

Padberg, Friedhelm:

Einführung in die Mathematik. Bd. 1: Arithmetik

Heidelberg : Spektrum Akademischer Verl., 1997. – 268 S.
ISBN 3-8274-0199-2

Herbert Henning, Magdeburg

Mit diesem Buch hat F. Padberg den 1. Teil einer Reihe Mathematik Primarstufe vorgelegt, die bereits mit *Einführung in die Mathematik, Bd. 2: Geometrie* (Martin Stein) ihre Fortsetzung gefunden hat.

Einführung in die Mathematik I – Arithmetik versteht sich zuallererst als eine, auf die künftige Tätigkeit in der Grundschule speziell zugeschnittene, erste Einführung in die Arithmetik im Rahmen des Grundstudiums für Studierende im Haupt- und Nebenfach Mathematik.

Schwerpunkt des Buches und damit zentrales Thema sind die *natürlichen Zahlen*. Das mündliche und schriftliche Rechnen sowie einige Elemente der Teilbarkeitslehre, die für die Primarstufe relevant sind, und der Zahlentheorie geben Anregungen für vertiefende Studien im Hauptstudium. Das Buch (so betont F. Padberg in der Einleitung) “ist aus mehrfach von uns durchgeführten Vorlesungen mit Übungen im Rahmen der Mathematikausbildung für Primarstufenstudenten an der Universität Bielefeld hervorgegangen” (S. 1). Damit ist es ein Hochschul-Lehrbuch. Die Absicht des Autors ist es dabei, besonders den Nebenfachstudenten den für sie oft schwierigen Zugang zur Mathematik zu erleichtern und sie für die Mathematik stärker zu motivieren. Diesem Anliegen wird dieses Buch auf besondere Art und Weise gerecht. Die Abfolge der Themen in den 7 Kapiteln orientiert sich bewußt nicht allein an einer fachsystematischen Logik. Im Gegensatz (etwa zu F. Padberg: *Didaktik der Arithmetik* oder F. Padberg/R. Danckwerts/M. Stein: *Zahlbereiche – eine Einführung*) werden die natürlichen Zahlen nicht zuerst als Kardinalzahlen oder Ordinalzahlen fundiert. F. Padberg knüpft an Erfahrungen der Studenten im “Gebrauch” der natürlichen Zahlen an und behandelt dabei zuerst sehr kompakt die schriftlichen Rechenverfahren. Dabei steht weniger das formale Kalkül der Verfahren im Vordergrund. Auf eine mehr inhaltliche Begründung wird viel Wert gelegt. Zusätzlich, weil von besonderer Bedeutung für die künftige Tätigkeit in der Primarstufe, werden die schriftlichen Rechenverfahren auch in nichtdezimalen Basen behandelt.

Dieser “naive” Einstieg in die natürlichen Zahlen über anschauliche Beispiele (quasi die Benutzung der natürlichen Zahlen ohne zu fragen “Was sind eigentlich natürliche Zahlen?”) wird auch bei der weiterführenden Untersuchung von Elementen der Teilbarkeitslehre/Zahlentheorie (Kapitel II bis V) beibehalten und erst in Kapitel VI wird mit dem *Kardinalzahlmodell* auf diese und auf die weiterführende Frage “Wie können wir das Rechnen mit natürlichen Zahlen und die Rechengesetze begründen?” eine Antwort gegeben. Als Ergänzung (für Hauptfachstu-

denten und fürs Hauptstudium) werden dann mit Hilfe des Ordinalzahlmodells (Peano-Axiome) eine verknäppte Erweiterung der Vorstellungen von natürlichen Zahlen und ein Ausblick auf Bruchzahlen gegeben.

Ich halte diesen gewählten Aufbau des Buches, das weit mehr als ein buchmäßig aufbereitetes Vorlesungsscript ist, für sehr interessant und auch von besonderer Faßlichkeit. F. Padberg baut schrittweise durch anschauliche Beispiele ein in sich *vernetztes* Begriffssystem auf. Dieses nutzt er konsequent, um das *Kardinalzahlmodell* in seiner ganzen Ausführlichkeit und Komplexität zu erläutern. Dabei greift er in den einzelnen Kapiteln bereits früher eingeführte und erklärte Begriffe auf, vertieft das Begriffsverständnis durch neue Aspekte der Betrachtung. Besonders deutlich wird dies im Kapitel V *Relationen und Funktionen*. Nachdem bereits im Zusammenhang mit *Teilbarkeit und Vielfachenbildung* der Relationsbegriff benutzt wurde, wird in diesem Kapitel der Begriff der *Relation* definiert, Veranschaulichungsmöglichkeiten sowie Eigenschaften von Relationen beispielbezogen behandelt. *Ordnungs- und Äquivalenzrelationen* (wichtig für das Kardinalzahlmodell) werden erklärt. Ebenso der Begriff *Abbildung* (besonders bijektive Abbildungen). In diesem Kapitel (und jedes andere Kapitel könnte als exemplarisches Beispiel dafür ausgewählt werden) werden bereits angesprochene Begriffe und Eigenschaften (Relation, Transitivität, Reflexivität, Identivität) in einen umfassenden Kontext gestellt und damit vertieft. Zentrale Begriffe für die folgende Einführung der natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen werden bereitgestellt.

In fast allen Kapiteln, und dies werde ich als einen großen Vorzug, wird vertiefender Rückblick und inhaltliche (vor allem begriffliche) Vorarbeit für nächste Kapitel zum Auswahlkriterium für Inhalte gemacht. Dies halte ich deshalb für besonders erwähnenswert, weil (auch durch die farbliche Hervorhebung der Begriffsbildungen im Text gleichsam als Hinweis auf Wesentliches und Grundlegendes) dadurch auch ein Beitrag zur Entwicklung eines “vernetzten” Denkens bei den Studierenden geleistet werden kann.

Die Verdeutlichung erforderlicher Begriffsbildungen durch anschauliche Beispiele, eine große (bis zu 50) Anzahl von Übungsaufgaben am Schluß eines jeden Kapitels, die in ihrem Anforderungsniveau wohl differenziert sind, sowie Lösungshinweise für Aufgaben zu den einzelnen Kapiteln (Anhang), viele sachbezogene Beispiele mit alternativen Erläuterungen und der Einsatz verschiedener Begründungsebenen (vom anschaulichen Beweisen als Strategie bis zu formalen Beweisführungen, die oft vergleichend gegenübergestellt und kommentiert werden) sind Vorzüge dieses Buches, die hervorzuheben sind.

Der Inhalt des Buches gliedert sich in sieben Kapitel:

- I. *Stellenwertsysteme und schriftliche Rechenverfahren* (Stellenwertsysteme, Zählen und Größenvergleich in verschiedenen Basen, schriftliche Rechenverfahren: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Alternativen zu den schriftlichen Verfahren, Aufgaben)
- II. *Einige Eigenschaften der Teilbarkeitsrelation* (Einführung der Teilbarkeitsrelation, Teilbarkeitsrelation und Rechenoperation, Teilbarkeitsrelation als

Ordnungsrelation, Bemerkungen zum Folgerungsbe-
griff, zur Satzumkehrung und zu aussagenlogischen
Verknüpfungen, Aufgaben)

III. Teilbarkeitsregeln

(Endstellenregeln, Quersummenregeln, weitere Teil-
barkeitsregel, Teilbarkeitsregel und dezimales Stel-
lenwertsystem, Beweis von Sätzen und aussagenlo-
gische Verknüpfungen, Aufgaben)

IV. Teiler- und Vielfachmengen/Mengenoperationen

(Teiler und Vielfache, Gemeinsame Teiler und Viel-
fache, Mengenoperationen mit Teiler- und Vielfachen-
mengen, Gesetze der Mengenalgebra, Der Euklidi-
sche Algorithmus, Aufgaben)

V. Relationen und Funktionen

(Relationen in einer Menge, Eigenschaften von Re-
lationen in einer Menge, Funktionen, Eigenschaften
von Funktionen, Aufgaben)

VI. Die natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen

(Aspekte der natürlichen Zahlen, Kardinalzahlen –
anschauliche Überlegungen, Kardinalzahlen – Skizze
einer mathematischen Fundierung, Addition, Sub-
traktion, Multiplikation, Division, Kleinerrelation,
Aufgaben)

VII. Ergänzungen und Ausblick

(Die natürlichen Zahlen als Ordinalzahlen, Bruchzah-
len, Ausblick-Zahlentheorie/Arithmetik, Aufgaben)

Die sieben Kapitel werden durch ein Verzeichnis der im
Text genannten Literatur, einer Liste der wichtigsten Sym-
bole und Bezeichnungen sowie den Lösungshinweisen zu
den Aufgaben der Kapitel I bis VII komplettiert.

Exemplarisch sollen Qualität und Vorzüge des Buches an-
hand dreier ausgewählter Kapitel herausgestellt werden.

Im Kapitel II *Einige Eigenschaften der Teilbarkeitsre-
lation* werden die natürlichen Zahlen bezüglich der Re-
lation “ist Teiler von” untersucht. Über Sachsituationen
wird die Teilbarkeitsrelation eingeführt und die Summen-,
Differenz- und Produktregel behandelt. Diese Regeln wer-
den auf drei Begründungsebenen bewiesen. Von beson-
derer Bedeutung dabei sind die beispielgebundene Be-
weisstrategie auf der ikonischen Repräsentationsebene und
die beispielbezogene Beweisstrategie auf der Zahlenebene,
da diese für die Primarstufe von besonderer Rele-
vanz sind und in enger Beziehung zu dem höchsten
Begründungsniveau (Beweis mit Variablennutzung) ste-
hen. Besonders interessant dabei ist die Darstellung
aller drei unterschiedlichen Begründungsniveaustufen am
Beispiel von Satz 3 (Transitivität) “Für alle natürlichen
Zahlen a, b, c gilt: Aus $a|b$ und $b|c$ folgt $a|c$ ”.
Diese drei Beweisführungen erleichtern das Verständnis
dafür, daß die Teilbarkeitsrelation eine induktive Ord-
nungsrelation ist (Seite 64–69). Diese Argumentation mit
unterschiedlichen Beweisstrategien (Begründungsniveaus)
findet sich in anderen Kapiteln wieder und fördert das
Beweisverständnis.

Im Kapitel IV *Teiler- und Vielfachmengen/Mengen-
operationen* stehen Teiler- und Vielfachmengen, gemein-
same Teiler und Vielfache sowie deren Veranschaulichung
durch Venndiagramme im Mittelpunkt. Für das Be-
griffsverständnis *Gemeinsame Teiler und Vielfache* wer-
den vier Sachsituationen zum Ausgangspunkt genom-

men (Seite 113/114) und zur Begriffsbildung genutzt.
Dabei werden Beziehungen zwischen den Sachsituationen
aufgedeckt, die die Unterscheidungen zwischen Teiler,
größter Teiler, größter gemeinsamer Teiler (analog zu
Vielfachen) plausibel machen. Die Begriffsbildung wird
dadurch sehr anschaulich und verständlich. Mit Hilfe
von Venndiagrammen werden Mengenbeziehungen zwi-
schen Teiler- und Vielfachmengen aufgezeigt und dabei
wichtige Begriffe der Mengenlehre im Kontext von *Teiler-
und Vielfachmengen* definiert (Durchschnitt, Teilmenge,
Gleichheit von Mengen, Vereinigungsmenge, Differenz-
menge). Mit Beispielen (u. a. Veranschaulichungen durch
Venndiagramme) werden die Mengenoperationen plausi-
bel. Mit den zuvor bereits thematisierten Junktoren wer-
den eine Reihe von Sätzen zur Teilbarkeitslehre exempla-
risch bewiesen. In diesem Kapitel wird abschließend mit
einer sehr faßlichen, beispielbezogenen Darstellung des
Euklidischen Algorithmus ein Verfahren zum Bestimmen
des größten gemeinsamen Teilers (ggT) behandelt und die
Vorteile dieses Verfahrens veranschaulicht.

Das Kapitel VI *Die natürlichen Zahlen als Kardi-
nalzahlen* fundiert die natürlichen Zahlen mathematisch
durch Konzentration auf den *Kardinalzahlaspekt*. Durch
den Kardinalzahlaspekt lassen sich die natürlichen Zahlen
besonders gut anschaulich fundieren (besonders aber die
Rechenoperationen mit ihnen). Mit dem *Kardinalzahlmo-
dell* wird unter Benutzung der bisher eingeführten Be-
griffe, Definitionen und (bewiesenen) Sätzen die Frage
“*Was ist eigentlich eine natürliche Zahl?*” beantwortet.

Bei den Erläuterungen zu den Rechenoperationen Addi-
tion, Subtraktion, Multiplikation und Division greift man
wiederum auf die in anderen Kapiteln bereits behandel-
ten Inhalte zurück. So wird z.B. die Subtraktion durch
Rückgriff auf die Mengenoperation der Differenzmengen-
bildung behandelt.

Die Darlegungen zur Multiplikation und Division natür-
licher Zahlen gehen jeweils auf unterschiedliche Wege
der Begriffsbildung ein und benutzen vorher behandelte,
vor allem mengentheoretische Betrachtungsweisen. Gerade
in diesem Kapitel ist dieses Buch auch eine methodi-
sche Hilfe für eine unterrichtsbezogene Sachanalyse des
Stoffes. Besonders hervorheben möchte ich die Kapitelab-
schnitte 2 und 3. Hier zeigt F. Padberg sehr schön, wie
das Kardinalzahlmodell durch anschauliche Überlegun-
gen (Seite 178–183) aufgebaut werden kann und wie
man die Kardinalzahlen mathematisch fundieren kann.
Sehr anschaulich wird gezeigt, daß die Relation “*ist
gleichmächtig zu*” reflexiv, symmetrisch und transitiv
(Äquivalenzrelation) ist. Dies ist für Hauptfachstudenten
durchaus auch fürs Hauptstudium von Interesse.

Besonders gelungen in diesem Kapitel erscheinen mir
die Darlegungen zur Division (Seite 211 ff). Sehr nah
an der Praxis der Grundschule wird zunächst im Sinne
von *Aufteilen* und *Verteilen* die Division sehr anschaulich
erklärt. Dabei wird aber auch der Zusammenhang zur
Multiplikation hergestellt (Division als Umkehroperation
zur Multiplikation). Dadurch wird die Division mit an-
schaulichen Grundvorstellungen verbunden.

Auch die Thematisierung der *Kleinerrelation* durch Ver-
gleich von Mengen mittels paarweiser Zuordnung und der

Teilmengenbeziehung greift wieder auf bereits behandelten Stoff zurück. Indem die Einführung der Kleinerrelation über die *Addition* favorisiert wird, lassen sich Sätze über die Kleinerrelation besonders einfach beweisen (Seite 223–224).

Insgesamt ist dieses Buch eine exzellente Einführung in die Arithmetik der (natürlichen) Zahlen, sehr praxisnah, sehr faßlich mit einer wohlgedachten fachlichen Systematik, die das Verstehen von Zusammenhängen durch den Studenten als Primat setzt und sich von anderen Vorgehensweisen unterscheidet. Als einen besonderen Vorzug werte ich, wie auf unterschiedliche Art und Weise Beweistechniken auf differenzierten Begründungsniveaustufen thematisiert werden. Dies scheint besonders für die Entwicklung mathematischen Denkens bei Hauptfachstudenten (mehr noch aber bei Nebenfachstudenten) von besonderer Bedeutung. Hervorzuheben ist insgesamt das Reservoir der Aufgaben, die für Übungen zu einer Vorlesung (wobei das Buch als Grundlage dienen kann) von besonderer Qualität sind.

Die Reihe *“Einführung in die Mathematik”* dürfte ebenso wie die anderen von F. Padberg im Spektrum-Verlag erschienen Bücher *“Didaktik der Arithmetik”*, *“Didaktik der Bruchrechnung”*, *“Elementare Zahlentheorie”*, *“Lineare Algebra”* und *“Zahlbereiche – eine Einführung”* (letztere mit H. Kütting bzw. R. Danckwerts und M. Stein) einen breiten Leserkreis finden.

Autor

Henning, Herbert, Prof. Dr., Fakultät für Mathematik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Universitätsplatz 2, D-39106 Magdeburg.
E-mail: herbert.henning@mathematik.uni-magdeburg.de

Rezensionen

Im Rezensionsteil des ZDM werden Publikationen von Bedeutung für die Didaktik oder Methodik der Mathematik/Informatik oder Publikationen mit allgemein interessierenden Inhalten von Fachleuten ausführlich rezensiert.

Hinweise auf relevante Werke oder Angebote von Rezensionen an die Redaktion des ZDM sind willkommen!

Book Reviews

New books on mathematics/computer science education as well as books of general interest are reviewed in detail in the review section of ZDM.

Readers are encouraged to participate in ZDM by offering book reviews and/or proposing books for a review to the editorial office of ZDM.