называется *${}_{X,Z}$-резольвентным множеством* A и для краткости обозначается символом $\rho_{{}_{X,Z}}(A)$.

Другими словами, $C_{X,Z}$-резольвентное множество оператора A (${}_{X,Z}$-резольвентное множество A) определяется как $C_{X,Z}$-резольвентное множество (резольвентное множество) оператора $A_{X,Z}$ в Z. $C_{X,Z}$-спектр A, обозначаемый через $\sigma_{C_{X,Z}}(A)$, определяется как дополнение множества $\rho_{C_{X,Z}}(A)$ в $\mathbb{K}$; в случае $C = I_Y$ $\sigma_{C_{X,Z}}(A)$ также обозначается символом $\sigma_{{}_{X,Z}}(A)$ и называется *${}_{X,Z}$-спектром* A. Заметим, что ${}_{X,Z}$-спектр оператора A разбивается на три дизъюнктных подмножества:

(i) точечный ${}_{X,Z}$-спектр A, коротко $\sigma_{p;{}_{X,Z}}(A)$, состоящий из собственных значений оператора $A_{X,Z}$;

(ii) непрерывный ${}_{X,Z}$-спектр A, коротко $\sigma_{c;{}_{X,Z}}(A)$, состоящий из скаляров, не являющихся собственными значениями оператора $A_{X,Z}$, но таких, что область значений оператора $\lambda I_Z - A_{X,Z}$ является собственным плотным подмножеством пространства Z;

(iii) остаточный ${}_{X,Z}$-спектр A, коротко $\sigma_{r;{}_{X,Z}}(A)$, состоящий из всех остальных скаляров из спектра.

Легко проверить, что замкнутость (замыкаемость, инъективность) оператора A на Y влечет замкнутость (замыкаемость, инъективность) оператора $A_{X,Z}$ на Z (см. [41, предложение 4.3]) и что $\sigma_{p;{}_{X,Z}}(A) \subseteq \sigma_p(A)$. Предположим, что $\lambda \in \rho_C(A)$ (последнее определяется так же, как и в (1.1), но $\mathbb{C}$ и E заменяются на $\mathbb{K}$ и Y) и $(\lambda - A)^{-1}CU \in Z$ для всех $U \in Z$. Тогда $\lambda \in \rho_{C_{X,Z}}(A_{X,Z})$ и $(\lambda I_Z - A_{X,Z})^{-1}C_{X,Z} = ((\lambda - A)^{-1}C)_{X,Z}$; в частности, $\rho_C(A) \subseteq \rho_{C_{X,Z}}(A_{X,Z})$ при условии, что $Z = L(X,Y)$. В обоих подходах плотность оператора A влечет плотность оператора $A_{X,Z}$; используя доказательство предложения 4.4 в [41] и соображения на с. 685 в [36], можно показать, что то же самое верно в случае $X = \mathscr{D}^*_{(-\infty,a]}$, $Z = L(\mathscr{D}^*_{(-\infty,a]}, Y)$ для некоторого $a > 0$ и $C = I_Y$ (см. [41]) или $X = \mathscr{D}^*$, $Z = \mathscr{D}_0'^*(Y)$ и $C = I_Y$ (см. [28]). Следующий тривиальный пример показывает, что из плотности оператора A не следует плотность оператора $A_{X,Z}$ в общем случае, а также что выбор пространств X и Z очень важен для того, чтобы сказать что-то уместное и важное об операторе $A_{X,Z}$.

Пример 2.4. Предположим, что A — плотно определенный линейный оператор на Y, $C = I_Y$, пусть $U \in L(X,Y)$ такой, что $R(U)$ не содержится в $D(A)$

и $Z = \{\alpha U : \alpha \in \mathbb{K}\}$. Тогда $D(A_{X,Z}) = \{0\}$ и потому $A_{X,Z}$ не является плотно определенным оператором в Z.

Кроме того, существует множество известных тождеств, которые остаются верными для C-обобщенных резольвент. Например, из справедливости включения $CA \subseteq AC$ вытекает следующее.

(a) Пусть $k \in \mathbb{N}_0$, $\lambda, z \in \rho_{C_{X,Z}}(A_{X,Z})$ и $z \neq \lambda$. Тогда

$$(z - A_{X,Z})^{-1} C_{X,Z} (\lambda - A_{X,Z})^{-k} C_{X,Z}^k = \frac{(-1)^k}{(z-\lambda)^k} (z - A_{X,Z})^{-1} C_{X,Z}^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{k-i} (\lambda - A_{X,Z})^{-i} C_{X,Z}^{k+1}}{(z-\lambda)^{k+1-i}}.$$

(b) Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $U \in D\big(A_{X,Z}^n\big)$. Тогда

$$(\lambda - A_{X,Z})^{-1} C_{X,Z} U = \lambda^{-1} C_{X,Z} U + \lambda^{-2} C_{X,Z} A_{X,Z} U + \dots + \lambda^{-n} C_{X,Z} A_{X,Z}^{n-1} U + \lambda^{-n} (\lambda - A_{X,Z})^{-1} C_{X,Z} A_{X,Z}^n U.$$

В подходе из [41] пусть $X = \mathscr{D}_{(-\infty,a]}$, $Y = E$, $Z = L(\mathscr{D}_{(-\infty,a]}, E)$ для некоторого $a > 0$ и $C = I_E$. Если $\widehat{F}(\widehat{\varphi}) \in D(A)$, $\widehat{\varphi} \in \mathbf{D}_{(-\infty,a]}$ и $\widehat{\varphi} \mapsto A(\widehat{F}(\widehat{\varphi})) \in \mathbf{D}'_a(E)$, то определим линейный оператор $\mathbf{A}$ в $\mathbf{D}'_a(E)$ формулой $(\mathbf{A}\widehat{F})(\widehat{\varphi}) = A(\widehat{F}(\widehat{\varphi}))$ для $\widehat{F} \in \mathbf{D}'_a(E)$ и $\widehat{\varphi} \in \mathbf{D}_{(-\infty,a]}$. Линейный оператор A в E — инфинитезимальный генератор однозначно определенной локально равностепенно непрерывной C_0-полугруппы $(T(t))_{t \geq 0}$ в E в том и только том случае, когда выполнены следующие условия:

(1) A — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения $D(A)$;

(2) для любого $a > 0$ в пространстве $\mathbf{D}'_a(E)$ следующие условия эквивалентны:

(a) существует обобщенная резольвента $(\lambda I_Z - \mathbf{A})^{-1}$ в A;

(b) для любого фиксированного комплексного числа λ существует непрерывный линейный оператор $R(\lambda)$ из E в E такой, что $R(\lambda)x$ для любого фиксированного $x \in E$ есть E-значная целая функция от λ, для которой найдется $k \in \mathbb{N}$ такое, что для произвольной непрерывной полунормы p на E существуют целое число $N = N(p) > 0$ и число $C = C(p) > 0$, для которых $p(R(\lambda)x) \leq C(1 + |\lambda|)^N e^{k|\operatorname{Re}\lambda|}$, $\lambda \in \mathbb{C}$; кроме того, $R(\lambda)x$ — представление оператора $(\lambda I_Z - \mathbf{A})^{-1}$, и семейство операторов

$$\left\{ \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda) : \lambda > 0,\ n \in \mathbb{N}_0 \right\} \subseteq L(E)$$

равностепенно непрерывно.

Доказательство теоремы 3 в [41] достаточно длинно и может быть модифицировано тривиальным образом только для класса локально равностепенно непрерывных C-регуляризованных полугрупп в СПЛВП (напомним, что имеются примеры проинтегрированных полугрупп и C-регуляризованных полугрупп в банаховых пространствах с необязательно плотно определенными генераторами и потому невозможно ожидать выполнения (1.1) в этом контексте). С другой стороны, некоторые необходимые и достаточные условия для порождения локально равностепенно непрерывных K-сверточных C-полугрупп в СПЛВП, определенных локально или глобально, можно очень просто прояснить, используя понятие асимптотических ΘC-резольвент (см. [43] по поводу пионерских результатов в этом направлении и [10, 44–46] для случая банахова пространства). Пусть $0 < \tau \leq \infty$, $\gamma \in [0, \tau)$ и $K \in L^1_{\mathrm{loc}}([0, \tau))$, $K \neq 0$. Положим $\Theta(t) := \int\limits_0^t K(s)\, ds$, $t \in [0, \tau)$. Семейство операторов $\{L_\gamma(\lambda) : \gamma \in [0, \tau), \lambda \geq 0\} \subseteq L(E)$ называется *асимптотической ΘC-резольвентой для A*, если существует сильно непрерывное семейство операторов $(V(t))_{t \in [0,\tau)} \subseteq L(E)$ такое, что выполнены следующие условия:

(i) для каждого фиксированного $x \in E$ функция $\lambda \to L_\gamma(\lambda)x$, $\lambda \geq 0$, принадлежит $C^\infty([0, \infty) : E)$ и семейство операторов

$$\left\{\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}L_\gamma(\lambda) : \lambda \geq 0,\ n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq L(E)$$

равностепенно непрерывно;

(ii) оператор $L_\gamma(\lambda)$ перестановочен с C и A для всех $\lambda \geq 0$;

(iii) $(\lambda - A)L_\gamma(\lambda)x = -e^{-\lambda\gamma}V(\gamma)x + \int\limits_0^\gamma e^{-\lambda s}K(s)Cx\, ds$, $\lambda \geq 0$;

(iv) $L_\gamma(\lambda)L_\gamma(\eta) = L_\gamma(\eta)L_\gamma(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, $\eta \geq 0$.

С использованием этого понятия можно проверить непосредственно, что утверждения предложения 2.3.18, теорем 2.3.19 и 2.3.20 из [10] остаются справедливыми в локально выпуклых пространствах с небольшими техническими модификациями.

Следуя определению 2.1 из [28], будем говорить, что $L(E)$-значное распределение (ультрараспределение $*$-класса) $\mathscr{G}$ *ограниченно равностепенно непрерывно*, если для любого $p \in ⊛$ и любого ограниченного подмножества B в $\mathscr{D}$ ($\mathscr{D}^*$) существуют $c > 0$ и $q \in ⊛$ такие, что

$$p(\mathscr{G}(\varphi)x) \leq cq(x), \quad \varphi \in B,\ x \in E.$$

Если пространство E бочечное, то из принципа равномерной ограниченности [31, с. 273] следует, что каждое распределение $\mathscr{G} \in \mathscr{D}'(L(E))$ ($\mathscr{G} \in \mathscr{D}'^*(L(E))$) автоматически ограниченно равностепенно непрерывно.

Предположим, что оператор A C-корректен для абстрактной задачи Коши $u' - Au = G$ при $t = 0$ в смысле распределений (ультрараспределений $*$-класса); для краткости рассмотрим только случай ультрараспределений. Положим $G_x(\varphi) := \varphi(0)x$, $\varphi \in \mathscr{D}^*$ ($x \in X$). Пусть $\mathscr{G}(\varphi)x := U_{G_x}(\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{D}^*$ ($x \in X$). Привлекая тот факт, что пространство $\mathscr{D}^*$ бочечное, и рассуждения, использованные в доказательстве теоремы 2.1 в [28], можно легко доказать следующее утверждение.

Теорема 2.5. *Предположим, что оператор A C-корректен, оператор $C \in L(E)$ инъективен и $CA \subseteq AC$. Тогда существует ограниченно равностепенно непрерывное распределение $\mathscr{G} \in \mathscr{D}_0'(L(E))$ ($\mathscr{G} \in \mathscr{D}_0'^*(L(E))$), удовлетворяющее следующим свойствам:*

(i) *для любых $x \in E$ и $\varphi \in \mathscr{D}$ ($\varphi \in \mathscr{D}^*$)*

$$\mathscr{G}(\varphi)x \in D(A), \quad \left(\frac{d}{dt}\mathscr{G}\right)(\varphi)x - A\mathscr{G}(\varphi)x = \delta(\varphi)Cx;$$

(ii) *для любых $x \in D(A)$, $\varphi \in \mathscr{D}$ ($\varphi \in \mathscr{D}^*$) имеет место равенство $\mathscr{G}(\varphi)Ax = A\mathscr{G}(\varphi)x$;*

(iii) *для любых $\varphi \in \mathscr{D}$ ($\varphi \in \mathscr{D}^*$) справедливо $\mathscr{G}(\varphi)Cx = C\mathscr{G}(\varphi)x$.*

Доказательство. Если пространство E секвенциально полное, то верно утверждение, обратное к теореме 2.5. Для его доказательства потребуются две вспомогательные леммы, доказательства которых в случае ультрараспределений можно получить небольшой модификацией соответствующих доказательств предложений 2.1 и 2.2 в [28]. $\square$

Лемма 2.6. *Алгебраическое тензорное произведение* $\mathbf{D}_0'^* \otimes E$ *плотно в* $\mathbf{D}_0'^*(E)$. *Если* A — *замкнутый линейный оператор на* E, *то тензорное произведение* $\mathbf{D}_0'^* \otimes D(A)$ *плотно в* $D(\mathbf{A})$ *с топологией графика* $\mathbf{A}$.

Лемма 2.7 (см. [26, § 3] для ультрараспределений со значениями в банаховом пространстве). *Для всякого ограниченно равностепенно непрерывного ультрараспределения* $\mathscr{G} \in \mathscr{D}_0'^*(L(E))$ *существует единственный оператор свертки* $\mathscr{G} * \cdot \in L(\mathscr{D}_0'^*(E))$ *такой, что при* $f = F \otimes x$ (*определяется обычным образом*) *с произвольным* $F \in \mathscr{D}_0'^*$ *и* $x \in E$ *выполняется*

$$(\mathscr{G} * f)(\varphi) = \mathscr{G}_t(\alpha(t)F_s(\varphi(t+s)))x,$$

где $\alpha(t)$ — *произвольная гладкая функция такая, что* $\operatorname{supp}(\alpha) \subset [a, \infty)$, $a > -\infty$ *и* $\alpha(t) = 1$ *при* $t \geq 0$.

Теорема 2.8. *Пусть* E — *секвенциально полное локально выпуклое пространство,* $C \in L(E)$ — *инъективный оператор,* $CA \subseteq AC$. *Тогда замкнутый линейный оператор* A *на* E C-*корректен тогда и только тогда, когда существует ограниченно равностепенно непрерывное распределение* $\mathscr{G} \in \mathscr{D}_0'(L(E))$ ($\mathscr{G} \in \mathscr{D}_0'^*(L(E))$), *удовлетворяющее условиям* (i)–(iii) *теоремы* 2.5.

Доказательство. Достаточность можно легко установить, показав, что для любого ограниченно равностепенно непрерывного ультрараспределения $\mathscr{G} \in \mathscr{D}_0'^*(L(E))$ отображение $G \mapsto U_G := \mathscr{G} * G$ является единственным отображением, принадлежащим $L(\mathscr{D}_0'(E))$ и удовлетворяющим свойствам (i)–(iii) из определения 2.1. $\square$

Теоремы 2.5 и 2.8 можно легко переформулировать в случае, когда оператор A экспоненциально C-корректен.

3. Основные свойства C-полугрупп-распределений и C-ультрараспределений в локально выпуклых пространствах

Определение 3.1. Предположим, что $C\mathscr{G} = \mathscr{G}C$ для распределения $\mathscr{G} \in \mathscr{D}_0'(L(E))$ ($\mathscr{G} \in \mathscr{D}_0'^*(L(E))$), и пусть $\mathscr{G}$ — ограниченно равностепенно непрерывно. Говорят, что $\mathscr{G}$ *пред*-(С-ПР) (*пред*-(С-ПУР) $*$-*класса*), если

$$\mathscr{G}(\varphi *_0 \psi)C = \mathscr{G}(\varphi)\mathscr{G}(\psi), \quad \varphi, \psi \in \mathscr{D} \ (\varphi, \psi \in \mathscr{D}^*). \tag{C.S.1}$$

Если, дополнительно,

$$\mathscr{N}(\mathscr{G}) := \bigcap_{\varphi \in \mathscr{D}_0} N(\mathscr{G}(\varphi)) = \{0\} \quad \Big(\mathscr{N}(\mathscr{G}) := \bigcap_{\varphi \in \mathscr{D}_0^*} N(\mathscr{G}(\varphi)) = \{0\}\Big), \tag{C.S.2}$$

то $\mathscr{G}$ называется C-*полугруппой-распределением* (C-*полугруппой-ультрараспределением* $*$-*класса*), кратко (С-ПР) ((С-ПУР)). Пред-(С-ПР) $\mathscr{G}$ называется *плотной*, если

$$\mathscr{R}(\mathscr{G}) := \bigcup_{\varphi \in \mathscr{D}_0} R(\mathscr{G}(\varphi)) \text{ плотно в } E \quad \Big(\mathscr{R}(\mathscr{G}) := \bigcup_{\varphi \in \mathscr{D}_0^*} R(\mathscr{G}(\varphi)) \text{ плотно в } E\Big). \tag{C.S.3}$$

Понятие плотной пред-(С-ПУР) $\mathscr{G}$ $*$-класса (и множество $\mathscr{R}(\mathscr{G})$) определяются аналогично.

Замечание 3.2. (i) Выше предполагалось, что $\mathscr{G}$ ограниченно равностепенно непрерывно, чтобы соответствовать понятию, введенному в [28], и нашему предыдущему анализу. Однако предположение ограниченной равностепенной непрерывности $\mathscr{G}$ слегка излишне и можно переформулировать существенную часть наших результатов в случае, когда $\mathscr{G}$ не удовлетворяет этому условию.

(ii) Если $C = I$, то также пишем пред-(ПР), пред-(ПУР), (ПР), (ПУР), ... вместо пред-(С-ПР), пред-(С-ПУР), (С-ПР), (С-ПУР).

Пусть $\mathscr{G}$ — пред-(С-ПР) (пред-(С-ПУР) $*$-класса). Тогда имеет место равенство $\mathscr{G}(\varphi)\mathscr{G}(\psi) = \mathscr{G}(\psi)\mathscr{G}(\varphi)$ для всех φ, $\psi \in \mathscr{D}$ (φ, $\psi \in \mathscr{D}^*$) и $\mathscr{N}(\mathscr{G})$ — замкнутое подпространство в E.

Предположим, что $\mathscr{G} \in \mathscr{D}_0'(L(E))$ ($\mathscr{G} \in \mathscr{D}_0'^*(L(E))$) удовлетворяет (C.S.2) и $T \in \mathscr{E}_0'$ ($T \in \mathscr{E}_0'^*$), т. е. T — скалярнозначное распределение (ультрараспределение $*$-класса) с компактным носителем, содержащимся в $[0, \infty)$. Положим

$$G(T)x := \{(x, y) \in E \times E : \mathscr{G}(T * \varphi)x = \mathscr{G}(\varphi)y \text{ для всех } \varphi \in \mathscr{D}_0 \ (\varphi \in \mathscr{D}_0^*)\}.$$

Легко видеть, что $G(T)$ — замкнутый линейный оператор. Следуя [11, 27], определим (инфинитезимальный) генератор (С-ПР) $\mathscr{G}$ формулой $A := G(-\delta')$ (некоторые другие подходы изложены в [1; 6; 10, замечание 3.1.20; 28]). Так как для каждого $\psi \in \mathscr{D}$ ($\psi \in \mathscr{D}^*$) выполнено $\psi_+ := \psi \mathbf{1}_{[0,\infty)} \in \mathscr{E}_0'$ ($\mathscr{E}_{0'}^*$), ($\mathbf{1}_{[0,\infty)}$ — характеристическая функция полуинтервала $[0, \infty)$), определение $G(\psi_+)$ ясно. Впредь если $\mathscr{G}$ (С-ПР) ((С-ПУР) $*$-класса), $T \in \mathscr{E}_0'$ ($T \in \mathscr{E}_{0'}^*$) и $\varphi \in \mathscr{D}$ ($\varphi \in \mathscr{D}^*$), то $\mathscr{G}(\varphi)G(T) \subseteq G(T)\mathscr{G}(\varphi)$, $CG(T) \subseteq G(T)C$ и $\mathscr{R}(\mathscr{G}) \subseteq D(G(T))$. Если $\mathscr{G}$ — пред-(С-ПР) (пред-(С-ПУР) $*$-класса) и $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$ ($\varphi, \psi \in \mathscr{D}^*$), то из предположения $\varphi(t) = \psi(t)$, $t \geq 0$, следует, что $\mathscr{G}(\varphi) = \mathscr{G}(\psi)$. Как и в случае банахова пространства, можно доказать следующее: предположим, что $\mathscr{G}$ — (С-ПР) ((С-ПУР) $*$-класса). Тогда $G(\psi_+)C = \mathscr{G}(\psi)$, $\psi \in \mathscr{D}$ ($\psi \in \mathscr{D}^*$) и $C^{-1}AC = A$. Далее, справедливо

Предложение 3.3. *Пусть $\mathscr{G}$ — (С–ПР) ((С–ПУР) $*$-класса), S, $T \in \mathscr{E}_0'$ (S, $T \in \mathscr{E'}^*_0$), $\varphi \in \mathscr{D}_0$ ($\varphi \in \mathscr{D}_0^*$), $\psi \in \mathscr{D}$ ($\psi \in \mathscr{D}^*$) и $x \in E$. Тогда*

(i) $(\mathscr{G}(\varphi)x, \mathscr{G}(\overbrace{T * \cdots * T}^{m} * \varphi)x) \in G(T)^m$, $m \in \mathbb{N}$;

(ii) $G(S)G(T) \subseteq G(S * T)$, *где* $D(G(S)G(T)) = D(G(S * T)) \cap D(G(T))$, *и* $G(S) + G(T) \subseteq G(S + T)$;

(iii) $(\mathscr{G}(\psi)x, \mathscr{G}(-\psi')x - \psi(0)Cx) \in G(-\delta')$;

(iv) *если $\mathscr{G}$ плотна, то ее генератор плотно определен.*

Утверждения (ii)–(vi) из [10, предложение 3.1.2] можно переформулировать для пред-(С-ПР) (пред-(С-ПУР) $*$-класса) в локально выпуклых пространствах; здесь лишь стоит отметить, что для любого бочечного пространства E и любого ограниченного подмножества B в E^* отображение $x \mapsto \sup\limits_{x^* \in B} |\langle x^*, x\rangle|$, $x \in E$, является непрерывной полунормой на E (см. также доказательство теоремы 2.3 в [28]) и что из рефлексивности пространства состояний E (напомним, что мы предполагаем секвенциальную полноту E) следует, что пространства E, E^* и $E^{**} = E$ все бочечны и секвенциально полны.

Предложение 3.4. *Пусть $\mathscr{G}$ — пред-*(С-ПР) (пред-(С-ПУР) $*$-*класса*). *Справедливы следующие утверждения.*

(i) $C(\overline{\langle\mathscr{R}(\mathscr{G})\rangle}) \subseteq \overline{\mathscr{R}(\mathscr{G})}$, *где* $\langle\mathscr{R}(\mathscr{G})\rangle$ — *линейная оболочка* $\mathscr{R}(\mathscr{G})$.

(ii) *Предположим, что* $\mathscr{G}$ *не плотна и* $\overline{C\mathscr{R}(\mathscr{G})} = \overline{\mathscr{R}(\mathscr{G})}$. *Положим* $R := \overline{\mathscr{R}(\mathscr{G})}$ *и* $H := \mathscr{G}_{|R}$. *Тогда* H — *плотная пред-*(C_1-ПР) (*пред-*(C_1-*ПУР*) $*$-*класса*) *на* R *со свойством* $C_1 = C_{|R}$.

(iii) *Пусть* $\overline{R(C)} = E$ *и пространство* E *бочечное. Тогда сопряженное распределение* $\mathscr{G}(\cdot)^*$ *является пред-*(C^*-*ПР*) (*пред-*(C^*-*ПУР*) $*$-*класса*) *на* E^* *и* $\mathscr{N}(\mathscr{G}^*) = \overline{\mathscr{R}(\mathscr{G})}^{\circ}$.

(iv) *Если пространство* E *рефлексивно и* $\overline{R(C)} = E$, *то* $\mathscr{N}(\mathscr{G}) = \overline{\mathscr{R}(\mathscr{G}^*)}^{\circ}$.

(v) *Пусть* $\overline{R(C)} = E$ *и* E *бочечно. Тогда* $\mathscr{G}^*$ — (C^*-ПР) ((C^*-ПУР) $*$-*класса*) *в* E^* *тогда и только тогда, когда* $\mathscr{G}$ *плотная пред-*(C-ПР) (*пред-*(C-ПУР) $*$-*класса*). *Если* E *рефлексивно, то* $\mathscr{G}^*$ — *плотная пред-*(C^*-ПР) (*пред-*(C^*-ПУР) $*$-*класса*) *в* E^* *тогда и тогда, когда* $\mathscr{G}$ — (C-ПР) ((C-ПУР) $*$-*класса*).

Сформулируем и докажем обобщение предложения 2 из [14] для пред-(C-ПР) (пред-(C-ПУР) $*$-класса) в локально выпуклых пространствах.

Предложение 3.5. *Предположим, что* $\mathscr{G} \in \mathscr{D}_0'(L(E))$ ($\mathscr{G} \in \mathscr{D}_0'^*(L(E))$) *и* $\mathscr{G}(\varphi)C = C\mathscr{G}(\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{D}$ ($\varphi \in \mathscr{D}^*$). *Распределение* $\mathscr{G}$ *удовлетворяет* (C.S.1) *тогда и только тогда, когда*

$$\mathscr{G}(\varphi')\mathscr{G}(\psi) - \mathscr{G}(\varphi)\mathscr{G}(\psi') = \psi(0)\mathscr{G}(\varphi)C - \varphi(0)\mathscr{G}(\psi)C, \quad \varphi,\psi \in \mathscr{D}\ (\varphi,\psi \in \mathscr{D}^*). \tag{3.1}$$

В частности, $\mathscr{G}$ — *пред-*(C-ПР) (*пред-*(C-ПУР) $*$-*класса*) *тогда и только тогда, когда* $\mathscr{G}$ *ограниченно равностепенно непрерывно и выполнено* (3.1).

Доказательство. Шаги доказательства предложения такие же, как и для предложения 2 в [14]; мы включаем все нужные детали в доказательство в силу его значимости. Если $\mathscr{G}$ удовлетворяет (C.S.1), то (3.1) немедленно следует из (C.S.1) и равенства $\varphi' *_0 \psi - \varphi *_0 \psi' = \psi(0)\varphi - \varphi(0)\psi$, $\varphi,\psi \in \mathscr{D}$ ($\varphi,\psi \in \mathscr{D}^*$). Предположим, что (3.1) выполнено, $\varphi,\psi \in \mathscr{D}$ ($\varphi,\psi \in \mathscr{D}^*$), $a > 0$ и $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq (-\infty, a]$. Поскольку $\mathscr{G} \in \mathscr{D}_0'(L(E))$ ($\mathscr{G} \in \mathscr{D}_0'^*(L(E))$), функция $t \mapsto \int_0^a [\varphi(t-s)\psi(s) - \varphi(-s)\psi(t+s)]\,ds$, $t \in \mathbb{R}$, принадлежит $\mathscr{D}$ ($\mathscr{D}^*$) и $(\varphi *_0 \psi)(t) = \int_0^a [\varphi(t-s)\psi(s) - \varphi(-s)\psi(t+s)]\,ds$, $t \geq 0$, имеем

$$\begin{aligned}
\mathscr{G}(\varphi *_0 \psi)Cx &= \mathscr{G}\int_0^a [\varphi(\cdot-s)\psi(s) - \varphi(-s)\psi(\cdot+s)]Cx\,ds \\
&= \int_0^a [\psi(s)\mathscr{G}(\varphi(\cdot-s))Cx - \varphi(-s)\mathscr{G}(\psi(\cdot+s))Cx]\,ds \\
&= \int_0^a [\mathscr{G}(\varphi'(\cdot-s))\mathscr{G}(\psi(\cdot+s))x - \mathscr{G}(\varphi(\cdot-s))\mathscr{G}(\psi'(\cdot+s))x]\,ds \qquad (3.2) \\
&= -\int_0^a \frac{d}{ds}[\mathscr{G}(\varphi(\cdot-s))\mathscr{G}(\psi(\cdot+s))x]\,ds \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathscr{G}(\varphi)\mathscr{G}(\psi)x - \mathscr{G}(\varphi(\cdot-a))\mathscr{G}(\psi(\cdot+a))x \\
&\qquad = \mathscr{G}(\varphi)\mathscr{G}(\psi)x - \mathscr{G}(\varphi(\cdot-a))0x = \mathscr{G}(\varphi)\mathscr{G}(\psi)x
\end{aligned}$$

для любых $x \in E$ и $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$ $(\varphi, \psi \in \mathscr{D}^*)$. Здесь (3.2) следует из (3.1) и (3.3) с использованием элементарных рассуждений, учитывающих непрерывность $\mathscr{G}$, а также тех фактов, что $(\zeta \in \mathscr{D}^*)$ $\lim\limits_{h\to 0}(\tau_h\zeta) = \zeta$ в $\mathscr{D}$ $(\mathscr{D}^*)$, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}(\tau_h\zeta - \zeta) = \zeta'$ в $\mathscr{D}$ $(\mathscr{D}^*)$ для всякой функции $\zeta \in \mathscr{D}$ и что множество $\{\tau_h\zeta : |h| \leq 1\}$ ограничено в $\mathscr{D}$ $(\mathscr{D}^*)$. $\square$

Теорема 3.6. *Предположим, что* $\mathscr{G} \in \mathscr{D}_0'(L(E))$ $(\mathscr{G} \in \mathscr{D}_0'^*(L(E)))$, $\mathscr{G}(\varphi)C = C\mathscr{G}(\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{D}$ $(\varphi \in \mathscr{D}^*)$ *и* A — *замкнутый линейный оператор на* E *такой, что* $\mathscr{G}(\varphi)A \subseteq A\mathscr{G}(\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{D}$ $(\varphi \in \mathscr{D}^*)$ *и*

$$A\mathscr{G}(\varphi)x = \mathscr{G}(-\varphi')x - \varphi(0)Cx, \quad x \in E,\ \varphi \in \mathscr{D}\ (\varphi \in \mathscr{D}^*). \tag{3.4}$$

Справедливы следующие утверждения.

(i) $\mathscr{G}$ *удовлетворяет* (C.S.1).

(ii) *Если распределение* $\mathscr{G}$ *ограниченно равностепенно непрерывно и удовлетворяет* (C.S.2), *то* $\mathscr{G}$ — (C-ПР) ((C-ПУР) $*$-*класса*), *порожденная* $C^{-1}AC$.

(iii) *В случае распределений если пространство* E *допустимо, то условие* (C.S.2) *автоматически выполнено для* $\mathscr{G}$.

Доказательство. Фиксируем $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$ $(\varphi, \psi \in \mathscr{D}^*)$. Используя включение $\mathscr{G}(\varphi)A \subseteq A\mathscr{G}(\varphi)$ и равенство (3.4), получаем $A\mathscr{G}(\varphi)\mathscr{G}(\psi)x = \mathscr{G}(\varphi)A\mathscr{G}(\psi)x$, $x \in E$, т. е.

$$\mathscr{G}(-\varphi')\mathscr{G}(\psi)x - \varphi(0)C\mathscr{G}(\psi)x = \mathscr{G}(\varphi)[\mathscr{G}(-\psi')x - \psi(0)Cx], \quad x \in E. \tag{3.5}$$

На самом деле это (3.1), так что (i) немедленно следует из предложения 3.5. Доказательство п. (iii) точно такое же, как и в случае банахова пространства (см., например, [1] и доказательство теоремы 3.1.27 в [10]). Значит, остается доказать, что интегральный генератор $\mathscr{G}$ — это оператор $C^{-1}AC$, если $\mathscr{G}$ ограниченно равностепенно непрерывно и удовлетворяет (C.S.2) (см. (ii)); для краткости рассмотрим только случай распределения. Символом B обозначим интегральный генератор $\mathscr{G}$. Немедленно проверяется, что $C^{-1}AC \subseteq B$. Предположим, что $(x, y) \in B$, т. е. что $\mathscr{G}(-\zeta')x = \mathscr{G}(\zeta)y$ для всех $\zeta \in \mathscr{D}_0$. Отсюда $A\mathscr{G}(\zeta)x = \mathscr{G}(\zeta)y$ для всех $\zeta \in \mathscr{D}_0$. Рассмотрим уравнение (3.5) с $\varphi = \xi$ и $\xi(0) = 1$. В силу (3.4) легко получаем, что $C\mathscr{G}(\psi)x \in D(A)$. Поскольку $A\mathscr{G}(\zeta)x = \mathscr{G}(\zeta)y$ для всех $\zeta \in \mathscr{D}_0$, имеем $\mathscr{G}(\zeta)AC\mathscr{G}(\eta)x = \mathscr{G}(\zeta)C\mathscr{G}(\eta)y$ для всех $\zeta \in \mathscr{D}_0$ $(\eta \in \mathscr{D})$. Ввиду (C.S.2) $AC\mathscr{G}(\eta)x = C\mathscr{G}(\eta)y$ $(\eta \in \mathscr{D})$. Отсюда, в свою очередь, $CA\mathscr{G}(\eta)x = C\mathscr{G}(\eta)y$, $A\mathscr{G}(\eta)x = \mathscr{G}(\eta)y$, $\mathscr{G}(-\eta')x - \eta(0)Cx = \mathscr{G}(\eta)y$ $(\eta \in \mathscr{D})$, и так как η произвольно, то $Cx \in D(A)$. Объединяя это с равенством $AC\mathscr{G}(\eta)x = C\mathscr{G}(\eta)y$ $(\eta \in \mathscr{D})$, получаем, что $ACx = Cy$ и $C^{-1}ACx = y$, что и требовалось. $\square$

Замечание 3.7. (i) Даже в случае, когда E — банахово пространство и $C = I$, $\mathscr{G}$ не обязано удовлетворять условию (C.S.2) в случае ультрараспределений [10].

(ii) Предположим, что $\overline{R(C)} = E$, пространство E бочечное и A порождает плотную (C-ПР) ((C-ПУР) $*$-класса) на E. Тогда из предложения 3.4(iii) вытекает, что двойственное распределение $\mathscr{G}(\cdot)^*$ есть (C^*-ПР) ((C^*-ПУР) $*$-класса) на E^*. Так как $\mathscr{G}^*(\varphi)A^* \subseteq A^*\mathscr{G}^*(\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{D}$ $(\varphi \in \mathscr{D}^*)$ и соотношение (3.4) выполняется, где A и $\mathscr{G}$ заменяются соответственно на A^* и $\mathscr{G}^*$, из теоремы 3.6(ii) следует, что интегральный генератор $\mathscr{G}^*$ есть оператор $(C^*)^{-1}A^*C^*$ (см. также [10, замечание 3.1.22]).

(iii) Пользуясь предложением 3.5 и методом, предложенным в [14, § 6], можно ввести интегральный генератор пред-(C-ПР) (пред-(C-ПУР) $*$-класса) на произвольном секвенциально полном локально выпуклом пространстве. С другой стороны, представляется, что метод, предложенный в [10, § 3.5, определение 3.5.7], можно использовать для определения интегрального генератора пред-(C-ПР) (пред-(C-ПУР) $*$-класса) только в случае, когда E — банахово пространство. Изложение деталей здесь заняло бы слишком много места.

Предложение 3.8. *Всякая C-полугруппа-распределение (C-полугруппа-ультрараспределение $*$-класса) однозначно определяется своим генератором.*

Доказательство. Докажем утверждение только в случае распределений, так как случай ультрараспределений рассматривается вполне аналогично. Предположим, что $\mathscr{G}_1$ и $\mathscr{G}_2$ — две C-полугруппы-распределения, порожденные оператором A. Положим $\mathscr{G} := \mathscr{G}_1 - \mathscr{G}_2$. Тогда $\mathscr{G} \in \mathscr{D}_0'(L(E))$, $A\mathscr{G}(\varphi) \subseteq \mathscr{G}(\varphi)A$, $\varphi \in \mathscr{D}$, и $A\mathscr{G}(\varphi) = \mathscr{G}(-\varphi')$, $\varphi \in \mathscr{D}$. Отсюда

$$\mathscr{G}(\varphi')\mathscr{G}(\psi)x = -A\mathscr{G}(\varphi)\mathscr{G}(\psi)x = -\mathscr{G}(\varphi)A\mathscr{G}(\psi)x = \mathscr{G}(\varphi)\mathscr{G}(\psi')x$$

для всех $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$ и $x \in E$. Вместе с этим равенством часть доказательства предложения 3.5, начинающаяся с уравнения (3.2), показывает, что

$$0 = \int_0^a [\mathscr{G}(\varphi'(\cdot - s))\mathscr{G}(\psi(\cdot + s))x - \mathscr{G}(\varphi(\cdot - s))\mathscr{G}(\psi'(\cdot + s))x]\,ds = \mathscr{G}(\varphi)\mathscr{G}(\psi)x$$

при всех $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$ и $x \in E$ (здесь $a > 0$ выбрано так, что $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq (-\infty, a]$). В частности, $\mathscr{G}(\psi)\mathscr{G}(\varphi) = \mathscr{G}(\varphi)\mathscr{G}(\psi) = 0$ ($\varphi, \psi \in \mathscr{D}$), и потому

$$\mathscr{G}_1(\varphi)\mathscr{G}_2(\psi) + \mathscr{G}_2(\varphi)\mathscr{G}_1(\psi) = \mathscr{G}_1(\psi)\mathscr{G}_2(\varphi) + \mathscr{G}_2(\psi)\mathscr{G}_1(\varphi), \quad \varphi, \psi \in \mathscr{D}. \tag{3.6}$$

Применяя оператор A к обеим частям (3.6) и используя (3.6) еще раз для приравнивая членов $\mathscr{G}_1(-\varphi')\mathscr{G}_2(\psi) + \mathscr{G}_2(-\varphi')\mathscr{G}_1(\psi)$ и $\mathscr{G}_1(\psi)\mathscr{G}_2(-\varphi') + \mathscr{G}_2(\psi)\mathscr{G}_1(-\varphi')$, получаем, что

$$\begin{aligned} &\mathscr{G}_1(\psi)\mathscr{G}_2(-\varphi') - \varphi(0)\mathscr{G}_2(\psi)C + \mathscr{G}_2(\psi)\mathscr{G}_1(-\varphi') - \varphi(0)\mathscr{G}_1(\psi)C \\ &= \mathscr{G}_1(-\psi')\mathscr{G}_2(\varphi) - \psi(0)\mathscr{G}_2(\varphi)C + \mathscr{G}_2(-\psi')\mathscr{G}_1(\varphi) - \psi(0)\mathscr{G}_1(\varphi)C, \quad \varphi, \psi \in \mathscr{D}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Применим теперь оператор A к обеим частям (3.7). Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathscr{G}_1(-\psi')\mathscr{G}_2(-\varphi') - \psi(0)\mathscr{G}_2(-\varphi') - \varphi(0)[\mathscr{G}_2(-\psi') - \psi(0)C^2] \\ + \mathscr{G}_2(-\psi')\mathscr{G}_1(-\varphi') - \psi(0)\mathscr{G}_1(-\varphi') - \psi(0)[\mathscr{G}_1(-\psi') - \psi(0)C^2] \\ = \mathscr{G}_1(-\psi')[\mathscr{G}_2(-\varphi') - \varphi(0)C] - \psi(0)[\mathscr{G}_2(-\varphi') - \varphi(0)C^2] \\ + \mathscr{G}_2(-\psi')[\mathscr{G}_1(-\varphi') - \varphi(0)C] - \psi(0)[\mathscr{G}_1(-\varphi')C - \varphi(0)C^2] \end{aligned}$$

для любых $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$. Пользуясь этим равенством с $\varphi(0) = 1$ и инъективностью C, имеем $\mathscr{G}_1(\psi') = \mathscr{G}_2(\psi')$, $\psi \in \mathscr{D}$. Значит, $\mathscr{G}' = 0$, и стандартные рассуждения из теории скалярнозначных распределений показывают, что существует пробная функция $\eta \in \mathscr{D}_{[0,1]}$ такая, что $\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(t)\,dt = 1$ и $\mathscr{G}(\psi) = \mathscr{G}_1(\psi) - \mathscr{G}_2(\psi) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\,dt\right)\mathscr{G}(\eta)$ для всех $\psi \in \mathscr{D}$. Выбирая $\psi \in \mathscr{D}_{[-2,-1]}$ со свойством $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\,dt = 1$, легко получаем, что $\mathscr{G}(\eta) = 0$ и потому $\mathscr{G}(\psi) = 0$ для всех $\psi \in \mathscr{D}$. $\square$

Замечание 3.9. В [29] замечено (без соответствующего доказательства), что для всякого замкнутого линейного оператора A на E существует не более одного векторнозначного распределения $\mathscr{G} \in \mathscr{D}'_0(L(E))$ такого, что $\mathscr{G}(\varphi)A \subseteq A\mathscr{G}(\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{D}$, и (3.4) выполнено с $C = I$. Следует отметить также, что мы не пользуемся операцией свертки векторнозначных (ультра)распределений в доказательстве предложения 3.8.

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству в скалярнозначном случае.

Лемма 3.10. *Предположим, что* $0 < \tau \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$ *и* $f : (0, \tau) \to E$ — *непрерывная функция. Если*

$$\int_0^\tau \varphi^{(n)}(t) f(t)\, dt = 0, \quad \varphi \in \mathscr{D}_{(0,\tau)},$$

то существуют элементы $x_0, \dots, x_{n-1}$ *в* E *такие, что* $f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} t^j x_j$, $t \in (0, \tau)$.

Теорема 3.11. *Пусть* $\mathscr{G}$ — (C-ПР), *порожденная оператором* A, *и пусть* $L(E, [D(A)])$ — *квазиполное* (DF)-*пространство. Тогда для каждого* $\tau > 0$ *существуют* $n_\tau \in \mathbb{N}$ *такие, что* A — *интегральный генератор локальной* n_τ *раз проинтегрированной* C-*полугруппы на* E.

Доказательство проводится с использованием теоремы 3.1.7 из [10], леммы 3.10 и структурной теоремы для распределений со значениями в локально выпуклом пространстве. □

Замечание 3.12. Пусть $\mathscr{G}$ — (C-ПР), порожденная оператором A. Тогда $A\mathscr{G}(\varphi)x = -\mathscr{G}(\varphi')x - \varphi(0)Cx$, $\varphi \in \mathscr{D}$, $x \in E$, так что можно рассматривать $\mathscr{G}$ как непрерывное линейное отображение из $\mathscr{D}$ в $L(E, [D(A)])$. Теорема 3.11 остается верной, если предположить, что распределение $\mathscr{G} \in \mathscr{D}'(L(E, [D(A)]))$ конечного порядка, вместо предположения, что $L(E, [D(A)])$ — квазиполное (DF)-пространство. Для переноса утверждений теоремы 3.1.21 и замечания 3.1.22 в [10] на C-полугруппы-распределения в локально выпуклых пространствах кажется почти неизбежным предполагать, что распределение $\mathscr{G} \in \mathscr{D}'(L(E, [D(A)]))$ имеет конечный порядок.

Доказательство следующей теоремы можно вывести с помощью леммы 3.10, доказательства теоремы 3.1.8 из [10] и элементарных рассуждений, касающихся топологических свойств пространства $\mathscr{D}$.

Теорема 3.13. *Пусть существует последовательность* $((p_k, \tau_k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ *в* $\mathbb{N}_0 \times (0, \infty)$ *такая, что* $\lim_{k \to \infty} \tau_k = \infty$, *и* A — *подгенератор локально равностепенно непрерывной* p_k *раз проинтегрированной* C-*полугруппы* $(S_{p_k}(t))_{t \in [0, \tau_k)}$ *на* E, $k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда оператор* $C^{-1}AC$ *порождает* (C-ПР) $\mathscr{G}$, *задаваемую формулой*

$$\mathscr{G}(\varphi)x = (-1)^{p_k} \int_0^\infty \varphi^{(p_k)}(t) S_{p_k}(t)x\, dt, \quad \varphi \in \mathscr{D}_{(-\infty, \tau_k)},\ x \in E.$$

Замечание 3.14. В случае, когда $C = I$, достаточно предположить, что оператор A — интегральный генератор локально равностепенно непрерывной p

раз проинтегрированной полугруппы $(S_p(t))_{t\in[0,\tau)}$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$ и $\tau > 0$ (см. [10, замечание 3.1.10] для случая банаховых пространств).

Пусть $\alpha \in (0,\infty)\setminus\mathbb{N}$, $f \in \mathscr{S}$ и $n = \lceil \alpha \rceil$. Напомним, что дробная производная Вейля W_+^α порядка α (см. [10, 18]) определяется формулой

$$W_+^\alpha f(t) := \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int\limits_t^\infty (s-t)^{n-\alpha-1} f(s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Если $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, то полагаем $W_+^n := (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}$. Известно, что $W_+^{\alpha+\beta} f = W_+^\alpha W_+^\beta f$, $\alpha, \beta > 0$, $f \in \mathscr{S}$. Предположим, что $\alpha \in (0,\infty) \setminus \mathbb{N}$ и $f \in C([0,\infty) : E)$. Пусть $f_{n-\alpha}(t) := (g_{n-\alpha} * f)(t)$, $t \geq 0$. Пользуясь теоремой о мажорированной сходимости и заменой переменных $s \mapsto s - t$, получаем

$$\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int\limits_t^\infty (s-t)^{n-\alpha-1} \varphi(s)\, ds = \int\limits_0^\infty g_{n-\alpha}(s) \varphi^{(n)}(t+s)\, ds, \quad t \geq 0, \ \varphi \in \mathscr{D}.$$

Значит,

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty W_+^\alpha \varphi(t) f(t)\, dt &= (-1)^n \int\limits_0^\infty g_{n-\alpha}(s) \varphi^{(n)}(t+s) f(t)\, ds dt \\ &= (-1)^n \int\limits_0^\infty \int\limits_0^t \varphi^{(n)}(t) g_{n-\alpha}(s) f(t-s)\, ds dt \\ &= (-1)^n \int\limits_0^\infty \varphi^{(n)}(t) f_{n-\alpha}(t)\, dt, \quad \varphi \in \mathscr{D}.\end{aligned}$$

Поэтому если A — интегральный генератор локально равностепенно непрерывной α раз проинтегрированной C-полугруппы $(S_\alpha(t))_{t\geq 0}$ на E, то

$$\int\limits_0^\infty W_+^\alpha \varphi(t) S_\alpha(t) x\, dt = (-1)^n \int\limits_0^\infty \varphi^{(n)}(t) S_n(t) x\, dt, \quad x \in E, \ \varphi \in \mathscr{D},$$

где $(S_n(t))_{t\geq 0}$ — локально равностепенно непрерывная n раз проинтегрированная полугруппа, порожденная оператором A. С учетом теоремы 3.13 из изложенного выше вытекает

Теорема 3.15. *Предположим, что $\alpha \geq 0$ и A — интегральный генератор локально равностепенно непрерывной α раз проинтегрированной C-полугруппы $(S_\alpha(t))_{t\geq 0}$ на E. Положим*

$$\mathscr{G}_\alpha(\varphi) x := \int\limits_0^\infty W_+^\alpha \varphi(t) S_\alpha(t) x\, dt, \quad x \in E, \ \varphi \in \mathscr{D}. \tag{3.8}$$

Тогда A — интегральный генератор (C-ПР) $\mathscr{G}_\alpha$.

Хорошо известно, что интегральный генератор C-полугруппы-распределения в банаховом пространстве может иметь пустое C-резольвентное множество. С другой стороны, существование и полиномиальная ограниченность C-резольвенты оператора A на некоторой экспоненциальной области гарантирует, что оператор $C^{-1}AC$ порождает (C-ПР). Более точно, справедлива

Теорема 3.16. *Пусть $a > 0$, $b > 0$, $\alpha > 0$ и $e(a,b) \subseteq \rho_C(A)$. Предположим, что отображение $\lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1}Cx$, $\lambda \in e(a,b)$, непрерывно для любого фиксированного элемента $x \in E$ и что семейство операторов $\{(1+|\lambda|)^{-\alpha}(\lambda - A)^{-1}C : \lambda \in e(a,b)\} \subseteq L(E)$ равностепенно непрерывно. Пусть*

$$\mathscr{G}(\varphi)x := (-i)\int\limits_{\Gamma} \widehat{\varphi}(\lambda)(\lambda - A)^{-1}Cx\,d\lambda, \quad x \in E,\ \varphi \in \mathscr{D}, \tag{3.9}$$

где Γ — ориентированная вверх граница области $e(a,b)$. Тогда $\mathscr{G}$ — (C-ПР), *порожденная $C^{-1}AC$.*

Доказательство. Можем предполагать без ограничения общности, что для всякого $x \in E$ отображение $\lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1}Cx$ аналитично в некоторой открытой окрестности области $e(a,b)$. Из рассуждений, приведенных в доказательстве теоремы 3.1.27 в [10], легко следует, что $\mathscr{G} \in \mathscr{D}_0'(L(E))$, а также что $\mathscr{G}(\varphi)C^l((z-A)^{-1}C)^m = C^l((z-A)^{-1}C)^m\mathscr{G}(\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{D}$ $(m, l \in \mathbb{N}_0)$. Пусть B — ограниченное подмножество в $\mathscr{D}$. Тогда существует $\tau > 0$ такое, что B содержится и ограничено в $\mathscr{D}_{[-\tau,\tau]}$. Так как

$$\widehat{\varphi}(\lambda) = \frac{(-1)^n}{2\pi\lambda^n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t}\varphi^{(n)}(t)\,dt, \quad \varphi \in \mathscr{D},\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \tag{3.10}$$

получаем, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $c_n > 0$ такое, что для каждого $\varphi \in B$ имеем $|\widehat{\varphi}(\lambda)| \le c_n e^{\tau \operatorname{Re}\lambda}|\lambda|^{-n}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Учитывая эту оценку и равностепенную непрерывность семейства $\{(1+|\lambda|)^{-\alpha}(\lambda - A)^{-1}C : \lambda \in e(a,b)\}$, легко доказать, что $\mathscr{G}$ ограниченно равностепенно непрерывна. Аналогично доказательству теоремы 3.1.27 в [10] имеем $\mathscr{G}(\varphi)A \subseteq A\mathscr{G}(\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{D}$, и выполнено (3.4). В силу теоремы 3.6(i) $\mathscr{G}$ удовлетворяет (C.S.1). Для доказательства (C.S.2) предположим, что $\mathscr{G}(\varphi)x' = 0$, $\varphi \in \mathscr{D}_0$, для некоторого $x' \in E$. Известно, что существуют числа $n \in \mathbb{N}$, $n > \alpha + 1$, и $\tau' > 0$ такие, что оператор A $(C^{-1}AC)$ является подгенератором (интегральным генератором) локально равностепенно непрерывной невырожденной n раз проинтегрированной C-полугруппы $(S_n(t))_{t \in [0,\tau')}$, определяемой формулой

$$S_n(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t}\lambda^{-n}(\lambda - A)^{-1}Cx\,d\lambda, \quad x \in E,\ t \in [0,\tau').$$

Из интегрирования по частям следует, что $\int\limits_0^{\infty} \varphi^{(n)}(t)e^{\lambda t}\,dt = (-1)^n\lambda^n\int\limits_0^{\infty}\varphi(t)e^{\lambda t}\,dt$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathscr{D}_{(0,\tau')}$. Применяя это равенство, теорему Фубини и предыдущие рассуждения, легко проверить, что

$$\mathscr{G}(\varphi)x = (-1)^n\int\limits_0^{\infty} \varphi^{(n)}(t)S_n(t)x\,dt, \quad x \in E,\ \varphi \in \mathscr{D}_{(0,\tau')}.$$

В частности, это выполнено для $x = x'$, и потому из леммы 3.10 вытекает, что найдутся элементы $x_0, \dots, x_{n-1} \in E$, для которых $S_n(t)x' = \sum\limits_{j=0}^{n-1} t^j x_j$, $t \in [0,\tau')$. Полагая $t = 0$, получаем, что $x_0 = 0$. Значит,

$$A\sum_{j=1}^{n-1}\frac{t^{j+1}}{j+1}x_j = \sum_{j=1}^{n-1}t^j x_j - \frac{t^n}{n!}Cx', \quad t \in [0,\tau'),$$

откуда $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$ и, следовательно, $x' = 0$, так как $(S_n(t))_{t\in[0,\tau')}$ невырожденно. Тем самым $\mathscr{G}$ — (C-ПР). Согласно теореме 3.6(ii), интегральный генератор полугруппы $\mathscr{G}$ есть оператор $C^{-1}AC$. $\square$

Замечание 3.17. (i) В доказательстве теоремы 3.1.27 из [10] уравнение (3.4) и структурная теорема для векторнозначных распределений с носителем в точке существенно использованы в доказательстве свойства (C.S.2) для $\mathscr{G}$. Заметим, что здесь не предполагаем, что пространство E допустимо.

(ii) Объясним, как можно доказать свойство (C.S.1) для $\mathscr{G}$ непосредственными вычислениями. Фиксируем две пробные функции $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$, элемент $x \in E$ и число $z \in \rho_C(A) \setminus e(a,b)$. Используя обобщенное резольвентное уравнение (6) из [47], получаем, что семейство операторов $\{(1+|\lambda|)^{-1}(\lambda - A)^{-1}C((z - A)^{-1}C)^{\lceil\alpha\rceil+1} : \lambda \in e(a,b)\} \subseteq L(E)$ равностепенно непрерывно. Положим $y := ((z-A)^{-1}C)^{\lceil\alpha\rceil+1}x$. Используя уравнение (3.10) с $n = 1$, интегрирование по частям и формулу Коши, получаем

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(\varphi)y &= \frac{(-1)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}\varphi'(t)(\lambda - A)^{-1}Cy\,dtd\lambda \\ &= \frac{(-1)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}\varphi'(t)(\lambda - A)^{-1}Cy\,dtd\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{\varphi(0)}{\lambda} + \int\limits_{0}^{\infty}e^{\lambda t}\varphi(t)\,dt\right](\lambda - A)^{-1}Cy\,d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{0}^{\infty}e^{\lambda t}\varphi(t)(\lambda - A)^{-1}Cy\,dtd\lambda, \quad \varphi \in \mathscr{D}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Из этого легко следует, что

$$\mathscr{G}(\varphi *_0 \psi)y = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}e^{\lambda(t+s)}\varphi(t)\psi(s)(\lambda - A)^{-1}Cy\,dtdsd\lambda. \tag{3.12}$$

Пусть $\theta \in (0, \pi/2)$ — фиксированный угол. Рассматривая для достаточно большого числа $R > 0$ положительно ориентированную кривую $\Gamma' := \Gamma_1' \cup \Gamma_2' \cup \Gamma_3' \cup \Gamma_4'$, где $\Gamma_1' := \{t - iR\cos\theta : t \in [-R\sin\theta, a^{-1}\ln(R\cos\theta)]\}$, $\Gamma_2' := \{\lambda \in \Gamma : |\operatorname{Im}\lambda| \le R\cos\theta\}$, $\Gamma_3' := \{t + iR\cos\theta : t \in [-R\sin\theta, a^{-1}\ln(R\cos\theta)]\}$ и $\Gamma_4' := \{Re^{i\vartheta} : \vartheta \in [\theta + (\pi/2), (3\pi/2) - \theta]\}$, и применяя формулу Коши, получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\int_0^\infty e^{\lambda t}\varphi(t)\,dt}{\lambda - \eta}\,d\lambda = 0, \quad \varphi \in \mathscr{D},\ \eta \notin \Gamma. \tag{3.13}$$

Пусть Γ_1 — положительно ориентированная граница области $e(a_1, b_1)$, где $0 < a_1 < a$ и $b_1 > b$. Замечая, что для каждого фиксированного числа $\lambda \in \Gamma$ оператор $A = \lambda$ порождает сильно непрерывную полугруппу $(e^{\lambda t})_{t\ge 0}$ на $\mathbb{C}$ и что всякая C-полугруппа-распределение на банаховом пространстве однозначно определяется своим генератором, можем применить [10, теорема 3.1.27], чтобы получить

$$(-i)\int\limits_{\eta\in\Gamma_1}\frac{\widehat{\psi}(\eta)}{\eta-\lambda}\,d\eta=\int\limits_0^\infty e^{\lambda t}\psi(t)\,dt. \tag{3.14}$$

Положим $\widehat{\varphi}_+(\lambda):=\int\limits_0^\infty e^{\lambda t}\varphi(t)\,dt$, $\lambda\in\mathbb{C}$. Используя формулу Коши, (3.11), (3.13), (3.14), резольвентную теорему и теорему Фубини, получаем

$$\begin{aligned}
\mathscr{G}(\varphi)\mathscr{G}(\psi)y&=\frac{(-1)}{2\pi}\int\limits_\Gamma\int\limits_{\Gamma_1}\widehat{\varphi}_+(\lambda)\widehat{\psi}(\eta)\frac{(\lambda-A)^{-1}C^2y-(\eta-A)^{-1}C^2y}{\eta-\lambda}\,d\eta d\lambda\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\int\limits_0^\infty\widehat{\varphi}_+(\lambda)e^{\lambda t}\psi(t)(\lambda-A)^{-1}C^2y\,dtd\lambda\\
&-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_1}\Bigg(\int\limits_\Gamma\frac{\int\limits_0^\infty e^{\lambda t}\varphi(t)\,dt}{\lambda-\eta}\,d\lambda\Bigg)\widehat{\psi}(\eta)(\eta-A)^{-1}C^2y\,d\eta\\
&=\frac{C}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\int\limits_0^\infty\widehat{\varphi}_+(\lambda)e^{\lambda t}\psi(t)(\lambda-A)^{-1}Cy\,dtd\lambda\\
&=\frac{C}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{\lambda(t+s)}\varphi(s)\psi(t)(\lambda-A)^{-1}Cy\,dsdtd\lambda=C\mathscr{G}(\varphi*_0\psi)y.
\end{aligned}$$

Поскольку $\mathscr{G}(\zeta)$ коммутирует с оператором $((z-A)^{-1}C)^{\lceil\alpha\rceil+1}$ $(\zeta\in\mathscr{D})$, из (3.12) и проделанных вычислений следует, что $\mathscr{G}(\varphi)\mathscr{G}(\psi)x=\mathscr{G}(\varphi*_0\psi)Cx$ и что (C.S.1) выполнено.

(iii) Предложение 3.1.28(i) в [10] остается верным в локально выпуклых пространствах.

В оставшейся части данного раздела снова рассмотрим определение регулярной полугруппы-распределения, данное в [1], и докажем некоторые результаты о плотных (C-ПР) ((C-ПУР) $*$-класса). Предположим, что $\mathscr{G}\in\mathscr{D}_0'(L(E))$ $(\mathscr{G}\in\mathscr{D'}_0^*(L(E)))$ ограниченно равностепенно непрерывно. Проанализируем следующие условия для $\mathscr{G}$:

(d_1): $\mathscr{G}(\varphi*\psi)C=\mathscr{G}(\varphi)\mathscr{G}(\psi)$, $\varphi,\psi\in\mathscr{D}_0$ $(\varphi,\psi\in\mathscr{D}_0^*)$,

(d_2): то же, что и (C.S.2);

(d_3): $\mathscr{R}(\mathscr{G})$ плотно в E;

(d_4): для любого $x\in\mathscr{R}(\mathscr{G})$ существует функция $u_x\in C([0,\infty):E)$ такая, что $u_x(0)=Cx$ и $\mathscr{G}(\varphi)x=\int\limits_0^\infty\varphi(t)u_x(t)\,dt$, $\varphi\in\mathscr{D}$ $(\varphi\in\mathscr{D}^*)$;

(d_5): если (d_2) выполнено, то (d_5) означает, что $G(\varphi_+)C=\mathscr{G}(\varphi)$, $\varphi\in\mathscr{D}$ $(\varphi\in\mathscr{D}^*)$.

Используя те же рассуждения, что и в случае банаховых пространств (см. [10]), можем доказать следующую теорему.

Теорема 3.18. (i) *Предположим, что* $\mathscr{G}\in\mathscr{D}_0'(L(E))$ $(\mathscr{G}\in\mathscr{D'}_0^*(L(E)))$ *ограниченно равностепенно непрерывно и* $\mathscr{G}C=C\mathscr{G}$. *Распределение* $\mathscr{G}$ *является* (C-ПР) ((C-ПУР) $*$-*класса*) *тогда и только тогда, когда выполнены* (d_1), (d_2) *и* (d_5).

(ii) *Предположим, что* $\mathscr{G} \in \mathscr{D}'_0(L(E))$ $(\mathscr{G} \in \mathscr{D}'^*_0(L(E)))$ *удовлетворяет* (d_1)–(d_4) *и* $\mathscr{G}C = C\mathscr{G}$. *Если* $\mathscr{G}$ *ограниченно равностепенно непрерывно, то* $\mathscr{G}$ — (С-ПР) ((С-ПУР) $*$-*класса*).

(iii) *Пусть* $\mathscr{G}$ — (С-ПР) ((С-ПУР) $*$-*класса*). *Тогда* $\mathscr{G}$ *удовлетворяет* (d_4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lions J. L.* Semi-groupes distributions // Port. Math. 1960. V. 19. P. 141–164.
2. *Balabane M., Emami-Rad H.* Smooth distributions group and Schrödinger equation in $L^p(\mathbb{R}^n)$ // J. Math. Anal. Appl. 1979. V. 70. P. 61–71.
3. *Fattorini H. O.* The Cauchy problem. Cambridge: Addison-Wesley, 1983.
4. *Fujiwara D.* A characterisation of exponential distribution semigroups // J. Math. Soc. Japan. 1966. V. 18. P. 267–275.
5. *Larsson E.* Generalized distribution semi-groups of bounded linear operators // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa. 1967. V. 21. P. 137–159.
6. *Peetre J.* Sur la théorie des semi-groupes distributions // Seminaire sur les équations derivees partielles, Collége de France. 1963–1964. V. 2. P. 76–99.
7. *Da Prato G., Sinestrari E.* Differential operators with nondense domain // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 1987. V. 14, N 4. P. 285–344.
8. *Arendt W.* Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems // Israel J. Math. 1987. V. 59. P. 327–352.
9. *Davies E. B., Pang M. M.* The Cauchy problem and a generalization of the Hille–Yosida theorem // Proc. Lond. Math. Soc. 1987. V. 55. P. 181–208.
10. *Kostić M.* Generalized semigroups and cosine functions. Belgrade: Math. Inst. SANU, 2011.
11. *Kunstmann P. C.* Distribution semigroups and abstract Cauchy problems // Trans. Amer. Math. Soc. 1999. V. 351. P. 837–856.
12. *Wang S.* Quasi-distribution semigroups and integrated semigroups // J. Funct. Anal. 1997. V. 146. P. 352–381.
13. *Kostić M.* C-Distribution semigroups // Studia Math. 2008. V. 185. P. 201–217.
14. *Kisyński J.* Distribution semigroups and one parameter semigroups // Bull. Polish Acad. Sci. 2002. V. 50. P. 189–216.
15. *Kunstmann P. C., Mijatović M., Pilipović S.* Classes of distribution semigroups // Studia Math. 2008. V. 187. P. 37–58.
16. *Melnikova I. V., Filinkov A. I.* Abstract Cauchy problems: Three approaches. Boca Raton; London; New York; Washington: Chapman Hall/CRC, 2001.
17. *Melnikova I.* Properties of Lion's d-semigroups and generalized well-posedness of the Cauchy problem // Funct. Anal. Appl. 1997. V. 31, N 3. P. 167–175.
18. *Miana P. J.* Integrated groups and smooth distribution groups // Acta Math. Sin. (English Ser.) 2007. V. 23. P. 57–64.
19. *Beals R.* On the abstract Cauchy problem // J. Funct. Anal. 1972. V. 10. P. 281–299.
20. *Beals R.* Semigroups and abstract Gevrey spaces // J. Funct. Anal. 1972. V. 10. P. 300–308.
21. *Chazarain J.* Problémes de Cauchy abstraites et applicationsá quelques problémes mixtes // J. Funct. Anal. 1971. V. 7. P. 386–446.
22. *Ciorănescu I.* Beurling spaces of class (M_p) and ultradistribution semi-groups // Bull. Sci. Math. 1978. V. 102. P. 167–192.
23. *Emami-Rad H. A.* Les semi-groupes distributions de Beurling // C. R. Acad. Sci. Sér. A. 1973. V. 276. P. 117–119.
24. *Komatsu H.* Operational calculus and semi-groups of operators // Functional analysis and related topics (Kyoto). Berlin: Springer-Verl., 1991. P. 213–234.
25. *Костич М., Пилипович С., Велинов Д.* Структурные теоремы для ультрараспределений полугрупп // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 1. С. 100–110.
26. *Kunstmann P. C.* Banach space valued ultradistributions and applications to abstract Cauchy problems // http://math.kit.edu/iana1/kunstmann/media/ultra-appl.pdf.
27. *Shiraishi R., Hirata Y.* Convolution maps and semi-group distributions // J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I. 1964. V. 28. P. 71–88.
28. *Ushijima T.* On the abstract Cauchy problem and semi-groups of linear operators in locally convex spaces // Sci. Pap. Coll. Gen. Educ., Univ. Tokyo. 1971. V. 21. P. 93–122.
29. *Вувуникян Ю. М.* Асимптотическая резольвента и теоремы порождения полугрупп операторов в локально выпуклых пространствах // Мат. заметки. 1977. Т. 22, № 3. С. 433–442.

30. *De Laubenfels R.* Existence families, functional calculi and evolution equations. New York: Springer-Verl., 1994. (Lect. Notes Math.; V. 1570).

31. *Meise R., Vogt D.* Introduction to functional analysis (Translated from the German by M. S. Ramanujan and revised by the authors). New York: Clarendon Press, 1997. (Oxford Grad. Texts Math.).

32. *Arendt W., El-Mennaoui O., Keyantuo V.* Local integrated semigroups: evolution with jumps of regularity // J. Math. Anal. Appl. 1994. V. 186. P. 572–595.

33. *Arendt W., Batty C. J. K., Hieber M., Neubrander F.* Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Basel: Birkhäuser/Springer Basel AG, 2001. (Monogr. Math.; V. 96).

34. *Fattorini H. O.* Structural theorems for vector valued ultradistributions // J. Funct. Anal. 1980. V. 39. P. 381–407.

35. *Komatsu H.* Ultradistributions. I. Structure theorems and a characterization // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. 1973. V. 20. P. 25–105.

36. *Komatsu H.* Ultradistributions. III. Vector valued ultradistributions. The theory of kernels // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. 1982. V. 29. P. 653–718.

37. *Köthe G.* Topological vector spaces. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1969.

38. *Martinez C., Sanz M.* The theory of fractional powers of operators. Amsterdam: Elseiver, 2001. (North-Holland Math. Stud.; V. 187).

39. *Pilipović S.* Tempered ultradistributions // Boll. Un. Mat. Ital. 1988. V. 7. P. 235–251.

40. *Schwartz L.* Théorie des distributions 2 vols. Paris: Hermann, 1950; 1951.

41. *Kōmura T.* Semigroups of operators in locally convex spaces // J. Funct. Anal. 1968. V. 2. P. 258–296.

42. *Komatsu H.* Ultradistributions. II. The kernel theorem and ultradistributions with support in a manifold // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. 1977. V. 24. P. 607–628.

43. *Ōuchi S.* Semi-groups of operators in locally convex spaces // J. Math. Soc. Japan. 1973. V. 25. P. 265–276.

44. *Shaw S.-Y., Kuo C.-C.* Generation of local C-semigroups and solvability of the abstract Cauchy problems // Taiwanese J. Math. 2005. V. 9. P. 291–311.

45. *Tanaka N., Okazawa N.* Local C-semigroups and local integrated semigroups // Proc. Lond. Math. Soc. 1990. V. 61. P. 63–90.

46. *Wang S.* Hille–Yosida type theorems for local regularized semigroups and local integrated semigroups // Stud. Math. 2002. V. 151. P. 45-67.

47. *Kostić M.* Abstract Volterra integro-differential equations. Boca Raton; New York; London: Taylor and Francis Group/CRC Press/Sci. Publ., 2015.

Статья поступила 12 декабря 2015 г.

Marko Kostić (Костич Марко)
Faculty of Technical Sciences,
University of Novi Sad,
Trg D. Obradovića, 6, 21125 Novi Sad, Serbia
`marco.s@verat.net`

Stevan Pilipović (Пилипович Стеван)
Department for Mathematics and Informatics,
University of Novi Sad,
Trg D. Obradovića, 4, 21000 Novi Sad, Serbia
`pilipovic@dmi.uns.ac.rs`

Daniel Velinov (Велинов Даниел)
Department for Mathematics,
Faculty of Civil Engineering,
Ss. Cyril and Methodius University, Skopje,
Partizanski Odredi, 24, P.O. box 560, 1000 Skopje, Macedonia
`velinovd@gf.ukim.edu.mk`