Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2017. Том 58, № 3

УДК 512.8

ОБОБЩЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ВАДЫ И ГРУППЫ ВИРТУАЛЬНЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

Ю. А. Михальчишина

Аннотация. С использованием представления Вады классической группы кос строятся продолжения этих представлений на группы виртуальных кос и кос со спайками. С помощью полученных представлений строится группа виртуального зацепления и доказывается, что она является инвариантом зацепления. Приводятся примеры вычисления групп торических (виртуальных) зацеплений.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.313

Ключевые слова: группы виртуальных узлов, представления Вады, инварианты виртуальных узлов.

Введение

Группа кос на n нитях B_n, $n \geq 2$, является классическим объектом исследования как в комбинаторной теории групп, так и в маломерной топологии. В частности, основная проблема теории узлов сводится при помощи теорем Александера и Маркова [1] к некоторым проблемам для групп кос. Результаты более чем столетних исследований по теории кос можно найти в монографиях [1–3].

Многие авторы изучают различные обобщения классической теории узлов. Одним из таких обобщений является теория виртуальных узлов, введенная Кауффманом [4]. Также Кауффман определил группу виртуальных кос, которая играет ту же роль в теории виртуальных узлов, что и классическая группа кос в теории узлов. Для виртуальных узлов и зацеплений доказаны аналоги теорем Александера и Маркова [4–6].

Одним из наиболее сильных инвариантов классического зацепления является его группа (фундаментальная группа дополнения зацепления в 3-мерной сфере). Для нахождения группы классического зацепления используется представление Артина группы кос B_n в группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_n)$ свободной группы F_n ранга n. Существует несколько подходов к определению группы виртуальных узлов и зацеплений (см. [4, 6–10]). В [9] было построено продолжение представления Артина на группу виртуальных кос VB_n. С использованием этого продолжения были определены группы виртуальных зацеплений.

Вада [11] построил несколько семейств представлений B_n в группу $\mathrm{Aut}(F_n)$ и определил некоторые группы классических зацеплений. С помощью представления Вады в [12] строятся линейные локальные представления B_n.

В настоящей работе строятся продолжения представлений Вады на группы виртуальных кос и кос со спайками (§ 2). В § 3 дается определение группы виртуального зацепления. При этом используются два подхода: косовый и диаграммный. Доказывается эквивалентность этих двух подходов и показывается, что построенная группа является инвариантом виртуального зацепления. В оставшейся части работы приводятся примеры вычисления групп классических (§ 4) и виртуальных зацеплений (§ 5).

§ 1. Вспомогательные утверждения

Группа кос. Группа кос впервые была введена Артином [1]. Напомним, что группа кос B_n, $n \geq 2$, на n нитях задается порождающими элементами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ и определяющими соотношениями

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-2, \tag{1}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{при } |i-j| \geq 2. \tag{2}$$

Существует гомоморфизм группы B_n на группу подстановок S_n, переводящий порождающий σ_i в транспозицию $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Ядро этого гомоморфизма называется *группой крашеных кос* и обозначается символом P_n. Группа P_n порождается элементами $a_{ij}, 1 \leq i < j \leq n$, которые выражаются через порождающие группы B_n следующим образом:

$$a_{ii+1} = \sigma_i^2 \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{3}$$

$$a_{ij} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \ldots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \ldots \sigma_j^{-1} \sigma_{j-1}^{-1} \quad \text{при } 1 \leq i < j-1 \leq n-1. \tag{4}$$

Группа виртуальных кос и кос со спайками. Группа виртуальных кос VB_n введена в работе Кауффмана [4], там же выписана ее система порождающих и определяющих соотношений. В работе В. В. Вершинина [13] построена более компактная система соотношений (приведенная ниже). Группа VB_n равна $\langle B_n, S_n \rangle$, где $B_n = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \rangle$ — классическая группа кос, $S_n = \langle \rho_1, \ldots, \rho_{n-1} \rangle$ — группа подстановок.

Порождающие σ_i, $i = 1, \ldots, n-1$, группы кос B_n удовлетворяют соотношениям (1), (2), а порождающие ρ_i, $i = 1, \ldots, n-1$, группы подстановок S_n — следующим соотношениям:

$$\rho_i^2 = 1 \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{5}$$

$$\rho_i \rho_j = \rho_j \rho_i \quad \text{при } |i-j| \geq 2, \tag{6}$$

$$\rho_i \rho_{i+1} \rho_i = \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-2. \tag{7}$$

Остальные определяющие соотношения являются смешанными и имеют вид

$$\sigma_i \rho_j = \rho_j \sigma_i \quad \text{при } |i-j| \geq 2, \tag{8}$$

$$\rho_i \rho_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-2. \tag{9}$$

Отметим, что последнее соотношение равносильно такому:

$$\rho_{i+1} \rho_i \sigma_{i+1} = \sigma_i \rho_{i+1} \rho_i \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-2. \tag{10}$$

Как замечено в [14], в группе VB_n не обязаны выполняться соотношения
$\mathscr{F}_1$: $\rho_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \rho_{i+1}$ при $i = 1, 2, \ldots, n-2$,
$\mathscr{F}_2$: $\rho_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} = \sigma_i \sigma_{i+1} \rho_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n-2$.
Они называются *запрещенными соотношениями*.

В [15] введена группа кос со спайками WB_n, которая порождается элементами σ_i, α_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Группа, порожденная элементами σ_i, является классической группой кос B_n, группа, порожденная элементами α_i, — группой подстановок S_n, при этом выполняются смешанные соотношения

$$\alpha_i \sigma_j = \sigma_j \alpha_i \quad \text{при } |i-j| \geq 2, \tag{11}$$

$$\alpha_i \alpha_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \alpha_i \alpha_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-2, \tag{12}$$

$$\alpha_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \alpha_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-2. \tag{13}$$

Сравнивая соотношения групп VB_n и WB_n, видим, что WB_n получается из VB_n введением дополнительного соотношения (13). Следовательно, существует гомоморфизм

$$\varphi_{VW} : VB_n \longrightarrow WB_n,$$

переводящий σ_i в σ_i и ρ_i в α_i при всех i. Таким образом, WB_n является гомоморфным образом группы VB_n.

Представления Вады. В [11] построены семь типов локальных представлений группы кос B_n в группу $\mathrm{Aut}(F_n)$. Напомним, что представление является *локальным*, если образ σ_i, $i = 1, \ldots, n-1$, действует нетривиально на паре соседних порождающих x_i, x_{i+1}, при этом образ элемента x_i является словом $u(x_i, x_{i+1})$, а образ элемента x_{i+1} — словом $v(x_i, x_{i+1})$, где u, v — приведенные слова в группе, порожденной x_i и x_{i+1}. Из этих семи типов четыре точные (см. [16–18]). Вада высказал предположение, что описаны все возможные локальные представления группы кос B_n в группу $\mathrm{Aut}(F_n)$. Это предположение доказал Ито [19]. Из четырех точных представлений два сопряженные. Таким образом, мы рассматриваем только три типа представлений Вады.

Напомним определение этих представлений.

1. Представление w_1^r, $r \in \mathbb{Z}$, $r \neq 0$, определяется формулой

$$w_1^r(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \longmapsto x_i^r x_{i+1} x_i^{-r}, \\ x_{i+1} \longmapsto x_i. \end{cases}$$

Здесь и далее указываем только нетривиальное действие на порождающих, подразумевая, что остальные порождающие остаются на месте. Отметим, что при $r = 1$ это представление Артина. Для краткости будем обозначать w_1^r просто через w_1.

2. Представление w_2 определяется формулой

$$w_2(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \longmapsto x_i x_{i+1}^{-1} x_i, \\ x_{i+1} \longmapsto x_i. \end{cases}$$

3. Представление w_3 определяется формулой

$$w_3(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \longmapsto x_i^2 x_{i+1}, \\ x_{i+1} \longmapsto x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} x_{i+1}. \end{cases}$$

Эти три типа представлений Вада использовал для построения инвариантов зацеплений.

Крисп и Парис доказали [20], что представления w_2 и w_3 эквивалентные. Более точно, существует автоморфизм $\chi : F_n \longrightarrow F_n$ такой, что

$$\chi \circ w_3(\sigma_i) \circ \chi^{-1} = w_2(\mu(\sigma_i)), \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

где $\mu : B_n \longrightarrow B_n$ — инволюция, посылающая σ_i в σ_i^{-1}.

Представление w_1^r и соответствующие ему группы изучались в работах Вады [11], Нельсона, Лина и Ньюмена [21, 22]. Нельсон и Ньюмен доказали, что группа, построенная по представлению w_1^2, определяет узлы с точностью до зеркального образа.

Продолжение представления Артина. Представление группы виртуальных кос $VB_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(F_{n+1})$ в группу автоморфизмов свободной группы $F_{n+1} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n, y\rangle$ ранга $n+1$ рассматривалось независимо в [6, 8, 23]:

$$\varphi_A(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \longmapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1}, \\ x_{i+1} \longmapsto x_i, \end{cases} \qquad \varphi_A(\rho_i) : \begin{cases} x_i \longmapsto x_{i+1}^{y^{-1}}, \\ x_{i+1} \longmapsto x_i^{y}, \end{cases}$$

где $a^b = b^{-1}ab$. Оно является продолжением представления Артина $\varphi_A : B_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(F_n)$ (см. [1]).

Преобразования Титце. Пусть G имеет следующее представление в виде системы порождающих и определяющих соотношений:

$$G = \langle x_1, \dots, x_n \parallel r_1 = 1, \dots, r_t = 1\rangle.$$

Теорема Титце [2, гл. IV] утверждает, что одно представление данной группы G может быть преобразовано в любое другое представление группы G применением конечной последовательности операций следующих типов и обратных к ним, называемых *преобразованиями Титце*.

(I) Добавление соотношения $r = 1$, являющегося следствием соотношений $r_1 = 1, \dots, r_t = 1$, к множеству соотношений. В итоге получается представление

$$\langle x_1, \dots, x_n \parallel r_1 = 1, \dots, r_t = 1,\ r = 1\rangle.$$

(II) Добавление нового порождающего x и нового соотношения $xw^{-1} = 1$, где w — это любое слово в алфавите $x_1, \dots, x_n$. Таким образом получается представление

$$\langle x_1, \dots, x_n, x \parallel r_1 = 1, \dots, r_t = 1,\ xw^{-1} = 1\rangle.$$

§ 2. Представления группы виртуальных кос и группы кос со спайками

Построим отображения $W_l : VB_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(F_{n+1})$, $l = 1, 2, 3$, являющиеся продолжением представлений Вады w_l, т. е. $W_l(\sigma_k) = w_l(\sigma_k)$, $k = 1, \dots, n-1$.

Для этого зададим действие W_l на порождающем ρ_k, $k = 1, \dots, n-1$, следующим образом:

$$W_l(\rho_k) : \begin{cases} x_k \longmapsto y x_{k+1} y^{-1}, \\ x_{k+1} \longmapsto y^{-1} x_k y. \end{cases}$$

Вопрос. *Являются ли построенные таким образом продолжения представлений Вады w_l, $l = 1, 2, 3$, представлениями группы виртуальных кос VB_n?*

Предложение 1. *Отображения W_l, $l = 1, 2, 3$, продолженные на VB_n, суть представления VB_n в $\mathrm{Aut}(F_{n+1})$ свободной группы $F_{n+1} = \langle x_1, \dots, x_n, y\rangle$.*

Доказательство. Для того чтобы отображения W_l, $l = 1, 2, 3$, являлись представлениями группы виртуальных кос, нужно проверить, что при отображениях W_l соотношения VB_n переходят в соотношения.

Соотношения (1), (2) выполняются, так как $W_l|_{B_n} = w_l$, а w_l является представлением группы B_n, $l = 1, 2, 3$. Утверждение о том, что соотношения (5)–(7) выполняются, доказано ранее в [23]. Соотношение (8) выполняется в силу локальности. Остается проверить выполнение соотношения (9), т. е.

$$W_l(\rho_k\rho_{k+1}\sigma_k) = W_l(\sigma_{k+1}\rho_k\rho_{k+1}) \quad \text{при } k = 1, 2, \dots, n-2,\ l = 1, 2, 3.$$

Для W_1 вычисляем левую часть соотношения (здесь и далее действие будет слева направо):

$$W_1(\rho_k\rho_{k+1}\sigma_k) : \begin{cases} x_k \xrightarrow{\rho_k} yx_{k+1}y^{-1} \xrightarrow{\rho_{k+1}} y^2x_{k+2}y^{-2} \xrightarrow{\sigma_k} y^2x_{k+2}y^{-2}, \\ x_{k+1} \xrightarrow{\rho_k} y^{-1}x_ky \xrightarrow{\rho_{k+1}} y^{-1}x_ky \xrightarrow{\sigma_k} y^{-1}x_k^rx_{k+1}x_k^{-r}y, \\ x_{k+2} \xrightarrow{\rho_k} x_{k+2} \xrightarrow{\rho_{k+1}} y^{-1}x_{k+1}y \xrightarrow{\sigma_k} y^{-1}x_ky, \\ y \xrightarrow{\rho_k} \rho_{k+1}\sigma_k y. \end{cases}$$

Вычисляем правую часть соотношения:

$$W_1(\sigma_{k+1}\rho_k\rho_{k+1}) : \begin{cases} x_k \xrightarrow{\sigma_{k+1}} x_k \xrightarrow{\rho_k} yx_{k+1}y^{-1} \xrightarrow{\rho_{k+1}} y^2x_{k+2}y^{-2}, \\ x_{k+1} \xrightarrow{\sigma_{k+1}} x_{k+1}^rx_{k+2}x_{k+1}^{-r} \xrightarrow{\rho_k} y^{-1}x_k^ryx_{k+2}y^{-1}x_k^{-r}y \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \xrightarrow{\rho_{k+1}} y^{-1}x_k^rx_{k+1}x_k^{-r}y, \\ x_{k+2} \xrightarrow{\sigma_{k+1}} x_{k+1} \xrightarrow{\rho_k} y^{-1}x_ky \xrightarrow{\rho_{k+1}} y^{-1}x_ky, \\ y \xrightarrow{\sigma_{k+1}\rho_k\rho_{k+1}} y. \end{cases}$$

Видим, что смешанное соотношение (9) группы виртуальных кос выполняется. Значит, W_1 является представлением VB_n.

Представления W_2 и W_3 рассматриваются аналогично. □

Подобно случаю группы виртуальных кос строим отображения $\widetilde{W}_l$, $l = 1, 2, 3$, группы кос со спайками WB_n, являющиеся продолжениями представлений Вады w_l, т. е. $\widetilde{W}_l(\sigma_k) = w_l(\sigma_k)$, $k = 1, \dots, n-1$.

Задаем действие $\widetilde{W}_l$ на порождающем α_k, $k = 1, \dots, n-1$, следующим образом:

$$\widetilde{W}_l(\alpha_k) : \begin{cases} x_k \longmapsto x_{k+1}, \\ x_{k+1} \longmapsto x_k. \end{cases}$$

Вопрос. *Являются ли построенные таким образом отображения представлениями группы кос со спайками WB_n в группу $\mathrm{Aut}(F_n)$?*

Предложение 2. *Отображения $\widetilde{W}_1$ и $\widetilde{W}_2$, продолженные на WB_n, являются представлениями WB_n в $\mathrm{Aut}(F_n)$.*

Доказательство. Для того чтобы отображения $\widetilde{W}_l$, $l = 1, 2, 3$, являлись представлениями группы кос со спайками, нужно, чтобы выполнялись все соотношения WB_n. Как упоминали ранее, WB_n получается из VB_n введением дополнительного соотношения (13). Для $\widetilde{W}_1$ и $\widetilde{W}_2$ простым вычислением проверяется выполнение соотношения (13), которое совпадает с $\mathscr{F}_1$. □

Предложение 3. *Отображение*

$$\widetilde{W}_3 : WB_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(F_n)$$

является представлением группы кос со спайками при условиях

$$x_k^2 = 1, \quad [x_{k+1}, x_{k+2}] = 1, \quad k = 1, \dots, n-2.$$

Доказательство. Вычисляем левую часть равенства (13) под действием $\widetilde{W}_3$:

$$\widetilde{W}_3(\alpha_k\sigma_{k+1}\sigma_k) : \begin{cases} x_k \xrightarrow{\alpha_k} x_{k+1} \xrightarrow{\sigma_{k+1}} x_{k+1}^2 x_{k+2} \xrightarrow{\sigma_k} x_{k+1}^{-1} x_k^{-2} x_{k+1} x_{k+2}, \\ x_{k+1} \xrightarrow{\alpha_k} x_k \xrightarrow{\sigma_{k+1}} x_k \xrightarrow{\sigma_k} x_k^2 x_{k+1}, \\ x_{k+2} \xrightarrow{\alpha_k} x_{k+2} \xrightarrow{\sigma_{k+1}} x_{k+2}^{-1} x_{k+1}^{-1} x_{k+2} \xrightarrow{\sigma_k} x_{k+2}^{-1} x_{k+1}^{-1} x_k x_{k+1} x_{k+2}. \end{cases}$$

Вычисляем правую часть равенства:

$$\widetilde{W}_3(\sigma_{k+1}\sigma_k\alpha_{k+1}) : \begin{cases} x_k \xrightarrow{\sigma_{k+1}} x_k \xrightarrow{\sigma_k} x_k^2 x_{k+1} \xrightarrow{\alpha_{k+1}} x_k^2 x_{k+2}, \\ x_{k+1} \xrightarrow{\sigma_{k+1}} x_{k+1}^2 x_{k+2} \xrightarrow{\sigma_k} x_{k+1}^{-1} x_k^{-2} x_{k+1} x_{k+2} \\ \qquad \xrightarrow{\alpha_{k+1}} x_{k+2}^{-1} x_k^{-2} x_{k+2} x_{k+1}, \\ x_{k+2} \xrightarrow{\sigma_{k+1}} x_{k+2}^{-1} x_{k+1}^{-1} x_{k+2} \xrightarrow{\sigma_k} x_{k+2}^{-1} x_{k+1}^{-1} x_k x_{k+1} x_{k+2} \\ \qquad \xrightarrow{\alpha_{k+1}} x_{k+1}^{-1} x_{k+2}^{-1} x_k x_{k+2} x_{k+1}. \end{cases}$$

Видим, что смешанное соотношение (13) группы кос со спайками выполняется при условиях $x_k^2 = 1$, $[x_{k+1}, x_{k+2}] = 1$, $k = 1, \dots, n-2$. $\square$

Замечание 1. Соотношение $\mathscr{F}_2$ не выполняется для $\widetilde{W}_l$, $l = 1, 2, 3$.

Используя результат Чтеренталя [24], который установил, что представление φ_A группы VB_n не точное при $n \geq 4$, можно показать, что и представления W_1 и W_2 также не точные при $n \geq 4$.

Предложение 4. *Элемент* $\beta = \left(\sigma_2^{-1}\rho_1\sigma_2\rho_3\right)^3 \in VP_4$ *лежит в ядре представлений* W_1 *и* W_2 *и не лежит в ядре представления* W_3.

Доказательство. Непосредственной проверкой находим, что $W_1(\beta) = 1$ и $W_2(\beta) = 1$.

Обозначим $\alpha = \sigma_2^{-1}\rho_1\sigma_2\rho_3$. Тогда $\beta = \alpha^3$. Для проверки последней части предложения находим автоморфизм $W_3(\alpha)$. Имеем

$$W_3(\alpha) : \begin{cases} x_1 \longmapsto \left(x_2^2 x_4^{y^{-1}}\right)^{y^{-1}}, \\ x_2 \longmapsto x_2^{x_4^{y^{-1}} x_1^{-y}}, \\ x_3 \longmapsto x_1^y x_4^{-y^{-1}} x_2^{-2} x_4^{y^{-1}}, \\ x_4 \longmapsto x_4. \end{cases}$$

Находим

$$W_3(\beta) : \begin{cases} x_1 \longmapsto \left(x_2^2\right)^{x_4^{y^{-1}} x_1^{-y} x_2^{-2} y^{-1}} x_4^{y^{-2}}, \\ x_2 \longmapsto \left(x_2^2\right)^{x_4^{y^{-1}} x_1^{-y}} \left(x_2\right)^{x_4^{y^{-1}} x_1^{-y} x_2^{-2}} \left(x_2^{-2}\right)^{x_4^{y^{-1}} x_1^{-y}}, \\ x_3 \longmapsto \left(x_2^2\right)^{x_4^{y^{-1}} x_1^{-y}} \left(x_2^{-2}\right)^{x_4^{y^{-1}} x_1^{-y} x_2^{-2}} x_4^{y^{-1}}, \\ x_4 \longmapsto x_4, \end{cases}$$

т. е. $W_3(\beta) \neq 1$. $\square$

Тем не менее остаются открытыми следующие

Вопросы. *Будут ли представления* $W_1, W_2 : VB_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(F_{n+1})$ *точными при* $n = 3$? *Будет ли представление* W_3 *точным при* $n \geq 3$?

§ 3. Группы виртуальных зацеплений

Диаграммой виртуального узла (*зацепления*) называется регулярная проекция узла (зацепления) на плоскость, в которой каждая двойная точка снабжена дополнительной информацией: является ли эта двойная точка классическим перекрестком или виртуальным [4] (рис. 1). *Виртуальный узел* — это класс эквивалентности диаграмм по обобщенным преобразованиям Райдемайстера (рис. 2). Основная проблема теории виртуальных узлов — классификация виртуальных узлов.

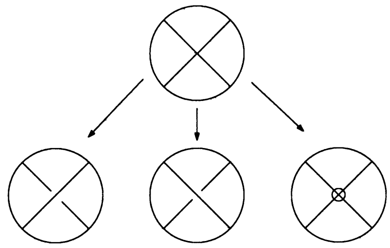

Рис. 1. Двойная точка виртуального узла

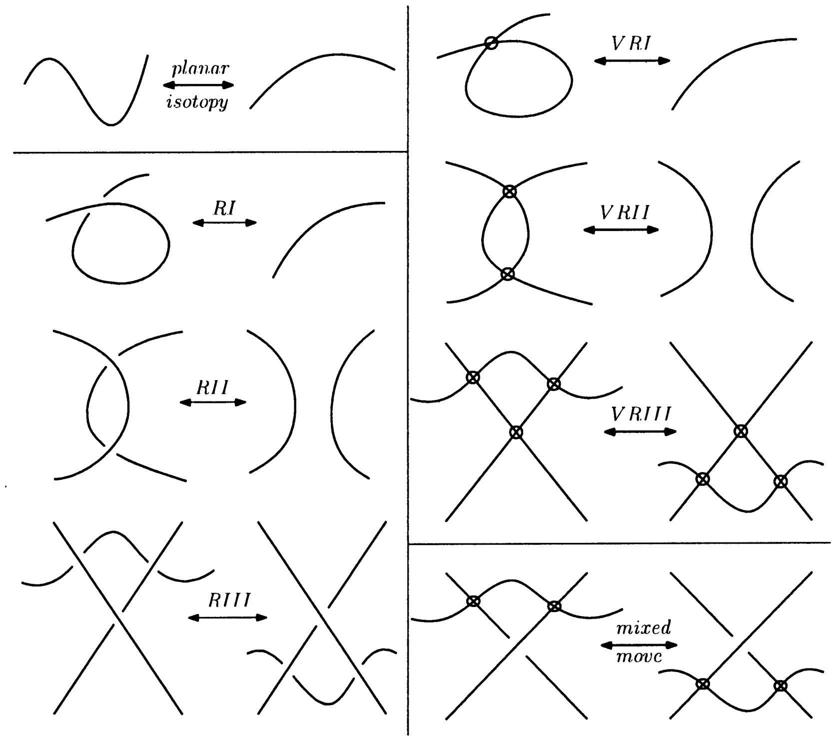

Рис. 2. Обобщенные преобразования Райдемайстера

Связь между виртуальными зацеплениями и виртуальными косами полностью задается аналогами теорем Александера и Маркова [5, 6, 25]. Аналог теоремы Александера утверждает, что любое виртуальное зацепление можно представить в виде замыкания виртуальной косы. Напомним, что операция *замыкания*, обозначающаяся символом $\widehat{\ }$, соединяет соответствующие начала и концы нитей косы (рис. 3). Таким образом, получается зацепление $\hat{\beta}$, соответствующее косе β.

Для нахождения представления группы зацепления можно использовать два подхода. Первый, подход Виртингера, состоит в том, что строим диаграмму зацепления и по ней находим порождающие и соотношения группы зацепления. Второй подход основан на представлении зацепления в виде замкнутой косы и представлении группы кос в группу автоморфизмов некоторой группы. Оба эти подхода описаны в [1] для классических зацеплений и в [7] для виртуальных зацеплений. В частности, для всякой виртуальной косы β, используя представления W_1, W_2 и W_3, можно определить группы G_1, G_2 и G_3 соответственно. При этом если хотим построить инвариант зацепления, надо доказывать, что соответствующая группа зависит только от зацепления $\hat{\beta}$.

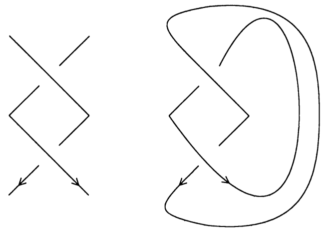

Рис. 3. Замыкание косы σ^2

Группа классического зацепления. Напомним: если L — классическое зацепление в $\mathbb{S}^3$, то его группой $G(L)$ называется фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus L)$ дополнения L в $\mathbb{S}^3$ [2]. Каждой компоненте связности диаграммы сопоставляется порождающий, а каждому классическому перекрестку сопоставляется следующее соотношение: $c = aba^{-1}$ для положительного перекрестка (рис. 4 слева) и $c = b^{-1}ab$ для отрицательного перекрестка (рис. 4 справа).

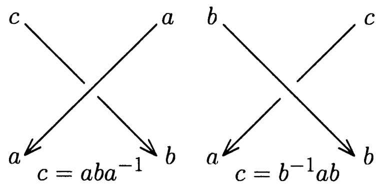

Рис. 4. Соотношения в классических перекрестках

Косовый подход. Опишем общий подход, позволяющий по представлению группы виртуальных кос автоморфизмами некоторой группы строить инварианты зацеплений. Предположим, что у нас есть представление $\varphi : VB_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$ группы виртуальных кос в группу автоморфизмов некоторой группы $H = \langle h_1, h_2, \dots, h_m \parallel \mathscr{R} \rangle$, где $\mathscr{R}$ — соотношения группы H и $L = \hat{\beta}$ — виртуальное зацепление. Сопоставим виртуальной косе $\beta \in VB_n$ следующую группу:

$$G^v_\varphi(\beta) = \langle h_1, h_2, \dots, h_m \parallel \mathscr{R}, h_i = \varphi(\beta)(h_i),\ i = 1, 2, \dots, m \rangle.$$

Группа G^v_φ будет инвариантом виртуального зацепления L, если доказать, что для любой другой косы β' такой, что зацепления $\hat{\beta}$ и $\hat{\beta}'$ эквивалентны, группа $G^v_\varphi(\beta)$ изоморфна группе $G^v_\varphi(\beta')$.

Используем этот подход для представлений W_l, $l = 1, 2, 3$. Пусть $\beta \in VB_n$ для некоторого n. Тогда *группой косы* β назовем следующую группу:

$$G^v_l(\beta) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n, y \parallel x_i = W_l(\beta)(x_i),\ i = 1, 2, \dots, n \rangle.$$

Покажем, что определенная таким образом группа будет инвариантом виртуального зацепления $\hat{\beta}$. Более точно, справедлива

Теорема 1. *Пусть $\beta \in VB_n$ и $\beta' \in VB_m$ — две виртуальные косы, замыкания которых определяют одно и то же виртуальное зацепление L. Тогда*

$G_l^v(\beta) \cong G_l^v(\beta')$, $l = 1, 2, 3$, т. е. группа $G_l^v(\beta)$ является инвариантом виртуального зацепления L.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 в [26]. $\square$

Диаграммный подход. Пусть D_L — диаграмма виртуального зацепления L. Каждой дуге диаграммы от одного перекрестка до другого (классического или виртуального) сопоставим свой порождающий. Получим некоторое множество порождающих $a, b, c, \ldots$. Для представлений W_1 и W_2 дуге, проходящей сверху в классическом перекрестке, сопоставляется один порождающий, для представления W_3 в этом случае сопоставляются два порождающих.

Группой диаграммы D_L назовем группу, порожденную элементами a, b, c, $\ldots, y$ и определяемую следующей системой соотношений. Дополнительный элемент y вводится для виртуальных перекрестков. Для представления W_1 положительному перекрестку соответствует соотношение $c = a^r b a^{-r}$ (рис. 5 слева), отрицательному перекрестку — соотношение $c = b^{-r} a b^r$ (рис. 5 справа), виртуальному перекрестку — пара соотношений $c = b^{y^{-1}}$ и $d = a^y$ (рис. 6).

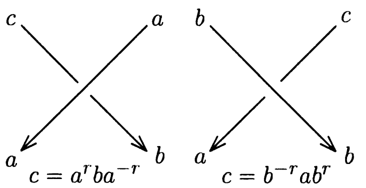

Рис. 5. Соотношения в классических перекрестках группы $G_1^v(D_L)$

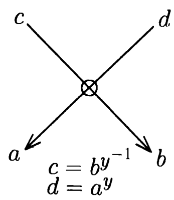

Рис. 6. Соотношения в виртуальном перекрестке группы $G_1^v(D_L)$

Для представления W_2 положительному перекрестку соответствует соотношение $c = ab^{-1}a$ (рис. 7 слева), отрицательному — соотношение $c = ba^{-1}b$ (рис. 7 справа), виртуальному — та же пара соотношений, что и для представления W_1.

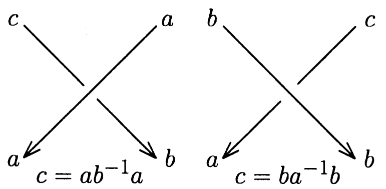

Рис. 7. Соотношения в классических перекрестках группы $G_2^v(D_L)$

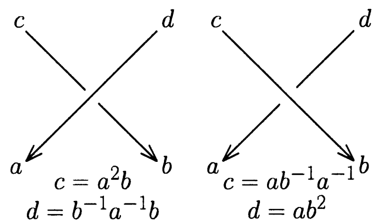

Рис. 8. Соотношения в классических перекрестках группы $G_3^v(D_L)$

Для представления W_3 перекрестку каждого типа соответствует пара соотношений: $c = a^2 b$ и $d = b^{-1}a^{-1}b$ в случае положительного перекрестка (рис. 8 слева) и $c = ab^{-1}a^{-1}$ и $d = ab^2$ в случае отрицательного перекрестка (рис. 8 справа). Виртуальному перекрестку соответствует та же пара соотношений, что и для представления W_1.

Определенные таким образом группы являются инвариантами зацепления L, т. е. справедлива

Теорема 2. *Если D_L и D'_L — две диаграммы, отвечающие виртуальному зацеплению L, то $G_l^v(D_L)$ и $G_l^v(D'_L)$ изоморфны, $l = 1, 2, 3$.*

Доказательство следует из теоремы 1 и предложения 5. $\square$

Предложение 5. *Пусть L — виртуальное зацепление, D_L — его диаграмма и β — виртуальная коса такая, что ее замыкание $\hat{\beta}$ эквивалентно L. Тогда группа $G_l^v(D_L)$ изоморфна группе $G_l^v(\beta)$, $l = 1, 2, 3$.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 1 в [26]. $\square$

§ 4. Примеры вычисления групп классических зацеплений

В этом параграфе рассматриваем только представления w_1 и w_2, так как w_3 эквивалентно w_2. Символом $G_l(L)$ будем обозначать группу зацепления L, построенную по представлению w_l, $l = 1, 2$.

Для начала установим связь группы узла (зацепления) с группой зеркального образа этого узла. Напомним, что в диаграмме зеркального образа узла все положительные перекрестки исходного узла становятся отрицательными, и наоборот (см. ниже рис. 11). Для зеркального образа узла (зацепления) справедливо

Предложение 6. *Пусть $\hat{\beta}$ — узел (зацепление), а $\widehat{\beta^{-1}}$ — его зеркальный образ. Тогда $G_l(\beta^{-1}) = G_l(\beta)$, $l = 1, 2$. Это означает, что группы G_l не отличают узел (зацепление) от его зеркального образа.*

Доказательство. По определению группа $G_l(\beta)$, $l = 1, 2$, $\beta \in B_n$, равна

$$G_l(\beta) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n, y \parallel w_l(\beta)(x_i) = x_i,\ i = 1, 2, \dots, n\rangle.$$

Соотношение $w_l(\beta)(x_i) = x_i$, $i = 1, \dots, n$, равносильно $x_i = w_l^{-1}(\beta)(x_i)$, что эквивалентно следующему:

$$x_i = w_l(\beta^{-1})(x_i).$$

Таким образом, получается соотношение группы $G_l(\beta^{-1})$. $\square$

Зацепления, полученные замыканием 2-нитиевых кос, называются 2-*нитиевыми торическими зацеплениями*. Сформулируем общий результат для таких зацеплений $\widehat{\sigma_1^k}$, $\sigma_1^k \in B_2$, где $k \in \mathbb{N}$, и как частные случаи найдем группы тривиального узла, зацепления Хопфа и трилистника. Для представления w_1 справедливо

Предложение 7. *Группа $G_1(\sigma_1^k)$, где $\widehat{\sigma_1^k}$ — 2-нитиевое торическое зацепление, $\sigma_1^k \in B_2$, $k \in \mathbb{N}$, имеет следующий вид:*

$$G_1(\sigma_1^k) = \Big\langle x_1, x_2 \parallel x_1 \underbrace{x_2^r x_1^r x_2^r \dots x_2^r}_{k-1} = \underbrace{x_2^r x_1^r x_2^r \dots x_2^r}_{k-1} x_1,\ x_2 \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_1^r}_{k-1} = \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_1^r}_{k-1} x_2 \Big\rangle,$$

если k четное, и вид

$$G_1(\sigma_1^k) = \Big\langle x_1, x_2 \parallel x_1 \underbrace{x_2^r x_1^r x_2^r \dots x_1^r}_{k-1} = \underbrace{x_2^r x_1^r x_2^r \dots x_1^r}_{k-1} x_2,\ x_2 \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_2^r}_{k-1} = \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r \dots x_2^r}_{k-1} x_1 \Big\rangle,$$

если k нечетное.

Доказательство. Пусть $k=1$. Автоморфизм $w_1(\sigma_1)$ имеет вид

$$w_1(\sigma_1):\begin{cases} x_1 \longmapsto x_1^r x_2 x_1^{-r},\\ x_2 \longmapsto x_1.\end{cases}$$

Тогда

$$G_1(\sigma_1)=\bigl\langle x_1,x_2 \parallel x_1=x_1^r x_2 x_1^{-r},\ x_2=x_1\bigr\rangle=\langle x_1\rangle\cong\mathbb{Z}.$$

Пусть k нечетное, т. е. $k=2m-1, m\in\mathbb{N}$. Нетрудно заметить, что

$$w_1\bigl(\sigma_1^{2m-1}\bigr):\begin{cases} x_1 \longmapsto \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r\dots x_1^r}_{2m-1}\,x_2\,\underbrace{x_1^{-r}x_2^{-r}x_1^{-r}\dots x_1^{-r}}_{2m-1},\\ x_2 \longmapsto \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r\dots x_1^r}_{2m-2}\,x_2\,\underbrace{x_1^{-r}x_2^{-r}x_1^{-r}\dots x_1^{-r}}_{2m-2}.\end{cases}$$

Действуя на порождающий x_1 автоморфизмом $w_1\bigl(\sigma_1^{2m}\bigr)$, имеем

$$\begin{aligned} x_1 &\overset{w_1(\sigma_1^{2m-1})}{\longrightarrow} \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r\dots x_1^r}_{2m-1}\,x_2\,\underbrace{x_1^{-r}x_2^{-r}x_1^{-r}\dots x_1^{-r}}_{2m-1}\\ &\overset{w_1(\sigma_1)}{\longrightarrow} x_1^r x_2^r x_1^{-r} x_1^r x_1^r \dots x_1^{-r} x_1 x_1^r x_2^{-r} x_1^{-r} x_1^{-r} x_1^r\dots x_1^{-r}\\ &= \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r\dots x_1^r}_{2m}\,x_2\,\underbrace{x_1^{-r}x_2^{-r}x_1^{-r}\dots x_1^{-r}}_{2m}.\end{aligned}$$

Действуя на порождающий x_2 автоморфизмом $w_1(\sigma_1^{2m})$, получаем

$$\begin{aligned} x_2 &\overset{w_1(\sigma_1^{2m-1})}{\longrightarrow} \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r\dots x_1^r}_{2m-2}\,x_2\,\underbrace{x_1^{-r}x_2^{-r}x_1^{-r}\dots x_1^{-r}}_{2m-2}\\ &\overset{w_1(\sigma_1)}{\longrightarrow} x_1^r x_2^r x_1^{-r} x_1^r x_1^r \dots x_1^{-r} x_1 x_1^r x_2^{-r} x_1^{-r} x_1^{-r} x_1^r\dots x_1^{-r}\\ &= \underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r\dots x_1^r}_{2m-1}\,x_2\,\underbrace{x_1^{-r}x_2^{-r}x_1^{-r}\dots x_1^{-r}}_{2m-1}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} G_1\bigl(\sigma_1^{2m}\bigr)=\bigl\langle x_1,x_2 \parallel x_1\,&\underbrace{x_2^r x_1^r x_2^r\dots x_2^r}_{2m-1}\\ &=\underbrace{x_2^r x_1^r x_2^r\dots x_2^r}_{2m-1}\,x_1,\ \ x_2\,\underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r\dots x_1^r}_{2m-1}=\underbrace{x_1^r x_2^r x_1^r\dots x_1^r}_{2m-1}\,x_2\bigr\rangle.\end{aligned}$$

Для нечетного k доказывается аналогично. $\square$

Отсюда легко вытекает

Следствие. *Пусть $k\in\mathbb{Z}$. Тогда для всякого зацепления $\widehat{\sigma_k}$ фактор-группа группы $G_1\bigl(\sigma_1^k\bigr)$ по коммутанту равна*

$$G_1\bigl(\sigma_1^k\bigr)/\bigl(G_1\bigl(\sigma_1^k\bigr)\bigr)'=\begin{cases}\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \text{при } k=2m,\\ \mathbb{Z} & \text{при } k=2m-1,\end{cases}$$

где $m\in\mathbb{N}$.

Группы, построенные по представлению w_2 для 2-нитиевого торического зацепления, будут иметь кручение. А именно, верно

Предложение 8. *Группа* $G_2(\sigma_1^k)$, *где* $\widehat{\sigma_1^k}$ *— 2-нитиевое торическое зацепление,* $\sigma_1^k \in B_2$, $k \in \mathbb{N}$, *имеет следующий вид:*

$$G_2(\sigma_1^k) = \langle x_1, t \parallel t^k = 1\rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_k.$$

Доказательство. Пусть $k = 1$. Автоморфизм $w_2(\sigma_1)$ имеет вид

$$w_1(\sigma_1) : \begin{cases} x_1 \longmapsto x_1 x_2^{-1} x_1, \\ x_2 \longmapsto x_1. \end{cases}$$

Тогда

$$G_1(\sigma_1) = \left\langle x_1, x_2 \parallel x_1 = x_1 x_2^{-1} x_1,\ x_2 = x_1 \right\rangle = \langle x_1 \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

Нетрудно заметить, что

$$w_2(\sigma_1^{k-1}) : \begin{cases} x_1 \longmapsto \left(x_1 x_2^{-1}\right)^{k-1} x_1, \\ x_2 \longmapsto \left(x_1 x_2^{-1}\right)^{k-2} x_1. \end{cases}$$

Действуя на x_1 автоморфизмом $w_2(\sigma_1^k)$, получим

$$x_1 \xrightarrow{w_2(\sigma_1^{k-1})} \left(x_1 x_2^{-1}\right)^{k-1} x_1 \xrightarrow{w_2(\sigma_1)} \left(x_1 x_2^{-1} x_1 x_1^{-1}\right)^{k-1} x_1 x_2^{-1} x_1 = \left(x_1 x_2^{-1}\right)^{k} x_1.$$

Аналогично, действуя на x_2, имеем

$$x_2 \xrightarrow{w_2(\sigma_1^{k-1})} \left(x_1 x_2^{-1}\right)^{k-2} x_1 \xrightarrow{w_2(\sigma_1)} \left(x_1 x_2^{-1} x_1 x_1^{-1}\right)^{k-2} x_1 x_2^{-1} x_1 = \left(x_1 x_2^{-1}\right)^{k-1} x_1.$$

Следовательно,

$$G_2(\sigma_1^k) = \left\langle x_1, x_2 \parallel x_1 = \left(x_1 x_2^{-1}\right)^k x_1, \quad x_2 = \left(x_1 x_2^{-1}\right)^{k-1} x_1 \right\rangle = \langle x_1, t \parallel t^k = 1\rangle,$$

где $t = x_1 x_2^{-1}$. Видим, что группа $G_2(\sigma_1^k)$ изоморфна $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_k$. □

Предложение 8 дает классификацию 2-нитиевых торических зацеплений с точностью до зеркального образа.

Используя предложения 7 и 8, можем сформулировать следующие результаты для тривиального узла, зацепления Хопфа и трилистника.

Тривиальный узел. Тривиальный узел U можно представить в виде замыкания косы $\sigma_1 \in B_2$ (рис. 9). Известно, что классическая группа тривиального узла $G(U) = \pi(S^3 - U)$ изоморфна $\mathbb{Z}$. В случае представлений Вады справедливо

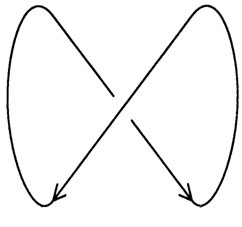

Рис. 9. Тривиальный узел

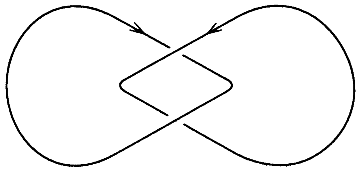

Рис. 10. Зацепление Хопфа

Предложение 9. *Пусть* $U = \widehat{\sigma_1}$ *— тривиальный узел. Тогда его группа* $G_l(\sigma_1),\ l = 1, 2,$ *изоморфна бесконечной циклической группе, т. е.* $G_l(\sigma_1) \cong \mathbb{Z}$.

Зацепление Хопфа. Напомним, что зацепление Хопфа является зацеплением двух тривиальных узлов (рис. 10). Его можно представить в виде замыкания косы $\sigma_1^2 \in B_2$. Классическая группа зацепления Хопфа имеет вид

$$G\big(\sigma_1^2\big) = \langle x_1, x_2 \parallel x_1x_2 = x_2x_1\rangle \cong \mathbb{Z}^2.$$

Для зацепления Хопфа справедливо

Предложение 10. *Группы зацепления Хопфа, построенные по представлениям* w_1 *и* w_2*, имеют следующий вид:*

$$G_1\big(\sigma_1^2\big) = \big\langle x_1, x_2 \parallel x_1x_2^r = x_2^rx_1,\ x_2x_1^r = x_1^rx_2\big\rangle = \big\langle x_1, x_2 \parallel \big[x_1, x_2^r\big] = \big[x_1^r, x_2\big] = 1\big\rangle,$$

$$G_2\big(\sigma_1^2\big) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2.$$

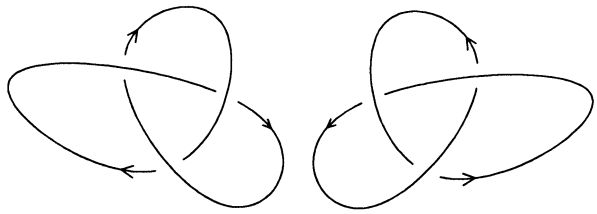

Рис. 11. Трилистники

Трилистник. Узел, изображенный на рис. 11 слева, называется *трилистником* и обозначается символом T. Его можно представить в виде замыкания косы $\sigma_1^3 \in B_2$. Известно, что классическая группа трилистника $G(T)$ изоморфна B_3. Найдем группы трилистника для представлений w_1 и w_2.

Предложение 11. *Группы трилистника, построенные по представлениям* w_1 *и* w_2*, имеют следующий вид:*

$$G_1\big(\sigma_1^3\big) = \big\langle x_1, x_2 \parallel x_1x_2^rx_1^r = x_2^rx_1^rx_2,\ x_2x_1^rx_2^r = x_1^rx_2^rx_1\big\rangle,$$

$$G_2\big(\sigma_1^3\big) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_3.$$

Зеркальный образ трилистника. Обозначим зеркальный образ трилистника T символом $\overline{T}$ (рис. 11 справа). Его можно представить в виде замыкания косы $\sigma_1^{-3} \in B_2$. Известно, что классическая группа не отличает трилистник от его зеркального образа, т. е. $G(\overline{T}) \cong G(T)$, хотя доказано, что трилистник и его зеркальный образ не эквивалентны.

Предложение 12. *Группы* G_l *не отличают трилистник от его зеркального образа, т. е.* $G_l\big(\sigma_1^{-3}\big) \cong G_l\big(\sigma_1^3\big)$*, где* $l = 1, 2$.

Доказательство следует из предложения 6. $\square$

§ 5. Примеры вычислений групп виртуальных зацеплений

Предложение 13. *Пусть* $L = \hat{\beta}$ — *классическое зацепление. Тогда*

$$G_l^v(\beta) = G_l(\beta) * \mathbb{Z}, \quad l = 1, 2, 3.$$

Тривиальный узел. Вычисляем группы тривиального узла $U = \widehat{\sigma_1}$, где $\sigma_1 \in B_2$, для представлений W_l, $l = 1, 2, 3$. Справедливо

Предложение 14. $G_l^v(\sigma_1) \cong F_2$, $l = 1, 2, 3$.

Доказательство. Для $G_1^v(\sigma_1)$ и $G_2^v(\sigma_1)$ это следует из предложений 9 и 13. Рассмотрим случай W_3. Имеем

$$W_3(\sigma_1) : \begin{cases} x_1 \longmapsto x_1^2 x_2, \\ x_2 \longmapsto x_2^{-1} x_1^{-1} x_2. \end{cases}$$

Тогда

$$G_3^v(\sigma_1) = \langle x_1, x_2, y \parallel x_1 = x_1^2 x_2,\ x_2 = x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 \rangle = \langle x_1, y \rangle \simeq F_2. \quad \square$$

Виртуальное зацепление Хопфа. Виртуальное зацепление Хопфа можно представить в виде замкнутой косы $\widehat{\rho_1\sigma_1}$, где $\rho_1, \sigma_1 \in VB_2$, (рис. 12). Справедливо

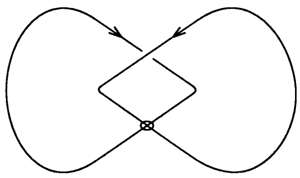

Рис. 12. Виртуальное зацепление Хопфа

Предложение 15. $G_l^v(\rho_1\sigma_1) \cong F_2 \leftthreetimes \mathbb{Z}$, $l = 1, 2, 3$.

Доказательство. Находим группу $G_1^v(\rho_1\sigma_1)$. Автоморфизм $W_1(\rho_1\sigma_1)$ действует на x_1 и x_2 следующим образом:

$$W_1(\rho_1\sigma_1) : \begin{cases} x_1 \xrightarrow{\rho_1} y x_2 y^{-1} \xrightarrow{\sigma_1} y x_1 y^{-1}, \\ x_2 \xrightarrow{\rho_1} y^{-1} x_1 y \xrightarrow{\sigma_1} y^{-1} x_1^r x_2 x_1^{-r} y. \end{cases}$$

Группа виртуального зацепления Хопфа имеет вид

$$G_1^v(\rho_1\sigma_1) = \langle x_1, x_2, y \parallel x_1 = y x_1 y^{-1},\ x_2 = y^{-1} x_1^r x_2 x_1^{-r} y \rangle$$
$$= \langle x_1, x_2, y \parallel x_1^y = x_1,\ x_2^y = x_1^{-r} x_2 x_1^r \rangle.$$

Видим, что группа $G_1^v(\rho_1\sigma_1)$ является полупрямым произведением свободной группы $F_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$ и бесконечной циклической группы $\langle y \rangle$, при этом y действует на F_2 как автоморфизм

$$\varphi_1 : \begin{cases} x_1 \longmapsto x_1, \\ x_2 \longmapsto (x_2)^{x_1^r}. \end{cases}$$

Автоморфизм $W_2(\rho_1\sigma_1)$ действует на x_1 и x_2 следующим образом:

$$W_2(\rho_1\sigma_1) : \begin{cases} x_1 \longmapsto y x_1 y^{-1}, \\ x_2 \longmapsto y^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1 y. \end{cases}$$

Получаем группу

$$G_2^v(\rho_1\sigma_1) = \langle x_1, x_2, y \parallel x_1 = y x_1 y^{-1},\ x_2 = y^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1 y \rangle$$
$$= \langle x_1, x_2, y \parallel [x_1, y] = 1,\ y x_2 y^{-1} = x_1 x_2^{-1} x_1 \rangle.$$

Таким образом, $G_2^v(\rho_1\sigma_1)$ является расширением свободной группы $F_2 = \langle x_1, x_2\rangle$ при помощи $\mathbb{Z} = \langle y\rangle$, и сопряжение элементом y^{-1} индуцирует автоморфизм

$$\varphi_2 : \begin{cases} x_1 \longmapsto x_1, \\ x_2 \longmapsto x_1 x_2^{-1} x_1. \end{cases}$$

Автоморфизм $W_3(\rho_1\sigma_1)$ действует на x_1 и x_2 следующим образом:

$$W_3(\rho_1\sigma_1) : \begin{cases} x_1 \longmapsto y x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 y^{-1}, \\ x_2 \longmapsto y^{-1} x_1^2 x_2 x_1 x_2 y. \end{cases}$$

Группа имеет вид

$$\begin{aligned} G_3^v(\rho_1\sigma_1) &= \bigl\langle x_1, x_2, y \parallel x_1 = y x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 y^{-1},\ x_2 = y^{-1} x_1^2 x_2 y \bigr\rangle \\ &= \bigl\langle x_1, x_2, y \parallel x_1^y = x_2^{-1} x_1^{-1} x_2,\ x_2 = \bigl(x_1^2 x_2\bigr)^y \bigr\rangle. \end{aligned}$$

Преобразуем последнее соотношение:

$$x_2 = \bigl(x_1^y\bigr)^2 x_2^y = x_2^{-1} x_1^{-2} x_2 x_2^y \Rightarrow x_2^y = x_2^{-1} x_1^{-2} x_2^2.$$

Получаем

$$G_3^v(\rho_1\sigma_1) = \bigl\langle x_1, x_2, y \parallel x_1^y = x_2^{-1} x_1^{-1} x_2,\ x_2^y = x_2^{-1} x_1^{-2} x_2^2 \bigr\rangle.$$

Покажем, что $G_3^v(\rho_1\sigma_1)$ является HNN-расширением с базой $F_2 = \langle x_1, x_2\rangle$, ассоциативными подгруппами $A = F_2$, $B = \bigl\langle x_1^{x_2}, x_2^{-1} x_1^{-2} x_2^2 \bigr\rangle$ и проходной буквой y, которая индуцирует изоморфизм A на B:

$$\varphi_3 : \begin{cases} x_1 \longmapsto x_1^{x_2}, \\ x_2 \longmapsto x_2^{-1} x_1^{-2} x_2^2. \end{cases}$$

Покажем, что $B = A$. Для этого надо показать, что сопряжение элементом y индуцирует автоморфизм φ_3 группы A. Используем преобразования Нильсена [27] для группы $B = \langle x_2^{-1} x_1 x_2, x_2^{-1} x_1^{-2} x_2 x_2 \rangle$. Умножая второй элемент на квадрат первого, имеем $\bigl(x_2^{-1} x_1 x_2,\ x_2^{-1} x_1^2 x_2 x_2^{-1} x_1^{-2} x_2 x_2\bigr) = \bigl(x_2^{-1} x_1 x_2,\ x_2\bigr)$. Сопрягая элементом x_2^{-1} первый элемент, получаем $\bigl(x_2 x_2^{-1} x_1 x_2 x_2^{-1},\ x_2\bigr) = (x_1,\ x_2)$. □

Следствие. *Группы $G_l^v(\rho_1\sigma_1)$, $l = 1, 2, 3$, линейны.*

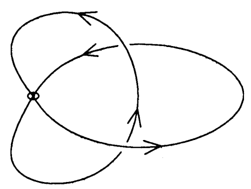

Рис. 13. Виртуальный трилистник

Доказательство. Поскольку G_l^v является расширением F_2 при помощи $\mathbb{Z}$, она вкладывается в голоморф $\operatorname{Hol} F_2$. Из [28] следует, что голоморф $\operatorname{Hol} F_2$ является линейной группой. □

Виртуальный трилистник. Виртуальный трилистник vT (рис. 13) является замыканием косы $\rho_1\sigma_1^2 \in VB_2$. Найдем группу $G_1^v(vT)$. Имеем

$$W_1\bigl(\rho_1\sigma_1^2\bigr) : \begin{cases} x_1 \xrightarrow{\rho_1} y x_2 y^{-1} \xrightarrow{\sigma_1} y x_1 y^{-1} \xrightarrow{\sigma_1} y x_1^r x_2 x_1^{-r} y^{-1}, \\ x_2 \xrightarrow{\rho_1} y^{-1} x_1 y \xrightarrow{\sigma_1} y^{-1} x_1^r x_2 x_1^{-r} y \xrightarrow{\sigma_1} y^{-1} x_1^r x_2^r x_1 x_2^{-r} x_1^{-r} y. \end{cases}$$

Следовательно,

$$G_1^v\bigl(\rho_1\sigma_1^2\bigr) = \bigl\langle x_1, x_2, y \parallel x_1 = yx_1^r x_2 x_1^{-r} y^{-1},\ x_2 = y^{-1} x_1^r x_2^r x_1 x_2^{-r} x_1^{-r} y \bigr\rangle.$$

Из первого соотношения выражаем x_2, подставляем во второе, получаем

$$G_1^v\bigl(\rho_1\sigma_1^2\bigr) = \bigl\langle x_1, y \parallel x_1^{-r} y^{-1} x_1 y x_1^r = y^{-2} x_1^r y x_1 y^{-1} x_1^{-r} y^2 \bigr\rangle.$$

Аналогично строим группы виртуального трилистника, используя W_2 и W_3. Автоморфизм $W_2\bigl(\rho_1\sigma_1^2\bigr)$ действует на x_1 и x_2 следующим образом:

$$W_2\bigl(\rho_1\sigma_1^2\bigr) : \begin{cases} x_1 \longmapsto y x_1 x_2^{-1} x_1 y^{-1}, \\ x_2 \longmapsto y^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1 y. \end{cases}$$

Получаем группу

$$G_2^v\bigl(\rho_1\sigma_1^2\bigr) = \bigl\langle x_1, x_2, y \parallel x_1 = y x_1 x_2^{-1} x_1 y^{-1},\ x_2 = y^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1 y \bigr\rangle.$$

Из первого соотношения выражаем x_2, подставляем во второе и получаем

$$G_2^v\bigl(\rho_1\sigma_1^2\bigr) = \bigl\langle x_1, y \parallel x_1 y^{-1} x_1^{-1} y x_1 = y^{-2} x_1 y x_1^{-1} y^{-1} x_1 y^2 \bigr\rangle.$$

Ясно, что группы $G_1^v\bigl(\rho_1\sigma_1^2\bigr)$ и $G_2^v\bigl(\rho_1\sigma_1^2\bigr)$ не изоморфны F_2, так как они имеют два порождающих и одно нетривиальное соотношение.

Автоморфизм $W_3\bigl(\rho_1\sigma_1^2\bigr)$ действует на x_1 и x_2 следующим образом:

$$W_3\bigl(\rho_1\sigma_1^2\bigr) : \begin{cases} x_1 \longmapsto y x_2^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 y^{-1}, \\ x_2 \longmapsto y^{-1} x_1^2 x_2 x_1 x_2 y. \end{cases}$$

Соответствующая группа имеет вид

$$G_3^v\bigl(\rho_1\sigma_1^2\bigr) = \bigl\langle x_1, x_2, y \parallel x_1 = y x_2^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 y^{-1},\ x_2 = y^{-1} x_1^2 x_2 x_1 x_2 y \bigr\rangle.$$

Видим, что группы $G_l^v\bigl(\rho_1\sigma_1^2\bigr)$, $l = 1, 2, 3$, не изоморфны F_2, что доказывает неэквивалентность виртуального трилистника тривиальному узлу.

Узел Кишино. Узел Кишино (рис. 14 слева) является связной суммой двух тривиальных виртуальных узлов, при этом он сам не является тривиальным узлом [29]. Известно, что его полином Джонса тривиален. Пусть $c = \rho_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\rho_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} \in VB_3$ (рис. 14 справа), тогда замыкание $\hat{c}$ эквивалентно узлу Кишино. Найдем группы $G_1^v(c)$ и $G_2^v(c)$.

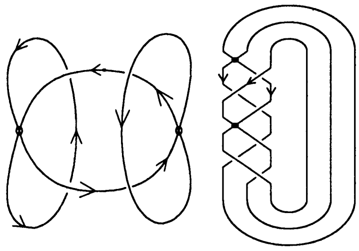

Рис. 14. Узел Кишино

Нетрудно доказать, что образы косы c при представлениях W_1 и W_2 имеют вид

$$W_1(c) : \begin{cases} x_1 \longmapsto y x_2 y^{-1}, \\ x_2 \longmapsto x_3^{(y^{-1} x_1^{-r} y^2 x_2^{-r} y x_2^r y^{-1})}, \\ x_3 \longmapsto x_1^{(y^2 x_2^{-r} y^{-2} x_2^r y^{-2} x_1^r y x_3^r y^{-1} x_1^{-r} y^2 x_2^{-r} y x_2^r y^{-1})}, \\ y \longmapsto y, \end{cases}$$

$$W_2(c) : \begin{cases} x_1 \longmapsto y x_2 y^{-1}, \\ x_2 \longmapsto \bigl(x_3^{-1}\bigr)^{(y^{-1} x_1 y^2 x_2^{-1} y x_2 y^{-1})}, \\ x_3 \longmapsto \bigl(x_1^{-1}\bigr)^{(y^2 x_2 y^{-2} x_2^{-1} y^{-2} x_1 y x_3^{-1} y^{-1} x_1 y^2 x_2^{-1} y x_2 y^{-1})}, \\ y \longmapsto y. \end{cases}$$

Покажем, что $G_l^v(c) \cong F_2$, $l = 1, 2$, т. е. эти группы не отличают узел Кишино от тривиального узла. Имеем

$$G_1^v(c) = \Big\langle x_1, x_2, x_3, y \parallel x_1 = yx_2y^{-1},\ x_2 = x_3^{(y^{-1}x_1^{-r}y^2x_2^{-r}yx_2^ry^{-1})},$$
$$x_3 = x_1^{(y^2x_2^{-r}y^{-2}x_2^ry^{-2}x_1^ryx_3^ry^{-1}x_1^{-r}y^2x_2^{-r}yx_2^ry^{-1})}\Big\rangle.$$

Используя первое соотношение, можно исключить x_1 из множества порождающих группы $G_1^v(\hat{c})$, а используя второе соотношение, можно исключить x_3. Получаем

$$G_1^v(c) = \langle x, y \parallel x^{-r}yx^{-r}yx^ry^{-1}xyx^{-r}y^{-1}x^ry^{-1}x^r$$
$$= x^{-r}yx^{-r}yx^ry^{-1}xyx^{-r}y^{-1}x^ry^{-1}x^r\rangle \cong F_2,$$

где $x = x_2$.

Аналогично проверяется, что $G_2^v(c) \cong F_2$.

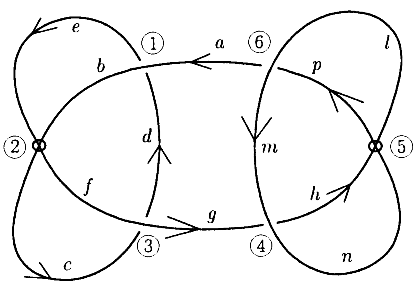

Рис. 15. Диаграмма узла Кишино

Для вычисления группы $G_3^v(c)$ удобнее использовать диаграммный подход (рис. 15). Имеем

$$G_3^v(c) = \langle a, b, c, d, e, f, g, h, l, m, n, p, y \parallel a = eb^{-1}e^{-1},\ d = eb^2,\ e = f^{y^{-1}},$$
$$b = c^y,\ c = g^2d,\ f = d^{-1}g^{-1}d,\ g = n^2h,\ m = h^{-1}n^{-1}h,\ n = p^{y^{-1}},$$
$$h = l^y,\ l = a\ m^{-1}a^{-1},\ p = am^2\rangle.$$

Можно показать, что она изоморфна

$$G_3^v(c) = \langle c, l, p, y \parallel y^{-1}l^{-y}p^{-2y^{-1}}l^{-y}p^{-2y^{-1}}cc^{-2y}y = c^{-1}l^{-y}p^{-2y^{-1}}c,$$
$$p^{-1}lp = l^{-y}p^{y^{-1}}l^y,\ p = l^{-y}p^{-2y^{-1}}l^{-y}p^{-2y^{-1}}cc^{-y}c^{-1}p^{2y^{-1}}l^{2y}\rangle.$$

Вопрос. *Будет ли $G_3^v(c)$ изоморфна F_2?*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Birman J. S.* Braids, links, and mapping class groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1974. (Ann. Math. Stud; V. 82).
2. *Crowell R., Fox R.* Introduction to knot theory. Berlin: Springer-Verl., 1963. (Graduate Texts Math; V. 57).

3. *Kassel C., Turaev V.* Braid groups. Berlin: Springer-Verl., 2008. (Graduate Texts Math.; N 247).
4. *Kauffman L. H.* Virtual knot theory // Eur. J. Comb. 1999. V. 20, N 7. P. 663–690.
5. *Kamada S.* Invariants of virtual braids and a remark on left stabilizations and virtual exchange moves // Kobe J. Math. 2004. V. 21, N 1–2. P. 33–49.
6. *Manturov V. O., Ilyutko D. P.* Virtual knots. The state of the art. Singapore: World Sci. Press, 2013.
7. *Bardakov V. G., Bellingeri P.* Groups of virtual and welded links // J. Knot Theory Ramifications. 2014. V. 23, N 3. 1450014. 23 p.
8. *Мантуров В. О.* О распознавании виртуальных кос // Зап. науч. сем. ПОМИ РАН. 2003. Т. 299, № 8. С. 267–286.
9. *Bardakov V. G., Mikhalchishina Yu. A., Neshchadim M. V.* Representations of virtual braids by automorphisms and virtual knot groups // J. Knot Theory Raminifications. 2017. V. 26, N 1. 1750003. 17 p.
10. *Carter J. S., Silver D., Williams S.* Invariants of links in thickened surfaces // Algebr. Geom. Topol. 2014. V. 14, N 3. P. 1377–1394.
11. *Wada M.* Group invariants of links // Topology. 1992. V. 31, N 2. P. 399–406.
12. *Михальчишина Ю. А.* Локальные представления групп кос // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 4. С. 838–851.
13. *Vershinin V. V.* On homology of virtual braids and Burau representation // J. Knot Theory Raminifications. 2001. V. 10, N 5. P. 795–812.
14. *Goussarov M., Polyak M., Viro O.* Finite type invariants of classical and virtual knots // Topology. 2000. V. 39, N 5. P. 1045–1068.
15. *Fenn R., Rimanyi R., Rourke C.* The braid-permutation group // Topology. 1997. V. 36, N 1. P. 123–135.
16. *Shpilrain V.* Representing braids by automorphisms // Intern. J. Algebra Comput. 2001. V. 11, N 6. P. 773–777.
17. *Bacardit L., Dicks W.* Actions of the braid group, and new algebraic proofs of results of Dehornoy and Larue // Groups Complex. Cryptol. 2009. V. 1, N 1. P. 77–129. DOI 10.1515/GCC.2009.77. MR2502938 (2010a:20083).
18. *Sakuma M.* A note on Wada′s group invariants of links // Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. 1991. V. 67, N 5. P. 176–177. (http://mat.uab.cat/ dicks/bacardit.html).
19. *Ito T.* The classification of Wada-type representations of braid groups // J. Pure Appl. Algebra. 2013. V. 217, N 9. P. 1754–1763. DOI 10.1016/j.jpaa.2012.12.010. MR3042635.
20. *Chrisp J., Paris L.* Representations of the braid group by automorphisms of groups, invariants of links, and Garside groups // Pacific J. Math. 2005. V. 221, N 1. P. 1–27.
21. *Lin X., Nelson S.* On generalized knot groups // J. Knot Theory Raminifications. 2008. V. 17, N 3. P. 263–272.
22. *Nelson S., Neumann W.* The 2-generalized knot group determines the knot // Commun. Contemp. Math. 2008. V. 10, N supp01. P. 843–847.
23. *Bardakov V. G.* Virtual and welded links and their invariants // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2005. V. 2. P. 196–199.
24. *Chterental O.* Virtual braids and virtual curve diagrams. arXiv 1411.63 13v14 [math.QA] 2 Jun 2015. 25 p.
25. *Kauffman L. H., Lambropoulou S.* The L-move and virtual braids // J. Knot Theory Ramifications. 2006. V. 15, N 6. P. 773–811.
26. *Бардаков В. Г., Михальчишина Ю. А., Нещадим М. В.* Группы виртуальных зацеплений // Сиб. мат. журн. (в печати).
27. *Магнус В., Каррас А., Солитер Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
28. *Бардаков В. Г., Брюханов О. В.* О линейности некоторых расширений // Вестн. НГУ. Сер. математика, механика, информатика. 2007. Т. 7, № 3. С. 45–58.
29. *Kishino T., Satoh S.* A note on non-classical virtual knots // J. Knot Theory Ramifications. 2004. V. 13, N 7. P. 845–856.
30. *Bardakov V. G., Mikhalchishina Yu. A., Neshchadim M. V.* Representations of virtual braids by automorphisms and virtual knot groups. arXiv:1603.01425 [math.AT] 4 Mar 2016.
31. *Бардаков В. Г.* Строение группы сопрягающих автоморфизмов // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 5. С. 515–541.

32. *Elhamdadi M., Saito M., Scott Carter J., Silver D., Williams S.* Virtual knot invariants from group biquandles and their cocycles // J. Knot Theory Ramifications. 2009. V. 18, N 7. P. 957–972.

Статья поступила 1 сентября 2016 г.

Михальчишина Юлия Андреевна
Новосибирский гос. аграрный университет,
ул. Добролюбова, 160, Новосибирск 630039
jam92888@gmail.com