ISSN 1472-2739 (on-line) 1472-2747 (printed)

Algebraic & Geometric Topology
Volume 3 (2003) 399{433
Published: 8 May 2003

Espaces pro nis et problemes de realisabilite

Francois-Xavier Dehon
Gerald Gaudens

Abstract The mod p cohomology of a space comes with an action of the Steenrod Algebra. L. Schwartz [Sc2] proved a conjecture due to N. Kuhn [Ku] stating that if the mod p cohomology of a space is in a nite stage of the Krull ltration of the category of unstable modules over the Steenrod algebra then it is locally nite. Nevertheless his proof involves some niteness hypotheses. We show how one can remove those niteness hypotheses by using the homotopy theory of pro nite spaces introduced by F. Morel [Mo], thus obtaining a complete proof of the conjecture. For that purpose we build the Eilenberg-Moore spectral sequence and show its convergence in the pro nite setting.

AMS Classi cation 55S10; 55T20, 57T35

Keywords Steenrod operations, nilpotent modules, realization, Eilenberg-Moore spectral sequence, pro nite spaces

1 Introduction

La cohomologie a coe cients dans un corps ni d'un espace topologique est naturellement munie d'une structure de module instable sur l'algebre de Steenrod [SE]. La question se pose de caracteriser, parmi les modules instables, ceux qui sont isomorphes a la cohomologie d'un espace topologique. De tels modules instables sont dit *topologiquement realisables*.

Determiner si un module instable est realisable est en general di cile. Par exemple, le fameux resultat de J.F. Adams sur les elements de l'homotopie des spheres d'invariant de Hopf un [Ad] se paraphrase en la non realisabilite de certains modules nis.

Un critere de realisabilite simple, utilise dans la suite, repose sur la remarque suivante : la cohomologie d'un espace est aussi munie d'une structure d'algebre, laquelle est compatible avec l'action de l'algebre de Steenrod [SE, Sc1]. En particulier, l'elevation au carre y est donnee par une operation de Steenrod. En d'autres termes, l'existence d'une structure d'algebre compatible fournit une condition necessaire a la realisabilite d'un module instable.

Dans un article recent [Ku], N. Kuhn enonce, et demontre dans certains cas, des conjectures sur la structure de module instable de la cohomologie des espaces. Voici celle qu'on etudie ici.

1.1 La conjecture de non-realisation forte due a N. Kuhn

Soit p un nombre premier. Notons U la categorie des modules instables sur l'algebre de Steenrod *modulo* p. Soit U_n la sous-categorie pleine de U dont les objets sont ceux annules par T^n, le foncteur de Lannes reduit itere n fois (voir la partie 5). La suite (U_n) co¨ncide avec la ltration de Gabriel-Krull de la categorie U (voir la partie 6).

Le premier cran U_0 de cette ltration est la sous-categorie pleine de U dont les objets sont les modules *localement nis, i.e.* les modules M tels que pour tout element x de M, il existe un entier ‘ tel que toute operation de degre superieur a ‘ opere trivialement sur x.

N. Kuhn a propose la conjecture suivante [Ku, strong realization conjecture, p.324] :

Conjecture de non-realisation forte [Ku] *Soit X un espace topologique. Si la cohomologie* modulo *p de X est dans U_n pour un certain entier n, alors elle est localement nie.*

1.2 L'approche de L. Schwartz

L. Schwartz a demontre cette conjecture pour $p = 2$ sous certaines restrictions de nitude. Precisement, il a demontre [Sc3, Theoreme 0.1] :

Theoreme 1.1 [Sc3] *Soit X un espace, et soit M sa cohomologie* modulo 2. *Supposons que M est dans U_n pour un certain entier n, et que pour tout entier s le quotient M_s/M_{s+1} a un nombre ni de generateurs sur l'algebre de Steenrod. Alors M est localement ni, c'est-a-dire M 2 U_0.*

Dans l'enonce, M_s designe le sous-module instable de M forme des elements s-nilpotents (voir la partie 6).

Rappelons la trame de la demonstration de L. Schwartz. On procede par l'absurde en supposant qu'il existe un espace X dont la cohomologie *modulo* 2 est dans un cran ni U_n de la ltration de Krull sans être localement nie. On aboutit a une contradiction en deux etapes:

La premiere etape est *la reduction de N. Kuhn :* On montre qu'il existe alors un (nouvel) espace X dont la cohomologie est dans le premier cran U_1 de la ltration de Krull sans être localement nie.

La seconde etape repose sur l'utilisation de la *suite spectrale d'Eilenberg-Moore* associee a la bration des chemins de X. On precise alors la structure particuliere des modules qui sont dans le premier cran de la ltration de Krull sans être localement nis pour construire pour un certain entier d et pour tout entier i assez grand des classes $_{i;d}$ dans la cohomologie de X, qui veri ent les deux proprietes suivantes :

Le cup carre de $_{i;d}$ est nul pour tout entier i assez grand,

La classe $_{i;d}$ est exactement d-nilpotente pour tout entier i assez grand.

Les proprietes particulieres de ces classes $_{i;d}$ montrent qu'elles induisent dans la cohomologie de l'espace de lacets ΩX, a travers l'homomorphisme de coin, des classes $_{i;d-1}$, qui veri ent :

Le cup carre de la classe $_{i;d-1}$ est nul pour tout entier i assez grand,

La classe $_{i;d-1}$ est exactement $(d-1)$-nilpotente.

Par une recurrence descendante, on arrive a la contradiction qu'il existe des classes $_{i;0}$ dans H $\Omega^d X$ qui, pour i assez grand, sont simultanement 0-nilpotentes (*i.e.* reduites au sens de la structure d'algebre de la cohomologie) et de cup-carre nul. Ceci contredit l'existence d'une structure d'algebre compatible avec la structure de module sur l'algebre de Steenrod sur H $\Omega^d X$.

L'utilisation de l'interpretation geometrique du foncteur T et de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore dans la categorie des espaces impose les hypotheses de nitude faites dans le theoreme 1.1. Cet article expose le moyen de contourner ces hypotheses en utilisant la theorie de l'homotopie des espaces pro nis.

1.3 De l'utilisation des espaces pro nis dans les problemes de non realisabilite

Le premier point est qu'on connaˆt une interpretation geometrique *inconditionnelle* du foncteur de Lannes [Mo], le prix a payer etant d'echanger la categorie des espaces par celle des espaces pro nis.

Le second point est que nous construisons dans cet article une suite spectrale d'Eilenberg-Moore dans le cadre des espaces profinis. Il faut pour cela donner un sens a la notion d'espace de lacets d'un espace profini pointe. Le formalisme adequat pour developper ces deux points est l'algebre homotopique.

L'approche utilisee par L. Schwartz s'applique alors *mutatis mutandi* et permet de montrer le theoreme suivant.

Theoreme 1.2 *Soit X un espace profini. Si la cohomologie* modulo 2 *continue de X est dans un cran fini de la filtration de Krull, alors elle est localement finie.*

On sait que la cohomologie d'un espace coïncide avec la cohomologie continue de son complete profini (voir la section 2). Par consequent, en corollaire du theoreme 1.2, on etablit la *conjecture de non realisation forte* pour $p = 2$.

Theoreme 1.3 *Soit X un espace. Si la cohomologie* modulo 2 *de X est dans un cran fini de la filtration de Krull, alors elle est localement finie.*

1.4 Organisation de l'article

L'article est organise de la maniere suivante. Apres avoir rappele les points de la theorie homotopique des espaces profinis que nous utilisons, nous detaillons les constructions des sommes amalgamees homotopiques et produits fibres homotopiques, et en particulier des espaces de lacets. Nous construisons alors la suite spectrale d'Eilenberg-Moore d'un produit fibre homotopique et en explicitons la structure algebrique. Suivent quelques rappels sur la theorie de Lannes dans le cadre des espaces profinis. Dans la derniere section, on expose, suivant la methode de L. Schwartz, la demonstration du *Theoreme 1.2*, ce qui etablit la *conjecture de non realisation forte* (*Theoreme 1.3*) pour $p = 2$. Dans un appendice, on detaille certains points techniques.

La preuve du theoreme 1.2 est, tant dans sa ligne que dans son aspect technique, tres semblable a celle de L. Schwartz [Sc3]. Neanmoins, dans un soucis de clarte, nous avons donne dans cet article une demonstration aussi complete que possible. Une des raisons qui motivent ce choix est qu'il nous faut nous soustraire des hypotheses de finitude faites dans [Sc3]. En effet, on y trouve [Sc3, p. 523]: *'On fera partout l'hypothese que les modules instables consideres sont de dimension finie en chaque degre.'* De plus, [Sc3, lemme 1.12, p. 530] n'est pas vrai sans hypotheses de finitude, ce qui nous empêche de nous appuyer sur

[Sc3, propositions 1.9 et 1.10]. Malheureusement, ces propositions sont utilisees en divers points cruciaux de l'article, par exemple dans la demonstration de [Sc3, proposition 3.2] ou encore dans le calcul final [Sc3, p. 342].

Remerciements Le second auteur remercie chaleureusement le *Centre de Recerca Matematica* de Barcelone ainsi que le laboratoire Jean-Alexandre Dieudonne (Universite de Nice) pour leur accueil durant la preparation de ce travail.

Nous remercions vivement Lionel Schwartz pour l'interêt qu'il a pris pour notre travail.

2 Theorie homotopique des espaces profinis (d'apres [Mo])

2.1 Espaces profinis

Une categorie I est dite petite si la collection de ses objets forme un ensemble. Elle est dite filtrante si :

(i) pour toute paire d'objets i, j de I, il existe un objet k et des morphismes $k \to i$ et $k \to j$.

(ii) pour toute paire de morphismes $i \rightrightarrows j$ entre deux objets i, j il existe un objet k et un morphisme $k \to i$ tel que les composees $k \to i \rightrightarrows j$ soient egales.

Soit $\mathcal{C}$ une categorie. Un pro-objet de $\mathcal{C}$ est la donnee d'une petite categorie filtrante I et d'un foncteur de I dans $\mathcal{C}$. On dit aussi un diagramme filtrant d'objets de $\mathcal{C}$. Un morphisme entre deux pro-objets $X(-) : I \to \mathcal{C}$ et $Y(-) : J \to \mathcal{C}$ est un element de l'ensemble $\lim_i \operatorname{colim}_j \operatorname{Hom}(X(j), Y(i))$. Les pro-objets et leurs morphismes forment une categorie notee pro$-\mathcal{C}$. (Voir par exemple [AM, appendice].)

Un ensemble profini est un espace topologique compact totalement discontinu. La limite dans Top d'un diagramme filtrant d'ensembles finis (discrets) est un ensemble profini. Inversement tout ensemble profini apparaît canoniquement comme la limite filtrante de ses quotients finis X/R, R decrivant les relations d'equivalence ouvertes sur X. (Voir par exemple [Do, 2.8].)

Notre categorie d'espaces est celle des ensembles simpliciaux, qu'on note $\mathcal{S}$ (voir par exemple [BK, chap. VIII]).

On appelle espace pro ni un objet simplicial dans la categorie des ensembles pro nis. Les espaces pro nis et leurs morphismes forment une categorie notee $\hat{\mathcal{S}}$.

Notons $\mathcal{S}_{\mathrm{f}}$ la sous-categorie pleine de $\mathcal{S}$ (et de $\hat{\mathcal{S}}$!) formee des ensembles nis simpliciaux. Le foncteur $\hat{\mathcal{S}} \to \text{pro}-\mathcal{S}_{\mathrm{f}}$ qui associe a un espace pro ni X le diagramme ltrant de ses quotients nis simpliciaux X/R est une equivalence de categories d'inverse le foncteur limite $\text{pro}-\mathcal{S}_{\mathrm{f}} \to \hat{\mathcal{S}}$ (cf [Q2, lemma 2.3]).

2.2 Theorie homotopique

Soit X un espace pro ni. On de nit la cohomologie *modulo p* continue de X, notee $\mathrm{H}^* X$, comme l'homologie du complexe des cochaînes continues de X a valeurs dans le groupe discret $\mathbb{Z}/p$. Cette cohomologie est aussi la colimite ltrante des cohomologies *modulo p* ordinaires des quotients nis simpliciaux de X. Elle herite en particulier de la structure que possede la cohomologie *modulo p* ordinaire d'un espace : c'est une algebre instable sur l'algebre de Steenrod (voir par exemple [Sc1]).

La categorie $\hat{\mathcal{S}}$ possede une structure de categorie de modeles fermee avec pour equivalences faibles les morphismes induisant un isomorphisme en cohomologie *modulo p* continue et pour co brations les monomorphismes [Mo, theoreme 1].

On en deduit immediatement une structure de categorie de modeles sur la categorie pointee $\hat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ formee des espaces pro nis munis d'un point base. Observons que l'oubli du point base $\hat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}} \to \hat{\mathcal{S}}$ admet un adjoint a gauche : le foncteur qui associe a un espace pro ni X la reunion disjointe de X et d'un point base, qu'on note X_+.

2.3 Completion pro nie

Le foncteur d'oubli de la topologie $\hat{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ admet un adjoint a gauche : le foncteur de *completion pro nie* qui associe a un ensemble simplicial X la limite dans $\hat{\mathcal{S}}$ de ses quotients nis simpliciaux X/R. Par construction, les morphismes $X \to X/R$ induisent un isomorphisme de la cohomologie *modulo p* continue du complete pro ni de X dans la cohomologie *modulo p* ordinaire de X.

2.4 Pro-p-completion et resolution brante

Soit X un ensemble simplicial. On note $\mathrm{Res}\,(X)$ sa $\mathbb{F}_p$-resolution cosimpliciale [BK, part I], $\mathrm{Tot}_s\mathrm{Res}\,(X)$ le s-ieme espace total partiel associe, et $\mathrm{P}^t\mathrm{Tot}_s\mathrm{Res}\,(X)$ la t-ieme troncature de Postnikov de l'espace $\mathrm{Tot}_s\mathrm{Res}\,(X)$. Alors :

- L'espace $\mathrm{Tot}_0\mathrm{Res}\,(X)$ est un $\mathbb{F}_p$-espace a ne simplicial et les morphismes $\mathrm{Tot}_{s+1}\mathrm{Res}\,(X) \to \mathrm{Tot}_s\mathrm{Res}\,(X)$ sont des bration principales sous l'action de $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels simpliciaux.
- Lorsque X est un ensemble ni simplicial, les espaces $\mathrm{Tot}_s\mathrm{Res}\,(X)$ le sont egalement.
- Lorsque X est connexe, les morphismes naturels $X \to \mathrm{Tot}_s\mathrm{Res}\,(X)$ induisent un isomorphisme $\mathrm{colim}_s\mathrm{H}^*\,\mathrm{Tot}_s\mathrm{Res}\,(X) \to \mathrm{H}^*X$ [BK, chap. III, §6].

On deduit des deux premiers points que lorsque X est un ensemble ni simplicial, les espaces $\mathrm{P}^t\mathrm{Tot}_s\mathrm{Res}\,(X)$ sont des espaces p- nis ; c'est a dire ils sont nis simpliciaux, brants dans $\mathcal{S}$, ont un nombre ni de composantes connexes et les groupes d'homotopie de chacune d'entre elles sont des p-groupes nis, triviaux sauf pour un nombre ni d'entre eux.

On deduit du troisieme point que les morphismes naturels $X \to \mathrm{P}^t\mathrm{Tot}_s\mathrm{Res}\,(X)$ induisent un isomorphisme $\mathrm{colim}_{s;t}\mathrm{H}^*\,\mathrm{P}^t\mathrm{Tot}_s\mathrm{Res}\,(X) \to \mathrm{H}^*X$ lorsque X est ni simplicial.

Supposons maintenant que X est un espace *pro ni*. On note Tot_sX l'espace pro ni $\lim_{\mathrm{R}} \mathrm{Tot}_s\mathrm{Res}\,(X/R)$. Alors Tot_0X est un $\mathbb{F}_p$-espace a ne pro ni simplicial et les morphismes

$$\mathrm{Tot}_{s+1}X \to \mathrm{Tot}_sX$$

sont des brations principales sous l'action de $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels pro nis simpliciaux. En particulier les morphismes $\mathrm{Tot}_0X \to \mathrm{pt}$ et $\mathrm{Tot}_{s+1}X \to \mathrm{Tot}_sX$ sont des brations dans $\hat{\mathcal{S}}$ (voir [Mo, 2.1]).

On note $\hat{X}(-)$ le diagramme ltrant forme des espaces p- nis $\mathrm{P}^t\mathrm{Tot}_s\mathrm{Res}\,(X/R)$, t et s decrivant l'ensemble des entiers positifs et R l'ensemble des relations d'equivalence simpliciales ouvertes de X, et $\mathrm{R}X$ la limite de $\hat{X}(-)$ dans $\hat{\mathcal{S}}$. Le morphisme canonique $X \to \mathrm{R}X$ est une equivalence faible faisant de $\mathrm{R}X$ une resolution brante fonctorielle de X. On appelle le diagramme $\hat{X}(-)$ le pro-p-complete de X.

2.5 Objets fonctionnels

Soient X et Y deux espaces profinis pointes. On note $X \vee Y$ leur somme et $X \wedge Y$ le quotient $(X \times Y)/(X \vee Y)$. L'espace profini $X \wedge Y$ est fonctoriel en X et Y.

Notons, pour W un espace profini pointe, $H^* W$ sa cohomologie *modulo p* continue reduite, noyau du morphisme $H^* W \to H^* \mathrm{pt}$. On dispose d'un morphisme canonique $H^* X \otimes H^* Y \to H^* (X \wedge Y)$ qui est un isomorphisme si X et Y sont des ensembles finis simpliciaux donc un isomorphisme en general par commutation des colimites filtrantes aux produits tensoriels.

Il existe un ensemble simplicial pointe $\mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(X;Y)$ caracterise par la bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_{\mathrm{pt}}}(W; \mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(X;Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}}(X \wedge W; Y)$$

naturelle en $W \in (\mathcal{S}_{\mathrm{f}})_{\mathrm{pt}}$, et faisant de $\hat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ une categorie de modeles fermee simpliciale (cf [Q, II,§1,2]). Le fait que pour toute cofibration $A \to B$ et pour toute fibration $X \to Y$ dans $\hat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ le morphisme

$$\mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(B;X) \to \mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(A;X) \times_{\mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(A;Y)} \mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(B;Y)$$

est une fibration de $\mathcal{S}_{\mathrm{pt}}$ et une equivalence faible si de plus $A \to B$ ou $X \to Y$ est une equivalence faible dans $\hat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ vient par adjonction des deux proprietes suivantes :

- Une equivalence faible dans $\mathcal{S}_{\mathrm{pt}}$ entre ensembles finis simpliciaux pointes est une equivalence faible dans $\hat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$.
- Pour tout monomorphisme $W \to W'$ entre ensembles finis simpliciaux pointes (plus generalement pour toute cofibration $W \to W'$ dans $\hat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$) le morphisme
$$(A \wedge W') \cup_{A \wedge W} (B \wedge W) \to B \wedge W'$$
est une cofibration de $\hat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$ qui est une equivalence faible si $W \to W'$ ou $A \to B$ est une equivalence faible.

Supposons maintenant X fini simplicial et notons $\mathrm{Sk}_n X$ son n-ieme squelette. L'ensemble simplicial $\mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(X;Y)$ est alors naturellement profini car limite filtrante des ensembles finis simpliciaux $\mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(\mathrm{Sk}_n X; Y/R)$, et comme tel l'adjoint a droite en Y du foncteur $Z \mapsto X \wedge Z$, $\hat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}} \to \hat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$.

La même discussion vaut dans $\hat{\mathcal{S}}$ en remplacant $X \wedge Y$ par $X \times Y$. Observons que si Y est pointe l'ensemble simplicial $\mathbf{hom}(X;Y)$ est naturellement pointe par le morphisme constant $X \to \mathrm{pt} \to Y$ et s'identifie comme tel a l'ensemble simplicial pointe $\mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(X_+;Y)$.

Cas particulier Notons S^1 le quotient du simplexe standard de dimension 1 de $\mathcal{S}$ par son 0-squelette. L'espace S^1 est un ensemble ni simplicial pointe. A tout espace pro ni pointe X on associe sa suspension $\Sigma X = \mathrm{S}^1 \wedge X$ et son espace de lacets $\Omega X = \mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(\mathrm{S}^1; X)$.

Nous terminons par les trois remarques suivantes :

- Soient Y un espace pro ni pointe, X un ensemble simplicial pointe quelconque et notons (X_α) le diagramme ltrant forme des sous-ensembles nis simpliciaux de X. On de nit alors l'espace pro ni fonctionnel $\mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(X; Y)$ comme la limite des espaces pro nis $\mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(X_\alpha; Y)$. Il est l'adjoint a droite en Y du foncteur $\hat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}} \to \hat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$, $Z \mapsto \operatorname{colim}\,(X_\alpha \wedge Z)$.
- Soient X un ensemble simplicial pointe ayant un nombre ni de simplexes non degeneres et Y un espace p- ni pointe, alors l'espace $\mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(X; Y)$ est egalement p- ni.
- Soient $Y \to Y'$ une equivalence faible entre espaces pro nis pointes - brants et X un ensemble simplicial (respectivement un espace pro ni) pointe, alors le morphisme $\mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(X; Y) \to \mathbf{hom}_{\mathrm{pt}}(X; Y')$ est une equivalence faible entre espaces pro nis (respectivement entre ensembles simpliciaux), ceci parce qu'une equivalence faible entre espaces pro nis (pointes) brants est une equivalence d'homotopie simpliciale [Mo, 1.4, Lemme 3]. (Nous rappelons ci-dessous la notion d'homotopie simpliciale.)

3 Sommes amalgamees et produits bres homotopiques

3.1 Sommes amalgamees homotopiques

Notons $\Delta[s]$ le simplexe standard de dimension s de $\mathcal{S}$; c'est un ensemble ni simplicial non brant dans $\mathcal{S}$ si s est non nul, faiblement equivalent au point.

Les morphismes $\mathrm{d}^0; \mathrm{d}^1 : \Delta[0] \to \Delta[1]$ et $\mathrm{s}^0 : \Delta[1] \to \Delta[0]$ induisent pour tout espace pro ni pointe X des morphismes $X \vee X \to X \wedge \Delta[1]_+$ et $X \wedge \Delta[1]_+ \to X$ qui font de $X \wedge \Delta[1]_+$ un (bon) objet cylindre pour X dans $\hat{\mathcal{S}}_{\mathrm{pt}}$, fonctoriel en X. (Voir par exemple [DwS] pour cette notion).

Notons $\{0\}$ et $\{1\}$ les images respectives de d^1 et $\mathrm{d}^0 : \Delta[0] \to \Delta[1]$. Tout morphisme $X \to Y$ entre espaces pro nis pointes s'ecrit comme la composee des morphismes evidents $X \wedge \{0\}_+ \to (X \wedge \Delta[1]_+) \cup_{X \wedge \{1\}_+} Y$ et $(X \wedge \Delta[1]_+) \cup_{X \wedge \{1\}_+} Y \to Y$.

Proposition 3.1 *Soit $X \to Y$ un morphisme entre espaces profinis pointes ; alors :*

- *Le morphisme $X \wedge \{0\}_+ \to (X \wedge \Delta[1]_+) \cup_{X \wedge \{1\}_+} Y$ est une cofibration de $\hat{\mathcal{S}}_{pt}$.*
- *Le morphisme $(X \wedge \Delta[1]_+) \cup_{X \wedge \{1\}_+} Y \to Y$ est une equivalence faible de $\hat{\mathcal{S}}_{pt}$.*

Soient maintenant $X; Y; Z$ des espaces profinis pointes et $X \to Y$ et $X \to Z$ des morphismes. On definit la somme amalgamee homotopique du diagramme $Z \leftarrow X \to Y$ comme la somme amalgamee dans $\hat{\mathcal{S}}_{pt}$ du diagramme

$$(X \wedge \Delta[1]_+) \cup_{X \wedge \{1\}_+} Z \leftarrow X \wedge \{0\}_+ \to (X \wedge \Delta[1]_+) \cup_{X \wedge \{1\}_+} Y :$$

Le foncteur qui associe au diagramme $Z \leftarrow X \to Y$ sa somme amalgamee homotopique s'interprete comme le derive gauche du foncteur qui associe a ce même diagramme sa colimite dans $\hat{\mathcal{S}}_{pt}$ (cf [DwS, 10.7]).

Supposons enfin que $X \to Y$ est injective degre par degre (*i.e.* est une cofibration) et notons la somme amalgamee dans $\hat{\mathcal{S}}_{pt}$ du diagramme $Z \leftarrow X \to Y$. Comme dans le cas classique le diagramme obtenu au niveau des complexes de cochaînes continues

$$\begin{array}{ccc} C & \to & C\,Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ C\,Y & \to & C\,X \end{array}$$

est cocartesien de sorte qu'on obtient la suite exacte de Mayer Vietoris en cohomologie *modulo p* continue.

En utilisant la fonctorialite de cette suite exacte longue et la proposition qui precede on obtient que le morphisme canonique de la somme amalgamee homotopique du diagramme $Z \leftarrow X \to Y$ dans est une equivalence faible.

Cas particulier Soit X un espace profini pointe et prenons pour Y et Z l'espace profini pointe egal au point. Le morphisme $(X \wedge \Delta[1]_+)/(X \wedge \{1\}_+) \to \mathrm{pt}$ induit une equivalence faible de la somme amalgamee homotopique du diagramme $\mathrm{pt} \leftarrow X \to \mathrm{pt}$ dans la suspension ΣX de X. La suite exacte de Mayer Vietoris devient l'isomorphisme en cohomologie *modulo p* continue reduite

$$H \; X = H \; X :$$

3.2 Produits fibres homotopiques

Dualement notons $X^{\Delta[1]}$ l'espace profini $\mathrm{hom}(\Delta[1], X)$. Les morphismes $X \to X^{\Delta[1]}$ et $X^{\Delta[1]} \to X \times X$ induits par $d^0, d^1 : \Delta[0] \to \Delta[1]$ et $s^0 : \Delta[1] \to \Delta[0]$ font de $X^{\Delta[1]}$ un espace de chemins pour X dans $\hat{\mathcal{S}}$, fonctoriel en X. (On peut se convaincre de ce que le morphisme $X \to X^{\Delta[1]}$ est une equivalence faible en lisant la demonstration de la proposition qui suit.) Tout morphisme $X \to Y$ entre espaces profinis s'ecrit comme la composee des morphismes $X \to X \times_{Y^{\{0\}}} Y^{\Delta[1]}$ et $X \times_{Y^{\{0\}}} Y^{\Delta[1]} \to Y^{\{1\}}$.

La proposition suivante est classique pour une categorie de modeles fermee simpliciale et cruciale pour notre propos :

Proposition 3.2 *Soit $X \to Y$ un morphisme entre espaces profinis ; alors :*

- *Le morphisme $X \to X \times_{Y^{\{0\}}} Y^{\Delta[1]}$ est une equivalence faible de $\hat{\mathcal{S}}$.*
- *Le morphisme $X \times_{Y^{\{0\}}} Y^{\Delta[1]} \to Y^{\{1\}}$ est une fibration de $\hat{\mathcal{S}}$ si Y est fibrant.*

Demonstration La demonstration du premier point est analogue a celle de la proposition 5 de [Q, II,§2] : Il existe une homotopie simpliciale de la composee $d^1s^0 : \Delta[1] \to \Delta[1]$ a l'identite de $\Delta[1]$ relativement a d^1, c'est a dire un morphisme $\Delta[1] \times \Delta[1] \to \Delta[1]$ dont la restriction a $\Delta[1] \times \{0\}$ coïncide avec le compose $\Delta[1] \to \{0\} \to \Delta[1]$, dont la restriction a $\Delta[1] \times \{1\}$ coïncide avec $\mathrm{Id}_{\Delta[1]}$ et dont la restriction a $\{0\} \times \Delta[1]$ se factorise par la projection $\{0\} \times \Delta[1] \to \{0\} \times \{0\}$. On en deduit que le morphisme $X \times_{Y^{\{0\}}} Y^{\{0\}} \to X \times_{Y^{\{0\}}} Y^{\Delta[1]}$ est une equivalence d'homotopie. Or le fait que $X \times \Delta[1]$ soit un objet cylindre pour X implique qu'une equivalence d'homotopie est une equivalence faible.

Pour le deuxieme point supposons Y fibrant ; alors le morphisme $Y^{\Delta[1]} \to Y^{\{0,1\}}$ est une fibration dans $\hat{\mathcal{S}}$. On en deduit que le morphisme $X \times_{Y^{\{0\}}} Y^{\Delta[1]} \to X \times_{Y^{\{0\}}} Y^{\{0,1\}} \simeq X \times Y^{\{1\}}$ est une fibration. Maintenant si X est fibrant alors la projection $X \times Y \to Y$ est une fibration. □

On definit la fibre homotopique d'un diagramme $X \to Y \leftarrow Z$ d'espaces profinis comme le produit fibre dans $\hat{\mathcal{S}}$ du diagramme

$$\mathrm{R}X \times_{\mathrm{R}Y^{\{0\}}} (\mathrm{R}Y)^{\Delta[1]} \to \mathrm{R}Y^{\{1\}} \leftarrow \mathrm{R}Z \times_{\mathrm{R}Y^{\{0\}}} (\mathrm{R}Y)^{\Delta[1]} :$$

(ou $\mathrm{R}X$, $\mathrm{R}Y$ et $\mathrm{R}Z$ designent les resolutions fibrantes de X, Y et Z). Il s'interprete comme le derive droit en $X \to Y \leftarrow Z$ du produit fibre dans $\hat{\mathcal{S}}$ [DwS, 10.12].

Proposition 3.3 *Soit $X \to Y \leftarrow Z$ un diagramme entre espaces profinis. Supposons que X, Y et Z sont fibrants et que le morphisme $Z \to Y$ est une fibration, alors le morphisme de $X \times_Y Z$ dans le produit fibre homotopique de $X \to Y \leftarrow Z$ est une equivalence d'homotopie.*

La proposition est consequence de la proposition 3.2 et du lemme suivant [GJ, II, lemma 8.10].

Lemme 3.4 *Soient $X \to Y \leftarrow Z$ et $X' \to Y' \leftarrow Z'$ deux diagrammes entre espaces profinis fibrants et $X \to X'$, $Y \to Y'$, $Z \to Z'$ des equivalences faibles commutant avec les morphismes des diagrammes. On suppose que les morphismes $Z \to Y$ et $X' \to Y'$ sont des fibrations de $\hat{\mathcal{S}}$. Alors le morphisme $X \times_Y Z \to X' \times_{Y'} Z'$ est une equivalence faible.*

Cas particulier Soit Y un espace profini pointe fibrant et prenons pour X et Z l'espace profini pointe egal au point. Les propositions 3.2 et 3.3 montrent que le morphisme $\mathrm{pt} \to \mathrm{pt} \times_{Y \times \{0\}} Y^{\Delta[1]}$ induit une equivalence faible de l'espace de lacets ΩY dans le produit fibre homotopique du diagramme $\mathrm{pt} \to Y \leftarrow \mathrm{pt}$.

Notre strategie pour etudier la cohomologie *modulo* p continue d'un produit fibre homotopique est de comparer celui-ci avec la limite d'un diagramme filtrant de produits fibres d'espaces p-finis auquel on associera un diagramme de suites spectrales d'Eilenberg-Moore.

Precisons : On associe d'abord au diagramme $X \to Y \leftarrow Z$ le diagramme des pro-p-completes $\hat{X}(-) \to \hat{Y}(-) \leftarrow \hat{Z}(-)$. On modifie ensuite les categories index de $\hat{X}(-)$, $\hat{Y}(-)$ et $\hat{Z}(-)$ de sorte que les morphismes $\hat{X}(-) \to \hat{Y}(-)$ et $\hat{Z}(-) \to \hat{Y}(-)$ soient des transformations naturelles entre diagrammes filtrants d'espaces (cf [AM, appendice, §3]). Nous en rappelons l'argument :

Soient $X(-)$ un pro-objet de categorie index I, J une autre categorie petite et filtrante et $\phi: J \to I$ un foncteur. Les identites de $X(\phi(j))$, j decrivant J, induisent un morphisme de pro-objets $X(-) \to X\phi(-)$.

Lemme 3.5 *Soit $X(-) \to Y(-)$ un morphisme entre pro-objets. Notons I_X et I_Y leurs categories index respectives. Il existe une petite categorie filtrante J, des foncteurs $\phi: J \to I_X$ et $\psi: J \to I_Y$ et une transformation naturelle $X\phi \to Y\psi$ tels que les morphismes $X(-) \to X\phi(-)$ et $Y(-) \to Y\psi(-)$ soient des pro-isomorphismes et tels que le diagramme de pro-objets*

$$\begin{tikzcd} X(-) \arrow[r] \arrow[d] & Y(-) \arrow[d] \\ X\phi(-) \arrow[r] & Y\psi(-) \end{tikzcd}$$

commute.

Demonstration Soit J la categorie definie comme suit :

- ses objets sont les triplets $(i, j, X(i) \to Y(j))$, (i, j) decrivant $I_X \times I_Y$, tels que le morphisme $X(i) \to Y(j)$ represente le morphisme $X(-) \to Y(j)$,
- un morphisme d'un objet $(i, j, X(i) \to Y(j))$ dans un objet $(i', j', X(i') \to Y(j'))$ est un couple de morphismes $(i \to i', j \to j')$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X(i) & \to & Y(j) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(i') & \to & Y(j') \end{array}$$

commute.

On note α et β les foncteurs evidents $J \to I_X$ et $J \to I_Y$. Alors J est une categorie petite et filtrante, les images de J dans I_X et I_Y sont cofinales de sorte que les morphismes $X(-) \to X\alpha(-)$ et $Y(-) \to Y\beta(-)$ sont des pro-isomorphismes (cf [AM, Appendice, §3]) et on dispose d'une transformation naturelle $X\alpha \to Y\beta$ satisfaisant aux conditions de l'enonce. □

Observons que, β etant fixe, le J-diagramme $X\alpha$ est fonctoriel en le I_X-diagramme X. En iterant le procede on voit que si $X(-) \to Y(-) \leftarrow Z(-)$ est un diagramme entre pro-objets, il existe une categorie filtrante J, des foncteurs $\alpha : J \to I_X$, $\beta : J \to I_Y$ et $\gamma : J \to I_Z$ induisant des pro-isomorphismes $X(-) \to X\alpha(-)$, etc. et il existe des transformations naturelles $X\alpha \to Y\beta$ et $Z\gamma \to Y\beta$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X(-) & \to & Y(-) & \leftarrow & Z(-) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X\alpha(-) & \to & Y\beta(-) & \leftarrow & Z\gamma(-) \end{array}$$

soit commutatif.

Revenons au produit fibre homotopique d'un diagramme $X \to Y \leftarrow Z$ d'espaces profinis. Ce qui precede permet de conclure que le diagramme $\mathrm{R}X \to \mathrm{R}Y \leftarrow \mathrm{R}Z$ est limite filtrante de diagrammes $\hat{X}(\alpha(j)) \to \hat{Y}(\beta(j)) \leftarrow \hat{Z}(\gamma(j))$ entre espaces p-finis. Le produit fibre du diagramme

$$\mathrm{R}X \times_{\mathrm{R}Y} \mathrm{R}Y^{\Delta[1]} \to \mathrm{R}Y \leftarrow \mathrm{R}Z \times_{\mathrm{R}Y} \mathrm{R}Y^{\Delta[1]}$$

est alors la limite filtrante des produits fibres des diagrammes entre espaces p-finis

$$\hat{X}(\alpha(j)) \times_{\hat{Y}(\beta(j))} \hat{Y}(\beta(j))^{\Delta[1]} \to \hat{Y}(\beta(j)) \leftarrow \hat{Z}(\gamma(j)) \times_{\hat{Y}(\beta(j))} \hat{Y}(\beta(j))^{\Delta[1]} :$$

Nous somme prêts a mettre en place la suite spectrale d'Eilenberg-Moore.

4 Suite spectrale d'Eilenberg-Moore et cohomologie continue des espaces de lacets

4.1 Construction

Nous suivons l'approche geometrique de Rector [R], voir aussi [Bou] pour une comparaison avec la construction classique.

Soit $X \to Y \leftarrow Z$ un diagramme entre espaces profinis ; on lui associe le diagramme cosimplicial d'espaces profinis donne par la construction cobar geometrique, qu'on note $\mathrm{B}^\bullet(X \to Y \leftarrow Z)$ ou plus simplement $\mathrm{B}^\bullet$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïte : $\mathrm{B}^n = X \times Y^n \times Z$ pour $n \geq 0$, et la coaugmentation $X \times_Y Z \to \mathrm{B}^0$ (cf [R]).

Rappelons qu'on definit le complexe normalise $\mathrm{N}_\bullet A_\bullet$ d'un objet simplicial $A_\bullet$ d'une categorie abelienne comme le complexe ayant pour objet en degre n l'intersection des noyaux des faces d_i, $1 \leq i \leq n$, et pour differentielle le morphisme induit par d_0. Ce complexe est isomorphe au complexe ayant pour objet en degre n le quotient de A_n par l'image des degenerescences et pour differentielle le morphisme induit par la somme alternee des faces. Le n-ieme objet d'homologie $\mathrm{H}_n\mathrm{N}A$ du complexe $\mathrm{N}_\bullet A_\bullet$ s'identifie au n-ieme objet d'homotopie $\pi_n A$ de l'objet simplicial $A_\bullet$ et est isomorphe au n-ieme objet d'homologie du complexe $(A_n, \sum(-1)^i \mathrm{d}_i)$. (On a une equivalence d'homotopie canonique entre les complexes $\mathrm{N}_\bullet A_\bullet$ et $A_\bullet$.) Voir par exemple [May, §22].

On definit les espaces profinis pointes $\mathrm{N}^0\mathrm{B} = \mathrm{B}^0_+$ et $\mathrm{N}^n\mathrm{B} = \mathrm{B}^n/(\mathrm{Im}(\mathrm{d}^1) \cup \dots \cup \mathrm{Im}(\mathrm{d}^{n-1}))$ pour $n \geq 1$. Le morphisme $\mathrm{d}^0 : \mathrm{B}^n \to \mathrm{B}^{n+1}$ induit un morphisme $\mathrm{N}^n\mathrm{B} \to \mathrm{N}^{n+1}\mathrm{B}$ telle que le compose $\mathrm{N}^n\mathrm{B} \to \mathrm{N}^{n+1}\mathrm{B} \to \mathrm{N}^{n+2}\mathrm{B}$ est le morphisme constant. Le complexe induit en cohomologie continue reduite par la suite $\mathrm{N}^0\mathrm{B} \to \mathrm{N}^1\mathrm{B} \to \cdots$ s'identifie au normalise $\mathrm{N}_\bullet\mathrm{H}^*\mathrm{B}^\bullet$ du groupe abelien gradue simplicial $\mathrm{H}^*\mathrm{B}^\bullet$.

On construit ensuite inductivement une suite d'espaces profinis pointes X^n comme suit : On pose $X^{-1} = (X \times_Y Z)_+$. La composee $X^{-1} \to \mathrm{N}^0\mathrm{B} \to \mathrm{N}^1\mathrm{B}$ est le morphisme constant. Supposons construit X^{n-1} avec un morphisme $X^{n-1} \to \mathrm{N}^n\mathrm{B}$ telle que la composee avec $\mathrm{N}^n\mathrm{B} \to \mathrm{N}^{n+1}\mathrm{B}$ soit constante. Notons N'^n l'espace profini pointe $(X^{n-1} \wedge \Delta[1]_+) \cup_{X^{n-1} \wedge \{1\}_+} \mathrm{N}^n\mathrm{B}$. Le morphisme $X^{n-1} \to \mathrm{N}^n\mathrm{B}$ s'ecrit comme la compose de la cofibration $X^{n-1} \to N'^n$ avec l'equivalence faible $N'^n \to \mathrm{N}^n\mathrm{B}$. On definit X^n comme le quotient de N'^n par X^{n-1}. La composee $N'^n \to \mathrm{N}^n\mathrm{B} \to \mathrm{N}^{n+1}\mathrm{B}$ se factorise par $N'^n \to X^n$ et $X^n \to \mathrm{N}^{n+1}\mathrm{B}$ verifie l'hypothese de recurrence.

On obtient ainsi une suite de cofibrations $X^{n-1} \to N^{0n} \to X^n$ entre espaces profinis pointes et d'equivalences faibles $N^{0n} \to \mathrm{N}^n\mathrm{B}$.

Posons $A^{-s,*} = \mathrm{H}^{*+s+1}X^s$ pour $-s \leq 1$, $A^{-s,*} = A^{1,*} = \mathrm{H}^*(X \times_Y Z)_+$ pour $-s > 1$ et $E_1^{-s,*} = \mathrm{H}^{*+s}\mathrm{N}^sB$.

On a un triangle exact

$$\begin{tikzcd} A^{-s+1,*} \arrow[rr] & & A^{-s,*} \arrow[dl] \\ & E_1^{-s,*} \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

ou $A^{-s,*} \to E_1^{-s,*}$ est un morphisme de bidegre $(0,1)$, donc une suite spectrale $(E_r, \mathrm{d}_r : E_r^{-s,t} \to E_r^{-s+r,t+1})$ verifiant : (Cf les lemmes 5.6, 5.9 et le theoreme 6.1 de [Boa].)

- Le terme E_1^s est nul pour tout $s > 0$ donc la suite $(E_r^{-s})_r$ est une suite d'epimorphismes pour $r > s$. On pose $E_\infty^{-s} = \mathrm{colim}_r E_r^{-s}$.
- Le groupe abelien gradue $A^1 = \mathrm{H}^* X \times_Y Z$ a une filtration naturelle $0 \subset \mathrm{F}_0A^1 \subset \mathrm{F}_{-1}A^1 \subset \cdots \subset A^1$ definie par $\mathrm{F}_{-s} = \mathrm{Ker}(A^1 \to A^{-s})$. On a un epimorphisme $E_\infty^{-s} \twoheadrightarrow \mathrm{F}_{-s}A^1/\mathrm{F}_{-s+1}A^1$ et en particulier un morphisme de coin $E_r^0 \twoheadrightarrow \mathrm{F}_0A^1 \subset A^1$.
- Les conditions suivantes sont equivalentes :
  (1) La filtration de A^1 est exhaustive et le morphisme $E_\infty^{-s} \to \mathrm{F}_{-s}A^1/\mathrm{F}_{-s+1}A^1$ est un isomorphisme pour tout s.
  (2) Le groupe abelien gradue $\mathrm{colim}_s A^{-s}$ est nul.

On reindexe la suite spectrale en posant $\mathrm{E}_r^{-s,t} = E_r^{-s,t+s}$ de sorte que le terme E_1 est donne par

$$\mathrm{E}_1^{-s,t} = \mathrm{H}^t\mathrm{N}^s\mathrm{B} = \mathrm{N}_s\mathrm{H}^t\mathrm{B}$$

et la differentielle d_r est de bidegre $(r, 1-r)$.

On appelle cette suite spectrale la suite spectrale d'Eilenberg-Moore en cohomologie *modulo p* continue associee au diagramme $X \to Y \leftarrow Z$.

4.2 Convergence

Le theoreme 3.1 de [Sh], qui s'appuie sur le theoreme de convergence forte de Dwyer [Dw], entraîne la suivante :

Proposition 4.1 *Soit $X \to Y \leftarrow Z$ un diagramme entre espaces p-finis tel que $Z \to Y$ est une fibration, alors la suite spectrale d'Eilenberg-Moore associee converge fortement vers la cohomologie modulo p du produit fibre $X \times_Y Z$.*

Soit maintenant $X \to Y \leftarrow Z$ un diagramme entre espaces profinis quelconques. Le morphisme de ce diagramme dans sa "resolution fibrante" $RX \times_{RY} RY^{\Delta[1]} \to RY \leftarrow RZ \times_{RY} RY^{\Delta[1]}$ induit un isomorphisme au niveau des termes E_2 des suites spectrales d'Eilenberg-Moore. La proposition qui precede, la discussion sur les produits fibres et l'exactitude des colimites filtrantes entraînent :

Proposition 4.2 *Soit $X \to Y \leftarrow Z$ un diagramme entre espaces profinis. La suite spectrale d'Eilenberg-Moore associee converge vers la cohomologie modulo p continue de son produit fibre homotopique.*

Cas particulier Soit X un espace profini pointe fibrant. La suite spectrale d'Eilenberg-Moore associee au diagramme $pt \to X \leftarrow pt$ converge vers la cohomologie *modulo* p continue de l'espace profini de lacets ΩX.

4.3 Structure de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore

Rappelons que pour X et Y deux espaces profinis on dispose d'un isomorphisme canonique $H^* X \otimes H^* Y \to H^* X \times Y$.

L'objet gradue simplicial $H^* B_\bullet$ s'identifie donc au produit tensoriel au dessus de $H^* Y$ de $H^* X$ avec la resolution simplicial canonique de $H^* Z$ comme $H^* Y$-module. Notons $\bar{H}^* Y$ le conoyau de l'unite $\mathbb{F}_p \to H^* Y$. Le complexe normalise $N H^* B_\bullet$ s'identifie au produit tensoriel au dessus de $H^* Y$ de $H^* X$ avec la resolution bar reduite de $H^* Z$ comme $H^* Y$-module (cf [Mac, Chap. X, §2]). Autrement dit on a un isomorphisme canonique

$$E_1^{-s,*} = H^* X \otimes (\bar{H}^*)^{\otimes s} \otimes H^* Z .$$

Le terme $E_2^{-s,*}$ s'identifie a l'objet $\mathrm{Tor}_s^{H^* Y}(H^* X, H^* Z)$ et on a un morphisme de coin

$$E_2^{0,*} = H^* X \otimes_{H^* Y} H^* Z \twoheadrightarrow E_\infty^{0,*} \to F_0 H^* X \times_Y Z \subset H^* X \times_Y Z .$$

Cas particulier Supposons $X = Z = pt$ et Y fibrant. Le morphisme $X \to Y$ munit Y d'un point base et on a un isomorphisme canonique $\bar{H}^* Y = \mathrm{Ker}(H^* Y \to H^* pt)$. Le terme $E_1^{-s,*}$ s'identifie a $(\bar{H}^* Y)^{\otimes s}$. La differentielle $d_1 : E_1^{-1,*} \to E_1^{0,*} = \mathbb{F}_p$ est nulle. La differentielle $d_1 : E_1^{-2,*} \to E_1^{-1,*}$ est donnee par le cup produit restreint a H^*Y. La filtration de la cohomologie continue de ΩY induit une filtration de la cohomologie continue reduite de ΩY et on dispose de morphismes de coin

$$\mathbb{F}_p = E_1^{0,*} = E_\infty^{0,*} = F_0 H^*\Omega Y = \mathbb{F}_p$$

et

$$H^*Y = E_1^{-1,*} \twoheadrightarrow E_\infty^{-1,*} = F_{-1}H^*\Omega Y\,.$$

Venons en a la structure de module sur l'algebre de Steenrod.

Le triangle exact

$$\begin{tikzcd}
A^{-s+1,*} \arrow[rr] & & A^{-s,*} \arrow[dl] \\
& E_1^{-s,*} \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

dont est issue la suite spectrale est un triangle exact de modules instables sur l'algebre de Steenrod. Les groupes abeliens gradues $E_r^{-s,*}$ sont donc des modules instables pour tous r,s de facon compatible avec l'aboutissement et la differentielle $d_r : E_r^{-s,*} \to \Sigma^{r-1}E_r^{-s+r,*}$ est un morphisme de modules instables.

Donnons nous maintenant deux diagrammes $X \to Y \leftarrow Z$ et $X' \to Y' \leftarrow Z'$ entre espaces profinis et formons leur produit $X \times X' \to Y \times Y' \leftarrow Z \times Z'$.

La suite spectrale d'Eilenberg-Moore associee au diagramme $X \times X' \to Y \times Y' \leftarrow Z \times Z'$ s'identifie au produit tensoriel des suites spectrales associees a $X \to Y \leftarrow Z$ et $X' \to Y' \leftarrow Z'$. En particulier pour tout diagramme $X \to Y \leftarrow Z$, les diagonales $X \to X \times X$, $Y \to Y \times Y$, etc. font de la suite spectrale associee au diagramme une suite spectrale de F_p-algebres bigraduees compatible avec la structure multiplicative de l'aboutissement.

Remarque Chaque espace profini formant le diagramme $X \to Y \leftarrow Z$ est la limite filtrante de ses quotients finis simpliciaux. En utilisant le lemme 3.5 on obtient que le diagramme lui même est la limite filtrante de diagrammes $X(i) \to Y(i) \leftarrow Z(i)$ entre ensembles finis simpliciaux. La suite spectrale d'Eilenberg-Moore en cohomologie *modulo p* associee a $X \to Y \leftarrow Z$ s'identifie alors a la colimite (filtrante) des suites spectrales d'Eilenberg Moore classiques associees aux diagrammes $X(i) \to Y(i) \leftarrow Z(i)$ de facon compatible avec sa structure.

5 Rappels sur la cohomologie *modulo p* des espaces fonctionnels de source le classifiant du groupe cyclique d'ordre p

On note $B\mathbb{Z}/p$ le classifiant du groupe cyclique d'ordre p. C'est un ensemble fini simplicial representant le foncteur qui associe a un espace profini l'ensemble de ses 1-cocycles continus a coefficients dans $\mathbb{Z}/p$.

Rappelons que $\mathcal{U}$ designe la categorie des modules instables sur l'algebre de Steenrod *modulo p* et notons H la cohomologie *modulo p* de $B\mathbb{Z}/p$. Le foncteur $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $M \mapsto H \otimes M$ admet un adjoint a gauche note T (voir [La]). Pour tout espace profini X, l'evaluation $B\mathbb{Z}/p \times \mathrm{hom}(B\mathbb{Z}/p, X) \to X$ induit un morphisme naturel $TH^*X \to H^*\mathrm{hom}(B\mathbb{Z}/p, X)$.

Theoreme 5.1 ([La], [DrS]) *Pour tout espace p-fini X le morphisme $TH^*X \to H^*\mathrm{hom}(B\mathbb{Z}/p, X)$ est un isomorphisme.*

Morel en deduit le theoreme suivant :

Theoreme 5.2 [Mo] *Soit X un espace profini fibrant ; alors le morphisme $TH^*X \to H^*\mathrm{hom}(B\mathbb{Z}/p, X)$ est un isomorphisme.*

Indiquons comment le dernier theoreme se deduit du precedent : on observe d'abord que lorsque X est fibrant dans $\hat{\mathcal{S}}$ le morphisme de X dans sa resolution fibrante $RX = \lim \hat{X}(-)$ est une equivalence d'homotopie simpliciale. On en deduit que pour X fibrant le morphisme $\mathrm{hom}(B\mathbb{Z}/p, X) \to \mathrm{hom}(B\mathbb{Z}/p, RX)$ est une equivalence d'homotopie donc induit un isomorphisme en cohomologie *modulo p* continue. On observe ensuite que le morphisme $TH^*RX \to H^*\mathrm{hom}(B\mathbb{Z}/p, RX)$ est la colimite des morphismes $TH^*\hat{X}(i) \to H^*\mathrm{hom}(B\mathbb{Z}/p, \hat{X}(i))$ ou les $\hat{X}(i)$ sont des espaces p-finis.

Soit maintenant $\bar{H}$ la cohomologie *modulo p* reduite de $B\mathbb{Z}/p$. Le foncteur $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $M \mapsto \bar{H} \otimes M$ admet egalement un adjoint a gauche, le foncteur de Lannes *reduit* note $\bar{T}$. La decomposition $H = \mathbb{F}_p \oplus \bar{H}$ induit pour toute module instable M un scindement canonique :

$$TM = M \oplus \bar{T}M :$$

On peut comme precedemment donner une interpretation geometrique de $\bar{T}$:

Soit X un espace profini, RX le remplacement fibrant de X et Y la cofibre du morphisme $RX \to \mathrm{hom}(B\mathbb{Z}/p, RX)$ induit par le morphisme $B\mathbb{Z}/p \to \mathrm{pt}$.

L'inclusion du point dans $B\mathbb{Z}/p$ fait de RX un retracte de $\mathbf{hom}(B\mathbb{Z}/p, RX)$ de sorte qu'on a une suite exacte courte

$$0 \to H Y \to H\, \mathbf{hom}(B\mathbb{Z}/p, RX) \to H X \to 0.$$

L'isomorphisme $\mathrm{T}H X \to H\, \mathbf{hom}(B\mathbb{Z}/p, RX)$ induit alors un isomorphisme naturel

$$\mathrm{T}H X \to H Y.$$

Corollaire 5.3 *Soit M un module instable. Si M est la cohomologie continue reduite d'un espace profini X, il est de même pour $\mathrm{T}M$.*

6 Filtrations de la categorie $\mathcal{U}$ (voir [Sc1] et [Ku])

Dans toute cette section, on se specialise au cas $p = 2$.

Rappelons qu'une sous-categorie abelienne $\mathcal{D}$ d'une categorie abelienne $\mathcal{C}$ est dite de Serre, si pour toute suite exacte courte $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ telle que A et C sont dans $\mathcal{D}$, alors B est egalement dans $\mathcal{D}$.

6.1 La filtration nilpotente

Soit M un module instable et m un entier naturel. Pour tout element x de M, on note $|x|$ le degre de x. On definit des operateurs

$$\mathrm{Sq}_m : M \longrightarrow M, x \mapsto \mathrm{Sq}^{|x|-m} x.$$

On dit qu'un element $x \in M$ est s-nilpotent si :

$$\forall 0 \quad t < s, \exists c \in \mathbb{N}, (\mathrm{Sq}_t)^c x = 0.$$

Dans le cas ou x est s-nilpotent, mais n'est pas $(s+1)$-nilpotent, on dit que x est exactement s-nilpotent.

Un element exactement 0-nilpotent est dit reduit. Un module instable est dit reduit si tous ses elements sont reduits. En termes plus simples, un module instable M est reduit si et seulement si l'application

$$\mathrm{Sq}_0 : M \longrightarrow M, x \mapsto \mathrm{Sq}^{|x|} x$$

est injective. Dans le cas ou M est muni d'une structure d'algebre compatible, l'elevation au carre coïncide avec Sq_0 et M est reduit comme module instable si et seulement si M est reduit comme algebre, *i.e.* n'a pas d'elements nilpotents.

Un module instable est s-nilpotent si tous ses elements sont au moins s-nilpotents. La sous-categorie pleine de $\mathcal{U}$ dont les objets sont les modules s-nilpotents est de Serre et stable par colimites. Cette sous-categorie, notee $\mathcal{N}il_s$, coïncide avec la plus petite sous-categorie de Serre stable par colimite qui contient tous les modules qui sont des suspensions s-iemes.

Soit M un module instable. On definit M_s comme le plus grand sous-module de M qui est dans $\mathcal{N}il_s$. Les sous-modules $\{M_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ forment une filtration decroissante naturelle et separee de M. Le sous-quotient M_s/M_{s+1} est la suspension s-ieme $\Sigma^s \mathrm{R}_s M$ d'un module reduit $\mathrm{R}_s M$.

Soient M et N deux modules instables. On a $(M\otimes N)_n \cong \bigoplus_{i+j=n} M_i\otimes N_j$. Par consequent, on a pour tout n la formule $R_n(M\otimes N)\cong\bigoplus_{i+j=n}\mathrm{R}_i M\otimes\mathrm{R}_j N$ (voir [Ku, Proposition 2.5, (1)]). En particulier on a un isomorphisme naturel $\mathrm{R}_n\Sigma M\cong\mathrm{R}_{n-1}M$.

On dispose egalement d'une caracterisation du degre de nilpotence d'un module instable en terme de foncteur de Lannes: un module instable M est s-nilpotent si et seulement si pour tout n, $\mathrm{T}^n M$ est $(s-1)$-connexe (*cf* [Sc1, Definition-Proposition 6.1.1, p. 139]).

6.2 La filtration de Krull

La filtration de Krull $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la categorie $\mathcal{U}$ est definie par : $\mathcal{U}_n$ est la sous-categorie pleine de $\mathcal{U}$ formee des objets annules par $\bar{\mathrm{T}}^n$.

C'est une filtration croissante par des sous-categories de Serre stables par colimites et suspensions, qui est exhaustive au sens ou la plus petite sous-categorie de $\mathcal{U}$ stable par colimite et contenant tous les $\mathcal{U}_n$ pour tout entier n est $\mathcal{U}$ elle-même.

La filtration de Krull induit sur chaque module instable une filtration croissante naturelle et complete par des sous-modules qui sont dans $\mathcal{U}_n$. Dans le cas des modules reduits, cette filtration coïncide avec la *filtration par le poids*, dont la definition suit.

Definition 6.1 (Poids d'un module reduit) (1) Soit n un entier naturel, on definit $\alpha(n)$ comme le nombre de 1 dans l'ecriture diadique de n.

(2) Un module instable reduit est de poids inferieur ou egal a n s'il est nul dans les degres i tels que $\alpha(i) > n$.

Un module reduit est ltre par ses sous-modules de poids n maximaux. Cette ltration est exhaustive. Le poids d'un module instable reduit M est note $w(M)$. La caracterisation suivante est extraite de [FS].

Proposition 6.2 (Voir [FS]) *Un module reduit est dans U_n si et seulement s'il est de poids inferieur ou egal a n.*

Remarquons en n que si M est dans U_n et si N est dans U_m, alors M N est dans U_{n+m}.

7 Demonstration du theoreme 1.2

Dans cette section, on xe $p = 2$.

On demontre dans cette section le theoreme 1.2 en reprenant la preuve de L. Schwartz. Ceci demontre la *conjecture de non realisation forte* pour $p = 2$ en toute generalite puisque la cohomologie *modulo* 2 d'un espace est aussi la cohomologie *modulo* 2 continue de son complete pro ni.

On suppose qu'il existe un espace pro ni dont la cohomologie *modulo* 2 continue n'est pas localement nie, et qui est dans cran ni de la ltration de Krull. On va trouver une contradiction. La premiere etape dans ce sens est *la reduction de N. Kuhn* : on va montrer qu'il existe alors un espace pro ni dont la cohomologie continue est dans U_1 mais n'est pas dans U_0 (*i.e.* n'est pas localement nie).

7.1 La reduction de N. Kuhn

Proposition 7.1 (Reduction de Kuhn) *S'il existe un entier n 1 et un espace pro ni dont la cohomologie* modulo 2 *continue est dans U_n mais n'est pas dans U_{n-1}, alors il existe un espace pro ni dont la cohomologie modulo 2 continue est dans U_1 mais n'est pas dans U_0.*

Demonstration Soit X un espace pro ni dont la cohomologie continue M est dans U_n mais n'est pas dans U_{n-1} et supposons $n > 1$. Alors $\mathrm{T}M$ est dans U_{n-1} mais pas dans U_{n-2}, et est la cohomologie continue reduite d'un espace pro ni d'apres le corollaire 5.3. On montre ainsi l'enonce par une recurrence descendante. □

7.2 Construction des classes $_{i;d}$ (d'apres [Sc2])

On s'est ramene a considerer un espace profini X dont la cohomologie continue est dans U_1 mais n'est pas localement fini. On utilise la structure tres particuliere de ces modules pour construire des classes de la cohomologie continue d'un espace de lacets iteres de X qui ont des proprietes contradictoires.

Soit X un espace profini dont la cohomologie continue est dans U_1 mais n'est pas localement finie. Le module instable TH X est non nul par definition. Soit $(d-1)$ sa connexite.

Remarquons que si un espace profini X a sa cohomologie continue dans U_1 mais pas dans U_0, il en est de même pour toutes ses suspensions. En effet, le foncteur T est exact et commute aux suspensions et aux colimites.

On peut donc supposer que X est une suspension et, par consequent, on peut supposer que d 1 et que tous les cup-produits sont nuls dans la cohomologie continue reduite de X.

On definit pour tout entier n le n-squelette $\mathrm{Sk}_n Z$ d'un espace profini Z comme le sous-espace profini engendre par les simplexes non degeneres de dimension inferieure ou egale a n. Si Z est la limite d'un diagramme filtrant d'ensembles finis simpliciaux $Z(-)$, alors $\mathrm{Sk}_n Z$ est la limite des n-squelettes des $Z(i)$.

On voit que la cohomologie continue reduite du quotient de X par son $(d-1)$-squelette est un module instable $(d-1)$-connexe qui ne differe de la cohomologie continue de X que par un module borne, donc localement fini. Par consequent TH X = TH $(X/\mathrm{Sk}_{d-1}X)$. Ainsi $X/\mathrm{Sk}_{d-1}X$ est egalement un espace profini dont la cohomologie continue est dans U_1 mais n'est pas localement finie. De plus $X/\mathrm{Sk}_{d-1}X$ est encore une suspension donc tous les cup-produits sont nuls dans sa cohomologie continue reduite.

On peut donc aussi supposer que H X est $(d-1)$-connexe. L'intérêt de cette demarche est la simplification suivante : un module instable est s-nilpotent si et seulement si $\mathrm{T}^n M$ est $(s-1)$-connexe pour tout n (voir la section 6). En vertu du scindement $\mathrm{T}M = M \quad \mathrm{T}M$, il apparaît que M est s-nilpotent si et seulement si M est $(s-1)$-connexe et $\mathrm{T}^n M$ est $(s-1)$-connexe pour tout n. En particulier si M est dans U_1, M est s-nilpotent si et seulement si M et $\mathrm{T}M$ sont $(s-1)$-connexes.

Il resulte de toutes les considerations precedentes qu'on peut supposer que H X est dans U_1 mais n'est pas localement finie, est $(d-1)$-connexe, est d-nilpotente et possede une structure d'algebre triviale.

Soit F(1) le sous-module instable de H $B\mathbb{Z}/2$ engendre par la classe de degre un. La construction des classes $_{i;d}$ annoncee dans l'introduction repose la proposition suivante.

Proposition 7.2 *Soit M un module qui est dans $\mathcal{U}_1$ mais n'est pas localement ni. Soit l'unite d'adjonction $M \to \mathrm{T}M$ H $B\mathbb{Z}/2$. Alors factorise par le sous-module* $\mathrm{T}M$ F(1). *De plus le noyau et le conoyau de*

$$: M \to \mathrm{T}M \quad \mathrm{F}(1)$$

sont localement nis.

Demonstration Dans [Sc2], ce resultat est demontre sous l'hypothese que M est de type ni. Tout module instable est colimite ltrante de ses sous-modules de type ni. Etant donne que les colimites ltrantes sont exactes, commutent aux produits tensoriels ainsi qu'au foncteur T, et du fait que $\mathcal{U}_0$ est stable par colimites, il vient que ce resultat est vrai en l'absence de toute hypothese de nitude. □

Lemme 7.3 *Il existe un entier i_d tel que pour tout i i_d, il existe des classes $_{i;d}$ dans* H X *qui veri ent :*

- *la classe $_{i;d}$ est de degre $2^i + d$;*
- *la classe $_{i;d}$ est exactement d-nilpotente,*
- $\mathrm{Sq}^{2^i} \; _{i;d} = \; _{i+1;d}$:

Demonstration Posons M = H X. On applique la proposition 7.2. et on obtient une suite exacte :

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow \mathrm{T}M \quad \mathrm{F}(1) \longrightarrow L' \longrightarrow 0$$

ou les modules instables L et L' sont localement nis. Comme TM est $(d-1)$-connexe, il existe $\;2$ TM non nul et de degre d.

Etant donne que TM est localement ni, il existe une borne entiere h telle que toute operation de Steenrod de degre plus grand que h annule l'element de TM, *i.e.* $A_2{}^{h}: \; = 0$.

Par consequent, pour tout entier i tel que $2^i \quad 2h$, on a par la formule de Cartan,

$$\mathrm{Sq}^{2^i} \quad u^{2^i} = \quad u^{2^{i+1}} : \qquad (1)$$

Soit un entier tel que 2 $\;2h$.

Il suit de (1) et du fait que L^0 est localement ni qu'il existe une borne ^{0} , telle que les classes u^{2^i} de TM F(1) sont d'image nulle dans L^0 pour $i >$ ^{0}. Ainsi, l'element u^{2^i} provient pour i ^{0} d'un element $^0_{i;d}$ de M, *i.e.* $(^0_{i;d}) =$ u^{2^i} .

On choisit alors :

(1) $i_d =$ ^{0},

(2) $_{i_d;d} =$ $^0{}_{i_d;d}$,

(3) pour tout i i_d, $_{i+1;d} = \mathrm{Sq}^{2^i}$ $_{i;d}$.

Ces classes veri ent le premier et le troisieme point du lemme 7.3 par construction. Le second point decoule du fait suivant : La formule de Cartan, l'action des carres de Steenrod Sq^i sur F(1) et le fait que 2 ^{0} 2 2h entra^nent

$$8c \quad 0; 8t < d; \; (\mathrm{Sq}^c_t \quad _{i;d}) = \mathrm{Sq}^c_t (\quad u^{2^i}) = (\mathrm{Sq}^c_t \quad) \quad u^{2^i} :$$

Or le degre de Sq^c_t est une fonction strictement croissante de c car $t < d$. Donc, pour c su samment grand, $(\mathrm{Sq}^c_t$ $_{i;d}) = 0$ car TM est localement ni. De ce fait Sq^c_t $_{i;d}$ provient de L qui est localement ni. Donc a nouveau Sq^c_t $_{i;d}$ est nul pour c su samment grand, c'est-a-dire $_{i;d}$ est t-nilpotent.

Pour $t = d$, on a

$$(\mathrm{Sq}_d \quad _{i;d}) = \mathrm{Sq}_d (\quad u^{2^i}) = \quad u^{2^{i+1}} \neq 0$$

et donc pour tout entier c,

$$(\mathrm{Sq}^c_d \quad _{i;d}) = \mathrm{Sq}^c_d (\quad u^{2^i}) = \quad u^{2^{i+c}} \neq 0$$

ce qui montre que Sq^c_d $_{i;d}$ est non nul quelque soit c. On a montre que $_{i;d}$ est exactement d-nilpotente, ce qui demontre le deuxieme point du lemme. □

7.3 Construction des classes $_{i;`}$

Pour 0 ` $d$, et pour tout $i$ $i_d$, on de nit des classes $_{i;`}$ dans la cohomologie de $\Omega^{d-`}X$ de la maniere suivante :

- les classes $_{i;d}$ sont de nies par le lemme 7.3,
- la classe $_{i;`-1}$ est la desuspension de l'image de $_{i;`}$ par l'homorphisme de coin H $\Omega^{d-`}X \longrightarrow$ H $\Omega^{d-`+1}X$.

Lemme 7.4 *Les classes* $_{i;`}$ *construites precedemment ont les proprietes suivantes, pour* $d$ ` 0 *et pour tout* i i_d *:*

(1) *la classe* ${}_{i;\ell}$ *est de degre* $2^i + \ell$,

(2) *la classe* ${}_{i;\ell}$ *est exactement* ℓ*-nilpotente,*

(3) $\mathrm{Sq}^{2^i}\ {}_{i;\ell} = \ {}_{i+1;\ell}$,

(4) *il existe un entier* i_ℓ *tel que pour tout* $i \quad i_\ell$, *le cup-carre* ${}_{i;\ell} \cup {}_{i;\ell}$ *est nul.*

Demonstration Les trois premieres a rmations du lemme sont faciles :

le premier point resulte des de nitions,

le troisieme point est consequence des proprietes de compatibilite de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore aux operations de Steenrod,

le deuxieme point est consequence du fait qu'on a des monomorphismes (voir la proposition A.4) qui sont induits par le morphisme de coin itere :

$$\mathrm{R}_d\mathrm{H}\ X \to \mathrm{R}_{d-1}\mathrm{H}\ \Omega X \to \dots \to \mathrm{R}_\ell\mathrm{H}\ \Omega^{d-\ell}X \to \dots \to \mathrm{R}_0\mathrm{H}\ \Omega^d X$$

En e et, soit ${}_{i;\ell}$ l'image de ${}_{i;\ell}$ dans $\mathrm{R}_\ell\mathrm{H}\ \Omega^{d-\ell}X$. Les classes ${}_{i;\ell}$ sont les images successives de ${}_{i;d}$ par les monomorphismes precedents, et donc ${}_{i;\ell}$ est non nulle pour tout $\ell \quad d$. Une recurrence sur la proposition A.5 montre d'autre part que $\mathrm{H}\ \Omega^{d-\ell}X$ est au moins ℓ-nilpotent. Par consequent les classes ${}_{i;\ell}$ sont au moins ℓ-nilpotentes et reduisent non trivialement dans $\mathrm{R}_\ell\mathrm{H}\ \Omega^{d-\ell}X$. C'est dire qu'elles sont exactement ℓ-nilpotentes.

Le point 4 se demontre par une recurrence descendante, que l'on renvoie au prochain paragraphe. □

Si l'on admet ce quatrieme point, la demonstration de la conjecture de N. Kuhn est terminee, car les deuxieme et quatrieme points du lemme 7.4 sont contradictoires pour $l = 0$.

7.4 Demonstration du point 4 du lemme 7.4

Remarquons tout d'abord que par application iteree des propositions A.6 et A.5 et du corollaire A.7, on a le lemme suivant :

Lemme 7.5 *Pour* $0 \quad \ell \quad d$, *on a :*

Le module instable $\mathrm{H}\ \Omega^{d-\ell}X$ *est (au moins)* ℓ*-nilpotent,*

le module instable $\mathrm{R}_i\mathrm{F}_{-1}\mathrm{H}\ \Omega^{d-\ell}X$ *est dans* U_1 *pour* $i \quad 2\ell$ *;*

le module instable $\mathrm{R}_i\mathrm{F}_{-2}\mathrm{H}\ \Omega^{d-‘}X$ *est dans* U_2 *pour* i $2‘$*,*
si $‘$ 1 *et si* i $2‘ - 1$*, le module* $\mathrm{R}_i\mathrm{F}_{-2}\mathrm{H}\ \Omega^{d-‘}X$ *est en fait dans* U_1*.*

Pour demontrer le point 4 du lemme 7.4, on procede par recurrence descendante sur $‘$.

Soit $‘$ 1. Supposons que pour i $i_‘$, $_{i;‘}$ $[$ $_{i;‘} = 0$.

On considere la suite spectrale d'Eilenberg-Moore qui relie la cohomologie de $\Omega^{d-‘}X$ a celle de $\Omega^{d-‘+1}X$.

Alors $_{i;‘}$ $_{i;‘}$ de nit un 1-cycle, qui est un cycle permanent. En e et, $_{i;‘}$ $_{i;‘}$ est exactement $2‘$-nilpotente et l'image des di erentielles est constituee d'elements de degre de nilpotence strictement superieur a $2‘$. Soit $!_{i;‘-1}$ une classe de H $\Omega^{d-‘+1}X$ qui est detectee par le cycle permanent induit par $_{i;‘}$ $_{i;‘}$.

Lemme 7.6 *La classe* $!_{i;‘-1}$ *est au moins* $(2‘ - 2)$*-nilpotente.*

Demonstration Remarquons que cette condition est trivialement veri ee si $‘ = 1$.

Pour $‘ > 1$, la classe $!_{i;‘-1}$ est au moins $(‘ - 1)$-nilpotente car le module $\mathrm{F}_{-2}\mathrm{H}\ \Omega^{d-‘+1}$ est $(‘ - 1)$-nilpotent.

Soit $\overline{!_{i;‘-1}}^s$ l'image de $!_{i;‘-1}$ dans $\mathrm{R}_s\mathrm{H}\ \Omega^{d-‘+1}X$ pour s $2‘ - 3$. La classe $\overline{!_{i;‘-1}}^s$ est de degre $2^{i+1} + 2‘ - 2 - s$. On a

$$(2^{i+1} + 2‘ - 2 - s) \quad 2\,;$$

or $\mathrm{R}_s\mathrm{H}\ \mathrm{F}_{-2}\Omega^{d-‘+1}X$ est dans U_1, pour $‘ - 1$ s $2‘ - 3$ d'apres le lemme 7.5. De ce fait, pour $‘ - 1$ s $2‘ - 3$, $\overline{!_{i;‘-1}}^s$ est nulle et donc $!_{i;‘-1}$ est au moins $(2‘ - 2)$-nilpotente. □

Lemme 7.7 *On a l'egalite*

$$\mathrm{Sq}^{2^i}\ !_{i;‘-1} = \ _{i;‘-1}\ [\ \ _{i+1;‘-1} \quad \mathrm{mod}\ (\mathrm{F}_{-2}\mathrm{H}\ \Omega^{d-‘+1}X)_{2‘-2}\,:$$

Demonstration On a par la formule de Cartan, pour i $i_‘$

$$\mathrm{Sq}^{2^i}(\ _{i;‘}\quad _{i;‘}) = (\mathrm{Sq}^{2^i}\ _{i;‘})\quad _{i;‘} + \ _{i;‘}\quad (\mathrm{Sq}^{2^i}\ _{i;‘}) = \ _{i+1;‘}\quad _{i;‘} + \ _{i;‘}\quad _{i+1;‘}\,:$$

Or $_{i+1;‘}$ $_{i;‘} +$ $_{i;‘}$ $_{i+1;‘}$ est un cycle permanent qui n'est jamais l'image d'une di erentielle (pour des raisons de nilpotence, comme precedemment) et qui detecte $_{i+1;‘-1}$ $[$ $_{i;‘-1}$.

Ceci montre que la différence $z = \mathrm{Sq}^{2^i}\,\omega_{i,\ell-1} - {}_{i,\ell-1} \cup {}_{i+1,\ell-1}$ vit dans $\mathrm{F}_{-1}\mathrm{H}\ \Omega^{d-\ell+1}X$.

On conclut en remarquant que ces classes sont de degre $2^i + 2^{i+1} + 2\ell - 2$. Or pour $s \quad 2\ell - 2$, on a $\quad(2^i + 2^{i+1} + 2\ell - 2 - s) \quad 2$. Comme le module $\mathrm{R}_s\mathrm{F}_{-1}\mathrm{H}\ \Omega^{d-\ell+1}X$ est dans U_1 pour $s \quad 2\ell - 2$ d'apres le lemme 7.5, on en deduit l'egalite annoncee. $\square$

On deduit du lemme 7.7 qu'on a la relation

$$\mathrm{Sq}^{2^i}\mathrm{Sq}^{2^i}\,\omega_{i,\ell-1} = {}_{i+1,\ell-1} \cup {}_{i+1,\ell-1} \quad \mathrm{mod}\ (\mathrm{F}_{-2}\mathrm{H}\ \Omega^{d-\ell+1}X)_{2\ell-2}.$$

Ceci resulte de la formule de Cartan, et du fait que $\mathrm{R}_{2\ell-2}\mathrm{F}_{-2}\mathrm{H}\ \Omega^{d-\ell+1}$ est dans U_2, par le lemme 7.5.

On remarque alors que

(1) la relation $\mathrm{Sq}^{2^i}\mathrm{Sq}^{2^i}\,\omega_{i,\ell-1} = {}_{i+1,\ell-1} \cup {}_{i+1,\ell-1}$ est vraie *modulo* des termes de degre de nilpotence strictement plus grand que $2\ell - 2$,

(2) l'image $\overline{\mathrm{Sq}^{2^i}\mathrm{Sq}^{2^i}\,\omega_{i,\ell-1}}$ de $\mathrm{Sq}^{2^i}\mathrm{Sq}^{2^i}\,\omega_{i,\ell-1}$ dans $\mathrm{R}_{2\ell-2}\mathrm{F}_{-2}\mathrm{H}\ \Omega^{d-\ell+1}X$ est nulle.

Le deuxieme point provient du resultat suivant [Sc3, lemme 5.7, p. 554] :

Lemme 7.8 *Pour tout entier $n > 0$*

$$\mathrm{Sq}^{2^n}\mathrm{Sq}^{2^n} \in A(n)\mathrm{Sq}^{2^n}A(n)$$

ou $A(n)$ est la sous-algebre engendree par $\{\mathrm{Sq}^{2^i}; 0 \quad i \quad n-1\}$, et $A(n)$ est l'ideal des elements strictement positifs de $A(n)$.

Cette decomposition de l'operation de Steenrod $\mathrm{Sq}^{2^i}\mathrm{Sq}^{2^i}$ montre que $\overline{\mathrm{Sq}^{2^i}\mathrm{Sq}^{2^i}\,\omega_{i,\ell-1}}$ est de poids superieur a 3, alors que $\mathrm{R}_{2\ell-2}\mathrm{H}\ \Omega^{d-\ell+1}X$ est dans U_2, d'apres le lemme 7.5.

Ceci montre que ${}_{i+1,\ell-1} \cup {}_{i+1,\ell-1}$ est au moins $(2\ell-1)$-nilpotent et donc qu'il existe un entier c tel que

$$0 = \mathrm{Sq}^c_{2\ell-2}({}_{i+1,\ell-1} \cup {}_{i+1,\ell-1}) = {}_{i+c+1,\ell-1} \cup {}_{i+c+1,\ell-1}.$$

On peut donc choisir $i_{\ell+1} = i_\ell + c + 1$, et on aura pour tout $i \quad i_{\ell+1}$, ${}_{i,\ell-1} \cup {}_{i,\ell-1} = 0$.

A Appendice

A.1 Filtration de Krull et filtration nilpotente

Rappelons qu'on note pour M un module instable et s un entier M_s le sous-module instable de M forme des elements (au moins) s-nilpotents et $\mathrm{R}_s M$ le module $\Sigma^{-s}(M_s/M_{s+1})$ (voir la section 6.1).

La proposition suivante affirme *grosso modo* que les foncteurs R_s sont exacts a gauche *modulo* $\mathcal{N}il$.

Proposition A.1 *Soit*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

une suite exacte dans $\mathcal{U}$ *et soit* L *le conoyau de* $\mathrm{R}_s A \longrightarrow \mathrm{R}_s B$*. Pour tout entier* s*, le morphisme* $\mathrm{R}_s A \longrightarrow \mathrm{R}_s B$ *est un monomorphisme et le noyau de* $L \longrightarrow \mathrm{R}_s C$ *est constitue d'elements nilpotents.*

Demonstration On chasse dans le diagramme commutatif suivant, dont les trois colonnes sont exactes.

$$\begin{array}{ccccc} A_{s+1} & \longrightarrow & B_{s+1} & \longrightarrow & C_{s+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_s & \longrightarrow & B_s & \longrightarrow & C_s \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^s \mathrm{R}_s A & \longrightarrow & \Sigma^s \mathrm{R}_s B & \longrightarrow & \Sigma^s \mathrm{R}_s C \end{array} \tag{2}$$

Le morphisme $\mathrm{R}_s A \longrightarrow \mathrm{R}_s B$ *est un monomorphisme :* Soit x un element de $\mathrm{Ker}(\mathrm{R}_s A \longrightarrow \mathrm{R}_s B)$. Soit x_1 un element de A_s qui se projette sur $\Sigma^s x \in \Sigma^s \mathrm{R}_s A$.

Soit x_2 l'image de x_1 dans B_s. L'element x_2 se projette sur 0 dans $\Sigma^s \mathrm{R}_s B$.

Par exactitude de la seconde colonne, l'element x_2 est dans B_{s+1}, *i.e.* x_2 est $(s+1)$-nilpotent donc pour un certain entier c, on a $(\mathrm{Sq}_s)^c x_2 = 0$.

Donc par injectivite de $A_s \longrightarrow B_s$, il vient que $(\mathrm{Sq}_s)^c x_1 = 0$, *i.e.* l'element x_1 est dans A_{s+1} soit a dire que x_1 est $(s+1)$-nilpotent .

Par consequent x est nul, ce qui montre que $\mathrm{R}_s A \longrightarrow \mathrm{R}_s B$ est un monomorphisme.

Le noyau de $L \longrightarrow \mathrm{R}_s C$ *est nilpotent :* Soit x un element de $\mathrm{Ker}(\mathrm{R}_s B \longrightarrow \mathrm{R}_s C)$ et soit x_1 un relevement de $\Sigma^s x$ dans B_s. Soit x_2 l'image de x_1 dans C_s.

L'element x_2 se projette sur 0 dans ${}^s\mathrm{R}_s C$, donc x_2 est dans C_{s+1}, *i.e.* x_2 est $(s+1)$-nilpotent et pour un certain entier c, on a $(\mathrm{Sq}_s)^c x_2 = 0$.

Par consequent, l'image de $(\mathrm{Sq}_s)^c x_1$ dans C est nulle et par exactitude de la suite $A \longrightarrow B \longrightarrow C$, il existe un element x_3 de A dont l'image est $(\mathrm{Sq}_s)^c x_1$. Comme $(\mathrm{Sq}_s)^c x_1$ est au moins s-nilpotent et comme $A \to B$ est un monomorphisme, l'element x_3 est au moins s-nilpotent.

Soit ${}^s x_4$ l'image de x_3 dans ${}^s\mathrm{R}_s A$. L'image de ${}^s x_4$ dans ${}^s\mathrm{R}_s B$ est $(\mathrm{Sq}_s)^c\ {}^s x = {}^s(\mathrm{Sq}_0)^c x$. Donc l'image de x dans L est nilpotent. □

Corollaire A.2 *Soient* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *une suite exacte dans* $\mathcal{U}$*. On suppose que* A *est* ℓ*-nilpotent pour un entier* $\ell \geq 1$ *; alors le morphisme* $\mathrm{R}_s B \longrightarrow \mathrm{R}_s C$ *est un isomorphisme pour tout entier* $s < \ell$ *(et un epimorphisme pour* $s = \ell$*).*

Demonstration Le module $\mathrm{R}_s A$ est nul pour tout $s < \ell$. La proposition a rme alors que le noyau du morphisme $\mathrm{R}_s B \longrightarrow \mathrm{R}_s C$ est nilpotent pour tout $s < \ell$. Or $\mathrm{R}_s B$ est un module reduit, donc ce noyau est nul.

Pour achever la preuve, il su t de montrer que le morphisme $B_s \to C_s$ est un epimorphisme pour tout $s \leq \ell$. Soit donc s un tel entier et x un element s-nilpotent de C. Il provient d'un element x_1 de B et pour tout $s' < s$ il existe un certain entier c et un element x_2 de A tel que $(\mathrm{Sq}_{s'})^c x_1$ est l'image de x_2 par le morphisme $A \to B$. Or A est ℓ-nilpotent donc $(\mathrm{Sq}_{s'})^{c'} x_2$ est nul pour c' assez grand. On en deduit que x_1 est s-nilpotent, c'est-a-dire $x_1 \in B_s$. □

Corollaire A.3 *Soient* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *une suite exacte de modules instables et* $p; q; s$ *trois entiers positifs. On suppose que* $\mathrm{R}_s A$ *est dans* $\mathcal{U}_p$ *et que* $\mathrm{R}_s C$ *est dans* $\mathcal{U}_q$ *; alors* $\mathrm{R}_s B$ *est dans* $\mathcal{U}_{\max\{p;q\}}$.

Demonstration Le foncteur R_s transforme la suite exacte

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

en une suite

$$0 \to \mathrm{R}_s A \to \mathrm{R}_s B \to \mathrm{R}_s C$$

exacte au sens de la proposition A.1.

Les modules $\mathrm{R}_s A$, $\mathrm{R}_s B$ et $\mathrm{R}_s C$ sont reduits, ce qui nous autorise a appliquer la caracterisation 6.2 de la ltration de Krull en terme de ltration par le poids pour les modules reduits. Il su t donc de montrer que $\mathrm{R}_s B$ est de poids inferieur ou egal a $\max\{p; q\}$, *i.e.* que $\mathrm{R}_s B$ est nul dans les degres i tels que

$\omega(i) > \max\{p, q\}$. Rappelons que $\omega(i)$ est le nombre de puissances de deux composant l'ecriture diadique de i.

Soit x un element de $\mathrm{R}_s B$ en degre $|x|$ tel que $\omega(|x|) > \max\{p, q\}$. L'image de x par $\mathrm{R}_s B \to \mathrm{R}_s C$ est nulle car $\mathrm{R}_s C$ est dans $\mathcal{U}_q$ et donc de poids inferieur ou egal a $q \leq \max\{p, q\}$. D'apres la proposition A.1, il existe un entier c tel que $Sq_0^c\, x$ est dans $\mathrm{R}_s A$. Le degre de $Sq_0^c\, x$ est $2^c|x|$ et $\omega(2^c|x|) = \omega(|x|) > p$. Or $\mathrm{R}_s A$ est dans $\mathcal{U}_p$, donc de poids inferieur ou egal a p. Il s'ensuit que $Sq_0^c\, x$ est nul, et donc x est nul car $\mathrm{R}_s A$ est reduit. □

A.2 Suite spectrale d'Eilenberg-Moore et filtration nilpotente

Dans toute cette section, X est un espace profini pointe. On va degager suivant [Sc3] quelques proprietes de compatibilite entre la filtration nilpotente de la cohomologie continue reduite de X et celle de son espace de lacets ΩX en utilisant la spectrale d'Eilenberg-Moore.

Le terme $\mathrm{E}_r^{-s,*}$ de cette suite spectrale est naturellement muni d'une structure de module instable pour tous entiers s et $r \geq 1$. De plus, la differentielle d_r est un morphisme de modules instables

$$\mathrm{d}_r : \mathrm{E}_r^{-s-r,*} \longrightarrow \Sigma^{r-1}\mathrm{E}_r^{-s,*} .$$

Enfin, la cohomologie continue reduite de ΩX est naturellement munie d'une filtration croissante

$$0 = \mathrm{F}_0 \tilde{\mathrm{H}}^* \Omega X \subset \mathrm{F}_{-1} \tilde{\mathrm{H}}^* \Omega X \subset \mathrm{F}_{-2} \tilde{\mathrm{H}}^* \Omega X \subset \cdots \subset \mathrm{F}_{-s} \tilde{\mathrm{H}}^* \Omega X \subset \cdots \subset \tilde{\mathrm{H}}^* \Omega X$$

par des sous-modules instables telle qu'on a pour tout $s \geq 1$ un isomorphisme

$$\mathrm{E}_\infty^{-s,*} \cong \Sigma^s(\mathrm{F}_{-s} \tilde{\mathrm{H}}^* \Omega X / \mathrm{F}_{-s+1} \tilde{\mathrm{H}}^* \Omega X) .$$

Cette filtration est convergente :

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{F}_{-i} \tilde{\mathrm{H}}^* \Omega X = \tilde{\mathrm{H}}^* \Omega X .$$

(Voir la section 4.)

Proposition A.4 *Soit X un espace profini pointe dont la cohomologie reduite est dans $\mathcal{N}il_\ell$ pour un entier $\ell \geq 1$. L'homomorphisme de coin induit pour $s \leq 2\ell - 1$ un monomorphisme*

$$\mathrm{R}_s \tilde{\mathrm{H}}^* X \hookrightarrow \mathrm{R}_{s-1} \tilde{\mathrm{H}}^* \Omega X .$$

Demonstration L'homomorphisme de coin $H X \longrightarrow H \Omega X$ factorise de la maniere suivante:

$$H X = E_1^{-1;} \twoheadrightarrow E_{\mathit{1}}^{-1;} = F_{-1} H \Omega X \hookrightarrow H \Omega X :$$

Le morphisme $E_1^{-1;} \longrightarrow E_{\mathit{1}}^{-1;}$ est la colimite sur r des morphismes $E_1^{-1;} \longrightarrow E_r^{-1;}$, lesquels sont les composes $E_1^{-1;} \to E_2^{-1;} \to \quad \to E_{r-1}^{-1;} \to E_r^{-1;}$.

Chaque morphisme $E_r^{-1;} \longrightarrow E_{r+1}^{-1;}$ est le conoyau de la di erentielle d_r : ${}^{1-r}E_r^{-1-r;} \longrightarrow E_r^{-1;}$. Comme le module $E_r^{-1-r;}$ est un sous-quotient de $(H X)^{(r+1)}$ qui est $(r+1)\ell$-nilpotent, le noyau du morphisme $E_r^{-1;} \longrightarrow E_{r+1}^{-1;}$ est forme d'elements au moins $((r+1)\ell - (r-1))$-nilpotents donc au moins 2ℓ-nilpotents puisqu'on a $r \quad 1$ et $\ell \quad 1$.

Le corollaire A.2 montre alors que le morphisme $R_s E_r^{-1;} \longrightarrow R_s E_{r+1}^{-1;}$ est un isomorphisme pour tout $s < 2\ell$. Par consequent, le morphisme $R_s E_1^{-1;} \longrightarrow R_s E_{\mathit{1}}^{-1;}$ est un isomorphisme pour $s < 2\ell$.

On a donc un isomorphisme $R_s H X \longrightarrow R_{s-1} F_{-1} H \Omega X$ qui se compose avec le monomorphisme $R_{s-1} F_{-1} H \Omega X \longrightarrow R_{s-1} H \Omega X$ (le foncteur R_{s-1} preserve les monomorphismes d'apres la proposition A.1) en le monomorphisme souhaite. □

Proposition A.5 *Soient X un espace pro ni pointe et $\ell \quad 1$ un entier tels que :*

la cohomologie reduite de X est ℓ-nilpotente,

$H X = (H X)_{2\ell}$ *est dans U_1.*

Alors :

(1) *la cohomologie reduite de ΩX est $(\ell - 1)$-nilpotente,*

(2) *pour $s \quad 2\ell - 2$, le module instable $R_s F_{-1} H \Omega X$ est dans U_1,*

(3) *pour $s \quad 2\ell - 2$, le module instable $R_s F_{-2} H \Omega X$ est dans U_2.*

Demonstration du point 1 Pour tout entier s, le terme $E_{\mathit{1}}^{-s;}$ est un sous-quotient de $(H X)^{s}$ qui est $s\ell$-nilpotent. Donc pour tout entier s, le module $F_{-s} H \Omega X / F_{-s+1} H \Omega X = {}^{-s}E_{\mathit{1}}^{-s;}$ est $(s\ell - s)$-nilpotent. On en deduit par recurrence, en utilisant que $Nil_{\ell-1}$ est de Serre, que pour tout entier s, le module instable $F_{-s} H \Omega X$ est $(\ell - 1)$-nilpotent. Par suite, comme la suite spectrale est convergente et $Nil_{\ell-1}$ stable par colimite, le module $H \Omega X$ est aussi $(\ell - 1)$-nilpotent.

Demonstration du point 2 Le module $E_1^{-1,*} = F_{-1}H^*\Omega X$ est un quotient de H^*X par des elements au moins 2ℓ-nilpotents. On a donc un epimorphisme

$$E_1^{-1,*} \twoheadrightarrow H^*X/(H^*X)_{2\ell}$$

de noyau au moins 2ℓ-nilpotent. En vertu du corollaire A.2, on a pour $s \le 2\ell-1$ un monomorphisme $R_sE_1^{-1,*} \to R_s(H^*X/(H^*X)_{2\ell})$. Or $H^*X/(H^*X)_{2\ell}$ est dans $\mathcal{U}_1$ par hypothese et donc aussi $R_s(H^*X/(H^*X)_{2\ell})$ (car $\mathcal{U}_1$ est de Serre). Il suit que $R_sE_1^{-1,*}$ est egalement dans $\mathcal{U}_1$.

On obtient que

$$R_sE_1^{-1,*} = R_{s-1}\Sigma^{-1}E_1^{-1,*} = R_{s-1}F_{-1}H^*\Omega X$$

est dans $\mathcal{U}_1$ pour tout $s \le 2\ell-2$, ce qui montre le second point de la proposition.

Demonstration du point 3 La suite exacte

$$0 \to F_{-1}H^*\Omega X \to F_{-2}H^*\Omega X \to \Sigma^{-2}E_1^{-2,*} \to 0$$

et le corollaire A.3 assurent que pour montrer le troisieme point du lemme, il suffit de montrer que pour tout $s \le 2\ell-2$, les modules $R_sF_{-1}H^*\Omega X$ et $R_s\Sigma^{-2}E_1^{-2,*}$ sont dans $\mathcal{U}_2$.

Le fait que $R_sF_{-1}H^*\Omega X$ est dans $\mathcal{U}_2$ pour $s \le 2\ell-2$ est consequence du point 2 de cette proposition, car $\mathcal{U}_1$ est une sous-categorie de $\mathcal{U}_2$.

Il reste donc a montrer que $R_s\Sigma^{-2}E_1^{-2,*}$ est dans $\mathcal{U}_2$. Le module instable $E_1^{-2,*}$ est un sous-quotient de $H^*X^{\otimes 2}$, *i.e.* $E_1^{-2,*}$ s'ecrit C/B, avec $C \subset H^*X^{\otimes 2}$. De plus, le module B est au moins 3ℓ-nilpotent pour la raison suivante. On a

$$d_r : E_r^{-2-r,*} \to \Sigma^{(r-1)}E_r^{-2,*};$$

ce qui montre que B est constitue d'elements de degre de nilpotence au moins egal a $(r+2)\ell-(r-1) \ge 3\ell$. On en deduit avec le corollaire A.2 que pour $s < 3\ell$, on a des monomorphismes:

$$R_sE_1^{-2,*} \hookrightarrow R_sC \hookrightarrow R_s(H^*X^{\otimes 2}).$$

Le module $(H^*X)^{\otimes 2}$ est 2ℓ-nilpotent par hypothese, et donc le plus petit s tel que $R_s(H^*X^{\otimes 2})$ est non trivial est $s = 2\ell$. Or $R_{2\ell}(H^*X^{\otimes 2})$ est isomorphe a $(R_\ell H^*X)^{\otimes 2}$ qui est dans $\mathcal{U}_2$ (voir la partie 6). Donc $R_{2\ell}E_1^{-2,*}$ est dans $\mathcal{U}_2$. Finalement, $R_{2\ell-2}\Sigma^{-2}E_1^{-2,*} = R_{2\ell}E_1^{-2,*}$ est dans $\mathcal{U}_2$. □

Proposition A.6 *Soit $\ell > 1$ un entier et soit X un espace profini pointe. Si H^*X est ℓ-nilpotent et si $H^*X/(H^*X)_{2\ell}$ est dans $\mathcal{U}_1$, alors $H^*\Omega X/(H^*\Omega X)_{2(\ell-1)}$ est egalement dans $\mathcal{U}_1$.*

Demonstration Le module instable $E_1^{-s,}$ est un sous-quotient de H $X^{\ s}$, donc $E_1^{-s,}$ est $s\ell$-nilpotent et $F_{-s}H\ \Omega X/F_{-s+1}H\ \Omega X = {}^{-s}E_1^{-s,}$ est $s(\ell-1)$-nilpotent. On montre par recurrence sur s que $F_{-s}H\ \Omega X/F_{-1}H\ \Omega X$ est $2(\ell-1)$-nilpotent. Par convergence de la suite spectrale, le module $H\ \Omega X/F_{-1}H\ \Omega X$ est aussi $2(\ell-1)$-nilpotent.

On a une suite exacte:

$$0 \to F_{-1}H\ \Omega X \to H\ \Omega X \to H\ \Omega X/F_{-1}H\ \Omega X \to 0$$

dont le dernier terme $H\ \Omega X/F_{-1}H\ \Omega X$ est $2(\ell-1)$-nilpotent. En particulier, pour s $2\ell-3$, le module $R_s(H\ \Omega X/F_{-1}H\ \Omega X)$ est nul et donc dans U_0. De plus, d'apres la proposition precedente, pour tout s $2\ell-3$, le module $R_sF_{-1}H\ \Omega X$ est dans U_1.

Le corollaire A.3 assure que pour tout s $2\ell-3$, le module $R_sH\ \Omega X$ est dans U_1. Comme U_1 est de Serre, on obtient que $H\ \Omega X/(H\ \Omega X)_{2\ell-2}$ est dans U_1. □

Corollaire A.7 *Soit $\ell > 1$ un entier et soit X un espace pro ni pointe. Si* H X *est ℓ-nilpotent et si* $H\ X/(H\ X)_{2\ell}$ *est dans U_1, alors pour s $2\ell-3$, le module* $R_sF_{-2}H\ \Omega X$ *est dans U_1.*

Demonstration Le module $R_sF_{-2}H\ \Omega X$ est un sous-module de $R_sH\ \Omega X$ d'apres la proposition A.1. Or pour s $2\ell-3$, le module $R_sH\ \Omega X$ est isomorphe a $R_s(H\ \Omega X/(H\ \Omega X)_{2\ell-2})$, d'apres le corollaire A.2. Or $R_s(H\ \Omega X/(H\ \Omega X)_{2\ell-2})$ est dans U_1 comme sous-quotient de $H\ \Omega X/(H\ \Omega X)_{2\ell-2}$ qui d'apres la proposition A.6 est dans U_1. □

References

[Ad] J. F. Adams, On the non-existence of elements of Hopf invariant one. *Ann. of Math. (2)* 72 (1960), 20-104.

[AM] M. Artin, B. Mazur, *Etale Homotopy, Springer L. N. M.*, 100, 1969.

[Boa] J. M. Boardman, Conditionally Convergent Spectral Sequences, Contemp. Math. 239 (1999), 49{84.

[Bou] A. K. Bous eld, On the homology spectral sequence of a cosimplicial space, *Amer. J. Math.*, 109 (1987), 361-394.

[BK] A. K. Bous eld, D. M. Kan, *Homotopy Limits, Completions, and Localizations, Springer L. N. M.*, 304, 1972.

[Do] R. et A. Douady, *Theories galoisiennes 1*, Cedic/Fernand Nathan, 1979.

[DrS] E. Dror Farjoun, J. Smith, A Geometric Interpretation of Lannes' Functor T, *Theorie de l'Homotopie, Asterisque*, 191 (1990), 87{95.

[Dw] W.G. Dwyer, Strong convergence of the Eilenberg-Moore spectral sequence, *Topology*, 13 (1974), 255{265.

[DwS] W.G. Dwyer, J. Splalinski, Homotopy Theories and Model Categories, Handbook of algebraic topology, 1995, 73{126.

[FS] V. Franjou, L. Schwartz, Reduced unstable A-modules and the modular representation theory of the symmetric groups, *Ann. Sci. Ec. Norm. Super.*, 23, No 4 (1990), 593{624.

[Ga] P. Gabriel, Des categories abeliennes, *Bull. Soc. Math. France*, 90 (1962), 323{448.

[GJ] P.G. Goerss, J.F. Jardine, *Simplicial Homotopy Theory*, Progress in Mathematics, 174, 1999.

[Go] T.G. Goodwillie, A remark on the homology of cosimplicial spaces, *J. Pure Appl. Algebra*, 127 (1998), 167{175.

[HLS] H. W. Henn, J. Lannes, L. Schwartz, The categories of unstable modules and unstable algebras modulo nilpotent objects, *Am. J. of Math.*, 115, No 5 (1993), 1053{1106.

[Ku] N. J. Kuhn, On topologicaly realizing modules over the Steenrod algebra, *Annals of Mathematics*, 141 (1995), 321{347.

[La] J. Lannes, Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classi ant d'un p-groupe abelien elementaire, *Publ. Math. I. H. E. S.*, 75 (1992), 135{244.

[Mac] S. Mac Lane, *Homology*, Springer, 1975.

[May] P. May, *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, Van Nostrand, 1967.

[Mo] F. Morel, Ensembles pro nis simpliciaux et interpretation geometrique du foncteur T, *Bull. Soc. Math. France*, 124 (1996), 347{373.

[Q] D.G. Quillen, *Homotopical Algebra, Springer L. N. M.*, 43, 1967.

[Q2] D.G. Quillen, An application of simplicial pro nite groups, *Comment. Math. Helv.*, 44 (1969), 45{60.

[R] D. Rector, Steenrod operations in the Eilenberg-Moore spectral sequence, *Comment. Math. Helv.*, 45 (1970), 540{552.

[Sc1] L. Schwartz, *Unstable Modules over the Steenrod Algebra and Sullivan's Fixed Point Set Conjecture*, University of Chicago Press, 1994.

[Sc2] L. Schwartz, A propos de la conjecture de non realisation due a N. Kuhn, *Invent. Math.*, 134, No 1, 211{227 (1998).

[Sc3] L. Schwartz, La ltration de Krull de la categorie U et la cohomologie des espaces, *Algebraic and Geometric topology*, 1, 519{548, (2001).

[Sh] B.E. Shipley, Convergence of the homology spectral sequence of a cosimplicial space, *Am. J. Math.*, 118 (1996), 179{207.

[SE] N.E. Steenrod, D.B.A. Epstein,*Cohomology operations*, Princeton Univ. Press, 1962.

Laboratoire J.A. Dieudonne, Universite de Nice Sophia-Antipolis
Parc Valrose - BP 2053 - 06101 Nice, France
and
Laboratoire Jean Leray (UMR 6629 du C.N.R.S.), Universite de Nantes
BP 92208 - 44322 Nantes Cedex 3, France

Email: dehon@math.unice.fr, gaudens@math.univ-nantes.fr

Received: 29 November 2002 Revised: 3 May 2003