Труды конференции «Геометрия и приложения»
13 – 16 марта 2000 г., Новосибирск

ФУНКЦИИ МОРСА НА ПРОСТЫХ ПОЛИЭДРАХ И СВЯЗАННЫЙ С НИМИ СПОСОБ ЗАДАНИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ СПАЙНОВ МНОГООБРАЗИЙ

Е. Л. Первова [1]

1. Введение. Естественная идея решения задачи классификации трехмерных многообразий состоит в их классификации последовательно, шаг за шагом. При этом важен вопрос о выборе фильтрации множества M. С этой целью в 1983-1986 годах С.В. Матвеевым была построена теория сложности 3-многообразий [1]. В рамках этой теории, каждому трехмерному многообразию сопоставляется натуральное число, называемое сложностью этого многообразия. При этом для каждого натурального числа k существует только конечное число замкнутых неприводимых трехмерных многообразий сложности k. Таким образом, задача классификации трехмерных многообразий сводится к бесконечному числу задач, каждая из которых состоит в классификации конечного числа многообразий данной сложности. Поэтому задача вычисления сложности имеет важное значение.

Сложность 3-многообразия определяется как минимальное число вершин почти простого спайна данного многообразия. В частности, с ровно тремя исключениями, любой минимальный почти простой спайн замкнутого ориентируемого неприводимого 3-многообразия является специальным [1]. Поэтому для замкнутых ориентируемых неприводимых 3-многообразий сложность можно определять как минимальное число вершин его специального спайна. Возникает вопрос о выборе наиболее удобного с этой точки зрения представления специальных спайнов.

В данной работе предлагается один способ представления специальных спайнов замкнутых ориентируемых неприводимых 3-многообразий. Спайн P представляется в виде последовательности уровневых графов некоторой функции $f : M \to R^1$. Эта функция индуцирует тривиальное расслоение почти всего M на поверхности уровня этой функции над интервалом. Поэтому каждый уровневый граф расположен на фиксированной поверхности S и является трехвалентным графом. Под последним понимается одномерный полиэдр, линк каждой точки которого состоит из двух или трех точек. Граф может быть несвязным и содержать компоненты, гомеоморфные окружности. Точка трехвалентного графа называется *вершиной*, если ее линк состоит ровно из трех точек.

[1]Исследование частично поддержано программой "Университеты России", проект N 992742, и РФФИ, проект N 99-01-00813 и проект N 99-15-96017

Оказывается, что функцию f можно выбрать так, чтобы уровневые графы подвергались только конечному числу перестроек, каждая из которых имела бы один из четырех типов. Одна из этих типичных перестроек называется флип-преобразованием. Ей отвечают вершины спайна, и только они. Обладающую такими свойствами функцию будем называть функцией Морса.

Флип-преобразования уровневых графов на поверхности изучались, например, в работе [2]. Там было отмечено, что каждое флип-преобразование соответствует вершине, это соображение применялось для вычисления сложности некоторых пространств расслоений над окружностью. Возможно, что аналогичную идею можно применить и для вычисления сложности произвольного неприводимого 3-многообразия.

Следующие определения необходимы для дальнейшего. *Спайном* компактного 3-многообразия M называется такой компактный двумерный подполиэдр $P \subset M$, что многообразие $M \setminus P$ гомеоморфно $\partial M \times (0, 1]$, если $\partial M \neq \emptyset$, и открытой 3-клетке, если $\partial M = \emptyset$.

Полиэдр P называется *простым*, если линк каждой его точки гомеоморфен либо окружности, либо окружности с диаметром, либо окружности с тремя радиусами. Объединение точек, имеющих линки второго или третьего типов, называется *особым (сингулярным) графом* полиэдра P и обозначается SP. Точки, имеющие линки третьего типа, называются его *вершинами*. Множество всех вершин полиэдра P обозначается $V(P)$. Связные компоненты множества точек, имеющих линки первого типа, называются *2-компонентами*. Простой полиэдр называется *специальным*, если все его 2-компоненты гомеоморфны открытым 2-дискам, и 1-компоненты гомеоморфны открытым 1-дискам. На протяжении всего изложения мы находимся в кусочно-линейной категории.

2. Определение функции Морса и ее свойства. Опишем некоторый набор *стандартных* функций. В евклидовом пространстве R^3 рассмотрим функцию высоты — проекцию на ось z, и тетраэдр T^3 с вершинами (1,0,-1), (-1,0,-1), (0,-1,1), (0,1,1). Конус U_Δ над одномерным остовом этого тетраэдра с вершиной в точке (0,0,0) гомеоморфен стандартной окрестности вершины простого полиэдра. Первая из наших стандартных функций определена на U_Δ и совпадает с ограничением на U_Δ функции высоты. Эту функцию обозначим f_Δ.

Отрезок в R^3, соединяющий точки A и B, будем обозначать $[A, B]$. Чтобы описать вторую стандартную фукнцию, рассмотрим в R^3 джойн U_e отрезка [(0,0,1),(0,0,-1)] и трех точек (1,0,0), (0,1,0), (0,-1,0). Функция f_e определена на U_e и тоже совпадает с ограничением функции высоты.

Третья функция f_Θ определена на джойне U_θ трех точек: $(0, 0, 1)$, $(1, 0, -1)$, $(-1, 0, -1)$, и объединения двух отрезков: $[(0, -1, -1), (0, 0, 0)] \cup [(0, 0, 0), (0, 1, -1)]$. Она также является ограничением функции высоты. Заметим, что U_e и U_Θ гомеоморфны окрестности внутренней точки ребра простого полиэдра.

Рассмотрим теперь в R^3 треугольник с вершинами (0,-1,1), (0,1,1), (1,0,1). Стандартная функция f_m есть ограничение функции высоты на конус в

R^3 над границей этого треугольника с вершиной в точке (0,0,0). Этот конус обозначим U_m. Конус с вершиной в начале координат над границей треугольника с вершинами (0,-1,1), (0,1,1), (0,0,-1) обозначим U_d. Функция f_d есть ограничение функции высоты на конус U_d.

Чтобы описать последнюю функцию f_s, рассмотрим в R^3 ломаную, составленную из четырех отрезков $[(0,-1,1),(1,0,-1)] \cup [(1,0,-1),(0,1,1)] \cup$ $[(0,1,1),(-1,0,-1)]$ $\cup[(-1,0,-1),(0,-1,1)]$. Функция f_s есть ограничение функции высоты на конус U_s с вершиной (0,0,0) над этой ломаной. Подмножества евклидова пространства U_Δ, U_Θ, U_e, U_m, U_d, U_s называются *модельными окрестностями.*

Определение 1. *Функция f на простом полиэдре P называется* функцией Морса*, если она в каждой точке локально эквивалентна одной из стандартных функций f_Δ, f_e, f_Θ, f_m, f_d, f_s.*

Замечание 1. *Локальная эквивалентность в точке $v \in P$ стандартной функции f' (где f' — одна из функций f_Δ, f_e, f_Θ, f_m, f_d, f_s,) понимается в смысле существования гомеоморфизма φ некоторой окрестности V точки v на соответствующую модельную окрестность V', для которого выполняется либо $f' \circ \varphi = f - f(v)$, либо $f' \circ \varphi = f(v) - f$.*

Пусть f — произвольная кусочно-линейная функция.

Определение 2. *Точка $x \in P$ называется* правильной *для функции f, если найдется такая окрестность U этой точки, что существует гомеоморфизм φ окрестности U на произведение $V(x) \times I_\varepsilon$, где $V(x)$ — некоторая окрестность x в $f^{-1}(a)$, $a = f(x)$, и I_ε — интервал $(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$, причем $f = p \circ \varphi$, где p — проекция на второй сомножитель прямого произведения.*

Определение 3. *Точка $x \in P$ называется* критической *для функции f, если она не является правильной для f.*

Образ критической точки называется критическим значением. Пусть f — функция Морса. Ясно, что если f локально эквивалентна в точке x функции f_d или f_e, то эта точка является правильной, а в противном случае точка является критической. Отметим, что если τ — триангуляция полиэдра P, в которой f линейна, и x — внутренняя точка какого-нибудь симплекса, то x — правильная. Поэтому функция Морса имеет только конечное число критических точек, а следовательно, и критических значений.

Определение 4. *Функция Морса называется* правильной*, если ее значения в различных критических точках различны.*

Из кусочной линейности следует, что все множества уровня f, кроме конечного числа, — трехвалентные графы. Будем называть их *уровневыми графами.* При переходе через критические значения уровневые графы функции f подвергаются перестройкам. Непосредственно можно убедиться, что при переходе через критические значения уровневые графы

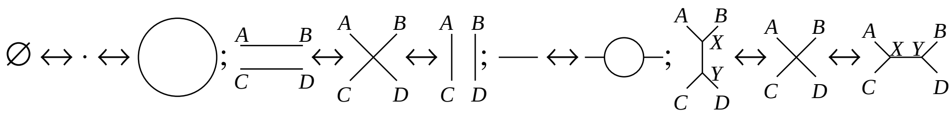

Рис. 1: Система преобразований A

функции Морса подвергаются только преобразованиям следующих четырех типов (см. рис. 1). Каждое преобразование состоит из двух переходов, при каждом переходе некоторый фрагмент графа заменяется на другой фрагмент с тем же краем: 1) рождение точки с последующей заменой ее окружностью; 2) две непересекающиеся дуги AB и CD заменяются на крест, а последний заменяется двумя непересекающимися дугами AC и BD (седловое преобразование); 3) из ребра уровневого графа вырезается фрагмент, вместо него вклеиваются два ребра с теми же концами; 4) объединение непересекающихся дуг AB и CD с отрезком XY, соединяющим их середины, заменяется на крест, а он в свою очередь, заменяется на объединение дуг AC и BD, с отрезком, соединяющим их середины X, Y (флип-преобразование). Вне заменяемых фрагментов граф не меняется.

Замечание 2. *Верно и обратное: кусочно-линейная функция f на простом полиэдре, уровневые графы которой при переходе через критические значения подвергаются только упомянутым преобразованиям, является функцией Морса.*

Если в окрестности точки x функция f эквивалентна функции f_m, то точка x называется *точкой минимума* или *максимума*, если f эквивалентна f_s, то — *седловой точкой*, а если f эквивалентна f_Θ — *экстремумом ребра*. Функция f эквивалентна f_Δ в окрестности точки x тогда и только тогда, когда эта точка является вершиной полиэдра.

Основанием для предложенного определения функции Морса служит тот факт, что такая функция существует на любом простом полиэдре (см. следствие 2).

Оказывается, существует связь между свойствами простого полиэдра и критическими точками имеющейся на нем функции Морса. Доказываемая далее теорема 1 дает критерий специальности полиэдра в терминах числа критических точек такой функции.

Пусть $f : P \to R^1$ — функция Морса. Положим $H(f)$ — число седловых критических точек функции f, $E(f)$ — число экстремумов ребер f, $M(f)$ — число точек типа минимум или максимум. $V(f) = V(P)$ — число вершин полиэдра P, которые всегда являются критическими точками f.

Если P — простой полиэдр, то через $g(P)$ обозначим число компонент связности $P \setminus SP$.

Теорема 1. *Пусть функция Морса $f : P \to R^1$ задана на связном простом полиэдре P, имеющем хотя бы одну вершину. Полиэдр P является специальным тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:*

$\frac{1}{2}E(f) + M(f) - H(f) = g(P) - V(P).$

Доказательство. Предположим для простоты, что f — правильная функция Морса. Пусть $c(f) = \{c_1, \ldots, c_n\}$ — множество всех критических значений функции f, $v(f) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ — соответствующее множество критических точек, $f(v_i) = c_i$.

Обозначим через P^0 результат разрезания полиэдра P по его особому графу SP. По определению, полиэдр P, имеющий хотя бы одну вершину, специален тогда и только тогда, когда P^0 является объединением дисков. В общем случае, P^0 — объединение компактных поверхностей. Число этих поверхностей равно $g(P)$. Заметим, что если P связен, то каждая из этих поверхностей имеет край.

Поскольку поверхность с краем является диском тогда и только тогда, когда ее эйлерова характеристика равна 1, и любая другая поверхность с краем имеет эйлерову характеристику строго меньше, чем 1, то P^0 является объединением дисков тогда и только тогда, когда $\chi(P^0) = g(P)$, χ обозначает эйлерову характеристику. Поэтому в действительности нам нужно показать, что $V(P) + \frac{1}{2}E(f) + M(f) - H(f) = \chi(P^0)$.

Имеется включение поверхности P^0 в полиэдр P. Суперпозиция этого отображения и функции f задает функцию f' на P^0. Можно считать, что $f(P) = [0,1]$. Тогда и $f'(P^0) = [0,1]$. Если a — произвольное число из отрезка $[0,1]$, то положим $P_a = f^{-1}([0,a])$, $(P^0)_a = f'^{-1}([0,a])$. Заметим, что если $c_i < a, b < c_{i+1}$, то $\chi((P^0)_a) = \chi((P^0)_b)$.

Пусть a_1,...,a_{n-1} — такие числа, что $0 < a_1 < c_2 < \ldots < c_i < a_i < c_{i+1} \ldots < c_{n-1} < a_{n-1} < 1$. Найдем связь между $\chi((P^0)_{a_i})$ и $\chi((P^0)_{a_{i+1}})$.

Утверждается, что если v_i — точка минимума или максимума, то $\chi((P^0)_{a_{i+1}}) = \chi((P^0)_{a_i}) + 1$; если v_i — седловая точка, то $\chi((P^0)_{a_{i+1}}) = \chi((P^0)_{a_i}) - 1$; если v_i — точка реберного минимума, то $\chi((P^0)_{a_{i+1}}) = \chi((P^0)_{a_i}) + 2$; если v_i — точка реберного максимума, то $\chi((P^0)_{a_{i+1}}) = \chi((P^0)_{a_i}) - 1$; и если v_i — вершина полиэдра, то $\chi((P^0)_{a_{i+1}}) = \chi((P^0)_{a_i}) + 1$. Эти равенства получаются из следующих легко усматриваемых фактов. Если v_i — точка минимума или максимума, то $(P^0)_{a_{i+1}}$ имеет гомотопический тип комплекса $(P^0)_{a_i}$ с добавленной соответственно 0-мерной или 2-мерной клеткой. Если v_i — седловая точка, то то $(P^0)_{a_{i+1}}$ имеет гомотопический тип комплекса $(P^0)_{a_i}$ с добавленной 1-мерной клеткой. Если v_i — точка реберного минимума, то $(P^0)_{a_{i+1}}$ имеет гомотопический тип комплекса $(P^0)_{a_i}$ с двумя добавленными 0-мерными клетками, а если v_i — точка реберного максимума, то $(P^0)_{a_{i+1}}$ имеет гомотопический тип комплекса $(P^0)_{a_i}$ с добавленной 1-мерной клеткой. Наконец, если v_i — вершина полиэдра, то $(P^0)_{a_{i+1}}$ имеет гомотопический тип комплекса $(P^0)_{a_i}$ с добавленной 0-мерной клеткой.

Таким образом, мы получаем, что $\chi(P^0) = 2E_{\min}(f) - E_{\max}(f) + M(f) - H(f) + V(P)$. Чтобы показать, что эта формула совпадает с требуемой, заметим, что число реберных максимумов функции f равно числу реберных минимумов. Действительно, если f — функция Морса, то $1 - f$ — тоже функция Морса. При этом, очевидно, $M(f) = M(1-f)$, $H(f) = H(1-f)$,

$V(f) = V(1-f)$ и $E(f) = E(1-f)$. Причем число реберных максимумов функции f равно числу реберных минимумов функции $1-f$, и наоборот. Но число $\chi(P^0)$ не зависит от того, будем ли мы его вычислять с помощью функции f или $1-f$. Поэтому число реберных максимумов функции f равно числу реберных минимумов функции f.

В силу изолированности критических точек функции Морса, аналогичные рассуждения проходят и для произвольной (т.е. не обязательно правильной) функции Морса. Поэтому теорема доказана. □

Для дальнейшего нам будет полезно еще одно свойство функций Морса. Пусть f — функция на простом полиэдре P, непостоянная ни на каком (кроме, конечно, нульмерных) симплексе некоторой триангуляции.

Определение 5. *Функцию f будем называть h-*функцией *на P, если для всякой точки $v \in P$ существуют такие окрестность $U = U(v)$ точки v в P и вложение $\varphi_v : U \to R^3$, $\varphi_v = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$, что $\varphi_z = f$.*

Для каждой точки $v \in P$ определим *степень* $\deg v$ точки v как валентность точки v в графе $f^{-1}(f(v))$. Дргуими словами, степень точки v есть число точек в пересечении линка $\mathrm{lk}(v)$ с гиперплоскостью $z = f(v)$. Из того, что f непостоянна ни на каком симплексе, следует, что это число не меняется при пересечении с плоскостью $z = f(v) \pm \nu$ при достаточно малых ν (скажем, т.ч. $\nu < |f(v) - f(w)|$ для всякой вершины w, смежной с v). По любому такому ν определим $\Gamma_\pm = \mathrm{St}(v) \cap \{z = f(v) + \frac{\nu}{2}\}$

Лемма 1. *h-Функция f на простом полиэдре является функцией Морса тогда и только тогда, когда выполняются равенства:*

1) если $v \in V(P)$, то $\deg v = 4$;

2) если $v \in SP \setminus V(P)$, то $\deg v = 2, 3$;

3) если $v \in P \setminus SP$, то $\deg v = 0, 2, 4$.

При этом в случае 1) функция f локально эквивалентна функции f_Δ, в случае 2) — функциям f_Θ и f_e соответственно, и в случае 3) — функциям f_m, f_d и f_s.

Доказательство. Выполнение условий 1)-3) для функций Морса очевидно. Пусть h-функция f удовлетворяет этим условиям. В силу замечания 2, f будет функцией Морса, если ее уровневый граф в окрестности каждой критической точки подвергается только преобразованиям системы A. Пусть $v \in P$. По определению h-функции, можно считать, что в окрестности точки v f есть проекция на z-координату на полиэдре, лежащем в R^3. Пусть ν как и выше. При любом $0 < \varepsilon < \nu$ сечения звезды $\mathrm{St}(v)$ точки v плоскостями $\{z = f(v) + \varepsilon\}$ (плоскостями $\{z = f(v) - \varepsilon\}$) одинаковы. Поэтому нетрудно убедиться, что пересечение конуса с вершиной v над $lk(v)$ с плоскостями $z = a$, $a \in (f(v) - \nu, f(v) + \nu)$, либо подвергается одной из допустимых перестроек, либо является отрезком или триодом.

В самом деле, $\Gamma_{\pm} = \mathrm{St}(v) \cap \{z = f(v) + \frac{\nu}{2}\}$ есть трехвалентный граф с $\deg v$ свободными вершинами. Суммарное число вершин валентности 3 графов Γ_+ и Γ_- равно числу вершин графа $\mathrm{lk}(v)$. Если число $V(\Gamma_+)$ таких вершин графа Γ_+ нечетно, то и $\deg v$ нечетна, и наоборот. Таким образом, из комбинаторных рассуждений следует, что если $v \in P \setminus V(P)$, то ее степень и тип окрестности однозначно определяют перестройку сечений $\Gamma_{\pm}$. Поэтому если $v \in P \setminus SP$ и $\deg 2$, или $v \in SP \setminus V(P)$ и $\deg v = 3$, то сечения $\Gamma_{\pm}$ являются отрезками или, соответственно, триодами, а в остальных случаях графы Γ_- и Γ_+ совпадают с начальным и конечным фрагментами первых трех преобразований системы A.

Если $v \in V(P)$, то из таких рассуждений следует, что $\deg v = 4$ влечет два (с точностью до симметрии) случая: когда $V(\Gamma_+) = 4$ и когда $V(\Gamma_+) = 2$. Однако только один из этих случаев (а именно второй) можно реализовать в R^3. Тем самым все доказано. □

Нижеследующее утверждение вытекает из доказательства леммы 1.

Следствие 1. *Пусть f — такая функция на простом полиэдре P, что f непостоянна ни на каком (кроме нульмерных) симплексе некоторой триангуляции, выполняются условия 1)-3) леммы 1, и для всякой $v \in V(P)$ $V(\Gamma_+) = V(\Gamma_-) = 2$. Тогда f является функцией Морса.*

3. Представление специальных спайнов многообразий. Пусть M - замкнутое ориентируемое 3-многообразие. Выберем какое-нибудь его разбиение Хегора минимального рода: $M = H_1 \cup H_2$, и триангуляцию M, в которой H_1, H_2 — подкомплексы. Пусть Γ_1 и Γ_2 - осевые графы полных кренделей H_1 и H_2, и $S = H_1 \cap H_2$ - поверхность Хегора. Тогда $M \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cong S \times (0,1)$. Тем самым на M определена функция $H : M \to [0,1]$, которую будем называть функцией Хегора. Действительно, проекция $M \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cong S \times (0,1)$ на второй сомножитель прямого произведения дополняется до функции на всем многообразии, если положить эту функцию равной 0 на одном осевом графе и 1 на другом. Изменяя представление $M \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cong S \times (0,1)$, можно легко добиться, чтобы она была линейной на каждом симплексе некоторой триангуляции многообразия M.

Фиксированная структура прямого произведения позволяет отождествить все поверхности уровня функции Хегора — прообразы точек из интервала (0,1) — с одной фиксированной поверхностью, например, с S.

Пусть P — простой подполиэдр многообразия M. Для всех его вложений в многообразие будем считать, что это вложение находится в общем положении по отношению к графам Γ_1 и Γ_2. Триангуляцию многообразия M, на которой функция H линейна, будем называть *хорошей*, если она удовлетворяет следующим свойствам:

(a) звезды истинных вершин полиэдра P попарно не пересекаются;

(b) открытые звезды ребер триангуляции, содержащихся в различных истинных ребрах полиэдра, попарно не пересекаются;

(c) H непостоянна ни на каком (кроме нульмерных) симплексе триангуляции.

Легко видеть, что всякую триангуляцию можно сделать хорошей с помощью конечного числа малых локальных изотопий полиэдра и выбора достаточно мелкого подразделения.

Теорема 2. *Существует такое вложение простого полиэдра P в M, что ограничение функции H на P есть правильная функция Морса на P.*

Доказательство. (A) Рассмотрим произвольное вложение полиэдра P в многообразие M. Идея доказательства состоит в том, что мы построим такую изотопию подполиэдра P по многообразию M, что конечный образ полиэдра будет удовлетворять условиям леммы 1. Поскольку H, очевидно, является h-функцией, достаточно добиться выполнения условий 1)-3).

Очевидно, можно считать, что функция H принимает различные значения на всех истинных вершинах полиэдра P. Выберем хорошую триангуляцию τ пары (M, P). Через τ_P обозначим индуцированную триангуляцию полиэдра.

(B) В силу свойства (c) триангуляции τ степень каждой точки определена. Степень любой внутренней точки симплекса равна двум или трем, и в ее окрестности функция $H|_P$ эквивалентна соответственно f_d или f_e. Рассмотрим вершины триангуляции.

Назовем вершину v *плохой*, если выполняется одно из следующих двух условий:

$v \in P \setminus SP$, и $\deg v > 4$;

$v \in SP \setminus V(P)$, и $\deg v \neq 2, 3$.

Иными словами, v не удовлетворяет условиям леммы 1.

Дальнейшая стратегия действий будет состоять в том, чтобы устранить плохие точки. Для этого нужно уметь менять степень вершины.

Лемма 2. *Пусть степень вершины $\deg v \geq 4$, и v не является истинной вершиной. Тогда существует изотопия полиэдра P, неподвижная на SP, которая уменьшает степень вершины v на 2, причем после этой изотопии не возникает новых плохих точек.*

Доказательство. Так как v — не истинная вершина и ее степень не менее 4, то одна из компонент связности множества $\mathrm{lk}(v, \tau_P) \setminus H^{-1}(H(v))$ — простая дуга γ, причем такая, что существует диск D со следующими свойствами: $D \cap P = \overline{\gamma} \subset \partial D$, и $l = (\partial D \setminus \gamma) \subset H^{-1}(H(v))$. Для определенности предположим, что $H(\gamma) > H(v)$. Пусть $N(l)$ — достаточно малая регулярная окрестность дуги l. Выберем такую точку x, что $H(x) < H(v)$, $\mathrm{dist}(x, v) < \mathrm{dist}(w, v)$ (где $\mathrm{dist}(x, y)$ — какая-нибудь метрика на M) для любой вершины w триангуляции, смежной с v, и x лежит в конусе с вершиной v над диском $N(l)$. Возьмем минимальный одномерный подкомплекс, содержащий γ, удалим из P его регулярную окрестность и добавим конус над краем этой регулярной окрестности с вершиной в точке x. Так как точка x достаточно близка к v, то добавляемый конус не пересечет оставшуюся часть полиэдра P (т.е. получится вложенный полиэдр), и новая вершина x будет иметь степень 4. Степень вершины v при этом уменьшится на 2. Нетрудно проверить, что степени всех остальных точек не изменятся. $\square$

(C) Пусть v — истинная вершина полиэдра P. Рассмотрим ее звезду $S = \mathrm{St}(v, \tau)$. Заметим, что существует гомеоморфизм пары (T^3, E) на пару $(S, \mathrm{St}(v, \tau_P))$. Выберем вложение φ' пары (T^3, E) в $S \setminus P$ со свойством $H \circ \varphi' = f_\Delta$. Оба вложения шара T^3 в многообразие M можно считать сохраняющими ориентацию. Поэтому они изотопны. Эта изотопия продолжается до изотопии всего многообразия, постоянной вне некоторой окрестности точки v. В частности, эту окрестность можно выбрать не содержащей других вершин полиэдра P. Построив такую изотопию для всех вершин, добьемся того, чтобы функция H в окрестности каждой вершины была эквивалентна функции f_Δ. Новую триангуляцию обозначим τ^1.

(D) Пусть $v \in SP \setminus V(P)$ — вершина τ^1. Если v является плохой, то возможны 2 случая: либо $\deg v \geq 4$, либо $\deg v = 0$. В первом случае будем применять лемму 2 до тех пор, пока точка не станет хорошей. Если $\deg v = 0$, то v — точка реберного экстремума, и v можно сделать хорошей за счет появления одной новой точки максимума или минимума на 2-компоненте. При всех таких операциях новых плохих точек не возникнет.

Пусть $v \in P \setminus SP$ — вершина τ^1. Если $v \in H^{-1}(0) \cup H^{-1}(1)$, то она имеет степень 0 и поэтому является хорошей. Пусть теперь $H(v) \in (0, 1)$. Если v — плохая, то $\deg v \geq 6$. Будем применять к ней лемму 2, до тех пор пока точка не станет хорошей, и так далее для всех плохих точек. Как уже отмечалось в пункте (B), при каждой такой операции степень вершины, в окрестности которой она применяется, уменьшается, степени остальных вершин не меняются, и число плохих точек не увеличивается. Поэтому процесс оборвется, когда все точки станут хорошими.

(E) Вообще говоря, перестройка, происходящая при переходе через одно критическое значение, может состоять из нескольких малых перестроек, происходящих в попарно непересекающихся окрестностях. Так, после выполнения действий пунктов (C), (D) любая перестройка уровневого графа функции $H|_P$ будет состоять из нескольких допустимых. Тогда последовательности уровневых графов, каждый из которых получается из предыдущего несколькими особыми преобразованиями, можно естественно сопоставить последовательность, к которой добавлены все "промежуточные"графы. Эта последняя и показывает нам, как изменить функцию H, так чтобы прообраз каждого критического значения содержал только одну критическую точку. Этим завершается доказательство теоремы. $\square$

Следствие 2. *На любом простом полиэдре существует функция Морса.*

Доказательство. Достаточно проверить, что на простом полиэдре P существует функция, удовлетворяющая условиям следствия 1. Можно всегда выбрать такое вложение полиэдра P в евклидово пространство R^5, что проекция на одну из координат будет удовлетворять первому и третьему условиям этого следствия. Тогда останется только исправить степени вершин триангуляции. Это модно сделать с помощью (практически дословного) аналога леммы 2 и повторения рассуждений пунктов (C), (D) предыдущего доказательства. □

Вернемся теперь к многообразию M и его простому спайну P. Пусть a_1,...,a_{n-1} — такие числа, что $0 < a_1 < c_2 < ... < c_{n-1} < a_{n-1} < 1$. Прообразом каждой точки a_i является пара (S, G_i), $G_i = H|_P^{-1}(a_i)$ — трехвалентный граф. Последовательность пар (S, G_1),...,(S, G_{n-1}) обладает следующими свойствами:

(1) Графы G_1, G_{n-1} являются наборами окружностей, причем каждая из пар (S, G_1), (S, G_{n-1}) содержит систему меридианов поверхности S.

(2) Пара (S, G_i) получается из пары (S, G_{i-1}) с помощью одного из преобразований системы A, выполняемого таким образом, что при каждом переходе полученный граф остается вложенным, и вне заменяемого фрагмента вложение не меняется.

Действительно, условие (2) выполняется по определению правильной функции Морса, а условие (1) следует из общего положения и того, что дополнение к спайну в многообразии есть шар и может поэтому содержать только тривиальные в многообразии кривые.

Определение 6. *Пусть S — некоторая ориентируемая поверхность ненулевого рода, G_1,...,G_{n-1} — трехвалентные графы. Последовательность пар (S, G_1), (S, G_2), ..., (S, G_{n-1}), рассматриваемых с точностью до изотопии, называется* мултфильмом*, если она удовлетворяет условиям (1), (2), сформулированным выше.*

Определение 7. *Пусть $\Gamma = \{(S, G_1), ..., (S, G_{n-1})\}$ — мультфильм, M — замкнутое ориентируемое 3-многообразие, P — простой подполиэдр M. Пара (M, P) называется* следом *мультфильма Γ, если существует функция Хегора $f : M \to R^1$, которой отвечает мультфильм Γ.*

Иногда, если это не приведет к неточности, следом мультфильма будем называть только полиэдр P.

В силу свойств (1) и (2), след однозначно восстанавливается по мультфильму. При этом из теоремы 2 следует, что любая пара *(замкнутое ориентируемое многообразие,специальный спайн)* является следом какого-нибудь мультфильма. Однако обратное неверно: мультфильм может задавать многообразие вместе с его произвольным простым подполиэдром.

Определение 8. *Мультфильм называется* допустимым*, если его след есть пара: многообразие и его специальный спайн.*

Теорема 3. *Существует алгоритм, который по данному мультфильму на поверхности Хегора замкнутого ориентируемого неприводимого многообразия определяет, является ли он допустимым.*

Доказательство. След данного мультфильма $\Gamma = \{(S, G_1), ..., (S, G_n)\}$ обозначим (M, P). Через $\tilde{f}$ обозначим какую-нибудь (все равно какую) морсовскую функцию, индуцирующую данный мультфильм. Для того, чтобы установить, является ли данный мультфильм допустимым, нужно ответить на два вопроса. Первый, является ли P специальным полиэдром. Второй, является ли он спайном многообразия M.

Алгоритм состоит из нескольких шагов.

Шаг 1 — проверка связности P. Мультфильму Γ сопоставим граф $T(\Gamma)$. Его вершинами являются компоненты связности всех графов G_1,...,G_n. Вершины соединены ребром, если отвечающие им компоненты связности связаны особым преобразованием или естественно отождествляются как подграфы G_i, G_{i+1}. Нетрудно видеть, что связность $T(\Gamma)$ эквивалентна связности P. Заметим теперь, что поскольку M связно, несвязный полиэдр не может быть его спайном.

Шаг 2 — подсчет числа компонент связности поверхности $P \backslash SP$**.** Применим аналогичный прием, только теперь за вершины возьмем всевозможные компоненты связности множества $G_i \backslash V(G_i)$, т.е. множество всех ребер и всех окружностей в G_i. Две вершины соединены ребром, если они связаны седловым преобразованием, или если соответствующие ребра естественно отождествляются. Число компонент связности этого графа и будет числом компонент связности поверхности $P \setminus SP$.

Шаг 3 — проверка специальности P**.** Этот шаг заключается в проверке условий теоремы 1 для функции $\tilde{f}$.

Шаг 4 — проверка, является ли край регулярной окрестности полиэдра P **в** M **сферой.** Заметим, условие $\partial N(P) = S^2$ эквивалентно равенству $\chi(P) = 1$.

Утверждается, что $\chi(P) = M(\tilde{f}) + 1/2E(\tilde{f}) - H(\tilde{f})$. В самом деле, для всякого $a \in [0, 1]$ обозначим $P_a = \tilde{f}^{-1}([0, a])$ и посмотрим, как меняется $\chi(P_a)$ при переходе a через критическое значение.

Пусть c_{i-1}, c_i, c_{i+1} — три последовательных критических значения $\tilde{f}$, v_i — соответствующая критическая точка, $c_{i-1} < a < c_i < b < c_{i+1}$. Искомое равенство получается из следующих замечаний. Если v_i — точка минимума или максимума, то P_b имеет гомотопический тип комплекса P_a с добавленной соответственно 0-мерной или 2-мерной клеткой. Если v_i — седловая точка, то P_b имеет гомотопический тип комплекса P_a с добавленной 1-мерной клеткой. Если v_i — точка реберного минимума, то P_b гомотопически эквивалентно P_a, а если v_i — точка реберного максимума, то P_b имеет гомотопический тип комплекса P_a с добавленной 2-мерной клеткой. Наконец, если v_i — вершина полиэдра, то P_b гомотопически эквивалентно P_a.

Если край регулярной окрестности полиэдра P в M не является сферой, то в силу замкнутости многообразия M полиэдр заведомо не может быть спайном. Пусть край регулярной окрестности полиэдра P в M - сфера. В силу неприводимости M эта сфера ограничивает шар. Поэтому P может быть либо спайном шара, либо спайном всего многообразия. Существует, однако, алгоритм распознавания, когда трехмерное многообразие является шаром ([4], см. также [5]). Поэтому алгоритм завершается шагом 5.

Шаг 5 — проверка, является ли P спайном шара. □

Автор благодарен С.В. Матвееву за многочисленные полезные обсуждения и большую помощь в работе над текстом.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Matveev S.V.* Complexity theory of three-dimensional manifolds// Acta Applicandae Mathematicae, 1990, V. 19, pp. 101-130. Zbl 0724.57012

[2] *Anisov S.S., Lando S.K.* Topological complexity of torus bundles over S^1 // in: Topics in Quantum Groups and Finite-type invariants (Mathematics at the Independent University of Moscow) AMS Translations, ser. 2, Vol. 185; Advances in the Mathematical Sciences (B. Feigin, V. Vassiliev, eds.), 1998, pp. 129-135. Zbl 0912.57015

[3] *Матвеев С.В., Фоменко А.Т.* Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. М.: Наука, 1998, 304 с. Zbl 0906.57001

[4] *Thompson A.* Thin position and the recognition problem for S^3// Math. Research Letters, 1994, N 1, pp. 613-630. Zbl 0849.57009

[5] *Матвеев С.В.* Алгоритм распознавания трехмерной сферы (по А. Томпсон)// Мат. сборник, 1995. Т. 186. N 5. С. 69-84. Zbl 0849.57010

Челябинский государственный университет.
e-mail: pervova@cgu.chel.su