Труды конференции «Геометрия и приложения»
13 – 16 марта 2000 г., Новосибирск

О ТОЧНОСТИ КОГОМОЛОГИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ КОРОТКОЙ ТОЧНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КОМПЛЕКСОВ В ПОЛУАБЕЛЕВОЙ КАТЕГОРИИ

Я. А. Копылов, В. И. Кузьминов [1]

Аннотация.

В статье найдены достаточные условия точности когомологической последовательности, соответствующей короткой точной последовательности коцепных комплексов в произвольной полуабелевой категории.

Как известно, в абелевой категории произвольной короткой точной последовательности коцепных комплексов

$$0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$$

соответствует длинная точная последовательность когомологий

$$\dots \xrightarrow{\partial^{n-1}} H^n(A) \xrightarrow{\xi^n} H^n(B) \xrightarrow{\omega^n} H^n(C) \xrightarrow{\partial^n} H^{n+1}(A) \xrightarrow{\xi^{n+1}} \dots$$

В связи с изучением свойств оператора внешнего дифференцирования на римановом многообразии В. И. Кузьминовым и И. А. Шведовым в [1] изучался вопрос о точности последовательности редуцированных когомологий, отвечающей короткой точной последовательности коцепных комплексов, образованных банаховыми пространствами и замкнутыми линейными операторами. Как отмечено в [1], можно считать, что дифференциалы комплексов всюду заданы и ограничены. Аддитивная категория $\mathcal{B}an$ банаховых пространств и ограниченных линейных операторов неабелева, однако является полуабелевой в смысле Д. А. Райкова [2]. В настоящей статье получены обобщения результатов [1]. Исследование базируется на установленных в [3] свойствах Ker-Coker-последовательности в полуабелевой категории.

Будем рассматривать аддитивные категории, в которых выполнена следующая аксиома.

Аксиома 1. *Каждый морфизм α имеет ядро* $\operatorname{Ker}\alpha$ *и коядро* $\operatorname{Coker}\alpha$.

[1] Работа поддержана программой «Университеты России» (код проекта — ЗН 342–00) и Государственной программой поддержки ведущих научных школ (код проекта — 00–15–96165).

В категории, в которой выполнена аксиома 1, для каждого морфизма α определено его каноническое разложение $\alpha = (\operatorname{im}\alpha)\overline{\alpha}(\operatorname{coim}\alpha)$, где $\operatorname{im}\alpha = \ker\operatorname{coker}\alpha$, $\operatorname{coim}\alpha = \operatorname{coker}\ker\alpha$. Морфизм α называется *строгим*, если $\overline{\alpha}$ — изоморфизм.

Будем использовать следующие обозначения: O_c — класс всех строгих морфизмов, M — класс всех мономорфизмов, M_c — класс всех строгих мономорфизмов, P — класс всех эпиморфизмов, P_c — класс всех строгих эпиморфизмов. Будем писать $\alpha \mid \beta$, если $\alpha = \ker\beta$ и $\beta = \operatorname{coker}\alpha$.

Лемма 1 ([2], [4], [5])**.** *В аддитивной категории, удовлетворяющей аксиоме* 1, *выполнены следующие утверждения*:

1) $\ker\alpha \in M_c$, $\operatorname{coker}\alpha \in P_c$ *для любого морфизма* α;

2) $\alpha \in M_c \Longleftrightarrow \alpha = \operatorname{im}\alpha$, $\alpha \in P_c \Longleftrightarrow \alpha = \operatorname{coim}\alpha$;

3) *морфизм* α *строгий тогда и только тогда, когда он может быть представлен в виде* $\alpha = \alpha_1\alpha_0$, *где* $\alpha_0 \in P_c$, $\alpha_1 \in M_c$, *для любого такого представления* $\alpha_0 = \operatorname{coim}\alpha$, $\alpha_1 = \operatorname{im}\alpha$;

4) *если коммутативный квадрат*

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha} & D \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ A & \xrightarrow{\beta} & B \end{array} \qquad (1)$$

коуниверсален, то $f \in M \Longrightarrow g \in M$, $f \in M_c \Longrightarrow g \in M_c$, *если этот квадрат универсален, то* $g \in P \Longrightarrow f \in P$, $g \in P_c \Longrightarrow f \in P_c$.

Аддитивная категория, удовлетворяющая аксиоме 1, является абелевой тогда и только тогда, когда для каждого морфизма α $\overline{\alpha}$ — изоморфизм. Аддитивная категория называется *предабелевой* [6], если в ней выполнена аксиома 1 и следующая аксиома.

Аксиома 2. *Для любого морфизма* α *морфизм* $\overline{\alpha}$ *является биморфизмом, т. е. мономорфизмом и эпиморфизмом.*

Лемма 2 [3]**.** *В произвольной предабелевой категории выполнены следующие утверждения*:

1) $gf \in M_c \Longrightarrow f \in M_c$, $gf \in P_c \Longrightarrow g \in P_c$;

2) *если* $f, g \in M_c$ *и* fg *определено, то* $fg \in M_c$, *если* $f, g \in P_c$ *и* fg *определено, то* $fg \in P_c$;

3) *если* $fg \in O_c$, $f \in M$, *то* $g \in O_c$; *если* $fg \in O_c$, $g \in P$, *то* $f \in O_c$.

Как хорошо известно (см., например, [7], следствие 2.6 на стр. 277), всякая абелева категория удовлетворяет двум следующим двойственным друг к другу аксиомам.

Аксиома 3. *Если квадрат* (1) *коуниверсален, то* $f \in P_c \Longrightarrow g \in P_c$.

Аксиома 4. *Если квадрат* (1) *универсален, то* $g \in M_c \Longrightarrow f \in M_c$.

Категория, удовлетворяющая аксиомам 1, 3 и 4, называется *полуабелевой*. Как следует из теоремы 1 работы [4], всякая полуабелева категория является предабелевой.

Для произвольного коммутативного квадрата (1) будем обозначать символом $\widehat{g} : \operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta$ морфизм, заданный условием $g(\ker\alpha) = (\ker\beta)\widehat{g}$, а символом $\widehat{f} : \operatorname{Coker}\alpha \to \operatorname{Coker}\beta$ — морфизм, заданный условием $\widehat{f}(\operatorname{coker}\alpha) = (\operatorname{coker}\beta)f$.

Всюду в дальнейшем категория $\mathcal{A}$, в которой рассматриваются диаграммы, предполагается полуабелевой.

Следующее утверждение является двойственным к леммам 5 и 6 из [3].

Лемма 3. *Пусть квадрат* (1) *универсален, и пусть* $\alpha \in O_c$. *Тогда* $\beta \in O_c$ *и морфизм* $\widehat{g} : \operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta$ *есть эпиморфизм.*

Под (*коцепным*) *комплексом* $A = (A^n, \alpha^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ в аддитивной категории будем понимать последовательность

$$\dots \to A^{n-1} \xrightarrow{\alpha^{n-1}} A^n \xrightarrow{\alpha^n} A^{n+1} \xrightarrow{\alpha^{n+1}} \dots$$

такую, что $\alpha^{n+1}\alpha^n = 0$ при всех n.

Пусть $A = (A^n, \alpha^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — комплекс в полуабелевой категории $\mathcal{A}$. Обозначим через $\rho^n = \rho^n_A$ тот единственный морфизм $A^{n-1} \to \operatorname{Ker}\alpha^n$, для которого $\alpha^{n-1} = (\ker\alpha^n)\rho^n_A$. Объект $H^n(A) = \operatorname{Coker}\rho^n_A$ называется *n-мерной группой когомологий комплекса A.*

Соотношение $\alpha^n\alpha^{n-1} = 0$ влечет также существование единственного морфизма $\lambda^n = \lambda^n_A : \operatorname{Coker}\alpha^{n-1} \to A^{n+1}$ со свойством $\alpha^n = \lambda^n_A(\operatorname{coker}\alpha^{n-1})$. Обозначим $\operatorname{Ker}\lambda^n_A$ через $\widetilde{H}^n(A)$.

Справедлива

Лемма 4. *Объекты* $H^n(A)$ *и* $\widetilde{H}^n(A)$ *канонически изоморфны.*

Доказательство. Так как

$$(\operatorname{coker}\alpha^{n-1})(\ker\alpha^n)\rho^n = (\operatorname{coker}\alpha^{n-1})\alpha^{n-1} = 0,$$

то существует единственный морфизм $k^n = k^n_A : H^n(A) \to \operatorname{Coker}\alpha^{n-1}$ такой, что $k^n(\operatorname{coker}\rho^n) = (\operatorname{coker}\alpha^{n-1})(\ker\alpha^n)$. Далее,

$$\lambda^n k^n(\operatorname{coker}\rho^n) = \lambda^n(\operatorname{coker}\alpha^{n-1})(\ker\alpha^n) = \alpha^n(\ker\alpha^n) = 0,$$

откуда $\lambda^n k^n = 0$, что влечет существование единственного морфизма $m^n = m^n_A : H^n(A) \to \widetilde{H}^n(A)$ со свойством $(\ker\lambda^n)m^n = k^n$. Из соотношений $\lambda^n(\operatorname{coker}\alpha^{n-1})(\ker\alpha^n) = \alpha^n(\ker\alpha^n) = 0$ следует, что найдется единственный морфизм $l^n = l^n_A : \operatorname{Ker}\beta^n \to \widetilde{H}^n(A)$ такой, что $(\operatorname{coker}\alpha^{n-1})(\ker\alpha^n) = (\ker\lambda^n)l^n$. Цепочка равенств

$$(\ker\lambda^n)l^n\rho^n = (\operatorname{coker}\alpha^{n-1})(\ker\alpha^n)\rho^n = (\operatorname{coker}\alpha^{n-1})\alpha^{n-1} = 0$$

и включение $\ker\lambda^n \in M_c$ влекут равенство $l^n\rho^n = 0$, что дает единственный морфизм $\widetilde{m}^n : H^n(A) \to \widetilde{H}^n(A)$ такой, что $l^n = \widetilde{m}^n(\operatorname{coker}\rho^n)$. Так как $(\ker\lambda^n)m^n(\operatorname{coker}\rho^n) = (\operatorname{coker}\alpha^{n-1})(\ker\alpha^n) = (\ker\lambda^n)\widetilde{m}^n(\operatorname{coker}\rho^n)$, то $m^n = \widetilde{m}^n$.

Заметим, что квадрат

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Ker}\alpha^n & \xrightarrow{\operatorname{coker}\rho^n} & H^n(A) \\
{\scriptstyle \ker\alpha^n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k^n} \\
A^n & \xrightarrow{\operatorname{coker}\alpha^{n-1}} & \operatorname{Coker}\alpha^{n-1}
\end{array} \tag{2}$$

является универсальным. В самом деле, пусть $\xi'(\operatorname{coker}\rho^n) = \xi''(\ker\alpha^n)$. Имеем $\xi''\alpha^{n-1} = \xi''(\ker\alpha^n)\rho^n = \xi'(\operatorname{coker}\rho^n)\rho^n = 0$. Поэтому существует единственный морфизм ξ_0 такой, что $\xi_0(\operatorname{coker}\alpha^{n-1}) = \xi'$. Для этого морфизма $\xi_0 k^n(\operatorname{coker}\rho^n) = \xi_0(\operatorname{coker}\alpha^{n-1})(\ker\alpha^n) = \xi'(\ker\alpha^n) = \xi'(\operatorname{coker}\rho^n)$, откуда $\xi_0 k^n = \xi'$, так как $\operatorname{coker}\rho^n \in P$. Требуемая универсальность установлена.

Из универсальности квадрата (2) и аксиомы 4 следует, что $k^n \in M_c$. Так как $k^n = (\ker\lambda^n)m^n$, то по лемме 2 также и $m^n \in M_c$. По двойственности заключаем, что квадрат

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Ker}\alpha^n & \xrightarrow{\ker\alpha^n} & A^n \\
{\scriptstyle l^n}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \operatorname{coker}\alpha^{n-1}} \\
\widetilde{H}^n(A) & \xrightarrow{\ker\lambda^n} & \operatorname{Coker}\alpha^{n-1}
\end{array}$$

коуниверсален. Следовательно, $l^n \in P_c$, откуда и из соотношения $l^n = m^n(\operatorname{coker}\rho^n)$ следует, что $m^n \in P_c$.

Таким образом, m^n есть канонический изоморфизм $H^n(A) \to \widetilde{H}^n(A)$. Лемма 4 доказана.

Морфизмом двух комплексов $A = (A^n, \alpha^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ и $B = (B^n, \beta^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ будем называть семейство морфизмов $(\varphi^n : A^n \to B^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, такое, что при всех n $\varphi^{n+1}\alpha^n = \beta^n\varphi^n$. Для трех комплексов $A = (A^n, \alpha^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $B = (B^n, \beta^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ и $C = (C^n, \gamma^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ и морфизмов $\varphi : A \to B$ и $\psi : B \to C$ будем называть последовательность $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ *точной*, если при любом n точна последовательность $A^n \xrightarrow{\varphi^n} B^n \xrightarrow{\psi^n} C^n$.

Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$$

комплексов $A = (A^n, \alpha^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $B = (B^n, \beta^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ и $C = (C^n, \gamma^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ и морфизмов $\varphi : A \to B$ и $\psi : B \to C$ таких, что при всех n морфизмы φ^n и ψ^n строгие. Таким образом, при любом n $\varphi^n|\psi^n$. Такую последовательность будем называть *строго точной*.

Для морфизма $\varepsilon^n = \widehat{\varphi}^n : \operatorname{Ker}\alpha^n \to \operatorname{Ker}\beta^n$ имеем

$$(\ker\beta^n)\varepsilon^n\rho_A^n = \varphi_A^n(\ker\alpha^n)\rho_A^n = \varphi^n\alpha^{n-1} = \beta^{n-1}\varphi^{n-1} = (\ker\beta^n)\rho_B^n\varphi^{n-1},$$

откуда $\varepsilon^n\rho_A^n = \rho_B^n\varphi^{n-1}$. Значит, найдется единственный морфизм $\xi^n = H^n(\varphi) : H^n(A) \to H^n(B)$ такой, что $\xi^n(\operatorname{coker}\rho_A^n) = (\operatorname{coker}\rho_B^n)\varepsilon^n$. Аналогично, морфизм $\zeta^n = \widehat{\psi}^n : \operatorname{Ker}\beta^n \to \operatorname{Ker}\gamma^n$ удовлетворяет равенству $\zeta^n\rho_B^n = \rho_C^n\psi^{n-1}$, что дает единственный морфизм $\omega^n = H^n(\psi) : H^n(B) \to H^n(C)$ такой, что $\omega^n(\operatorname{coker}\rho_B^n) = (\operatorname{coker}\rho_c^n)\zeta^n$. Нетрудно проверить, что $\omega^n\xi^n = 0$.

Пусть теперь $\delta^n : \operatorname{Ker}\gamma^n \to \operatorname{Coker}\alpha^n$ — связывающий морфизм Ker-Coker-последовательности

$$0 \to \operatorname{Ker}\alpha^n \xrightarrow{\varepsilon^n} \operatorname{Ker}\beta^n \xrightarrow{\zeta^n} \operatorname{Ker}\gamma^n \xrightarrow{\delta^n} \operatorname{Coker}\alpha^n \xrightarrow{\tau^n} \operatorname{Coker}\beta^n \xrightarrow{\theta^n} \operatorname{Coker}\gamma^n \to 0. \quad (3)$$

Как отмечено в [3], морфизм δ^n однозначно определяется следующим условием. Пусть

$$\begin{array}{ccc} X^n & \xrightarrow{s^n} & \operatorname{Ker}\gamma^n \\ {\scriptstyle u^n}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \ker\gamma^n} \\ B^n & \xrightarrow{\psi^n} & C^n \end{array} \tag{4}$$

— коуниверсальный квадрат, и пусть квадрат

$$\begin{array}{ccc} A^{n+1} & \xrightarrow{\varphi^{n+1}} & B^{n+1} \\ {\scriptstyle \operatorname{coker}\alpha^n}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle v^n} \\ \operatorname{Coker}\alpha^n & \xrightarrow{t^n} & Y^n \end{array} \tag{5}$$

универсален. Тогда δ^n — тот морфизм, для которого $t^n\delta^n s^n = v^n\beta^n u^n$.

Поскольку $(\ker\gamma^n)\rho_C^n\psi^{n-1} = \gamma^{n-1}\psi^{n-1} = \psi^n\beta^{n-1}$, то из коуниверсальности квадрата (4) найдется единственный морфизм $p^n : B^{n-1} \to X^n$, удовлетворяющий равенствам $\rho_C^n\psi^{n-1} = s^n p^n$, $\beta^{n-1} = u^n p^n$. Далее,

$$\varphi^{n+2}\lambda_A^{n+1}(\operatorname{coker}\alpha^n) = \varphi^{n+2}\alpha^{n+1} = \beta^{n+1}\varphi^{n+1}.$$

Значит, в силу универсальности квадрата (5) существует единственный морфизм $q^n : Y^n \to B^{n+2}$ такой, что $\varphi^{n+2}\lambda^{n+1} = q^n t^n$, $\beta^{n+1} = q^n v^n$. Справедливы соотношения $t^n\delta^n\rho_C^n\psi^{n-1} = t^n\delta^n s^n p^n = v^n\beta^n u^n p^n = v^n\beta^n\beta^{n-1} = 0$. Но $t^n \in M$, а $\psi^{n-1} \in P$. Значит, $\delta^n\rho_C^n = 0$. Поэтому существует единственный морфизм $r^n : H^n(C) \to \operatorname{Coker}\alpha^n$ со свойством $\delta^n = r^n(\operatorname{coker}\rho_C^n)$. Имеем также последовательно:

$$\varphi^{n+2}\lambda_A^{n+1}r^n(\operatorname{coker}\rho_C^n)s^n = q^n t^n\delta^n s^n = q^n v^n\beta^n u^n = \beta^{n+1}\beta^n u^n = 0.$$

Но φ^{n+2} — мономорфизм, а $(\operatorname{coker}\rho_C^n)s^n$ — эпиморфизм. Следовательно, $\lambda_A^{n+1}r^n = 0$. Это влечет существование единственного морфизма $\widetilde{\partial}^n : H^n(C) \to \widetilde{H}^{n+1}(A)$ такого, что $r^n = (\ker\lambda_A^{n+1})\widetilde{\partial}^n$. Композиция $\partial^n = M_A^{n+1}\widetilde{\partial}^n$, где $M_A^{n+1} = \left(m_A^{n+1}\right)^{-1}$, дает морфизм $\partial^n : H^n(C) \to H^{n+1}(A)$.

Так как $(\ker\lambda_A^{n+1})\widetilde{\partial}^n\omega^n(\operatorname{coker}\rho_B^n) = r^n(\operatorname{coker}\rho_C^n)\zeta^n = \delta^n\zeta^n = 0$, то $\widetilde{\partial}^n\omega^n = 0$, откуда $\partial^n\omega^n = 0$.

Докажем, что $\xi^n\partial^{n-1} = 0$.

Пусть $\pi^n : \widetilde{H}^n(A) \to \widetilde{H}^n(B)$ — морфизм, определяемый условием $(\ker\lambda_B^n)\pi^n = \tau^{n-1}(\ker\lambda_A^n)$. В силу естественности морфизмов m_A^n и m_B^n справедливо тождество $\pi^n m_A^n = m_B^n\xi^n$. Имеем последовательно:

$$\begin{aligned}(\ker\lambda_B^n)m_B^n\xi^n\partial^{n-1}(\operatorname{coker}\rho_C^{n-1}) &= (\ker\lambda_B^n)\pi^n m_A^n\partial^{n-1}(\operatorname{coker}\rho_C^{n-1}) \\ = (\ker\lambda_B^n)\pi^n\widetilde{\partial}^{n-1}(\operatorname{coker}\rho_C^{n-1}) &= \tau^{n-1}(\ker\lambda_A^n)\widetilde{\partial}^{n-1}(\operatorname{coker}\rho_C^{n-1}) \\ &= \tau^{n-1}r^{n-1}(\operatorname{coker}\rho_C^{n-1}) = \tau^{n-1}\delta^{n-1} = 0,\end{aligned}$$

откуда и следует искомое равенство $\xi^n\partial^{n-1} = 0$.

Таким образом, мы имеем полуточную последовательность когомологий

$$\ldots \xrightarrow{\partial^{n-1}} H^n(A) \xrightarrow{\xi^n} H^n(B) \xrightarrow{\omega^n} H^n(C) \xrightarrow{\partial^n} H^{n+1}(A) \xrightarrow{\xi^{n+1}} \ldots . \qquad (6)$$

Основная задача данной статьи — выяснить, как влияет на поведение последовательности (6) условие строгости, налагаемое на один из морфизмов α^n, β^n или γ^n.

Лемма 5. *Если* Ker-Coker-*последовательность* (3) *точна в члене* $\operatorname{Ker}\gamma^n$*, то когомологическая последовательность* (6) *точна в члене* $H^n(C)$.

Доказательство. Заметим сначала, что так как

$$(\ker\lambda_A^{n+1})\widetilde{\partial}^n(\operatorname{coker}\rho_C^n)(\ker\delta^n) = 0 = \delta^n\ker\delta^n = 0,$$

и, следовательно, $\partial^n(\operatorname{coker}\rho_C^n)(\ker\delta^n) = 0$, то существует единственный морфизм $e^n : \operatorname{Ker}\delta^n \to \operatorname{Ker}\partial^n$ такой, что $(\operatorname{coker}\rho_C^n)(\ker\delta^n) = (\ker\partial^n)e^n$.

Квадрат $(\operatorname{coker}\rho_C^n)(\ker\delta^n) = (\ker\partial^n)e^n$ является коуниверсальным. В самом деле, пусть объект X и морфизмы $x' : X \to \operatorname{Ker}\gamma^n$ и $x'' : X \to \operatorname{Ker}\partial^n$ таковы, что $(\operatorname{coker}\rho_C^n)x' = (\ker\partial^n)x''$. Тогда

$$\delta^n x' = (\ker\lambda_A^{n+1})\partial^n(\operatorname{coker}\rho_C^n)x' = (\ker\lambda_A^{n+1})\partial^n(\ker\partial^n)x'' = 0.$$

Значит, существует единственный морфизм $x : X \to \operatorname{Ker}\delta^n$ такой, что $x' = (\ker\delta^n)x$. Для этого x $\quad (\ker\partial^n)e^n x = (\operatorname{coker}\rho_C^n)(\ker\delta^n)x = (\operatorname{coker}\rho_C^n)x' = (\ker\partial^n)x''$, откуда $x'' = e^n x$. Требуемая коуниверсальность доказана.

Из установленной коуниверсальности и того, что $\operatorname{coker}\rho_C^n \in P_c$, следует, что $e^n \in P_c$. Учитывая это обстоятельство и то, что $\operatorname{im}\zeta^n = \ker\delta^n$, имеем последовательно:

$$\begin{aligned}\operatorname{coker}\omega^n &= \operatorname{coker}(\omega^n(\operatorname{coker}\rho_B^n)) = \operatorname{coker}((\operatorname{coker}\rho_C^n)\zeta^n)\\ &= \operatorname{coker}((\operatorname{coker}\rho_C^n)(\operatorname{im}\zeta^n)) = \operatorname{coker}((\operatorname{coker}\rho_C^n)(\ker\delta^n))\\ &= \operatorname{coker}((\ker\partial^n)e^n) = \operatorname{coker}(\ker\partial^n) = \operatorname{coim}\partial^n.\end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Если* Ker-Coker-*последовательность* (3) *точна в члене* $\operatorname{Ker}\gamma^n$*, причем морфизм* ζ^n *строгий, то когомологическая последовательность* (6) *точна в членах* $H^n(B)$ *и* $H^n(C)$*, причем морфизм* ω^n *строгий.*

Доказательство. Покажем, что квадрат $\omega^n(\operatorname{coker}\rho_B^n) = (\operatorname{coker}\rho_C^n)\zeta^n$ является универсальным.

Пусть объект W и морфизмы $w_1 : H^n(B) \to W$ и $w_2 : \operatorname{Ker}\gamma^n \to W$ удовлетворяют соотношению $w_1(\operatorname{coker}\rho_B^n) = (\operatorname{coker}\rho_C^n)\zeta^n$. Тогда $w_2\rho_C^n\psi^{n-1} = w_2\zeta^n\rho_B^n = w_1(\operatorname{coker}\rho_B^n)\rho_B^n = 0$, а так как $\psi^{n-1} \in P$, то и $w_2\rho_C^n = 0$. Значит, существует единственный морфизм $w_0 : H^n(C) \to W$ такой, что $w_2 = w_0(\operatorname{coker}\rho_C^n)$. Для этого w_0 $\ w_0\omega^n(\operatorname{coker}\rho_B^n) = w_0(\operatorname{coker}\varphi_C^n)\zeta^n = w_2\zeta^n = w_1(\operatorname{coker}\rho_B^n)$, откуда $w_1 = w_0\omega^n$.

Из только что доказанного и леммы 3 вытекает, что $\omega^n \in O_c$ и морфизм $g^n = \widehat{\operatorname{coker}}\rho_B^n : \operatorname{Ker}\alpha^n \to \operatorname{Ker}\omega^n$ есть эпиморфизм. Таким образом,

$$\begin{aligned}\operatorname{coker}\xi^n &= \operatorname{coker}(\xi^n(\operatorname{coker}\rho_A^n)) = \operatorname{coker}((\operatorname{coker}\rho_B^n)\varepsilon^n)\\ &= \operatorname{coker}((\ker\omega^n)g^n) = \operatorname{coker}(\ker\omega^n) = \operatorname{coim}\omega^n,\end{aligned}$$

что означает точность (6) в члене $H^n(B)$. Точность же в члене $H^n(C)$ следует из леммы 5. Лемма 6 доказана.

Сейчас мы в состоянии доказать основную теорему.

Теорема. *Пусть* $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ *— короткая строго точная последовательность комплексов* $A = (A^n, \alpha^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $B = (B^n, \beta^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *и* $C = (C^n, \gamma^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *в полуабелевой категории. Справедливы следующие утверждения.*

1) *Если* $\alpha^n \in O_c$, то последовательность (6) точна в членах $H^n(B)$ и $H^n(C)$, причем $\omega^n \in O_c$.

2) *Если* $\beta^n \in O_c$, то последовательность (6) точна в членах $H^n(C)$ и $H^{n+1}(A)$, причем $\partial^n \in O_c$.

3) *Если* $\gamma^n \in O_c$, то последовательность (6) точна в членах $H^{n+1}(A)$ и $H^{n+1}(B)$, а $\xi^{n+1} \in O_c$.

Доказательство. 1) В силу теоремы 3 из [3] последовательность (3) точна в члене $\operatorname{Ker}\gamma^n$ и морфизм ζ^n строгий. Из леммы 6 получаем теперь требуемое утверждение.

2) В силу теорем 1 и 2 работы [3] последовательность (3) точна во всех членах (точность в крайних членах следует из доказательства упомянутой теоремы 2), причем $\delta^n \in O_c$. Так как $\delta^n = (\ker\lambda_A^{n+1})\widetilde{\partial}^n(\operatorname{coker}\rho_C^n)$, $\ker\lambda_A^{n+1} \in M_c$, $\operatorname{coker}\rho_C^n \in P_c$, то $\widetilde{\partial}^n \in O_c$. Поэтому и $\partial^n = M_A^{n+1}\widetilde{\partial}^n \in O_c$. Точность в члене $H^n(C)$ следует из леммы 5, а точность в члене $H^{n+1}(A)$ получается из нее по двойственности.

Утверждение 3) двойственно утверждению 1).

Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что для точности последовательности (6) условия теоремы о строгости соответствующих морфизмов играют существенную роль.

Пример. Зададим комплексы A, B, C в категории $\mathcal{B}an$ следующим образом. Пусть в комплексе B $B^j = 0$ при $j \notin \{n, n+1\}$, B^n и B^{n+1} — ненулевые банаховы пространства, $\beta^n : B^n \to B^{n+1}$ — непрерывный линейный оператор, для которого $\operatorname{Ker}\beta = 0$, область значений $R(\beta^n)$ плотна в B^{n+1} и $R(\beta^n) \neq B^{n+1}$, $\beta^j = 0$, $j \neq n$. В комплексе A положим $A^j = 0$ для $j \notin \{n+1, n+2\}$, $A^{n+1} = A^{n+2}$ — (ненулевое) замкнутое подпространство в B^{n+1} такое, что $A^{n+1} \cap R(\beta^n) = 0$, $\alpha^{n+1} = \mathrm{id}_{A^{n+1}}$ — тождественный оператор, $\alpha^j = 0$ при $j \neq n+1$. В комплексе C пусть $C^j = 0$, $j \notin \{n, n+1\}$, $C^n = B^n$, $C^{n+1} = B^{n+1}/A^{n+1}$, $\gamma^j = 0$, $j \neq n$, $\gamma^n = \psi^{n+1}\beta^n$, где $\psi^{n+1} : B^{n+1} \to B^{n+1}/A^{n+1}$ — каноническая проекция. Морфизмы φ и ψ определим следующим образом: $\varphi^j = 0$ для $j \neq n+1$, $\varphi^{n+1} : A^{n+1} \to B^{n+1}$ — вложение; $\psi^j = 0$ для $j \notin \{n, n+1\}$, $\psi^n = \mathrm{id}_{B^n}$, ψ^{n+1} — упомянутая выше проекция. Тогда последовательность комплексов

$$0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$$

строго точна. В категории $\mathcal{B}an$ строгость морфизма α означает замкнутость $R(\alpha)$, а j-мерные когомологии коцепного комплекса $S = (S^j, \sigma^j)$ представляют собой факторпространство $\operatorname{Ker}\sigma^j \,/\, \overline{R(\sigma^{j-1})}$ (черта сверху означает замыкание). Таким образом, γ^n не строгий. Легко видеть, что $H^n(C) = H^{n+1}(B) = H^{n+1}(C) = 0$, тогда как $H^{n+1}(A) = A^{n+1}$. Поэтому соответствующая последовательность когомологий не точна в члене $H^{n+1}(A)$. По двойственности отсюда получается пример (в двойственной категории $\mathcal{B}an^{\mathrm{op}}$), когда морфизм α^n не является строгим и нарушается точность в члене $H^n(C)$ когомологической последовательности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузьминов В. И., Шведов И. А. *Гомологические аспекты теории банаховых комплексов* // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 893–904. Zbl 0939.58001

2. Райков Д. А. *Полуабелевы категории* // Докл. АН СССР. 1969. Т. 188, № 5. С. 1006–1009.

3. Копылов Я. А., Кузьминов В. И. *О* Ker-Coker-*последовательности в полуабелевой категории* // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 3. С. 615–624. Zbl 0952.18003

4. Кузьминов В. И., Черевикин А. Ю. *О полуабелевых категориях* // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 6. С. 1284–1294. Zbl 0248.18017

5. Букур И., Деляну А. *Введение в теорию категорий и функторов.* М.: Мир, 1972. Zbl 0239.18001

6. Bănică C., Popescu N. *Sur le catégories preábéliennes* // Rev. Roumaine Math. pure et appl. 1965. V. 10, No 5. P. 621–635. Zbl 0197.01303

7. Popescu N., Popescu L. *Theory of categories.* Bucurestiю Academiai; Sijthoff & Noordhoff. 1979. Zbl 0496.18001

Институт математики им. С. Л. Соболева, г. Новосибирск
e-mail: yakop@math.nsc.ru
kuzminov@math.nsc.ru