Труды конференции «Геометрия и приложения»
13 – 16 марта 2000 г., Новосибирск

О ТЕОРИИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ КРИВЫХ В n-МЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ю. Г. Решетняк

1. Введение. В 1947-м году А. Д. Александров в докладе на заседании Московского математического общества сформулировал основные принципы теории кривых в 3-мерном евклидовом пространстве [1], обобщающей теорию кривых, известную из дифференциальной геометрии и включающую в рассмотрение нерегулярные кривые, например ломаные, т. е. кривые, составленные из конечного числа прямолинейных отрезков.

В настоящем сообщении автор описывает схему построения теории нерегулярных кривых в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, отличную от схемы, данной А. Д. Александровым в работе [1].

Схема автора основана на следующей идеологии. Сначала необходимо описать то множество объектов, которое должно быть предметом изучения теории нерегулярных кривых. Изучение свойств рассматриваемых объектов есть задача следующего этапа построения теории. В частности, установление того, каким образом различные характеристики кривых могут быть определены посредством приближения кривой ломаными, — задача этого этапа.

Традиционно теория кривых представляет собой один из начальных разделов дифференциальной геометрии, и ее содержание обычно укладывается в рамки одной лекции. В классической теории кривых в 3-хмерном евклидовом пространстве, — в том виде, как она обычно излагается в курсах дифференциальной геометрии, — основные характеристики кривой $x(s)$ есть кривизна $k(s)$ и кручение $T(s)$ в точке $x(s)$, $0 \le s \le L$, кривой (параметр s — длина дуги).

Первая идея А. Д. Александрова состояла в том, чтобы рассматривать *интегральную кривизну* и *интегральное кручение*. При этом *интегральная кривизна* $\varkappa(AB)$ дуги с концами в точках в $A = x(s_1)$ и $B = x(s_2)$ для кривой, удовлетворяющей условиям регулярности, принятым в дифференциальной геометрии, равна интегралу $\int\limits_{s_1}^{s_2} k(s)\,ds$.

Аналогичным образом, *интегральное кручение* $\tau(AB)$ дуги кривой в регулярном случае равно интегралу $\int\limits_{s_1}^{s_2} T(s)\,ds$.

Кривизна кривой в 3-мерном евклидовом пространстве всегда неотрицательна. Кручение, напротив, может принимать здесь значения разного знака. В связи с этим целесообразно рассматривать также *абсолютное интегральное кручение кривой*, которое для регулярных кривых равно интегралу $|\tau|(AB) = \int\limits_{s_1}^{s_2} |T(s)|\, ds$.

Вторая идея А. Д. Александрова состоит в том, что понятия интегральной кривизны и кручения в 3-мерном евклидовом пространстве должны определяться сначала для *ломаных*. Для произвольной кривой эти характеристики должны определяться путем аппроксимации кривой ломаными.

А. Д. Александровым были намечены общие контуры теории кривых, основанной на предлагаемом им подходе, и сформулированы основные задачи, решение которых должно было составить содержание этой теории. При этом, как указано выше, рассматривались только кривые в трехмерном евклидовом пространстве.

Реализацию программы А. Д. Александров поручил своим ученикам. Сначала этим занимался А. Я. Юсупов, которому принадлежит некоторое полезное наблюдение, касающееся понятия развертки сферической ломаной на сфере в 3-хмерном пространстве.

Затем эту работу продолжил Ю. Г. Решетняк. Автору удалось показать, что решение задач, возникающих при построении теории кривых по А. Д. Александрову, может быть получено *применением методов интегральной геометрии*. Монография, в которой теория кривых была изложена в форме, соответствующей первоначальному замыслу А. Д. Александрова, была подготовлена к печати еще в 1962-м году. (К сожалению, по причинам технического характера, публикация монографии вышла в свет значительно позже, см. [2]; русское издание книги не публиковалось.)

Построение той части теории кривых, которая касается изучения интегральной кривизны и класса кривых ограниченной интегральной кривизны по схеме А. Д. Александрову для 3-хмерного евклидова пространства, требует сравнительно простых средств и может быть представлено в достаточно прозрачной форме. Но уже при изучении вопросов, относящихся к *понятию интегрального кручения кривой*, необходимые доказательства оказываются достаточно тяжеловесными. Распространение теории нерегулярных кривых на многомерный случай, — если следовать первоначальной схеме А. Д. Александрова, — наталкивается на практически непреодолимые трудности.

Автором предлагается другая схема построения теории нерегулярных кривых в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, основанная на использовании двух геометрических конструкций. П е р в а я связана с понятием *сферической индикатрисы касательных кривой* (ранее введенным А. Д. Александровым). В т о р а я конструкция использует понятие *развертки сферической кривой*. Эти две конструкции позволяют определить тот класс объектов, изучение которых является задачей теории нерегулярных кривых.

Понятие развертки кривой, заданной в римановом пространстве, в евклидово пространство строится с помощью понятия параллельного переноса. В работе автора [3] понятие *параллельного переноса вектора в пространстве аффинной связности распространено на случай нерегулярных кривых.* (Определение параллельного переноса вектора вдоль кривой равносильно построению подъема кривой в соответствующем расслоенном пространстве.)

2. Определение понятия кривой в метрическом пространстве. Понятие кривой в разных разделах математики трактуется по-разному. В связи с этим приведем то определение кривой, которое используется в данном сообщении. Формально определение автора эквивалентно классическому определению, данному М. Фреше, с той разницей, что здесь рассматриваются ориентированные кривые. Это позволяет придать точный смысл некоторым понятиям, относящихся к понятию кривой, обычно считающимся интуитивно ясными.

(Точное определение понятия кривой обычно несколько громоздко. В математике известен своего рода "закон сохранения трудностей", когда выигрыш, достигнутый на раннем этапе изучения того или иного математического объекта, приводит к усложнению изложения в дальнейшем.)

Пусть M есть метрическое пространство. Параметризованная кривая или путь в пространстве M есть непрерывное отображение $x : [a, b] \to M$ отрезка $[a, b]$ числовой прямой $\mathbb{R}$. Параметризованную кривую x:$[a, b] \to M$ будем называть *невырожденной*, если множество $x([a, b])$ содержит хотя бы две различные точки.

Пусть $x : [a, b] \to M$ — путь в пространстве M. *Местом пути* x называется пара $X = (p, \sigma)$, где p есть точка множества $x([a, b])$ и α — связная компонента множества $x^{-1}(p)$. Множество σ либо состоит из единственной точки, либо представляет собой замкнутый отрезок. Будем говорить, что точка p является *носителем места* X.

Пусть $X = (p, \sigma)$ и $Y = (q, \tau)$ есть два произвольных места пути x. Будем говорить, что X лежит л е в е е Y, если для любых $t \in \sigma$ и $u \in \tau$ выполняется неравенство $t < u$. В этом случае мы будем писать $X < Y$.

Если места X и Y пути $x : [a, b] \to M$ таковы, что $X < Y$, то мы будем говорить, что Y лежит п р а в е е X и писать $Y > X$.

Пусть x:$[a, b] \to M$ и y:$[c, d] \to M$ — две параметризованные кривые в пространстве M, $\overline{x}$ — множество мест пути x, $\overline{y}$ — множество мест пути y.

Пути x и y называются *эквивалентными*, если существует биективное отображение $\varphi : \overline{x} \to \overline{y}$ такое, что для всякого $X \in \overline{x}$ носители мест X и $\varphi(X)$ совпадают. При этом, если $X < Y$, то $\varphi(X) < \varphi(Y)$. Если биективное отображение φ, удовлетворяющее указанным условиям, существует, то оно единственно.

Будем говорить, что φ есть *согласующее отображение* для путей $x : [a, b] \to M$ и $y : [c, d] \to M$.

Легко проверяется, что введенное так отношение эквивалентности в множестве путей пространства M рефлексивно, симметрично и транзитивно. В соответствии с этим множество всех параметризованных кривых пространства M распадается на классы эквивалентных путей. Кривая в пространстве M есть класс эквивалентности множества путей по данному отношению. Элементы этого класса называются *параметризациями кривой*.

Данное определение не исключает случай, когда путь x является вырожденным, т. е. множество $x([a,b])$ состоит из единственной точки. В этом случае множество $\overline{x}$ мест пути x состоит из единственного элемента. При этом, если одна из данных параметризованных кривых $x : [a,b] \to M$ и $y : [c,d] \to M$ является вырожденной, то они будут эквивалентны в том и только в том случае, если также и вторая параметризованная кривая является вырожденной, причем $x([a,b]) = y([c,d])$.

Кривая называется *вырожденной*, если хотя бы одна из ее параметризаций есть вырожденная параметризованная кривая.

Пусть K — невырожденная кривая в пространстве M, $x : [a,b] \to M$ и $y : [c,d] \to M$ — две параметризации кривой K, $\varphi : \overline{x} \to \overline{y}$ есть согласующее отображение для параметризованных кривых x и y. Пусть $X \in \overline{x}$. Тогда X отвечает элемент $\varphi(X)$ множества $\overline{y}$. Так как согласующее отображение φ в случае, если оно существует, — единственно, то $X' = \varphi(X)$ по X определено однозначно. Будем говорить, что $X \in \overline{x}$ и $X' = \varphi(X) \in \overline{y}$ определяют одну и ту же точку P кривой K. Пусть $X = (p, \sigma)$. Тогда мы будем говорить, что σ есть множество значений параметра t, отвечающих точке P в параметризации $x : [a,b] \to M$. Точку $p \in M$ будем называть *носителем точки P кривой K*. Значения $t \in \sigma$ называются *значениями параметра*, отвечающими данной точке кривой K. Если $t \in \sigma$, то мы будем также употреблять выражение: *P есть точка $x(t)$ кривой K*.

На совокупности точек кривой естественно определяется *отношение порядка.* А именно, пусть P и Q — две произвольные точки кривой. Тогда мы будем говорить, что P лежит л е в е е Q, если во всякой параметризации кривой K любое значение параметра, соответствующее точке P, меньше любого значения параметра, соответствующего точке Q. В этом случае будем писать $P < Q$ или, что равносильно, $Q > P$. Наименьший, в смысле данного отношения порядка, элемент множества точек кривой называется ее *началом*, наибольший элемент множества точек кривой называется *концом* кривой K. Отношение порядка естественным образом определяет на множестве точек кривой K некоторую топологию, базой которой являются всевозможные интервалы в множестве точек кривой.

На множестве всех кривых метрического пространства M может быть определена некоторая метрика. Пусть даны кривые K и L в пространстве M с метрикой ρ, и пусть $x : [0,1] \to M$, $\ y : [0,1] \to M$, — произвольные параметризации кривых K и L, соответственно. Положим

$$r(x,y) = \max_{t \in [0,1]} \rho[x(t), y(t)].$$

Точная нижняя граница величины $r(x, y)$ относительно x и y называется *расстоянием* между кривыми K и L. Она обозначается символом $d(K, L)$. Функция $(K, L) \mapsto d(K, L)$ представляет собой некоторую метрику на множестве всех кривых метрического пространства M.

3. Понятие индикатрисы касательных кривой в $\mathbb{R}^n$. Теория кривых, которая описывается здесь, изучает некоторые классы кривых в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{S}^n$. Определение этих классов использует понятие индикатрисы касательных.

Далее $\mathbb{R}^n$ означает n-мерное векторное евклидово пространство, $\mathbb{S}^{n-1}$ — единичную сферу в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Простейший случай, когда кривая в $\mathbb{R}^n$ допускает параметризацию $x(t)$, $a \leq t \leq b$, такую, что для всех $t \in [a, b]$ производная $x'(t)$ определена, причем вектор-функция $x'(t)$ непрерывна и $|x'(t)| \neq 0$ для всех $t \in [a, b]$. Полагаем

$$\mathbf{e}(t) = \frac{x'(t)}{|x'(t)|}.$$

Получим некоторую параметризованную кривую на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$. Этим определена некоторая кривая Q на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$. Кривая Q не зависит от выбора параметризации кривой K и называется *индикатрисой касательных кривой* K.

Известно, что длина индикатрисы касательных равна интегральной кривизне кривой.

Для наших целей необходимо уметь определять понятие индикатрисы касательных также и для некоторых негладких кривых.

Пусть K есть невырожденная кривая в пространстве $\mathbb{R}^n$, P и Q — две точки кривой K, не совпадающие пространственно, т. е. такие, что носитель p точки P и носитель q точки Q — различны. Тогда может быть определен некоторый вектор $\mathbf{e}(P, Q)$. Полагаем

$$\mathbf{e}(P, Q) = \begin{cases} \dfrac{q - p}{|q - p|}, & \text{если } P < Q, \\ \dfrac{p - q}{|q - p|}, & \text{если } P > Q. \end{cases}$$

Пусть X_0 есть точка кривой K и $(X_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ есть последовательность точек кривой K, сходящаяся к точке X. (Сходимость последовательности понимается как сходимость в смысле порядковой топологии, определенной на множестве точек кривой.)

Предположим, что при каждом ν носители точек X_ν и X_0 не совпадают. Тогда при каждом $\nu \in \mathbb{N}$ определен единичный вектор $\mathbf{e}_\nu = \mathbf{e}(X_\nu, X_0)$.

Если вектор $\mathbf{e}$ является пределом последовательности векторов $\mathbf{e}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, то мы будем говорить, что $\mathbf{e}$ является *частичным касательным ортом в точке* X_0 *кривой* K.

Определим некоторый класс кривых в пространстве $\mathbb{R}^n$, которые будем называть *односторонне гладкими кривыми.*

Пусть K есть невырожденная кривая в пространстве $\mathbb{R}^n$, A —начало кривой K, B — ее конец. Возьмем произвольно точку X_0 кривой K. Предположим, что $A < X_0$. Тогда для любых точек P и Q кривой K, не совпадающих пространственно, и таких, что $A \leq P \leq X_0$ и $A \leq q \leq X_0$, — определен вектор $\mathbf{e}(P, Q)$.

Если векторы $\mathbf{e}(P, Q)$ сходятся к некоторому пределу, когда точки P и Q независимо стремятся к точке X_0 по дуге $[AX_0]$, то говорят, что кривая K имеет в точке X_0 *левую касательную в сильном смысле.*

Аналогично, если $X_0 < B$ и $\mathbf{e}(P, Q)$ сходится к некоторому пределу, когда P и Q стремятся к точке X_0 по дуге $[X_0 B]$, то мы будем говорить, что кривая K имеет в точке X_0 *правую касательную в сильном смысле.*

Введем обозначения. Полагаем

$$\mathbf{t}_l(X_0, K) = \lim_{P,Q \to X_0, P < X_0, Q < X_0} \mathbf{e}(P, Q),$$

$$\mathbf{t}_r(X_0, K) = \lim_{P,Q \to X_0, P > X_0, Q > X_0} \mathbf{e}(P, Q).$$

Кривая K в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется *односторонне гладкой*, если в каждой своей точке X в случае, если X не является началом кривой, кривая имеет левую касательную в сильном смысле, а если X не является концом кривой K, то кривая имеет в этой точке также и правую касательную в сильном смысле.

Пусть X есть *внутренняя точка* односторонне гладкой кривой K, т. е. X не является ни началом, ни концом кривой K. Точка X называется *угловой*, если левая и правая касательная кривой в этой точке различны, $\mathbf{t}_l(X, K) \neq \mathbf{t}_r(X, K)$.

Если $\mathbf{t}_l(X, K) = \mathbf{t}_r(X, K)$, то мы будем говорить, что X есть гладкая точка кривой K. Точка X называется *точкой возврата*, если $\mathbf{t}_l(X, K) = -\mathbf{t}_r(X, K)$.

Предложение 1. Всякая односторонне гладкая кривая спрямляема и состоит из конечного числа простых дуг. Если K есть односторонне гладкая кривая и $x(s)$, $0 \leq s \leq L$, — ее параметризация, где параметр s есть длина дуги, то вектор-функция $x(s)$ имеет левую производную $x'_l(s)$ для всякого $s > 0$, а для любого $s < L$ существует правая производная $x'_r(s)$. При этом $|x'_l(s)| = |x'_r| = 1$, и в каждой точке $s \in [0, L]$ справедливы соотношения:

$$\text{при} \quad s > 0 : x'_l(s) = \lim_{t \to s-0} x'_l(t) = \lim_{t \to s-0} x'_r(t),$$
$$\text{при} \quad s < L : x'_r(s) = \lim_{t \to s+0} x'_l(t) = \lim_{t \to s+0} x'_r(t).$$

Для всякого $\delta > 0$ — множество угловых точек односторонне гладкой кривой, в которых угол между между левой и правой касательными больше δ, — конечно.

Из предложения 1, в частности, следует, что множество угловых точек односторонне гладкой кривой не более чем счетно.

Для произвольной односторонне гладкой кривой K в пространстве $\mathbb{R}^n$ определим некоторую кривую $I(K)$ на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$.

Кривая $I(K)$ определяется следующим образом. Пусть E есть множество всех угловых точек кривой K. Построим параметризацию $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ кривой K такую, что для всякой угловой точки X множество значений параметра t, отвечающих этой точке, представляет собой некоторый промежуток $[\alpha, \beta]$, где $\alpha < \beta$.

Теперь определим некоторую вектор-функцию $\mathbf{z}(t)$, $t \in [a, b]$. Если $X = x(t)$ есть гладкая точка кривой K, то мы полагаем

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{t}_l(X) = \mathbf{t}_r(X).$$

Предположим, что $X = x(t)$ есть угловая точка. Тогда вектор $\mathbf{z}(t)$ определяется следующим образом. Пусть $[\alpha, \beta]$, где $\alpha < \beta$ есть множество всех значений параметра t, которые отвечают точке X. Положим $\mathbf{z}(\alpha) = \mathbf{t}_l(X)$, $\mathbf{z}(\beta) = \mathbf{t}_r(X)$. Точки $\mathbf{z}(\alpha)$ и $\mathbf{z}(\beta)$ сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ соединим на сфере кратчайшей дугой окружности большого круга. Пусть $\tau(X)$ есть эта дуга.

Для $t \in [\alpha, \beta]$ значения функции $\mathbf{z}(t)$ определим из условия, что $t \in [\alpha, \beta] \mapsto \mathbf{z}(t)$ есть гомеоморфизм отрезка $[\alpha, \beta]$ и дуги $\tau(X)$.

Выполнив описанное построение для всех $t \in [\alpha, \beta]$, мы получим некоторое отображение $t \mapsto \mathbf{z}(t)$ промежутка $[a, b]$.

Предложение 1 позволяет заключить, что это отображение непрерывно. Построенная таким образом вектор-функция $\mathbf{z}(t)$, где $t \in [a, b]$ определяет некоторую сферическую кривую Γ. Кривая Γ не зависит от выбора параметризации $x(t)$, $t \in [a, b]$, удовлетворяющей указанным ранее условиям, и называется *индикатрисой касательных кривой* K. Далее мы будем обозначать ее символом $I(K)$.

4. Поворот кривой в пространстве $\mathbb{R}^n$. Определим понятие поворота кривой и класс кривых конечного поворота.

Пусть K есть кривая в пространстве $\mathbb{R}^n$. Будем называть *цепочкой касательных ортов кривой* K всякую конечную последовательность ξ вида

$$\xi = \{(\mathbf{t}_0, X_0), (\mathbf{t}_1, X_1), \ldots, (\mathbf{t}_m, X_m)\},$$

удовлетворяющую следующему условию: при каждом $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ вектор $\mathbf{t}_i$ является частичным касательным ортом кривой K в точке X_i, и точки X_i таковы, что $X_i < X_{i-1}$ при каждом $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$. Векторы $\mathbf{t}_i$ при этом называются *элементами цепочки* ξ, точки X_i — *узлами цепочки* ξ.

Будем говорить, что цепочка касательных ортов ξ лежит на дуге (PQ) кривой K, если все ее узлы принадлежат этой дуге.

Пусть дана произвольная цепочка ξ касательных векторов кривой K в пространстве $\mathbb{R}^n$,

$$\xi = \{(\mathbf{t}_0, X_0), (\mathbf{t}_1, X_1), \ldots, (\mathbf{t}_m, X_m)\}.$$

Полагаем

$$\varkappa(x,\xi) = \sum_{k=1}^{m} \angle(\mathbf{t}_{i-1}, \mathbf{t}_i).$$

Точная верхняя граница сумм $\varkappa(x,\xi)$ на множестве всех цепочек ξ кривой K называется *интегральной кривизной* или *поворотом*, или *интегральной кривизной кривой* K и обозначается далее символом $\varkappa_1(K)$. Определением допускается значение $\varkappa_1(K) = \infty$.

Следующее утверждение доказано в [2] и [3].

Теорема 1. Если поворот кривой K в пространстве $\mathbb{R}^n$ конечен, то K есть односторонне гладкая кривая.

Для всякой односторонне гладкой кривой $\mathbb{R}^n$ величина $\varkappa(K)$ равна длине индикатрисы касательных кривой K.

5. Развертка сферической кривой. Определим понятие развертки сферической кривой. Сначала рассмотрим случай регулярных кривых. Пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ далее считаем ориентированным.

Предположим, что кривая K на сфере $\mathbb{S}^n$ является регулярной класса $\mathcal{C}^2$. Это означает, что кривая K допускает параметризацию $\mathbf{x} : [a,b] \to \mathbb{S}^n$, которая является вектор-функцией класса $\mathcal{C}^2$, причем $\mathbf{x}'(t) \neq 0$ для всех $t \in [a,b]$.

В дифференциальной геометрии определяется *понятие параллельного переноса вектора вдоль кривой.* Предположим, что для каждого $t \in [a,b]$ определен вектор $\xi(t)$, лежащий в касательной плоскости сферы в точке $\mathbf{x}(t)$. Условие — векторное поле $\xi(t)$ получено параллельным переносом вдоль кривой $\mathbf{x}(t)$ из вектора $\xi(a)$ — равносильно следующему: вектор-функция $\xi(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\xi'(t) + \langle \xi(t), \mathbf{x}'(t) \rangle \mathbf{x}(t) = 0. \qquad (*)$$

Пусть P_0 есть подпространство $\mathbb{R}^{n+1}$, ортогональное вектору $\mathbf{x}(a)$. Ориентируем его так, что если

$$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

есть правый репер в гиперплоскости P_0, то

$$\{\mathbf{x}(a), \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

есть правый репер в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Зададим произвольно значение $u \in [a,b]$ и пусть $\xi(t,u)$ есть решение уравнения $(*)$, удовлетворяющее условию $\xi(u,u) = \mathbf{x}'(t)$. Уравнение $(*)$ линейно, откуда следует, что *задача Коши* $\xi(u) = \zeta$, где вектор ζ ортогонален $\mathbf{x}(u)$, имеет решение, определенное для всех $t \in [a,b]$. Мы полагаем $\eta(u) = \xi(a,u)$.

Вектор $\eta(u)$ формально получен из вектора $\mathbf{x}'(u)$ параллельным переносом в точку $\mathbf{x}(a)$ вдоль дуги кривой $\mathbf{x}(t)$, $t \in [a,b]$, соответствующей значениям параметра $t \in [a, u]$. Вектор $\eta(u)$ принадлежит плоскости P_0. Полагаем

$$\mathbf{y}(t) = \int\limits_a^t \eta(u)\, du.$$

Вектор-функция $\mathbf{y}(t)$ определяет некоторую кривую L в плоскости P_0. Эта кривая не зависит от выбора параметризации $\mathbf{x}$ кривой K.

Плоскость P_0 изометрична пространству $\mathbb{R}^n$. Всякую кривую, которая является образом кривой L при сохраняющем ориентацию изометрическом отображении P_0 на $\mathbb{R}^n$, мы будем называть *разверткой кривой K в пространство* $\mathbb{R}^n$.

Развертка кривой допускает следующую интерпретацию. Предположим, что сфера $\mathbb{S}^n$ катится по n-мерной плоскости, касаясь ее в точках кривой K. Тогда след, зачерчиваемый в плоскости точкой касания плоскости и сферы, и есть развертка кривой K.

Отметим, что описанные построения без каких-либо изменений переносятся на случай кусочно-регулярных кривых, т. е. таких кривых, которые можно разбить на конечное число дуг, каждая из которых является регулярной кривой. В частности, эти построения применимы к случаю, когда рассматриваемая кривая является сферической ломаной. Кривая K на сфере $\mathbb{S}^n$ называется *сферической ломаной*, если можно указать конечную последовательность точек $X_0 < X_1 < \cdots < X_{m-1} < X_m$ такую, что X_0 является началом кривой K, а X_m есть ее конец, и каждая из дуг $X_{i-1}X_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, является кратчайшей на сфере $\mathbb{S}^n$.

Понятие развертки кривой распространяется на случай нерегулярных кривых следующим образом. Развертка кривой определена с точностью до изометрического преобразования пространства $\mathbb{R}^n$. В связи с этим полезно несколько модифицировать понятие расстояния между кривыми. А именно, пусть K и L — две произвольные кривые в пространстве $\mathbb{R}^n$ и P — изометрическое отображение пространства $\mathbb{R}^n$ на себя, сохраняющее ориентацию. Положим

$$\Delta(K, L) = \inf_P d(K, PL),$$

где точная нижняя граница берется по множеству всех изометрических отображений пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющих ориентацию.

Пусть K есть кривая на сфере $\mathbb{S}^n$. Кривая R в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется *разверткой кривой* K, если она удовлетворяет следующему условию. Для всякой последовательности $(L_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ сферических ломаных, вписанных в кривую K и сходящихся к ней при $\nu \to \infty$, кривые $E(L_\nu)$ — развертки ломаных L_ν в пространстве $\mathbb{R}^n$ — сходятся к кривой R в том смысле, что $\Delta[E(L_\nu), R] \to 0$ при $\nu \to \infty$.

Из результатов работ [5], [6] и [7] вытекают некоторые *достаточные условия существования развертки кривой.* Эти условия выполняются в частности в том важном для нас случае, когда кривая K — спрямляема.

Таким образом, всякая спрямляемая кривая на сфере $\mathbb{S}^n$ имеет развертку в смысле данного здесь определения.

6. Определение классов $\mathcal{K}_m(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{K}_m(\mathbb{S}^n)$. Для пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{S}^n$ определим по индукции классы кривых $\mathcal{K}_m(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{K}_m(\mathbb{S}^n)$, где $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Для $n = 1$ пространство $\mathbb{R}^n$ совпадает с числовой прямой $\mathbb{R}$. Пусть $\mathcal{K}_0(\mathbb{R})$ есть множество всех спрямляемых кривых в $\mathbb{R}$. Если K есть спрямляемая кривая, то пусть $\varkappa_0(K)$ есть длина этой кривой. Символом $\mathcal{K}_1(\mathbb{R})$ обозначим множество всех *кривых конечного поворота* в пространстве $\mathbb{R}$. Для кривой $K \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R})$ пусть $\varkappa_1(K)$ есть поворот кривой K. Заметим, что в этом случае $\varkappa_1(K) = \pi k$, где $k \geq 0$ есть целое число. Для всякой кривой $K \in \mathcal{K}_0$ в прямой L может быть определено также некоторое число $(\varkappa)_0(K)$. Одномерное пространство $\mathbb{R}$ естественным образом отождествляется с множеством вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Пусть A есть начало кривой K, B ее конец, $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ — носители точек A и B, соответственно. Тогда $(\varkappa)_0(K) = b - a$.

Предположим, что для некоторого n классы $\mathcal{K}_m$ кривых в пространстве $\mathbb{R}^n$ определены для всех целых m таких, что $0 \leq m \leq n$, и для всякой кривой класса $\mathcal{K}_m$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ определено неотрицательное вещественное число $\varkappa_m(K)$. Кроме того, будем считать, что для любой кривой $K \in \mathcal{K}_{n-1}$ определено некоторое число $(\varkappa)_{n-1}(K)$. В отличие от $\varkappa_{n-1}(K)$, величина $(\varkappa)_{n-1}(K)$ может быть как положительной, так и отрицательной.

Пусть K есть произвольная спрямляемая кривая на сфере $\mathbb{S}^n$. Будем говорить, что кривая K принадлежит классу $\mathcal{K}_m$, где $0 \leq m \leq n$, m — целое, если развертка $E(K)$ кривой K в пространство $\mathbb{R}^n$ есть кривая класса $\mathcal{K}_m$. В этом случае мы полагаем $\varkappa_m^g(K) = \varkappa_m[E(K)]$.

Если сферическая кривая K принадлежит классу $\mathcal{K}_{n-1}$, то определим еще величину $(\varkappa)_{n-1}^g(K)$, полагая ее равной $(\varkappa)_{n-1}[E(K)]$.

Пусть K есть кривая в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $\mathcal{K}_0$ есть совокупность всех спрямляемых кривых в пространстве $\mathbb{R}^n$, а $\mathcal{K}_1$ — множество всех кривых конечного поворота в пространстве $\mathbb{R}^n$. Пусть $1 < m \leq n + 1$.

Будем говорить, что кривая K принадлежит классу $\mathcal{K}_m$, если кривая K — односторонне гладкая и ее индикатриса касательных $I(K)$ принадлежит классу $\mathcal{K}_{m-1}$. (Так как $1 < m \leq n + 1$, то $0 < m - 1 \leq n$, и, значит, класс $\mathcal{K}_{m-1}$ для сферы $\mathbb{S}^n$ определен.) В этом случае мы полагаем $\varkappa_m(K) = \varkappa_{m-1}^g(K)$. Если кривая K не принадлежит классу $\mathcal{K}_m$, то далее мы будем считать, что для нее $\varkappa_m(K) = \infty$.

Таким образом, классы $\mathcal{K}_m$ кривых в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ определены для любого целого m такого, что $0 \leq m \leq n + 1$.

Если кривая K в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ принадлежит классу $\mathcal{K}_n$, то индикатриса касательных $I(K)$ кривой K принадлежит классу $\mathcal{K}_{n-1}$, и, значит, определена величина $(\varkappa)_{n-1}^g[I(K)]$. Полагаем $(\varkappa)_n(K) = (\varkappa)_{n-1}^g[I(K)]$.

Отметим некоторые свойства введенных классов, непосредственно вытекающие из определения.

Предложение 2. Для всякого $m > 0$ и любого n справедливы включения

$$\mathcal{K}_m(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{K}_{m-1}(\mathbb{R}^n), \qquad \mathcal{K}_m(\mathbb{S}^n) \subset \mathcal{K}_{m-1}(\mathbb{S}^n).$$

Заметим сначала, что второе включение предложения 2, в силу определения классов $\mathcal{K}_m(\mathbb{S}^n)$, вытекает из первого.

Для $n = 1$ имеем два класса: класс $\mathcal{K}_0(\mathbb{R})$ и класс $\mathcal{K}_1(\mathbb{R})$. Так как всякая кривая конечного поворота спрямляема, то

$$\mathcal{K}_1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{K}_0(\mathbb{R}).$$

Отсюда следует, что в случае $n = 1$ утверждение предложения 2 верно.

Предположим, что для некоторого n включения предложения 2 выполняются. Пусть K есть кривая класса $\mathcal{K}_m$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Если $m = 1$, то кривая K — односторонне гладкая и, следовательно, спрямляема. Мы получаем, что

$$\mathcal{K}_1(\mathbb{R}^{n+1}) \subset \mathcal{K}_9(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Пусть $m > 1$. Тогда, по определению, индикатриса касательных $I(K)$ кривой K принадлежит классу $\mathcal{K}_{m-1}(\mathbb{S}^n)$. Имеем, согласно предположению индукции,

$$\mathcal{K}_{m-1}(\mathbb{S}^n) \subset \mathcal{K}_{m-2}(\mathbb{S}^n)$$

и, значит, $I(K) \in \mathcal{K}_{m-2}(\mathbb{S}^n)$, т. е. $K \in \mathcal{K}_{m-1}(\mathbb{R}^{n+1})$. По индукции предложение 2 доказано.

Предложение 3. Если кривая K в пространстве $\mathbb{R}^n$ принадлежит классу $\mathcal{K}_m(\mathbb{R}^n)$, то и любая дуга кривой K, рассматриваемая как самостоятельная кривая в пространстве $\mathbb{R}^n$, также является кривой класса $\mathcal{K}_m(\mathbb{R}^n)$.

Это есть очевидное следствие определения понятий индикатрисы касательных и развертки кривой.

Предложение 4. Для всякой кривой класса $K \in \mathcal{K}_n$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ величина $\varkappa_n(K)$ равна πk, где $k \geq 0$ — целое число.

Справедливость данного утверждения легко устанавливается индукцией по n.

Если кривая K удовлетворяет условиям регулярности, принятым в дифференциальной геометрии, то она принадлежит каждому из классов $\mathcal{K}_m$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. При этом для случая $m < n-1$ имеет место равенство $\varkappa_m(K) = \int\limits_K k_m(s)\,ds$. Здесь $k_m(s)$ означает кривизну порядка m в точке кривой K, интегрирование ведется относительно длины дуги кривой K. Кривизна $k_{n-1}(s)$ порядка $n-1$ может принимать значения произвольного знака. В данном случае имеем

$$(\varkappa)_{n-1}(K) = \int\limits_K k_{n-1}(s)\,ds, \quad \varkappa_{n-1}(K) = \int\limits_K |k_{n-1}(s)|\,ds.$$

Не приводя результатов, касающихся свойств кривых класса $\mathcal{K}_m$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ для произвольного m, ограничусь следующими двумя теоремами, установленными в [2].

Теорема 2. Пусть K есть кривая в пространстве $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}$ — произвольный единичный вектор в пространстве $\mathbb{R}^n$, $\lambda_{\mathbf{u}}$ — прямая, состоящая из всех точек x вида $x = t\mathbf{u}$, где $t \in \mathbb{R}$. Символом $K_{\mathbf{u}}$ обозначим ортогональную проекцию кривой K на прямую $\lambda_{\mathbf{u}}$. Тогда имеет место равенство

$$\varkappa_1(K) = \frac{1}{\omega_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \varkappa_1(K_{\mathbf{u}}\, d\omega_{n-1}(\mathbf{u}),$$

где ω_{n-1} означает $n-1$-мерную меру Лебега на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$.

Пусть G_n^2 есть множество всех двумерных подпространств пространства $\mathbb{R}^n$. На множестве G_n^2 естественным образом определяется структура дифференцируемого многообразия. Это есть известное *грассманово многообразие.*

На многообразии G_n^2 может быть определена мера, инвариантная относительно преобразований многообразия $\mathbb{R}^n$, порождаемых ортогональными преобразованиями пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть μ есть такая мера на G_n^2, нормированная условием $\mu(G_n^2) = 1$. Такая мера единственна.

Теорема 3. Пусть K есть кривая в пространстве $\mathbb{R}^n$, где $n > 2$, и K_P есть ортогональная проекция кривой K на двумерную плоскость P в $\mathbb{R}^n$. (Предполагается, что $0 \in P$, так что P есть элемент грассманова многообразия G_n^2.) Тогда имеет место равенство

$$\varkappa_2(K) = \int\limits_{G_n^2)} \varkappa_2(K_P)\, d\mu(P).$$

Доказательства теорем 2 и 3 могут быть найдены, например, в монографии [2]. Там же даются разнообразные приложения этих теорем. Приведем здесь одно из таких приложений.

Пусть K есть кривая в пространстве $\mathbb{R}^n$. *Двойной цепью кривой K* назовем всякую пару ξ конечных последовательностей $X_0, X_1, \ldots, X_\nu$ и $Y_0, Y_1, \ldots, Y_\nu$ точек кривой K такую, что $X_0 < X_1 < \cdots < X_\nu$, $Y_0 < Y_1 < \cdots < Y_\nu$, и при каждом $i = 0, 1, 2, \ldots, \nu$ $X_i < Y_i$, причем точки X_i и Y_i не совпадают пространственно, т. е. носители этих точек не совпадают. Пары (X_i, Y_i) будем называть *звеньями двойной цепи* ξ. Положим $\mathbf{a}_i = \overrightarrow{X_iY_i}$ и пусть

$$\Pi(\xi) = \sum_{i=1}^{\nu} \angle(\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i).$$

Введем д в е х а р а к т е р и с т и к и двойной цепи. Пусть $\sigma(\xi)$ есть *наибольшее из целых чисел* r таких, что на кривой K найдется точка, принадлежащая r интервалам (X_i, Y_i). Величину $\sigma(\xi)$ назовем *кратностью двойной цепи* ξ. Символом $\delta(\xi)$ обозначим *наибольший из диаметров дуг*

$[AX_1]$, $[X_iY_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, $[Y_\nu B]$ (здесь A есть начало, B — конец кривой K). Величину $\delta(\xi)$ назовем *нормой двойной цепи* ξ.

Теорема 4. Пусть K есть произвольная кривая конечного поворота в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда для всякой последовательности двойных цепей $(\xi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ кривой K, нормы которых стремятся к нулю, а кратности ограничены сверху постоянной $N < \infty$, не зависящей от ν, имеет место равенство $\varkappa_1(K) = \lim\limits_{\nu \to \infty} \Pi(\xi_\nu)$.

Доказательство теоремы 4 также может быть найдено в [2].

Исследование свойств введенных здесь классов кривых $\mathcal{K}_m(\mathbb{R}^n)$ и, в частности, доказательство аналогов теорем 2 и 3 для интегральных кривизн высших порядков автор предполагает дать в последующих публикациях.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Александров А. Д. *Теория кривых на основе приближения ломаными* // Успехи мат. наук. 1947. Т. 2, № 4. С. 182–184.

[2] A. D. Alexandrov, Yu. G. Reshetnyak. *General theory of irregular curves.* Amsterdam: Kluver Akad. Publ, 1989. Zbl 0691.53002

[3] Александров А. Д., Решетняк Ю. Г. *Поворот кривой в n-мерном евклидовом пространстве* // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 1. С. 3–22. Zbl 0656.53006

[4] Решетняк Ю. Г. *Некоторые применения интегральной геометрии к теории кривых конечного поворота* // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 1. С. 141–150. Zbl 0656.53007

[5] Решетняк Ю. Г. *О параллельном переносе вдоль нерегулярной кривой в главном расслоении* // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 5. С. 1067–1090. Zbl 0257.53035

[6] Решетняк Ю. Г. *О понятии подъема кривой в расслоенном многообразии и его приложениях* // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 3. С. 588–598. Zbl 0333.53034

[7] Майник И. Ф. *О кривых в редуктивных пространствах* // Доклады АН СССР. 1977. Т. 235, № 3. С. 531–533. Zbl 0378.53028

Институт математики им. С. Л. Соболева, г. Новосибирск
e-mail: ugresh@math.nsc.ru