Труды конференции «Геометрия и приложения»
13 – 16 марта 2000 г., Новосибирск

СТРУКТУРА ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ХОПФА В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ САСАКИЕВЫХ И 3-САСАКИЕВЫХ ФОРМАХ

А. А. Борисенко, В. Микуэль [1]

Аннотация.

Мы даем естественное определение гиперповерхностей Хопфа в пространственных формах Сасаки и выясняем структуру таких гиперповерхностей. Аналогичный результат приводится для S^{4n+3}, единственной односвязной 3-формы Сасаки.

§1 Введение

Вещественная гиперповерхность P кэлерова многообразия M называется гиперповерхностью Хопфа, если вектор JN задает главное направление на P. Здесь J — комплексная структура на M, а N — единичный вектор нормали к P. Структура гиперповерхностей Хопфа комплексных пространственных форм известна во всех деталях благодаря работам Т. Е. Сесиль и П. Раян ([9]), С. Монтиэль ([13]) и А. А. Борисенко ([5, 6]). Естественными нечетномерными аналогами кэлеровых многообразий являются многообразия Сасаки. Представляется естественным распространить вышеупомянутые результаты на многообразия Сасаки, определив в таких многообразиях объекты, аналогичные гиперповерхностям Хопфа. Этому и посвящена настоящая заметка. Особо будет рассмотрен случай 3-сасакиевых многообразий.

§2 Предварительные сведения

В этом параграфе мы напомним некоторые определения и свойства многообразий Сасаки и их подмногообразий. Более подробное изложение можно найти в [4], [16] и в [10].

Многообразием Сасаки называется риманово многообразие M, допускающее единичное векторное поле Киллинга ξ такое, что его риманов тензор кривизны удовлетворяет соотношению

$$R(X,Y)\xi = \langle \xi, X\rangle Y - \langle \xi, Y\rangle X,$$

где

$$R(X,Y) = -[\nabla_X, \nabla_Y] + \nabla_{[X,Y]}.$$

[1] Работа первого автора была поддержана грантом DGEUI Grant No. INV00-01-44. Работа второго автора было частично поддержана грантами DGES Grant No. PB97-1425 и AGI No. GR00-52.

Векторное поле ξ называется характеристическим векторным полем многообразия Сасаки. 1-форма, получаемая из ξ "опусканием индексов" обозначается через η.

Как следствие этого определения, мы видим, что многообразие Сасаки M имеет нечетную размерность, интегральные кривые ξ являются геодезическими (будем называть их ξ-геодезическими), и тензор φ, определенный равенством

$$\varphi = -\nabla\xi,$$

обладает следующими свойствами:

$$\varphi^2 = -Id + \eta \otimes \xi \text{ и } \varphi\xi = 0.$$

Многообразие Сасаки M называется регулярным, если векторное поле ξ определяет регулярное слоение. Тогда фактор-пространство M/ξ, определенное этим слоением, является кэлеровым многообразием с метрикой, индуцированной метрикой M и комплексной структурой J, которая задается формулой

$$J\pi_* X = \pi_* \varphi X,$$

где $\pi : M \longrightarrow M/\xi$ обозначает естественную проекцию. При этом π является римановой субмерсией.

Пространственной формой Сасаки $M^{2n+1}(c)$ кривизны c называется односвязное регулярное многообразие Сасаки на котором секционная кривизна в направлении плоскостей, инвариантных относительно φ и ортогональных к ξ, постоянна и равна c. Отсюда вытекает, что фактор-пространство $M^{2n+1}(c)/\xi$ является комплексной пространственной формой $\mathbb{C}M^n((c+3)/4)$ голоморфной секционной кривизны $c+3$. Более того, для тензора кривизны $M^{2n+1}(c)$ справедлива формула

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = \frac{c+3}{4}&\{\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X\} + \\ \frac{c-1}{4}&\{\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y - \langle Z,\varphi Y\rangle\varphi X + \langle Z,\varphi X\rangle\varphi Y \\ &- 2\langle X,\varphi Y\rangle\varphi Z - \langle X,Z\rangle\eta(Y)\xi + \langle Y,Z\rangle\eta(X)\xi\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Контактной CR гиперповерхностью многообразия Сасаки M называется гиперповерхность P, касательная к характеристическому векторному полю ξ. Фактор-многообразие P/ξ является вещественной гиперповерхностью M/ξ и следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & M \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} \\ P/\xi & \longrightarrow & M/\xi \end{array}.$$

Более того, поскольку ξ является векторным полем Киллинга, мы получаем, что если N есть единичный вектор нормали к P, то $\xi_{t*}N = N$, где ξ_t обозначает поток векторного поля ξ. Кроме того, $\overline{N} = \pi_* N$ является корректно определенным векторным полем на P/ξ, а именно — единичным векторным полем, перпендикулярным к P/ξ. Если мы обозначим через A_N и $A_{\overline{N}}$ отображения Вейнгартена многообразий P и P/ξ соответственно, то они будут связаны соотношением

$$(A_{\overline{N}}X)^* = A_N X^* - \langle A_N X^*, \xi \rangle \xi, \tag{2.2}$$

где * обозначает горизонтальный лифт с помощью римановой субмерсии π.

§3. Об определении гиперповерхности Хопфа

В параграфе 2 мы отметили, что если P является контактной CR гиперповерхностью многообразия Сасаки M, то $\xi_{t*}N = N$. Отсюда вытекает, что $[\xi, N] = 0$, то есть $\nabla_\xi N = \nabla_N \xi$ и

$$A_N \xi = -\nabla_\xi N = -\nabla_N \xi = \varphi N. \tag{3.1}$$

В свою очередь, отсюда и из симметрии A_N вытекает, что

$$\langle A_N \varphi N, \xi \rangle = \langle \varphi N, A_N \xi \rangle = 1. \tag{3.2}$$

Следовательно, φN не может быть главным направлением на A_N. Поэтому мы предлагаем следующее определение гиперповерхностей Хопфа.

3.1. Определение *Контактная CR гиперповерхность P многообразия Сасаки M называется гиперповерхностью Хопфа, если плоскость $< \{\xi, \varphi N\} >$, натянутая на характеристический вектор ξ и вектор φN инвариантна под действием отображения Вейнгартена, т. е. если $A_N(< \{\xi, \varphi N\} >) \subset < \{\xi, \varphi N\} >$. Здесь N обозначает единичный вектор нормали к P.*

Из (3.1) и (3.2) следует, что P является гиперповерхностью Хопфа если и только если

$$A_N \varphi N = \xi + \lambda\, \varphi N. \tag{3.3}$$

Понятие совместимого подмногообразия было введено в [11] (оно появлялось также в [3] под названием адаптированного по кривизне подмногообразия). Гиперповерхность P риманова многообразия M называется совместимым или адаптированным по кривизне подмногообразием, если для каждого единичного вектора N, ортогонального к P, операторы A_N и $R_N(X) := R(N, X)N$ коммутируют, то есть

$$A_N \circ R_N = R_N \circ A_N.$$

В комплексной пространственной форме всякое совместимое подмногообразие является подмногообразием Хопфа. Однако для пространственных форм Сасаки мы имеем

3.2. Лемма *Если $c \neq 1$, то в пространственной форме Сасаки $M^{2n+1}(c)$ не существует совместимой контактной CR гиперповерхности.*

Доказательство. Доказательство Из (2.1) следует, что для всякого вектора Y, касательного к P, справедливы соотношения

$$R_N Y = \frac{c+3}{4} Y + \frac{c-1}{4}\{-\langle \xi, Y\rangle \xi + 3\langle Y, \varphi N\rangle \varphi N\},$$

$$R_N A_N Y = \frac{c+3}{4} A_N Y + \frac{c-1}{4}\{-\langle \xi, A_N Y\rangle \xi + 3\langle A_N Y, \varphi N\rangle \varphi N\},$$

$$A_N R_N Y = \frac{c+3}{4} A_N Y + \frac{c-1}{4}\{-\langle \xi, Y\rangle A_N \xi + 3\langle Y, \varphi N\rangle A_N \varphi N\}.$$

Поэтому $A_N R_N Y = R_N A_N Y$ если и только если

$$-\langle \xi, A_N Y\rangle \xi + 3\langle A_N Y, \varphi N\rangle \varphi N = -\langle \xi, Y\rangle A_N \xi + 3\langle Y, \varphi N\rangle A_N \varphi N.$$

Принимая во внимание (3.1) и симметричность A_N заключаем, что последнее соотношение эквивалентно такому

$$-\langle \varphi N, Y\rangle \xi + 3\langle A_N \varphi N, Y\rangle \varphi N = -\langle \xi, Y\rangle \varphi N + 3\langle Y, \varphi N\rangle A_N \varphi N.$$

Полагая здесь $Y = \varphi N$, получаем

$$-\xi + 3\langle A_N \varphi N, \varphi N\rangle \varphi N = 3 A_N \varphi N,$$

или $3\langle A_N \varphi N, \xi\rangle = -1$, что противоречит (3.2). □

Если $c = 1$, то $M^{2n+1}(c)$ является стандартной сферой S^{2n+1} с секционной кривизной 1, а на ней каждая гиперповерхность является совместимой.

Имеется следующее простое соотношение между гиперповерхностями Хопфа в $M^{2n+1}(c)$ и в $\mathbb{C}M^n((c+3)/4) = M^{2n+1}(c)/\xi$:

3.3. Лемма *P является гиперповерхностью Хопфа в $M^{2n+1}(c)$ если и только если P/ξ является гиперповерхностью Хопфа в $\mathbb{C}M^n((c+3)/4)$. Более того, если λ является собственным значением $J\overline{N}$ на P/ξ, то $A_N \varphi N = \xi + \lambda\, \varphi N$. В частности, при $c+3 \neq 0$, λ постоянно.*

Доказательство. Доказательство Если $X^* = \varphi N$, то, с учетом (3.2), (2.2) принимает вид

$$(A_{\overline{N}} J\overline{N})^* = A_N \varphi N - \xi \tag{3.4}$$

и, используя характеризацию (3.3) гиперповерхностей Хопфа в $M^{2n+1}(c)$, мы получаем, что P является гиперповерхностью Хопфа если и только если

$$\xi + \lambda\, \varphi N = A_N \varphi N = (A_{\overline{N}} J\overline{N})^* + \xi.$$

Последнее выражение эквивалентно соотношению

$$\lambda\, \varphi N = (A_{\overline{N}} J\overline{N})^*,$$

подействовав на которое π_*, получаем $\lambda\, J\overline{N} = A_{\overline{N}} J\overline{N}$. Остается воспользоваться известным фактом, согласно которому собственное значение λ для $J\overline{N}$ на гиперповерхности Хопфа в $\mathbb{C}M^n((c+3)/4)$ постоянно при $c+3 \neq 0$ (см. [14], Th.2.1). □

§4. Теоремы и их доказательства

Пусть $c+3 \neq 0$, P — гиперповерхность Хопфа в $M^{2n+1}(c)$, и пусть вещественное число λ удовлетворяет (3.3). Лемма 3.3 гарантирует, что λ действительно является постоянной. Пусть r является вещественным числом, заданным формулой

$$\lambda = \mathrm{co}_{c+3}(r), \tag{4.1}$$

где

$$\mathrm{co}_\mu(t) = \begin{cases} \sqrt{\mu}\cot(\sqrt{\mu}t) & \text{если} \quad \mu > 0 \\ \sqrt{|\mu|}\coth(\sqrt{|\mu|}t) & \text{если} \quad \mu < 0 \end{cases},$$

и пусть отображение $\phi_r : P \longrightarrow M^{2n+1}(c)$ задано формулой $\phi_r(p) = \exp_p rN(p)$, где направление вектора N выбрано таким образом, чтобы формула (4.1) была верна.

4.1. Теорема *Если $c+3 \neq 0$ и если отображение ϕ_r имеет постоянный ранг $q+1$, то q четно и, для каждой точки $p \in P$ существует ее открытая окрестность U такая, что $\phi_r(U)$ является поднятием с помощью π некоторого комплексного подмногообразия из $\mathbb{C}M^n((c+3)/4)$ вещественной размерности q.*

Говорят, что погруженная гиперповерхность P риманова многообразия M находится в общем положении, если в каждой ее точке самопересечения p линейная оболочка касательных гиперплоскостей к P в точке p совпадает с T_pM.

4.2. Теорема *Пусть $c+3 \neq 0$ и $n \geq 2$. Тогда всякая C^{2n-1}-регулярная погруженная гиперповерхность Хопфа P в $M^{2n+1}(c)$, находящаяся в общем положении, совпадает с одной из следующих гиперповерхностей:*

i) с трубчатой гиперповерхностью, построенной вокруг поднятия с помощью π некоторого неприводимого алгебраического многообразия из $\mathbb{CP}^n((c+3)/4)$ (если $c+3>0$ и P компактно),

ii) с трубчатой гиперповерхностью, построенной вокруг некоторой ξ-геодезической (если $c+3<0$ и $\pi(P)$ компактно),

iii) с трубчатой гиперповерхностью, построенной вокруг некоторой ξ-геодезической (если $c+3>0$ и P компактно и содержится в геодезической трубе радиуса $< \pi/\sqrt{3+c}$ вокруг некоторой ξ-геодезической).

Эти теоремы являются следствиями Леммы 3.3 и следующих теорем, полученных Т. Е. Сесиль, П. Раян, С. Монтиэль и А. А. Борисенко.

Локальная теорема для $\mathbb{C}M^n(\mu)$ ([9], [13]) *Пусть $\mathbb{C}M^n(\mu)$ является комплексной пространственной формой голоморфной секционной кривизны $4\mu \neq 0$, пусть P является гиперповерхностью Хопфа с главной кривизной λ в направлении JN, $\lambda = co_{4\lambda}(r)$, и пусть отображение ϕ_r имеет постоянный ранг q. Тогда q четно и, для каждой точки $p \in P$, существует ее открытая окрестность U такая, что $\phi_r(U)$ является комплексным подмногообразием в $\mathbb{C}M^n(\mu)$ вещественной размерности q.*

Глобальная теорема для $\mathbb{C}M^n(\mu)$ **([5, 6])** *Пусть* $\mu \neq 0$ *и* $n \geq 2$. *Тогда всякая* C^{2n-1}*-регулярная погруженная гиперповерхность Хопфа* P *в* $\mathbb{C}M^n(\mu)$ *, находящаяся в общем положении, совпадает с одной из следующих гиперповерхностей:*

i) трубчатой гиперповерхностью, построенной вокруг некоторого неприводимого алгебраического многообразия в $\mathbb{CP}^n(\mu)$ *(если* $\mu > 0$ *и* P *компактно),*

ii) геодезической сферой в $\mathbb{CH}^n(\mu)$ *(если* $\mu < 0$ *и* P *компактно),*

iii) геодезической сферой в $\mathbb{CP}^n(\mu)$ *(если* $\mu > 0$*,* P *компактно и содержится в геодезической сфере радиуса* $< \pi/(2\sqrt{\mu})$.

§5. О 3-сасакиевых многообразиях

3-сасакиевым многообразием называется риманово многообразие M, допускающее 3 различных структуры Сасаки, определяемых характеристическими векторными полями $\{\xi_a\}_{1\leq a\leq 3}$, удовлетворяющими соотношениям

$$\langle \xi_a, \xi_b\rangle = \delta_{ab} \quad \text{и} \quad [\xi_a, \xi_b] = 2\epsilon_{abc}\,\xi_c.$$

Из этих соотношений непосредственной вытекают следующие свойства эндоморфизмов φ_a:

$$\varphi_a(\xi_b) = -\epsilon_{abc}\,\xi_c. \quad \text{и} \quad \varphi_a(\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}^\perp) \subset \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}^\perp \tag{5.1}$$

Более того, мы видим, что размерность M равна $4n+3$, $n \in \mathbb{N}$. Векторные поля $\{\xi_a\}$ определяют 3-мерное слоение $\mathcal{F}$. Если $\mathcal{F}$ регулярно, то $M/\mathcal{F}$ является кватернионным многообразием, в котором кватернионная структура локально определяется локальными эндоморфизмами J_a, определенными через локальные сечения $\tau : U \subset M/\mathcal{F} \longrightarrow M$ слоения $\pi : M \longrightarrow M/\mathcal{F}$ формулой

$$J_aX = \pi_*(\varphi_a(\tau_*X)).$$

Если M является 3-сасакиевым многообразием с регулярным $\mathcal{F}$ и P является гиперповерхностью в M, касательной к $\mathcal{F}$ в своей каждой точке, то $\pi : P \longrightarrow P/\mathcal{F}$ и $\pi : M \longrightarrow M/\mathcal{F}$ являются римановыми субмерсиями с вполне геодезическими слоями, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & M \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} \\ P/\mathcal{F} & \longrightarrow & M/\mathcal{F} \end{array}$$

коммутативна и, в обозначениях, аналогичных использованным в параграфе 2, справедливо равенство

$$(A_{\overline{N}}X)^* = A_NX^* - \sum_{a=1}^{3}\langle A_NX^*, \xi_a\rangle\xi_a. \tag{5.2}$$

Более того, используя аргументы, аналогичные приведенным в параграфе 3, получаем равенства

$$A_N\xi_a = \varphi_a N, \quad \text{и} \quad \langle A_N\varphi_a N, \xi_b\rangle = \langle \varphi_a N, A_N\xi_b\rangle = \langle \varphi_a N, \varphi_b N\rangle =: \mu_{ab}. \tag{5.3}$$

По аналогии с определением 3.1 мы даем следующее **5.1. Определение** *Гиперповерхность P 3-сасакиевого многообразия M называется гиперповерхностью Хопфа если она касается $\mathcal{F}$ в каждой своей точке и 6-мерное пространство $< \{\xi_a, \varphi_a N\}_{1\leq a\leq 3} >$, порожденное характеристическими векторными полями ξ_a и $\varphi_a N$ является инвариантным под действием отображения Вейнгартена A_N. Здесь N обозначает единичный вектор нормали к P.*

Из (5.3) следует, что P является гиперповерхностью Хопфа если и только если

$$A_N\varphi_a N = \sum_{b=1}^{3}\lambda_{ab}\varphi_b N + \sum_{b=1}^{3}\mu_{ab}\xi_b.$$

Говорят, что 3-сасакиевое многообразие имеет постоянную φ-секционную кривизну, если секционная кривизна всех площадок, натянутых на вектора X и $\varphi_a X$, постоянна для всех X ортогональных к $\mathcal{F}$. Известно (см. [8] и [15]), что единственным 3-сасакиевым многообразием постоянной φ-секционной кривизны является $S^{4n+3}(1)$, причем $S^{4n+3}(1)/\mathcal{F} = \mathbb{HP}^n(1)$.

Вещественная гиперповерхность в $\mathbb{HP}^n(1)$ называется гиперповерхностью Хопфа, если подпространство, порожденное векторами $J_a N$, инвариантно под действием отображения Вейнгартена. При этом мы имеем

5.2. Лемма *P является гиперповерхностью Хопфа в $S^{4n+3}(1)$ если и только если $P/\mathcal{F}$ является гиперповерхностью Хопфа в $\mathbb{HP}^n(1)$.*

Доказательство. Доказательство Пусть $\hbar$ является проекцией на распределение, ортогональное к $\mathcal{F}$. Для любого локального сечения $\tau : \mathbb{HP}^n(1) \longrightarrow S^{4n+3}(1)$ мы имеем $\hbar\tau_* X = X^*$. Отсюда, принимая во внимание (5.1), выводим

$$J_a\overline{N} = \pi_*\varphi_a\tau_*\overline{N} = \pi_*\hbar\varphi_a\tau_*\overline{N} = \pi_*\varphi_a\hbar\tau_*\overline{N} = \pi_*\varphi_a\overline{N}^* = \pi_*\varphi_a N.$$

После чего доказательство завершается также как доказательство (3.3), но с использованием (5.2) вместо (2.2). $\square$

Полная классификация гиперповерхностей Хопфа в $\mathbb{HP}^n$ была получена Ю. Берндт в [2]:

Теорема о $\mathbb{HP}^n$ ([2]) *Каждая гиперповерхность Хопфа в $\mathbb{HP}^n$ является открытым подмножеством на*

i) трубке некоторого радиуса $r \in]0, \pi/2[$ вокруг вполне геодезически вложенного $\mathbb{HP}^k$ для некоторого $k = 0, 1, ..., n-1$, или

ii) трубке некоторого радиуса $r \in]0, \pi/4[$ вокруг вполне геодезически вложенного $\mathbb{CP}^n$.

Из последней теоремы и леммы (5.2) вытекает следующая

5.3. Теорема *Каждая гиперповерхность Хопфа в* $S^{4n+3}(1)$ *является открытым подмножеством на*

i) трубке некоторого радиуса $r \in]0, \pi/2[$ *вокруг вполне геодезически вложенного* $S^{4k+3}(1)$ *для некоторого* $k = 0, 1, ..., n-1$, *или*

ii) трубке некоторого радиуса $r \in]0, \pi/4[$ *вокруг вполне геодезически вложенного* $S^{2n+1}(1)$.

Полная классификация гиперповерхностей Хопфа в кватернионном гиперболическом пространстве $\mathbb{HH}^n$ была получена Ю. Берндт при дополнительном условии, что все главные кривизны постоянны ([2]) и была получена в общем случае А. А. Борисенко ([7]):

Теорема о $\mathbb{HH}^n$ ([2], [7]) *Каждая гиперповерхность Хопфа в* $\mathbb{HH}^n$ *является открытым подмножеством на*

i) трубке некоторого радиуса вокруг вполне геодезически вложенного $\mathbb{HH}^k$ *для некоторого* $k = 0, 1, ..., n-1$, *или*

ii) трубке некоторого радиуса вокруг вполне геодезически вложенного $\mathbb{CH}^n$, *или*

iii) орисфере.

Возможно также определить понятие 3-сасакиевой структуры для псевдо-риманова многообразия M размерности $4n+3$ и сигнатуры $(3, 4n)$ (см. [12]). Если $\mathcal{F}$ регулярно, то $M/\mathcal{F}$ являются кватернионными кэлеровыми многообразиями отрицательной скалярной кривизны. Если они имеют постоянную φ-секционную кривизну, то $M/\mathcal{F}$ является кватернионным гиперболическим пространством. Поэтому, используя приведенную выше теорему о $\mathbb{HH}^n$, для таких псевдо-римановых многообразий можно получить утверждение, аналогичное 5.3.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Berndt. *Real hypersurfaces with constant principal curvatures in complex hyperbolic space.* // Reine angew. Math. 1989. V. 395. P. 132–141. Zbl 0655.53046

[2] J. Berndt. *Real hypersurfaces in quaternionic space forms.*// J. Reine angew. Math. 1991. V. 419. P. 9–26. Zbl 0718.53017

[3] J. Berndt, L. Vanhecke. *Curvature-adapted submanifolds.* Nihonkai Math. J. 1992. V. 3. P. 177–185. Zbl 0956.53509

[4] D. Blair. *Contact Manifolds in Riemannian Geometry.* Springer, Lecture Notes in Math. 509, Berlin. 1976. Zbl 0319.53026

[5] А. А. Борисенко . *Компактные гиперповерхности Хопфа.*// Допов. нац. Акад. наук Укр. 1999. V. 8. P. 13–17. Zbl 0959.53027

[6] А. А. Борисенко . *On the global structure of Hopf hypersurfaces in a complex space form.*// Illinois J. Math. 2001. V. 45. P. 265–277. Zbl 0988.53024

[7] А. А. Борисенко . *Гиперповерхности Хопфа в комплексных и кватернионных пространственных формах.*// Математические заметки. В печати

[8] C. P. Boyer, K. Galicki, B. M. Mann. *The geometry and topology of* 3-*Sasakian manifolds.*// J. reine angew. Math. 1994. V. 455. P. 183–220 Zbl 0889.53029

[9] T.E. Cecil, P.J. Ryan. *Focal sets and real hypersurfaces in complex projective space.*// Trans. Amer. Math. Soc. 1982. V. 269. P. 481–499 Zbl 0492.53039

[10] J. Gillard. *Sasakian space forms and geodesic spheres and tubes.*// Publ. Math. Debrecen. 1997. V. 51. P. 295–309 Zbl 0905.53034

[11] A. Gray. *Tubes.* Addison-Wesley, New York. 1990. Zbl 0692.53001

[12] M. Konishi. *On manifolds with Sasakian 3-structure over quaternionic Kählerian manifolds.* Kodai Math. Sem. Reps. 1975. V. 26. P. 194–200. Zbl 0308.53035

[13] S. Montiel. *Real hypersurfaces of a complex hyperbolic space.*// J. Math. Soc. Japan. 1985. V. 37. P. 515–535. Zbl 0554.53021

[14] R. Niebergall, P.J. Ryan. *Real hypersurfaces in complex space forms.*// MSRI Publications. V. 32. Tight and Taut Submanifolds. 1997. P. 233–305. Zbl 0904.53005

[15] S. Tanno. *Killing vectors of contact Riemannian manifolds and fiberings related to the Hopf fibrations.*// Tohoku Math. J. 1971.V. 23. P. 313–333. Zbl 0232.53026

[16] K. Yano, M. Kon. *Structures on Manifolds.* World Scientific, Series in Pure Matehematics, V. 3. 1984 Zbl 0557.53001

Кафедра геометрии. Харьковский национальный университет.
Пл. Свободы 4, Харьков, 61007, Украина.
e-mail: Alexander.A.Borisenko univer.kharkov.ua

и

Departamento de Geometría y Topología. Universidad de Valencia.
46100-Burjasot (Valencia) Spain
email: miquel uv.es