Труды конференции «Геометрия и приложения»
13 – 16 марта 2000 г., Новосибирск

ДЕФОРМИРУЕМОСТЬ ПОВЕРХНОСТЕЙ F^2 В E^4 С СОХРАНЕНИЕМ ГРАССМАНОВА ОБРАЗА.

В.А. Горькавый

Введение

Каждому n-мерному подмногообразию F^n в евклидовом пространстве E^{n+m} сопоставляется его грассманов образ Γ в грассмановом многообразии $G(m, n+m)$. Этот объект, как и классическое понятие сферического образа двумерной поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, играет важную роль при исследовании внутренней и внешней геометрии подмногообразий $F^n \subset E^{n+m}$. В настоящий момент, благодаря стараниям многих известных геометров, среди которых хотелось бы отметить K.Leichtweiss, Y.Muto, S.S.Chern, Ю.А.Аминова, А.А.Борисенко, D.Hoffman, R.Osserman, теория грассманова образа представляет собой интенсивно развитую область современной дифференциальной геометрии подмногообразий, наполненную множеством сильных, красивых результатов.

Одной из важнейших составляющих теории грассманова образа вполне естественно является следующий круг задач. *Насколько однозначно подмногообразие $F^n \subset E^{n+m}$ определено своим грассмановым образом? Существуют ли подмногообразия $\tilde{F}^n \subset E^{n+m}$ с тем же грассмановым образом, что и у F^n? Как много таких подмногообразий? Допускает ли F^n деформации, при которых грассманов образ не изменяется?*[1] По традиции преобразования, при которых грассманов образ не изменяется, будем называть *G-преобразованиями.*

Сразу же отметим, что тривиальные преобразования параллельного переноса и гомотетии подмногообразия F^n в E^{n+m} не изменяют грассманова образа, поэтому интерес вызывают нетривиальные G-преобразования.

Кроме того, заметим, что локально достаточно рассматривать только лишь случай невырожденного грассманова образа. В случае, если грассманов образ вырожден в подмногообразие $\Gamma \subset G(m, n+m)$ размерности $k < n$, т.е. если $F^n \subset E^{n+m}$ является тангенциально вырожденным, то такое F^n будет сильно параболическим и будет состоять из $(n-k)$-мерных плоскостей (например – цилиндры, конусы, торсы и т.д.). Нетривиальные G-преобразования такого F^n сводятся к нетривиальным G-преобразованиям k-мерной базы F^k подмногообразия F^n как сильно параболического. Таким образом рассмотрение вырожденного грассманова образа подмногообразия F^n можно будет редуцировать к изучению невырожденного грассманова образа его базы F^k, поэтому и стоит рассматривать только "невырожденный"случай [2]. Далее мы будем рассматривать сформулированные задачи только в локальном смысле и только для невырожденных грассмановых образов.

Поставленным вопросам единственности и деформируемости посвящен широкий круг разнообразных работ (см. обзор [1]), и одним из основных результатов в данном направлении является тот факт, что нетривиальная G-деформируемость непосредственно связана с точечной коразмерностью подмногообразия. А именно, как доказал А.А.Борисенко [3], опираясь на результаты Э.Картана и В.В.Рыжкова о сильно параболических подмногообразиях, если точечная коразмерность $codim$ подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$ превосходит $n(n-1)/2+1$, то F^n однозначно определено свои грассмановым образом с точностью до тривиальных преобразования параллельного переноса и гомотетии в E^{n+m}, т.е. имеет место так называемая G-жесткость. (Заметим, что G-жесткость двумерных поверхностей $F^2 \subset E^{m+2}$,$_{m\geq 3}$, с точечной коразмерностью $codim = 3$, была также доказана Ю.А.Аминовым, но при некоторых излишних дополнительных условиях [4].)

С другой стороны, если точечная коразмерность подмногообразия $F^n \subset E^{n+m}$ тождественно равна 1, то тогда в следствие классической теоремы Аллендорфера подмногообразие F^n является гиперповерхностью в некотором аффинном подпространстве $\mathcal{E}^{n+1} \subset E^{n+m}$, и легко понять, по аналогии со случаем $F^2 \subset E^3$, что такое подмногообразие допускает очень широкое множество нетривиальных G-преобразований. Например, все строго выпуклые замкнутые гиперповерхности имеют один и тот же грассманов образ.

Как мы видим, ситуация в случае $codim > n(n-1)/2+1$ диаметрально противоположным образом отличается от случая, когда $codim \equiv 1$. Что происходит в случае, когда $1 < codim < n(n-1)/2+1$? Этот вопрос остается открытым и поныне.

В случае *двумерных* поверхностей, когда $n(n-1)/2+1 = 2$, с локальной точки зрения возникают всего лишь три принципиально различные ситуации:

$F^2 \subset E^{m+2}, m \geq 3$	$codim \equiv 3$	G-жесткость
$F^2 \subset E^{m+2}, m \geq 2$	$codim \equiv 2$	
$F^2 \subset E^{m+2}, m \geq 1$	$codim \equiv 1$	обширное множество нетривиальных G-преобразований

Мы рассмотрим именно промежуточный случай $codim \equiv 2$: здесь нетривиальные G-преобразования существуют, в отличии от случая $codim \equiv 3$, но их не так много, как в случае $codim \equiv 1$, и они допускают достаточно полное, замкнутое, геометрически ясное описание. Для простоты изложения мы ограничимся рассмотрением поверхностей $F^2 \subset E^4$ с постоянной точечной коразмерностью $codim \equiv 2$ – все результаты без труда переносятся на случай более общего класса поверхностей $F^2 \subset E^{m+2}$,$_{m\geq 2}$, с постоянной точечной коразмерностью $codim \equiv 2$. Отметим, что сам факт существования нетривиальных G-преобразований поверхностей $F^2 \subset E^4$

является по сути следствием результатов Ю.А.Аминова о восстановлении F^2 в E^4 по заданному грассманову образу [5].

В §1 мы напомним классификацию Ю.А.Аминова для точек грассманова образа и аффинную классификацию А.А.Борисенко для точек самой поверхности F^2 в E^4, а затем опишем общие G-преобразования $F^2 \subset E^4$ и их связь с приведенными классификациями.

В §2 будут рассмотрены изометрические и, более общие, конформные G-преобразования, а в §3 – эквиареальные G-преобразования поверхностей $F^2 \subset E^4$. Мы попытаемся объединить в единое целое и дополнить известные ранее результаты А.А.Борисенко по общим изометрическим G-преобразованиям, Д.Хоффмана и Р.Оссермана – по конформным G-преобразованиям, В.Т. Фоменко и его учеников – по эквиареальным G-преобразованиям. Кроме аналитического описания таких деформаций, будет показано, что *в общем случае поверхности F^2 с постоянной точечной коразмерностью 2 не допускают ни конформных, ни эквиареальных преобразований с сохранением грассманова образа, отличных от параллельного переноса и гомотетии.* Исключение составляют *лишь изотермические и минимальные поверхности, допускающие нетривиальные конформные G-преобразования* (Теоремы 1 и 3), а также *специальные классы поверхностей, допускающих нетривиальные эквиареальные G-преобразования* (описание этих классов приводится в Теоремах 6-8).

§1. Классификация точек поверхностей $F^2 \subset E^4$ и общие G-преобразования

Рассмотрим регулярное двумерное подмногообразие F^2 в четырехмерном евклидовом пространстве E^4. Сопоставим каждой точке $P \in F^2$ векторное подпространство в E^4, проходящее через начало координат параллельно нормальной плоскости $N_P F^2$. Построенное отображение $\mathcal{G}$ поверхности F^2 в грассманово многообразие $G(2,4)$ двумерных векторных подпространств евклидова пространства E^4 называется *грассмановым*, а образ $\Gamma \subset G(2,4)$ – *грассмановым образом поверхности* F^2.

В [6] была предложена следующая классификация точек грассманова образа. Предположим, что в точке $P \in F^2$ точечная коразмерность F^2 (размерность первого нормального пространства) равна 2. Тогда в окрестности соответствующей точки $P^* \in \Gamma$ грассманов образ представляет собой регулярное двумерное подмногообразие. Точка P^* называется гиперболической, параболической или эллиптической, если секционная кривизна $\overline{K}$ грассманова многообразия $G(2,4)$ в точке P^* вдоль касательной плоскости к грассманову образу $T_{P^*}\Gamma$ соответственно меньше, равна или больше 1. (Имеется в виду, что на $G(2,4)$ введена стандартная структура риманова симметрического пространства.) Отметим, что в данное определение входит условие $codim = 2$. Но точечная коразмерность поверхности однозначно определяется через грассманов образ [2], поэтому приведенная классификация корректна в том смысле, что она может быть сформулирована исключительно в терминах грассманова образа.

А.А.Борисенко показал, что классификации точек гауссова образа соответствует афинная классификация точек самой поверхности F^2. В частности, имеет место

Лемма 1. *Пусть точечная коразмерность F^2 в точке P равна 2. Точка $P^* \in \Gamma^2$ является гиперболической, либо параболической, либо эллиптической тогда и только тогда когда в касательном пространстве $T_P F^2$ существуют соответственно неколлинеарные сопряженные векторы X и Y (т.е. $L(X,Y)=0$), либо асимптотический вектор Z (т.е. $L(Z,Z)=0$), либо неколлинеарные комплексно сопряженные векторы U и V (т.е. $L(U,U)+L(V,V)=L(U+iV,U-iV)=0$).*

Здесь через $L: TF^2 \times TF^2 \to NF^2$ обозначена вторая фундаментальная форма F^2. Напомним, что образ $T_PF^2 \times T_PF^2$ под действием L называют первым нормальным пространством поверхности F^2, а его размерность называют точечной коразмерностью F^2 в точке P.

Приведенное классификационное утверждение дополняется следующим легко доказуемым фактом.

Лемма 2. *Если в точке $P \in F^2$ точечная коразмерность F^2 равна 2, и в касательном пространстве T_PF^2 существуют либо неколлинеарные сопряженные направления X и Y, либо асимптотическое направление Z, то эти направления определены однозначно.*

Заметим, что в отличии от гиперболических и параболических точек, где сопряженные и, соответственно, асиптотические вектора определены однозначно с точностью до умножения на скаляры (именно это и подразумевается под однозначной определенностью направлений, о которой идет речь в Лемме 2), в эллиптических точках характеризующие их комплексно сопряженные векторы определены не однозначно. А именно, для любого вектора U из касательного пространства T_PF^2 в эллиптической точке P существует единственный (с точностью до знака) вектор $V \in T_PF^2$, комплексно сопряженный вектору U.

Отметим еще, что невырожденный грассманов образ поверхности $F^2 \subset E^4$ кроме гиперболических, параболических и эллиптических точек может содержать еще и так называемые "точки уплощения", которые соответствуют точкам на поверхности, где $codim = 1$, однако мы с ними сталкиваться не будем.

Пусть теперь $F^2 \subset E^4$ – регулярная поверхность с постоянной точечной коразмерностью 2, заданная радиус-вектором $x = r(u,v)$ относительно локальных координат u, v.

Предположим, что грассманов образ $\Gamma^2 \subset G(2,4)$ поверхности F^2 является *гиперболическим*, т.е. состоит из гиперболических точек. В следствие Лемм 1 и 2, в каждой точке на F^2 существует и однозначно определены два линейно независимых сопряженных направления. В этой ситуации локальные координаты u, v на F^2 можно выбрать так, чтобы координатные линии были взаимно сопряжены, т.е. $L(\partial_u, \partial_v) \equiv 0$. Таким образом, на F^2 возникает однозначно определенная сеть сопряженных линий, что и характеризует гиперболичность грассманова образа. Заметим, что нормальные вектора $L(\partial_u,\partial_u)$ и $L(\partial_v,\partial_v)$ нигде не коллинеарны, так как точечная коразмерность тождественно равна 2.

Предположим теперь, что грассманов образ $\Gamma^2\subset G(2,4)$ поверхности F^2 является *параболическим*, т.е. состоит из параболических точек. Вследствие Лемм 1 и 2, в каждой точке на F^2 в касательном пространстве существует и однозначно определена прямая асимптотических векторов. Сама F^2 однозначным образом расслаивается на асимптотические кривые α_v, касающиеся асимптотических направлений, что и характеризует параболичность грассманова образа. Локальные координаты u,v на F^2 можно ввести так, чтобы асимптотические кривые α_v были координатными линиями $v=const$, будем называть такие координаты полуасимптотическими. В этом случае $L(\partial_u,\partial_u)\equiv 0$, при этом нормальные вектора $L(\partial_u,\partial_v)$ и $L(\partial_v,\partial_v)$ нигде не коллинеарны, так как точечная коразмерность тождественно равна 2.

Предположим, наконец, что грассманов образ $\Gamma^2\subset G(2,4)$ поверхности F^2 является *эллиптическим*, т.е. состоит из эллиптических точек. В следствие Леммы 1, в каждой точке на F^2 существует пара линейно независимых комплексно сопряженных векторов, которая определена неоднозначно. Не составляет труда показать, что локальные координаты u,v на F^2 можно ввести так, чтобы координатные линии касались комплексно сопряженных направлений, т.е. чтобы выполнялось $p^2L(\partial_u,\partial_u)+L(\partial_v,\partial_v)\equiv 0$, где $p(u,v)$ – некоторая положительная функция. При этом нормальные вектора $L(\partial_u,\partial_u)$ и $L(\partial_u,\partial_v)$ нигде не коллинеарны в виду того, что точечная коразмерность поверхности всюду равна 2. Будем называть такие координаты почти комплексно сопряженными, а при $p=1$ - комплексно сопряженными. Заметим, что в отличии от гиперболического и параболического случая, сеть почти комплексно сопряженных линий на поверхности, характеризующая эллиптичность грассманова образа, не единственна.

Классические примеры.

1. *Поверхности $F^2\subset E^4$ с плоской нормальной связностью* характеризуются существованием на них локальных координат кривизны, т.е. таких координат, что координатные линии – линии кривизны. Координаты кривизны – это ортогональные сопряженные координаты, поэтому грассманов образ у поверхностей с плоской нормальной связностью гиперболический (если, конечно, точечная коразмерность тождественно равна 2). С другой стороны, так как сопряженные координаты не обязаны, в общем случае, быть ортогональными, то множество поверхностей $F^2\subset E^4$ с гиперболическим грассмановым образом не ограничивается только лишь поверхностями с плоской нормальной связностью.

1.1. *Изотермические поверхности.* Поверхность $F^2\subset E^4$, на которой можно ввести локальные изотермические координаты u,v (в которых метрика F^2 записывается в виде $ds^2=e^{\psi}(du^2+dv^2)$), причем так, чтобы координатные линии были линиями кривизны, называется *изотермической* [7]. Изотермические поверхности являются частным случаем поверхностей с плоской нормальной связностью.

2. *Линейчатые поверхности.* Поверхность $F^2 \subset E^4$, образуемая совокупностью прямых, зависящих от одного параметра, называется *линейчатой.* Направления, касательные к прямолинейным образующим, являются очевидно асимптотическими направлениями. Поэтому, если точечная коразмерность линейчатой поверхности тождественно равна 2, то ее грассманов образ будет параболическим. С другой стороны, асимптотические линии не обязаны быть прямолинейными, вообще говоря, следовательно множество поверхностей $F^2 \subset E^4$ с параболическим грассмановым образом не ограничивается только лишь линейчатыми поверхностями.

3. *Минимальные поверхности* характеризуются обращением в ноль вектора средней кривизны. Такие поверхности характеризуются еще и существованием локальных координат, которые изотермичны и комплексно сопряжены одновременно. Поэтому, если точечная коразмерность минимальной поверхности тождественно равна 2, то ее грассманов образ – эллиптический. С другой стороны, почти комплексно сопряженные координаты не обязаны, вообще говоря, быть изотермическими, поэтому множество поверхностей $F^2 \subset E^4$ с эллиптическим грассмановым образом конечно же не ограничивается только лишь минимальными поверхностями.

Как следует из упомянутых выше работ Ю.А.Аминова, поверхности $F^2 \subset E^4$ с постоянной точечной коразмерностью 2 допускают нетривиальные деформации с сохранением грассманова образа (G-деформации). Свойства этих деформаций существенно зависят от типа точек поверхности F^2 (эквивалентно – от типа точек грассманова образа), а сами деформации могут быть описаны в терминах решений простых систем дифференциальных уравнений в частных производных. К описанию G-деформаций мы сейчас и приступаем.

Пусть $F^2 \subset E^4$ – регулярная поверхность с постоянной точечной коразмерностью 2, заданная радиус-вектором $x = r(u, v)$ относительно локальных координат u, v. Обозначим через

$$ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2,$$

$$L = \sum_{\sigma=1}^{2}(L_{11}^{\sigma}du^2 + 2L_{12}^{\sigma}dudv + L_{22}^{\sigma}dv^2)n_{\sigma}$$

первую и вторую фундаментальные формы F^2. Здесь n_1 и n_2 – локальные поля нормалей, образующие в каждой точке $P \in F^2$ ортонормированный базис нормального пространства N_pF^2.

Пусть $\tilde{F}^2 \subset E^4$ – произвольная регулярная поверхность с тем же грассмановым образом Γ^2, что и у F^2. Между F^2 и $\tilde{F}^2$ возникает соответствие по параллельности нормальных плоскостей, поэтому локальные координаты u, v переносятся с F^2 на $\tilde{F}^2$. Вектора n_1 и n_2 будут, очевидно, нормалями и для $\tilde{F}^2$. Обозначим через

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{11}du^2 + 2\tilde{g}_{12}dudv + \tilde{g}_{22}dv^2,$$

$$\tilde{L} = \sum_{\sigma=1}^{2}(\tilde{L}_{11}^{\sigma}du^2 + 2\tilde{L}_{12}^{\sigma}dudv + \tilde{L}_{22}^{\sigma}dv^2)n_{\sigma}$$

первую и вторую фундаментальные формы $\tilde{F}^2$.

Так как нормальные плоскости к F^2 и $\tilde{F}^2$ в соответствующих точках параллельны, поверхность $\tilde{F}^2 \subset E^4$ задается радиус-вектором $x = \tilde{r}(u, v)$ таким, что имеют место соотношения

$$\partial_u \tilde{r} = a\partial_u r + b\partial_v r, \tag{1.1}$$

$$\partial_v \tilde{r} = c\partial_u r + d\partial_v r, \tag{1.2}$$

где a, b, c, d – функции от u, v. Эти функции не произвольны, они должны удовлетворять некоторым условиям совместности. Продифференцируем первое уравнение по v, а второе – по u, затем применим деривационные формулы Гаусса-Вейнгартена и запишем условие равенства вторых смешанных производных радиус-вектора $\tilde{r}$. Получим:

$$\partial_v a + \Gamma^1_{12} a + \Gamma^1_{22} b \; = \; \partial_u c + \Gamma^1_{11} c + \Gamma^1_{12} d, \tag{2.1}$$

$$\partial_v b + \Gamma^2_{12} a + \Gamma^2_{22} b \; = \; \partial_u d + \Gamma^2_{11} c + \Gamma^2_{12} d, \tag{2.2}$$

$$L(\partial_u r, \partial_v r)a + L(\partial_v r, \partial_v r)b \; = \; L(\partial_u r, \partial_u r)c + L(\partial_u r, \partial_v r)d, \tag{2.3}$$

где Γ^i_{jk} – символы Кристоффеля метрики поверхности F^2. Любому решению a, b, c, d системы (2) будет соответствовать G-преобразование исходной поверхности F^2, определяемое из системы (1). Тривиальному решению $b = c \equiv 0, a = d \equiv a_0$, где $a_0 \neq 0$ – произвольная постоянная, соответствует гомотетия с коэффициентом a_0. Выбор начального значения для $\tilde{r}$ в какой-либо точке соответствует параллельному переносу преобразованной поверхности. Таким образом, нетривиальным G-преобразованиям поверхности F^2 соответствуют нетривиальные решения a, b, c, d системы (2).

Вид системы дифференциальных уравнений (2) непосредственно зависит от типа точек грассманова образа поверхности F^2. Предположим, что грассманов образ $\Gamma^2 \subset G(2, 4)$ является *гиперболическим*. Как было отмечено выше, на F^2 можно ввести локальные сопряженные координаты. Будем считать, не уменьшая общности, что координаты u, v как раз и есть сопряженные. Тогда $L(\partial_u r, \partial_v r) \equiv 0$. При этом, так как точечная коразмерность всюду равна 2, нормальные вектора $L(\partial_u r, \partial_u r)$ и $L(\partial_v r, \partial_v r)$ нигде не коллинеарны, в следствие чего из (2.3) получаем, что $b = c = 0$. Поэтому система (1), описывающая G-преобразования поверхности F^2, запишется как

$$\partial_u \tilde{r} = a\partial_u r, \tag{3.1}$$

$$\partial_v \tilde{r} = d\partial_v r, \tag{3.2}$$

а условие ее совместности, система уравнений (2), примет вид

$$\partial_v a \; = \; \Gamma^1_{12}(d - a), \tag{4.1}$$

$$\partial_u d \; = \; \Gamma^2_{12}(a - d). \tag{4.2}$$

Не обращающемуся в ноль решению a, d системы (4) соответствует решение $\tilde{r}(u, v)$ совместной системы (3), которое задает регулярную поверхность $\tilde{F}^2 \subset E^4$, чей грассманов образ совпадает с Γ^2. В свою очередь решение a, d системы (4) однозначно определяется выбором соответствующих начальных условий (пары функций одного переменного).

Таким образом, *нетривиальные G-деформации поверхности F^2 в E^4 с гиперболическим грассмановым образом представляются нетривиальными решениями a, d гиперболической системы линейных дифференциальных уравнений (4), а множество этих деформаций "параметризуется"начальными условиями для (4).*

Из (3) легко получить, что коэффициенты первых и вторых квадратичных форм поверхностей F^2 и $\tilde{F}^2$ связаны соотношениями

$$\tilde{g}_{11} = a^2 g_{11}, \quad \tilde{g}_{12} = ad g_{12}, \quad \tilde{g}_{22} = d^2 g_{22}, \tag{5.1}$$

$$\tilde{L}_{11} = aL_{11}, \quad \tilde{L}_{12} = L_{12} = 0, \quad \tilde{L}_{22} = dL_{22}; \tag{5.2}$$

Поэтому координатные линии u и v на $\tilde{F}^2$ будут сопряженными, как и на F^2, т.е. свойство F^2 нести сеть сопряженных линий является исключительно свойством грассманова образа. И на самом деле G-преобразования поверхностей $F^2 \subset E^4$ с гиперболическим грассмановым образом, так же, как и уравнения (3) и (4), известны как частный случай преобразований Петерсона сопряженных сетей (исследованию которых посвящено множество работ, см. например, [7], [8]).

Предположим теперь, что грассманов образ $\Gamma^2 \subset G(2, 4)$ является *параболическим.* На F^2 можно ввести локальные полуасимптотические координаты, которые мы и возьмем, не уменьшая общности, за u, v. Тогда $L(\partial_u, \partial_u) \equiv 0$, а нормальные вектора $L(\partial_u, \partial_v)$ и $L(\partial_v, \partial_v)$ нигде не коллинеарны, так как точечная коразмерность тождественно равна 2, в следствие чего из (2.3) получаем $b = 0, a = d$. Следовательно система (1), описывающая G-преобразования поверхности F^2, запишется как

$$\partial_u \tilde{r} = a\partial_u r, \tag{6.1}$$

$$\partial_v \tilde{r} = c\partial_u r + a\partial_v r, \tag{6.2}$$

а условие ее совместности (2) примет вид

$$\partial_u a = -c\Gamma^2_{11}, \tag{7.1}$$

$$\partial_v a = \partial_u c + c\Gamma^1_{11}. \tag{7.2}$$

Любому решению $a \neq 0, c$ системы (7) соответствует решение $\tilde{r}(u, v)$ совместной системы (6), которое задает регулярную поверхность $\tilde{F}^2 \subset E^4$, чей грассманов образ совпадает с Γ^2. Тривиальное решение $c(u, v) \equiv 0$ и $a(u, v) \equiv a_0$, где $a_0 \neq 0$ – произвольная константа, соответствует преобразованию гомотетии с коэффициентом a_0, в противном случае получаем нетривиальное G-преобразование F^2.

Таким образом, *нетривиальные G-преобразования поверхности F^2 в E^4 с параболическим грассмановым образом представляются нетривиальными решениями a, c параболической системы линейных дифференциальных уравнений (7), а множество этих преобразований "параметризуется"начальными условиями для (7).*

Из (6) легко получить, что в случае параболического грасманова образа коэффициенты первых и вторых квадратичных форм поверхностей F^2 и $\tilde{F}^2$ связаны соотношениями

$$\tilde{g}_{11} = a^2 g_{11}, \quad \tilde{g}_{12} = acg_{11} + a^2 g_{12}, \quad \tilde{g}_{22} = c^2 g_{11} + 2acg_{12} + a^2 g_{22}, \tag{8.1}$$

$$\tilde{L}_{11} = L_{11} = 0, \quad \tilde{L}_{12} = aL_{12}, \quad \tilde{L}_{22} = cL_{12} + aL_{22}; \tag{8.2}$$

Поэтому координатные линии $v = const$ на $\tilde{F}^2$ будут асимптотическими, как и на F^2.

Пусть, наконец, грассманов образ $\Gamma^2 \subset G(2,4)$ поверхности $F^2 \subset E^4$ – является *эллиптическим.* На F^2 можно ввести локальные почти комплексно сопряженные координаты. Будем считать, не уменьшая общности, что u, v – именно такие координаты. Тогда $p^2 L(\partial_u, \partial_u) + L(\partial_v, \partial_v) \equiv 0$, и при этом нормальные вектора $L(\partial_u, \partial_u)$ и $L(\partial_u, \partial_v)$ нигде не коллинеарны, так как точечная коразмерность равна 2. В этом случае из (2.3) получаем $d = a, c = -p^2 b$. Поэтому система (1), описывающая G-преобразования поверхности F^2, примет вид

$$\partial_u \tilde{r} = a\partial_u r + b\partial_v r, \tag{9.1}$$

$$\partial_v \tilde{r} = -p^2 b\partial_u r + a\partial_v r, \tag{9.2}$$

а условие ее совместности (2) запишется как

$$\partial_v a \ = -\partial_u(p^2 b) - (p^2\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{22})b, \tag{10.1}$$

$$\partial_u a \ = \ \partial_v b + (p^2\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{22})b, \tag{10.2}$$

Произвольному не обращающемуся в ноль решению a, b системы (10) соответствует решение $\tilde{r}(u, v)$ совместной системы (9), которое задает регулярную поверхность $\tilde{F}^2 \subset E^4$, чей грассманов образ совпадает с Γ^2. Тривиальному решению $a \equiv const, b \equiv 0$ соответствует тривиальное преобразование гомотетии поверхности F^2 в E^4, в противном случае мы получаем нетривиальное G-преобразование.

Таким образом, *нетривиальные G-преобразования поверхности F^2 в E^4 с эллиптическим грассмановым образом представляются отличными от тривиального решениями эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений (10), а множество этих преобразований "параметризуется"начальными условиями для (10).*

Из (9) легко получить, что в случае эллиптического грассманова образа коэффициенты первых и вторых квадратичных форм поверхностей F^2 и $\tilde{F}^2$ связаны соотношениями

$$\tilde{g}_{11} = a^2 g_{11} + 2abg_{12} + b^2 g_{22}, \quad \tilde{g}_{12} = -abp^2 g_{11} + (a^2 - p^2 b^2) g_{12} + abg_{22},$$
$$\tilde{g}_{22} = p^4 b^2 g_{11} - 2abp^2 g_{12} + a^2 g_{22}, \tag{11.1}$$

$$\tilde{L}_{11} = aL_{11} + bL_{12}, \quad \tilde{L}_{12} = aL_{12} - bp^2L_{11}, \quad \tilde{L}_{22} = -bp^2L_{12} - ap^2L_{11}. \quad (11.2)$$

Следовательно $p^2\tilde{L}_{11} + \tilde{L}_{22} = 0$. Поэтому координатные линии u и v на $\tilde{F}^2$ тоже будут почти комплексно сопряженными, как и на F^2, причем с той же функцией $p(u, v)$.

Итак, G-преобразования поверхностей $F^2 \subset E^4$ описываются решениями вполне конкретных систем линейных дифференциальных уравнений, тип которых определяется типом точек грассманова образа. Этот факт совершенно естественен в свете результатов Ю.А.Аминова о восстановлении неизвестной поверхности $F^2 \subset E^4$ по наперед заданному грассманову образу $\Gamma^2 \subset G(2, 4)$: для того, чтобы найти искомую F^2, необходимо решить некоторую специальную систему дифференциальных уравнений, которая эллиптична, гиперболична или параболична в соответствии с типом точек на Γ^2 [5], [6].

§2. Изометрические и конформные G-преобразования

Как было показано в предыдущей части, поверхности F^2 в E^4 могут быть нетривиально преобразованы с сохранением грассманова образа. Какие дополнительные требования на F^2 могли бы гарантировать G-жесткость, т.е. отсутствие нетривиальных G-преобразований?

Мы рассмотрим *конформные* G-преобразования. А именно, пусть грассманов образ у поверхностей F^2 и $\tilde{F}^2$ один и тот же. Потребуем дополнительно, чтобы соответствие F^2 и $\tilde{F}^2$ по параллельности нормальных плоскостей (по равенству координат u, v) было *конформным*. Что можно сказать об F^2 и $\tilde{F}^2$? Сведется ли конформное G-преобразование поверхности F^2 к тривиальным преобразованиям гомотетии и параллельного переноса? Под конформным мы понимаем такое соответствие между поверхностями, при котором коэффициенты первых квадратичных форм F^2 и $\tilde{F}^2$ связаны соотношениями

$$\tilde{g}_{11} = e^{2\varphi}g_{11}, \quad \tilde{g}_{12} = e^{2\varphi}g_{12}, \quad \tilde{g}_{22} = e^{2\varphi}g_{22}, \tag{12}$$

где φ – некоторая функция от u, v.

В случае гиперболического грассманова образа из (5.1) и (12) получаем

$$a^2 = e^{2\varphi}, \quad (ad - e^{2\varphi})g_{12} = 0, \quad d^2 = e^{2\varphi}. \tag{13}$$

Если $g_{12} \neq 0$, то решением уравнений (13) будет $d = a = \pm e^{\varphi}$. Подставляя найденные функции в систему (4), описывающую общие G-преобразования в гиперболическом случае, получаем систему двух уравнений для φ, решением которой будет только $\varphi \equiv const$. Следовательно $a = d \equiv const$, что соответствует тривиальному G-преобразованию поверхности F^2.

Если же $g_{12} \equiv 0$, т.е. если сеть сопряженных координат u, v на F^2 является сетью линий кривизны, то кроме выписанного выше решения у системы (13) возникает еще решение $d{=}{-}a{=}{\pm}e^{\varphi}$. Возьмем $d{=}{-}a{=}{-}e^{\varphi}$ и подставим в (4). Получим следующую систему дифференциальных уравнений для φ:

$$\partial_u\varphi = -2\Gamma^2_{12} = -\partial_u \ln g_{22}, \qquad (14.1)$$

$$\partial_v\varphi = -2\Gamma^1_{12} = -\partial_v \ln g_{11}. \qquad (14.2)$$

Эта система разрешима в том, и только в том случае, когда $\partial_{uv}(\ln g_{22}/g_{11}) = 0$, т.е. когда существуют положительные функции $U(u), V(v)$ такие, что $g_{22}/g_{11} = V(v)/U(u)$. В этом случае метрика поверхности F^2 представляется в виде $ds^2 = e^{\psi}(U(u)du^2+V(v)dv^2)$, где $\psi(u,v)$ – некоторая функция, а решением системы (14) будет $\varphi = -\psi+\varphi_0$, где φ_0 – произвольная постоянная. Соответственно решением системы (4) будет $d = -a = -e^{-\psi}e^{\varphi_0}$, что описывает некоторое нетривиальное G-преобразование поверхности F^2.

Выполнение условий $g_{12} = 0, \partial_{uv}(g_{22}/g_{11}) = 0$ эквивалентно тому, что поверхность F^2 является изотермической. Действительно, легко видеть, что соответствующей масштабирующей заменой координат $u^* = u^*(u), v^* = v^*(v)$ метрику можно привести к виду $ds^2 = e^{\psi^*}(du^2 + dv^2)$, при этом координаты u^*, v^* будут сопряженными, как и u, v.

Заметим еще, что G-преобразование, соответствующее решению $d = -a = e^{-\psi}e^{\varphi_0}$, отличается от G-преобразования, соответствующего решению $d = -a = e^{-\psi}$, на тривиальное преобразование гомотетии с коэффициентом e^{φ_0}. Кроме того, легко видеть, что G-преобразование, соответствующее решению $d = -a = -e^{-\psi}$, отличается от G-преобразования, соответствующего решению $d = -a = e^{-\psi}$, на тривиальное преобразование гомотетии с коэффициентом -1 (центральная симметрия). Поэтому, по модулю тривиальных преобразований, для изотермической поверхности $F^2 \subset E^4$ существует в точности одно нетривиальное конформное G-преобразование. Метрика соответствующей поверхности $\tilde{F}^2$ будет иметь вид $d\tilde{s}^2 = e^{-\psi}(U(u)du^2 + V(v)dv^2)$, т.е. $\tilde{F}^2$ также изотермическая. Аналогичная ситуация для поверхностей в E^3 хорошо известна, например, как преобразование Кристоффеля изотермических поверхностей (см. [7]).

Итак, легко видеть, что имеет место

Теорема 1. *Пусть $F^2 \subset E^4$ – регулярная поверхность с постоянной точечной коразмерностью 2. Предположим, что ее грассманов образ – гиперболический. Поверхность F^2 допускает нетривиальное конформное G-преобразование тогда и только тогда, когда она изотермическая. Если F^2 изотермична, то нетривиальное конформное G-преобразование единственно (с точностью до гомотетии и параллельного переноса), а получаемая при этом $\tilde{F}^2 \subset E^4$ является изотермической поверхностью, двойственной к F^2.*

Предположим теперь, что грассманов образ параболичен. Тогда из (8.1) и (12) получаем $a^2 = e^{2\varphi}, \quad ac = 0$, т.е. $a = \pm e^{\varphi}, c = 0$. Подставляя найденные функции в систему (7), описывающую общие G-преобразования в параболическом случае, получаем некоторую простую систему дифференциальных уравнений для φ, единственным решением которой будет $\varphi \equiv const$. Следовательно, $a \equiv const, c \equiv 0$, что соответствует преобразованию гомотетии поверхности F^2. Таким образом имеет место

Теорема 2. *Пусть $F^2 \subset E^4$ – регулярная поверхность с постоянной точечной коразмерностью 2. Предположим, что ее грассманов образ – параболический. Тогда поверхность F^2 не допускает нетривиальных конформных G-преобразований.*

Предположим, что грассманов образ поверхности F^2 эллиптичен. Тогда из (11.1) и (12) получаем

$$\begin{gathered} e^{2\varphi}g_{11} = a^2 g_{11} + 2ab g_{12} + b^2 g_{22}, \\ e^{2\varphi}g_{12} = -abp^2 g_{11} + (a^2 - b^2p^2) g_{12} + ab g_{22}, \\ e^{2\varphi}g_{22} = b^2p^4 g_{11} - 2abp^2 g_{12} + a^2 g_{22}. \end{gathered} \tag{15}$$

Рассмотрим (15) как систему трех однородных линейных алгебраических уравнений относительно $a^2 - e^{2\varphi}, ab, b^2$. Определитель матрицы этой системы равен $-(g_{11}p^2 + g_{22})((g_{11}p^2 - g_{22})^2 + 4p^2g_{12}^2)$. Если $((g_{11}p^2 - g_{22})^2 + 4p^2g_{12}^2) \neq 0$, то единственным решением системы (15) будет $a = \pm e^{\varphi}, b \equiv 0$. Подставляя полученные a, b в систему (10), описывающую общие G-преобразования в эллиптическом случае, получим систему дифференциальных уравнений для φ, единственным решением которой будет $\varphi \equiv const$. Следовательно, $a \equiv const, b \equiv 0$, что в итоге приводит к тривиальному G-преобразованию поверхности F^2.

Но вектор средней кривизны рассматриваемой поверхности имеет вид

$$H = \frac{1}{2det\, g}\left\{L_{11}(g_{22} - p^2g_{11}) - 2L_{12}g_{12}\right\}.$$

Поэтому условие $(g_{11}p^2 - g_{22})^2 + 4p^2g_{12}^2 \neq 0$ эквивалентно $H \neq 0$ и, как следствие, получаем, что если F^2 не минимальна, то все ее конформные G-преобразования тривиальны.

Пусть теперь F^2 минимальна, т.е. $(g_{11}p^2 - g_{22})^2 + 4p^2g_{12}^2 \equiv 0$. Тогда мы можем ввести на F^2 комплексно сопряженные изотермические координаты u, v, т.е. имеем $p = 1$, $g_{22} = g_{11}, g_{12} = 0$. Система (15) в этой ситуации разрешается в виде

$$\begin{aligned} a &= \cos\xi\, e^{\varphi}, \\ b &= \sin\xi\, e^{\varphi}, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\xi(u, v)$ – произвольная функция. Тогда, подставляя полученные выражения для a, b в систему (10), приходим к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_u\xi &= -\,\partial_v\varphi, \\ \partial_v\xi &= \partial_u\varphi. \end{aligned} \tag{17}$$

Следовательно, функция φ должна быть гармонической, а функция ξ – сопряженной ей гармонической функцией.

Как отмечалось выше, координаты u, v на $\tilde{F}^2$ будут комплексно сопряженными, как и на F^2. Кроме того, при конформном преобразовании изотермичность координат сохраняется [9]: $\tilde{g}_{11} = \tilde{g}_{22}$, $\tilde{g}_{12} \equiv 0$, это не сложно получить из (11.1). Следовательно комплексно сопряженные координаты u, v на $\tilde{F}^2$ тоже будут изотермическими, а поверхность $\tilde{F}^2$ – тоже минимальна, как и F^2.

Тривиальное решение $\varphi \equiv \varphi_0 = const, \xi \equiv 0$ соответствует тривиальному преобразованию гомотетии с коэффициентом e^{φ_0}. Кроме того, G-преобразование, соответствующее решению $\varphi + \varphi_0, \xi$, отличается от G-преобразования, соответствующего решению φ, ξ, на гомотетию с коэффициентом e^{φ_0}. Поэтому, факторизуя по φ_0, можно ограничиться лишь такими решениями φ, ξ, что $\varphi(u_0, v_0) = 0$ в произвольно зафиксированной точке (u_0, v_0). Таким образом, по модулю гомотетий и параллельных переносов, множество нетривиальных конформных G-преобразований F^2 представляется множеством гармонических функций $\xi(u, v)$, отличных от тождественного нуля.

Итак, имеет место

Теорема 3. *Пусть $F^2 \subset E^4$ – регулярная поверхность с постоянной точечной коразмерностью 2. Предположим, что ее грассманов образ – эллиптический. Поверхность F^2 допускает нетривиальное конформное G-преобразование тогда и только тогда, когда она минимальна. Если F^2 минимальна, то поверхность $\tilde{F}^2$, получаемая при конформном G-преобразовании, тоже минимальна, а множество нетривиальных конформных G-преобразований поверхности F^2 представляется множеством ненулевых гармонических функций.*

Как мы видим, в общем случае поверхности $F^2 \subset E^4$ с точечной коразмерностью 2 являются конформно G-жесткими, а нетривиальные конформные G-преобразования существуют только для двух исключительных классов: изотермические поверхности (гиперболический грассманов образ) и минимальные поверхности (эллиптический грассманов образ). Каждая изотермическая поверхность допускает ровно одно нетривиальное конформное G-преобразование, а каждая минимальная поверхность – целое семейство нетривиальных конформных G-деформаций. Напомним, что аналогичная ситуация имеет место и для двумерных поверхностей в E^3 (см., например, [7, §91]).

Отметим, что жесткость поверхностей $F^2 \subset E^n$ с ненулевым вектором средней кривизны относительно *сохраняющих ориентацию* конформных G-преобразований, а так-же исключительное свойство минимальных поверхностей допускать нетривиальные сохраняющие ориентацию конформные G-преобразования известны достаточно хорошо из работ С.С.Черна, Р.Оссермана, Д.Хофмана и др. (см. [10], [11]).

Отдельно рассмотрим *изометрические* G-преобразования, что соответствует $\varphi \equiv 0$.

В случае гиперболического грассманова образа, из (14) немедленно следует, что метрика деформируемой поверхности F^2 имеет вид $ds^2 = U(u)du^2 + V(v)dv^2$, т.е. F^2 имеет нулевую гауссову кривизну. На самом деле, как непосредственно следует из результатов А.А.Борисенко об изометричных подмногообразиях $F^n \subset E^{n+m}$ с одним и тем же грассмановым образом [12], и как легко получить из (3), (4), (13), верен следующий факт.

Теорема 4. *Пусть $F^2 \subset E^4$ – регулярная поверхность с постоянной* *точечной коразмерностью 2. Предположим, что ее грассманов образ – гиперболический. Поверхность F^2 допускает нетривиальное изометрическое G-преобразование тогда и только тогда, когда она является произведением двух кривых в дополнительных двумерных подпространствах $\gamma_1^1 \times \gamma_2^1 \subset E_1^2 \oplus E_2^2$. При этом нетривиальное G-преобразование представляется тождественным преобразованием кривой $\gamma_1^1 \subset E_1^2$ и центральной симметрией кривой $\gamma_2^1 \subset E_2^2$, т.е. соответствующая поверхность $\tilde{F}^2$ имеет вид $\gamma_1^1 \times (-\gamma_2^1) \subset E_1^2 \oplus E_2^2$, с точностью до центральной симметрии и параллельного переноса.*

Если грассманов образ параболичен, то изометрических G-преобразований нет, так как нет более общих конформных преобразований.

В случае эллиптического грассманова образа, из (17) следует $\xi \equiv \xi_0 = const$, так как предполагается $\varphi \equiv 0$. Подставляя (16) в (9) получаем, что изометрическое G-преобразование минимальной поверхности $F^2 \subset E^4$ имеет вид

$$\partial_u \tilde{r} = \cos\xi_0 \partial_u r + \sin\xi_0 \partial_v r,$$

$$\partial_v \tilde{r} = -\sin\xi_0 \partial_u r + \cos\xi_0 \partial_v r,$$

т.е. мы получаем ни что иное, как классическое однопараметрическое семейство минимальных поверхностей $\tilde{F}^2_{\xi_0} \subset E^4$, ассоциированное с исходной минимальной поверхностью F^2.

Теорема 5. *Пусть $F^2 \subset E^4$ – регулярная поверхность с постоянной точечной коразмерностью 2. Предположим, что ее грассманов образ – эллиптический. Поверхность F^2 допускает нетривиальное изометрическое G-преобразование тогда и только тогда, когда она минимальна. Если F^2 минимальна, то она допускает однопараметрической семейство нетривиальных изометрическых G-преобразований, при этом соответствующие поверхности $\tilde{F}^2 \subset E^4$ образуют ассоциированное с F^2 семейство изометричных ей минимальных поверхностей.*

§3. Эквиареальные G-преобразования

Иное вызывающее интерес дополнительное ограничение на G-деформации – это эквиареальность. А именно, пусть F^2 и $\tilde{F}^2$ – регулярные поверхности с постоянной точечной коразмерностью 2, имеющие один и тот же грассманов образ. Потребуем дополнительно, чтобы соответствие F^2 и $\tilde{F}^2$ по параллельности нормальных плоскостей (по равенству координат u, v) было *эквиареальным*, т.е. сохраняло инфинитезимальный элемент площади. Как и в случае конформных G-преобразований, что можно сказать об F^2 и $\tilde{F}^2$? Сведется ли эквиареальное G-преобразование поверхности F^2 к тривиальным преобразованиям гомотетии и параллельного переноса? Отметим, что подобные вопросы для *гиперповерхностей* в евклидовом и римановом пространствах рассматривались В.Т.Фоменко и его учениками.

Запишем элементы площади F^2 и $\tilde{F}^2$ в локальных координатах u, v: $dA = \sqrt{\det g} dudv$, $d\tilde{A} = \sqrt{\det \tilde{g}} dudv$. Тогда условие эквиареальности соответствия между F^2 и $\tilde{F}^2$ имеет вид:

$$\det g \, = \, \det \tilde{g}. \tag{18}$$

Предположим, что грассманов образ – гиперболический. Используя сопряженные координаты u, v и учитывая (5.1), можем переписать (18) как

$$(ad)^2 \, \equiv \, 1. \tag{19}$$

Разрешим (19) следующим образом: $a = \delta_1 \sqrt{\lambda}$, $d = \delta_2 \sqrt{1/\lambda}$, где $\lambda(u, v)$ – произвольная положительная функция, $\delta_1 = \pm 1, \delta_2 = \pm 1$. Подставляя полученные выражения в систему (4), описывающую общие G-преобразования в случае гиперболического грассманова образа, получаем следующую систему дифференциальных уравнений для λ:

$$\partial_u \lambda \, = \, 2\delta\lambda(\delta - \lambda)\Gamma^2_{12}, \tag{20.1}$$

$$\partial_v \lambda \, = \, 2(\delta - \lambda)\Gamma^1_{12}, \tag{20.2}$$

где $\delta = \dfrac{\delta_1}{\delta_2}$. Решения λ этой системы и описывают эквиареальные G-преобразования в случае гиперболического грассманова образа. Записывая условие совместности уравнений системы (20), получаем

$$(\delta - \lambda)\left(\delta\lambda\{\partial_v \Gamma^2_{12} - 2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12}\} - \{\partial_u \Gamma^1_{12} - 2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12}\}\right) \, = \, 0. \tag{21}$$

Следовательно, разрешимость (21) и (20) зависит от функций

$$\begin{gathered} P = \partial_v \Gamma^2_{12} - 2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12}, \\ Q = \partial_u \Gamma^1_{12} - 2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12}. \end{gathered}$$

С локальной точки зрения возникают две существенно различные ситуации.

Первая – когда $P = Q \equiv 0$, т.е.

$$\begin{gathered} \partial_v \Gamma^2_{12} - 2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} \equiv 0, \\ \partial_u \Gamma^1_{12} - 2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} \equiv 0. \end{gathered} \tag{22}$$

В этом случае (21) выполнено тождественно и система (20) является совместной, как при $\delta = 1$, так и при $\delta = -1$. Произвольно выбирая δ и задавая начальное значение $\lambda(u_0, v_0) = \lambda_0 > 0$, мы находим положительное решение уравнений (20). Таким образом, получается два однопараметрических семейства решений $\lambda(u, v)$ системы (20), одно – при $\delta = 1$, другое – при $\delta = -1$, параметром семейств является $\lambda_0 \in R_+$. Следовательно, в рассматриваемом случае поверхность F^2 допускает два однопараметрических семейства эквиареальных G-деформаций, которые все являются нетривиальными за исключением преобразования, соответствующего решению $\lambda \equiv 1, \delta = 1$.

Вторая ситуация – когда $P \neq 0, Q \neq 0$. Тогда уравнение (21) имеет два решения: тривиальное $\lambda_1 \equiv 1, \delta = 1$ и возможно нетривиальное $\lambda_2 = \dfrac{Q}{\delta P}$, где δ взято так, чтобы λ_2 было положительным. Если так определенная функция λ_2 является решением системы (20), т.е. выполнены условия (δ сокращается)

$$\partial_u \frac{Q}{P} = 2\delta \frac{Q}{P}(1 - \frac{Q}{P})\Gamma^2_{12}, \tag{23.1}$$

$$\partial_v \frac{Q}{P} = 2(1 - \frac{Q}{P})\Gamma^1_{12}, \tag{23.2}$$

то ей будет соответствовать некоторое единственное эквиареальное G-преобразование поверхности F^2; при $Q \neq \delta P$ это преобразование является нетривиальным. Если же (23) не выполняется, то у (20) останется только лишь тривиальное решение $\lambda_1 \equiv 1, \delta = 1$, которому будет соответствовать тривиальное эквиареальное G-преобразование поверхности F^2. Таким образом, при $P \neq 0, Q \neq 0$ у поверхности F^2 либо существует единственное (с точностью до параллельного переноса и центральной симметрии) нетривиальное эквиареальное G-преобразование, что имеет место при выполнении (23), либо F^2 эквиареально G-жесткая.

При $P \equiv 0, Q \neq 0$ либо $P \neq 0, Q \equiv 0$ у (21), а значит и у (20), будет только тривиальное решение $\lambda \equiv 1, \delta = 1$.

Заметим, что условия (23), как и (22), представляют собой некоторые специальные диференциальные уравнения для коэффициентов метрики F^2, т.е. поверхности $F^2 \subset E^4$, удовлетворяющие (22) либо (23), образуют два специальных класса поверхностей. В общем же случае условия (22) и (23), вообще говоря, не выполнены, т.е. в ситуации общего положения поверхность F^2 с гиперболическим грассмановым образом является эквиареально G-жесткой. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 6. *Поверхность $F^2 \subset E^4$ с точечной коразмерностью 2 и гиперболическим грассмановым образом $\Gamma^2 \subset G(2,4)$ допускает нетривиальные эквиареальные G-преобразования тогда и только тогда, когда метрика F^2 удовлетворяет условия (22) либо (23). При этом в первом случае имеется два однопараметрических семейства эквиареальных G-деформаций, а во втором – существует единственное нетривиальное эквиареальное G-преобразование (с точностью до параллельных переносов и центральной симметрии).*

Геометрический смысл условий (22) и (23) в общем случае не вполне понятен. Рассмотрим частный случай, когда поверхность F^2 изотермическая. Метрика поверхности имеет вид $ds^2 = e^{\psi(u,v)}(U(u)du^2 + V(v)dv^2)$, поэтому имеют место следующие выражения для P и Q:

$$P = Q = \frac{1}{2}(\partial_{uv}\psi - \partial_u\psi\partial_v\psi).$$

Если

$$\partial_{uv}\psi - \partial_u\psi\partial_v\psi \equiv 0, \tag{24}$$

то изотермическая поверхность F^2 допускает два однопараметрических семейства нетривиальных эквиареальных G-преобразований. Если же $P=Q$ не обращаются в ноль, то единственным решением (21) и, как следствие – (20), будет тривиальное $\lambda \equiv 1, \delta = 1$, т.е. изотермическая поверхность F^2 будет эквиареально G-жесткой. Заметим, что решением уравнения (24) является $\psi = -\ln(A(u)+B(v))$, где $A(u), B(v)$ – функции, зависящие соответственно от u и от v. Метрика поверхности имеет тогда вид $ds^2 = \dfrac{1}{A(u)+B(v)}(U(u)du^2+V(v)dv^2)$, сеть сопряженных изотермических координат u, v на F^2 в этом случае называется L_{-1}-*сетью* [7].

Теорема 7. *Пусть $F^2 \subset E^4$ – изотермическая поверхность с точечной коразмерностью 2. Пусть u, v – изотермические сопряженные координаты на F^2, а метрика имеет вид $ds^2 = e^{\psi(u,v)}(U(u)du^2+V(v)dv^2)$. Поверхность F^2 допускает нетривиальное эквиареальное G-преобразование тогда и только тогда, когда ψ удовлетворяет (24). При этом если у F^2 существует хотя бы одно нетривиальное эквиареальное G-преобразование, то F^2 допускает два однопараметрических семейства нетривиальных эквиареальных G-преобразований.*

Пусть теперь грассманов образ – параболический. Применяя полуасимптотические координаты u, v и принимая во внимание (8.1), получаем, что (18) переписывается в виде

$$a^2 \equiv 1, \tag{25}$$

т.е. либо $a \equiv 1$, либо $a \equiv -1$. Тогда система (7), описывающая общие G-преобразования в параболическом случае, примет вид

$$\partial_u c + c\Gamma^1_{11} = 0, \tag{26.1}$$

$$c\Gamma^2_{11} = 0. \tag{26.2}$$

С локальной точки зрения возникают два различных подслучая: $\Gamma^2_{11} \neq 0$ и $\Gamma^2_{11} \equiv 0$. В первом из них, более общем, когда Γ^2_{11} не обращается в ноль, единственным решением системы (26) является функция $c(u,v) \equiv 0$, а значит поверхности F^2 и $\tilde{F}^2$ совмещаются параллельным переносом и, возможно, центральной симметрией (при $a(u,v) \equiv -1$).

Во втором же подслучае, более частном, когда $\Gamma^2_{11} \equiv 0$, равенство (26.2) выполняется автоматически, поэтому для функции $c(u,v)$ остается одно лишь условие (26.1). Задавая начальные значения $c(u_0, v) = c_0(v)$ вдоль какой-либо координатной кривой $u = u_0$, однозначно находим решение $c(u,v)$ уравнения (26.1). Так как $a \equiv \pm 1$, то каждому решению $c(u,v)$ уравнения (26.1) будут соответствовать два эквиареальных G-преобразования поверхности F^2. При этом, если $c_0(v) \equiv 0$, то $c(u,v) \equiv 0$, что в итоге будет соответствовать тривиальному преобразованию параллельного переноса (при $a \equiv 1$) и центральной симметрии (при $a \equiv -1$). Кроме того, заметим, что преобразование, соответствующее решению $a \equiv -1, c(u,v)$, отличается от преобразования, соответствующего решению $a \equiv 1, -c(u,v)$, в точности на центральную симметрию. Поэтому, по модулю параллельных переносов и центральной симметрии, нетривиальные эквиареальные G-преобразования описываются парами $a \equiv 1, c(u,v)$, где $c(u,v)$ – ненулевые решения (26.1), а множество всех нетривиальных эквиареальных G-преобразований "параметризуется"не обращающимися в ноль функциями $c(u_0,v) = c_0(v)$.

Каков геометрический смысл условия $\Gamma^2_{11} \equiv 0$? Так как

$$\partial_{uu} r = \Gamma^1_{11}\partial_u r + \Gamma^2_{11}\partial_v r,$$

то легко видеть, что Γ^2_{11} обращается в ноль в точке (u_0, v_0) тогда и только тогда, когда кривизна кривой $\vec{r}(u, v_0)$ в E^4 (эквивалентно – геодезическая кривизна асимптотической линии $v = v_0$ на F^2) равна нулю в точке u_0. Как следствие, выполнение тождества $\Gamma^2_{11} \equiv 0$ эквивалентно тому, что асимптотические линии $v = const$ на F^2 являются геодезическими, т.е. поверхность F^2 – линейчатая. Таким образом имеет место

Теорема 8. [13] *Поверхность $F^2 \subset E^4$ с точечной коразмерностью 2 и параболическим грассмановым образом $\Gamma^2 \subset G(2,4)$ допускает нетривиальные эквиареальные G-преобразования тогда и только тогда, когда F^2 является линейчатой. При этом множество нетривиальных эквиареальных G-преобразований "параметризуется"не обращающимися в ноль функциями одной переменной $c_0(v)$.*

Замечание. Возьмем произвольную кривую γ, трансверсальную прямым, составляющим линейчатую поверхность $F^2 \subset E^4$. Задание начального условия $c_0(v)$ с геометрической точки зрения эквивалентно заданию эквиареального G-преобразования F^2 вдоль γ, т.е. эквиареальное G-преобразование линейчатой поверхности F^2 полностью определяется своим значением вдоль γ. Более подробное рассмотрение проведено в [13].

Предположим наконец, что грассманов образ – эллиптический. Используя почти комплексно сопряженные координаты u, v и учитывая (11.1), получаем, что (18) эквивалентно выполнению соотношений

$$a^2 + p^2 b^2 \equiv 1. \qquad (27)$$

Разрешая (27) в виде

$$a = \cos\xi, \quad b = \frac{1}{p}\sin\xi$$

и подставляя эти выражения в систему (10), описывающую общие G-преобразования в случае эллиптического грассманова образа, получаем следующую систему дифференциальных уравнений для функции $\xi(u,v)$:

$$\partial_u \xi = \frac{1}{2p}\left\{-(\partial_u p + \frac{1}{p}\Gamma^1)\sin 2\xi + (\frac{\partial_v p}{p} - \Gamma^2)(1-\cos 2\xi)\right\}, \qquad (28.1)$$

$$\partial_v \xi = \frac{1}{2}\left\{(\partial_u p + \frac{1}{p}\Gamma^1)(1-\cos 2\xi) + (\frac{\partial_v p}{p} - \Gamma^2)\sin 2\xi\right\}, \qquad (28.2)$$

где введены обозначения $\Gamma^i = \Gamma^i_{11} + \Gamma^i_{22}, i = 1, 2$. Решения $\xi(u, v)$ этой системы дифференциальных уравнений как раз и описывают эквиареальные G-преобразования в случае эллиптического грасманова образа.

Сразу же заметим, что если $\xi(u, v)$ – решение (28), то и $\xi(u, v) + \pi$ – тоже решение (28), причем эквиареальное G-преобразование, соответствующее $\xi(u, v) + \pi$ отличается от эквиареального G-преобразования, соответствующего $\xi(u, v)$, в точности на тривиальное преобразование центральной симметрии. Кроме того, у системы (28) есть тривиальные решения $\xi \equiv \pi k, k \in Z$, которые соответствуют тривиальным эквиареальным G-преобразованиям поверхности F^2. Решения ξ, отличные от $\xi \equiv \pi k$, соответствуют нетривиальным эквиареальным G-преобразованиям F^2.

Условием совместности уравнений системы (28) является уравнение

$$\begin{gathered}\sin 2\xi \left\{p^3\partial_u\Gamma^2 - p\partial_v\Gamma^1 + 2\Gamma^1\partial_v p + 2p\partial_u p\partial_v p - 2p^2\partial^2_{uv}p\right\} + \\ + (1-\cos 2\xi)\{-p^2\partial_u\Gamma^1 - p^2\partial_v\Gamma^2 + (\Gamma^1)^2 + p^2(\Gamma^2)^2 + 3p\partial_u p\Gamma^1 - p\partial_v p\Gamma^2 + \\ + p^2(\partial_u p)^2 - (\partial_v p)^2 - p^3\partial^2_{uu}p + p\partial^2_{vv}p\} = 0.\end{gathered} \tag{29}$$

Разрешимость уравнений (28) и (29) непосредственно зависит от свойств функций

$$P = p^3\partial_u\Gamma^2 - p\partial_v\Gamma^1 + 2\Gamma^1\partial_v p + 2p\partial_u p\partial_v p - 2p^2\partial^2_{uv}p,$$

$$\begin{gathered}Q = -p^2\partial_u\Gamma^1 - p^2\partial_v\Gamma^2 + (\Gamma^1)^2 + p^2(\Gamma^2)^2 + 3p\partial_u p\Gamma^1 - p\partial_v p\Gamma^2 + \\ + p^2(\partial_u p)^2 - (\partial_v p)^2 - p^3\partial^2_{uu}p + p\partial^2_{vv}p.\end{gathered}$$

Как и в случае гиперболического грассманова образа, с локальной точки зрения возникают две принципиально различные ситуации.

Первая – когда $P = Q \equiv 0$, т.е. когда

$$p^3\partial_u\Gamma^2 - p\partial_v\Gamma^1 + 2\Gamma^1\partial_v p + 2p\partial_u p\partial_v p - 2p^2\partial^2_{uv}p \equiv 0, \tag{30.1}$$

$$\begin{gathered}-p^2\partial_u\Gamma^1 - p^2\partial_v\Gamma^2 + (\Gamma^1)^2 + p^2(\Gamma^2)^2 + 3p\partial_u p\Gamma^1 - p\partial_v p\Gamma^2 + \\ + p^2(\partial_u p)^2 - (\partial_v p)^2 - p^3\partial^2_{uu}p + p\partial^2_{vv}p \equiv 0.\end{gathered} \tag{30.2}$$

Тогда (29) выполнено, и система уравнений (28) является совместной. Задавая начальное значение $\xi(u_0, v_0) = \xi_0$, получаем решение $\xi(u, v)$. Этому решению будет соответствовать эквиареальное G-преобразование поверхности F^2. Начальным условиям $\xi(u_0, v_0) = \pi k, k \in Z$, соответствуют тривиальные решения $\xi(u, v) \equiv \pi k, k \in Z$, которые приводят к тривиальным G-преобразованиям. Начальным условиям $\xi(u_0, v_0) = \xi_0$ и $\xi(u_0, v_0) = \xi_0 + \pi$ отвечают решения $\xi(u, v)$ и $\xi(u, v) + \pi$, которые соответствуют эквиареальным G-преобразованиям, отличающимся на центральную симметрию. Поэтому достаточно рассматривать интервал $(0, \pi)$: каждому ξ_0 из этого интервала будет соответствовать нетривиальное эквиареальное G-преобразование F^2. Таким образом, в случае выполнения (30), поверхность F^2 допускает однопараметрическое семейство нетривиальных эквиареальных G-преобразований, параметром семейства является $\xi_0 \in (0, \pi)$.

Вторая ситуация – когда $P \neq 0, Q \neq 0$. Тогда у уравнения (29) будет два решения – тривиальное $\xi \equiv \pi k$ и нетривиальное ξ, определяемое из

$$\begin{aligned} \sin 2\xi \;&=\; -\frac{2PQ}{P^2+Q^2}, \\ \cos 2\xi \;&=\; \frac{Q^2-P^2}{P^2+Q^2}, \end{aligned} \tag{31}$$

с точностью до слагаемого πk. Прямым вычислением легко убедиться, что эта функция ξ будет решением системы уравнений (28) тогда и только тогда, когда

$$P\partial_u Q \;-\; Q\partial_u P \;=\; \frac{1}{p}P\left\{(\partial_u p + \frac{1}{p}\Gamma^1)Q + (\frac{\partial_v p}{p} - \Gamma^2)P\right\}, \tag{32.1}$$

$$P\partial_v Q \;-\; Q\partial_v P \;=\; \frac{1}{p}P\left\{(\partial_u p + \frac{1}{p}\Gamma^1)P - (\frac{\partial_v p}{p} - \Gamma^2)Q\right\}, \tag{32.2}$$

То есть, если $P \neq 0, Q \neq 0$ и выполнено (32), то у системы (28) существует нетривиальное решение ξ, причем это решение единственно с точностью до слагаемого πk. Как следствие, в этом случае существует единственное (с точностью до тривиальных преобразований) нетривиальное эквиареальное G-преобразование поверхности F^2. Если же $P \neq 0, Q \neq 0$ и (e6) не выполнено, то у (28) будет только тривиальное решение $\xi \equiv \pi k$, а F^2 будет допускать только тривиальные эквиареальные G-преобразования.

При $P \equiv 0, Q \neq 0$ либо $P \neq 0, Q \equiv 0$ у (29), а как следствие – и у (28), будет только тривиальное решение $\xi \equiv \pi k$, т.е. в этих случаях поверхность F^2 будет эквиареально G-жесткой.

Условия (30) и (32), как и условия (22) и (23) в случае гиперболического грассманова образа, представляют собой некоторые специальные диференциальные уравнения для коэффициентов метрики F^2 и для функции $p(u,v)$, т.е. поверхности $F^2 \subset E^4$, удовлетворяющие (30) либо (32), образуют два специальных класса поверхностей. В общем же случае условия (30) и (32), вообще говоря, не выполнены, т.е. в ситуации общего положения поверхность F^2 с эллиптичеким грассмановым образом является эквиареально G-жесткой. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 9. *Поверхность $F^2 \subset E^4$ с точечной коразмерностью 2 и эллиптическим грассмановым образом $\Gamma^2 \subset G(2,4)$ допускает нетривиальные эквиареальные G-преобразования тогда и только тогда, когда F^2 удовлетворяет условия (30) либо (32). При этом в первом случае имеется однопараметрическое семейство эквиареальных G-деформаций, а во втором – существует единственное нетривиальное эквиареальное G-преобразование (с точностью до параллельных переносов и центральной симметрии).*

Геометрический смысл условий (30) и (32) в общем случае не вполне ясен. Рассмотрим частный случай, когда поверхность F^2 минимальна. В комплексно сопряженных изотермических координатах u, v метрика поверхности имеет вид $ds^2 = e^{\psi(u,v)}(du^2 + dv^2)$, откуда непосредственно вытекает, что $\Gamma^1 = \Gamma^2 \equiv 0$; кроме того $p(u,v) = 1$. Следовательно $P = Q \equiv 0$, т.е. для минимальной поверхности выполнено условие (30), а значит F^2 допускает однопараметрическое семейство нетривиальных эквиареальных G-преобразований. Решениями системы (28) в этом случае будут функции $\xi \equiv \xi_0 = const$, а эквиареальные G-преобразования минимальной поверхности F^2 имеют тогда вид

$$\partial_u \tilde{r} \;=\; \cos\xi_0\,\partial_u r \;+\; \sin\xi_0\,\partial_v r,$$

$$\partial_v \tilde{r} \;=\; -\sin\xi_0\,\partial_u r \;+\; \cos\xi_0\,\partial_v r.$$

Но легко видеть, принимая во внимание изотермичность координат u, v, что это преобразование является ни чем иным, как изометрией.

Теорема 10. *Пусть $F^2 \subset E^4$ – минимальная поверхность с точечной коразмерностью 2. Поверхность F^2 допускает однопараметрическое семейство нетривиальных эквиареальных G-преобразование. Любое эквиареальное G-преобразование F^2 является изометрическим.*

Как следствие, поверхности $\tilde{F} \subset E^4$, получаемые при эквиареальных G-преобразованиях F^2, образуют ассоциированное с F^2 семейство минимальных поверхностей.

Замечание 1. Эквиареальные G-преобразования поверхности $F^2 \subset E^4$ можно эквивалентно рассматривать как G-преобразования, сохраняющие абсолютное значение гауссовой кривизны, вследствие классических связей между площадью грассманова образа, площадью самой поверхности и ее гауссовой кривизной. Принципиально существенных отличий здесь не будет, за исключением одного случая - когда исходная поверхность имеет нулевую гауссову кривизну и плоскую нормальную связность. Как доказал Муто (см. [14], где рассмотрен случай евклидовых подмногообразий произвольной размерности и коразмерности), при любом G-преобразовании такая поверхность будет оставаться внутренне плоской и с плоской нормальной связностью.

Замечания 2. Рассмотренные эквиареальные G-преобразования поверхностей $F^2 \subset E^4$ с точечной коразмерностью 2 очень напоминают ситуацию с (изометрически) изгибаемыми гиперповерхностями в евклидовом пространстве. Теория таких гиперповерхностей была заложена в работах В.Сбраны и Э.Картана (обычно их так и называют *гиперповерхностями Картана-Сбраны*), впоследствии она интенсивно развивалась в работах многих геометров, среди которых – Д.Громолл, М.Дачжер и др. (см. [15]). Еще Картаном были выделены отдельные классы нетривиально изгибаемых гиперповерхностей: здесь были и линейчатые гиперповерхности, и гиперповерхности, допускающие непрерывное одно-параметрическое семейство изометрических деформаций, и гиперповерхности, обладающие единственным нетривиальным изометрическим преобразованием, и т.д., что удивительным образом подобно рассмотренной в настоящей работе ситуации с эквиареальными G-преобразованиями евклидовых поверхностей

F^2 постоянной точечной коразмерности 2. Более того, в [15] мы можем найти уравнения, совершенно аналогичные по внешнему виду уравнениям (20) и т.д. В связи с этим, возникает вопрос о применении методов, развитых в теории гиперповерхностей Картана-Сбраны, к теории эквиареальных G-преобразований поверхностей F^2 постоянной точечной коразмерности 2, например – к доказательству *существования* и *явного построения* поверхностей F^2 постоянной точечной коразмерности 2 с эллиптическим или гиперболическим грассмановым образом, допускающих нетривиальные эквиареальные G-преобразования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисенко А.А., Николаевский Ю.А. *Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий* // Успехи математических наук. 1991. Т. 46, № 2. С. 41–83. Zbl 0742.53017

2. Горькавый В.А. *Теоремы редукции в задаче восстановления подмногообразий евклидова пространства по заданому грассманову образу* // Математическая физика, анализ, геометрия. 1997. Т. 4, № 3. С. 309–333. Zbl 0904.53011

3. Борисенко А.А. *Об однозначной определенности многомерных подмногообразий в евклидовом пространстве по грассманову образу* // Математические заметки. 1992. Т. 51, № 1. С. 8–15. Zbl 0767.53005

4. Аминов Ю.А. *Восстановление двумерной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу* // Математические заметки. 1984. Т. 36, № 2. С. 223–228. Zbl 0566.53014

5. Аминов Ю.А. *Определение поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу* // Математический сборник. 1982. Т. 117, № 2. С. 147–160. Zbl 0487.53005

6. Аминов Ю.А. *О грассмановом образе двумерной поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве* // Украинский геометрический сборник. 1980. Вып. 23. С. 3–16. Zbl 0459.53003

7. Шуликовский В. И. *Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении* Москва: Физматгиз, 1963.

8. Рыжков В.В. *Сопряженные системы на многомерных поверхностях* // Труды ММО. 1958. № 7. С. 179–227. Zbl 0192.27404

9. Оссерман Р. *Минимальные поверхности* // Успехи математических наук. 1967. Т. 22, № 4. С. 55–136. Zbl 0209.53001

10. Hoffman D., Osserman R. *The Gauss map of surfaces in R^n* // J. Diff. Geom. 1983. V. 18, No 1. P. 733–754. Zbl 0535.53004

11. Chern S.S., Osserman R. *Complete minimal surfaces in Euclidean n-space* // J. Analyse Math. 1967. V. 19. P. 15–34. Zbl 0172.22802

12. Борисенко А.А. *Об изометричных подмногообразиях произвольной коразмерности в евклидовом пространстве с совпадающим грассмановым образом* // Математические заметки. 1992. Т. 52, № 4. С. 29–34. Zbl 0814.53007

13. Горькавый В.А. *Деформируемость поверхностей с сохранением параболического гауссова образа* // Вестник Харьковского Национального Университета. 2000. Zbl 0976.53007

14. Muto Y. *The Gauss map of a submanifold in a Euclidean space* // J. Math. Soc. Japan. 1978. V. 30, No 1. P. 85–100. Zbl 0363.53026

15. M.Dajczer, L.Florit, R.Tojeiro *On deformable hypersurfaces in space forms* // Annali de Matematica pura ed applicata (IV). 1998. V. CLXXIV. P. 361–390. Zbl 0956.53043

310164 Харьков, пр.Ленина, 47, ФТИНТ НАНУ
e-mail: gorkaviy@ilt.kharkov.ua