Труды конференции «Геометрия и приложения»
13 – 16 марта 2000 г., Новосибирск

КОНФОРМНЫЕ И ОДНОРАНГОВЫЕ ДЕФОРМАЦИИ РИМАНОВЫХ МЕТРИК С ПЛОЩАДКАМИ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ НА КОМПАКТНОМ МНОГООБРАЗИИ

Е. Д. Родионов, В. В. Славский [1]

В работах [1], [2] исследовались вариации римановых метрик на компактных многообразиях. В данной работе изучаются римановы метрики на компактном многообразии, обладающие площадками нулевой секционной кривизны в каждой точке этого многообразия. Примерами таких метрик служат прямые произведения римановых метрик, некоторые классы однородных римановых метрик.

В данной работе доказывается, что для достаточно широких классов деформаций таких метрик, определяемых скалярной функцией на многообразии, площадки нулевой кривизны не могут полностью исчезнуть.

Авторы признательны рецензентам за доброжелательную и конструктивную критику, которая позволила устранить ряд неясностей и опечаток.

1 Введение

Напомним сначала некоторые хорошо известные факты относительно деформаций связностей и метрик. Пусть на компактном многообразии M^n определена линейная связность ∇ без кручения [3]. В локальной системе координат $\left\{x^1, \dots, x^n\right\}$ связность ∇ задается своими коэффициентами $\left\{\Gamma_{ij}^k\right\}$ – символами Кристофеля первого рода

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

В голономной системе координат отсутствие кручения равносильно выполнению условия $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Пусть на многообразии M^n дополнительно определена риманова метрика $d\overline{s}^2 = \overline{g}_{ij}dx^i dx^j$. Тогда по аналогии с символами Кристофеля первого рода можно определить тензор деформации связности

$$T_{ij}^k = \frac{1}{2}\overline{g}^{ks}\left(\overline{g}_{sj,i} + \overline{g}_{is,j} - \overline{g}_{ij,s}\right),$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99-01-00543, 00-15-96165). Данные исследования поддержаны грантовым центром при Санкт-Петербургском государственном университете (код проекта 97-0-1.3-63)

где $\overline{g}^{ks}$ матрица обратная к $\overline{g}_{ij}$, $\overline{g}_{ij,s}$ – ковариантная производная $\overline{g}_{ij}$ относительно связности ∇. Нетрудно проверить, что $\overline{\Gamma}_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k} + T_{ij}^{k}$, где $\overline{\Gamma}_{ij}^{k}$ – символы Кристофеля 1 – рода для метрики $\overline{g}_{ij}$. Для тензора кривизны метрики $\overline{g}_{ij}$ получим формулу (109.7) из [3]

$$\overline{R}_{lki}{}^{q} = \frac{\partial \overline{\Gamma}_{li}^{q}}{\partial x^k} + \overline{\Gamma}_{kp}^{q}\overline{\Gamma}_{li}^{p} - \frac{\partial \overline{\Gamma}_{ki}^{q}}{\partial x^l} - \overline{\Gamma}_{lp}^{q}\overline{\Gamma}_{ki}^{p} =$$
$$= \frac{\partial \Gamma_{li}^{q}}{\partial x^k} + \Gamma_{kp}^{q}\Gamma_{li}^{p} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^{q}}{\partial x^l} - \Gamma_{lp}^{q}\Gamma_{ki}^{p} + T_{li,k}^{q} + T_{kp}^{q}T_{li}^{p} - T_{ki,l}^{q} - T_{lp}^{q}T_{ki}^{p} =$$
$$= R_{lki}{}^{q} + Q_{lki}{}^{q}, \qquad (1)$$

где $R_{lki}{}^{q}$ – тензор кривизны связности ∇. Естественно назвать тензор

$$Q_{lki}{}^{q} = T_{li,k}^{q} + T_{kp}^{q}T_{li}^{p} - T_{ki,l}^{q} - T_{lp}^{q}T_{ki}^{p}$$

тензором кривизны метрики $\overline{g}_{ij}$ относительно связности ∇. Для тензора Риччи получим равенство $\overline{R}_{ki} = R_{ki} + Q_{ki}$.

2 Конформная деформация метрики

Пусть ∇ линейная связность Леви-Чевита римановой метрики $ds^2 = = g_{ij}dx^i dx^j$ на многообразии M^n. При конформной деформация метрики $d\overline{s}^2 = e^{2\sigma(x)}g_{ij}dx^i dx^j$ тензор деформации связности равен

$$\begin{aligned} T_{ij}^{k} &= \frac{1}{2}e^{-2\sigma(x)}g^{ks}\left(e^{2\sigma(x)}g_{sj}2\sigma_{,i} + e^{2\sigma(x)}g_{is}2\sigma_{,j} - e^{2\sigma(x)}g_{ij}2\sigma_{,s}\right) = \\ &= \delta_j^k\sigma_{,i} + \delta_i^k\sigma_{,j} - \sigma^k g_{ij}. \end{aligned}$$

Тензор относительной кривизны в ковариантной форме равен

$$Q_{lkij} = \overline{g}_{js}Q_{lki}{}^{s} = e^{2\sigma(x)}\left(g_{lj}B_{ki} + g_{ki}B_{lj} - g_{li}B_{kj} - g_{kj}B_{li}\right),$$

где $B_{ij} = \sigma_{,ij} - \sigma_{,i}\sigma_{,j} + \frac{1}{2}\sigma_{,k}\sigma^k g_{ij}$, $\sigma_{,ij}$ $\sigma_{,i}$ – ковариантные производные функции σ относительно исходной метрики.

Тогда при конформной деформации $d\overline{s}^2 = e^{2\sigma(x)}g_{ij}dx^i dx^j$ метрики ds^2 риманова кривизна двумерной площадки преобразуется по формуле

$$\overline{K}(\xi \wedge \eta) = e^{-2\sigma(x)}\left[K(\xi \wedge \eta) - \frac{B_{ij}\xi^i\xi^j}{g_{ik}\xi^i\xi^k} - \frac{B_{kl}\eta^k\eta^l}{g_{jl}\eta^j\eta^l}\right],$$

где ξ^i, η^j – взаимно ортогональные единичные вектора. С учетом этих обозначений справедлива

Теорема 1. *Пусть на компактном многообразии M^n задана риманова метрика $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, имеющая в каждой точке $x \in M^n$ двумерную площадку нулевой секционной кривизны. Тогда для любой конформной деформации $d\overline{s}^2 = e^{2\sigma(x)}g_{ij}dx^i dx^j$ метрики ds^2 найдется точка $x_0 \in M^n$ и двумерная площадка в этой точке, имеющая неположительную секционную кривизну, а также точка $x_1 \in M^n$ и двумерная площадка в этой точке, имеющая неотрицательную секционную кривизну.*

Доказательство. Действительно, пусть существует конформная деформация метрики, при которой в каждой точке многообразия секционная кривизна строго положительна. Отсюда

$$K(\xi \wedge \eta) - \frac{B_{ij}\xi^i\xi^j}{g_{ik}\xi^i\xi^k} - \frac{B_{kl}\eta^k\eta^l}{g_{jl}\eta^j\eta^l} > 0.$$

Тогда в точке, где достигается минимум функции σ имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{,i} &= 0, \\ B_{ij}\xi^i\xi^j &= \sigma_{,ij}\xi^i\xi^j \geq 0, \\ B_{kl}\eta^k\eta^l &= \sigma_{,kl}\eta^k\eta^l \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, при любом выборе двумерной площадки в этой точке секционная кривизна исходной метрики

$$K(\xi \wedge \eta) > 0,$$

что противоречит условию теоремы. Случай строго отрицательной кривизны разбирается аналогично. □

Следствие 1. *Пусть многообразие (M^n, ds^2) есть прямое произведение компактных римановых многообразий. Тогда для любой метрики $d\bar{s}^2$, конформно эквивалентной метрике ds^2, найдется точка и двумерная площадка в этой точке, имеющая неположительную секционную кривизну, а также точка и двумерная площадка в этой точке, имеющая неотрицательную секционную кривизну.*

Теорема 2. *Метрика, конформно эквивалентная метрике прямого произведения компактных римановых многообразий, всегда имеет точку и площадку нулевой секционной кривизны в этой точке.*

Доказательство. Теорема 2 является прямым следствием теоремы 1. □

Хорошо известна [6]

Гипотеза Х. Хопфа. *На $S^2 \times S^2$ не существует метрики со строго положительной секционной кривизной.*

Замечание 1. *Данное утверждение дает положительное решение гипотезы Х.Хопфа для метрик, конформно эквивалентных метрике прямого произведения компактных римановых многообразий.*

Замечание 2. *Заметим также, что для скрученного произведения римановых метрик данная проблема изучалась в статье [4].*

В случае однородных пространств имеет место

Теорема 3. *Если метрика $d\overline{s}^2$, конформно эквивалентная однородной римановой метрике ds^2 односвязного компактного однородного пространства G/H, имеет положительную секционную кривизну, то однородное пространство G/H либо диффеоморфно КРОСПу (компактному симметрическому пространству ранга один), либо одному из многообразий Берже-Уоллача [5], [7]:*

$$Sp(2)/SU(2),\ SU(5)/Sp(2)\times S^1,\ SU(3)/T_{\max},$$
$$Sp(3)/Sp(1)^3,\ F_4/Spin(8).$$

Доказательство. Действительно, пусть $\left(G/H, d\overline{s}^2\right)$ имеет положительную секционную кривизну, тогда однородная риманова метрика ds^2 на G/H обязана также иметь положительную секционную кривизну. В противном случае метрика ds^2 имеет площадки нулевой секционной кривизны в каждой точке G/H, а значит согласно теореме 1 метрика $d\overline{s}^2$ также имеет площадки нулевой секционной кривизны – противоречие. Далее результат теоремы следует из работ [5-7]. □

В частности, для случая групп Ли справедлива

Теорема 4. *Если метрика $d\overline{s}^2$, конформно эквивалентная левоинвариантной римановой метрике ds^2 компактной группы Ли G, имеет положительную секционную кривизну, то группа Ли G локально изоморфна группе $SU(2)$.*

При исследовании конформных деформаций римановой метрики важную роль играет тензор, определяемый формулой

$$A_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(R_{ij} - \frac{Rg_{ij}}{2(n-1)}\right), \tag{2}$$

где R_{ij} – тензор Риччи, R – скалярная кривизна метрики ds^2. Используя тензор A_{ij} тензор кривизны можно представить в виде

$$R_{lkij} = W_{lkij} + g_{l,j}A_{k,i} + g_{k,i}A_{l,j} - g_{l,i}A_{k,j} - g_{k,j}A_{l,i},$$

где W_{lkij} – тензор Вейля. При конформной деформации $d\overline{s}^2 = e^{2\sigma(x)}g_{ij}dx^i dx^j$ метрики ds^2 тензор Вейля инвариантен, т.е.

$$\overline{W}_{ijkl} = e^{2\sigma(x)}W_{ijkl},$$

а тензор A_{ij} преобразуется по формуле

$$\overline{A}_{ij} = A_{ij} - \sigma_{,ij} + \sigma_i\sigma_j - \frac{1}{2}\sigma_k\sigma^k g_{ij} = A_{ij} - B_{ij}.$$

Определение 1. *Одномерной секционной кривизной назовем величину*

$$K(\xi) = \frac{A_{ij}\xi^i\xi^j}{g_{ij}\xi^i\xi^j},$$

где ξ^i – произвольный вектор, задающий одномерную площадку.

Риманову кривизну двумерной площадки можно представить в виде

$$K(\xi\wedge\eta)=\frac{R_{ijkl}\xi^i\eta^j\xi^k\eta^l}{g_{ik}\xi^i\xi^k g_{jl}\eta^j\eta^l}=\frac{W_{ijkl}\xi^i\eta^j\xi^k\eta^l}{g_{ik}\xi^i\xi^k g_{jl}\eta^j\eta^l}+\frac{A_{ij}\xi^i\xi^j}{g_{ik}\xi^i\xi^k}+\frac{A_{kl}\eta^k\eta^l}{g_{jl}\eta^j\eta^l}.$$

В частности, для конформно плоской метрики, или для трехмерного риманова многообразия, формула примет более простой вид

$$K(\xi\wedge\eta)=\frac{A_{ij}\xi^i\xi^j}{g_{ik}\xi^i\xi^k}+\frac{A_{kl}\eta^k\eta^l}{g_{jl}\eta^j\eta^l}.$$

Теорема 5. *Пусть на компактном многообразии M^n определена риманова метрика $ds^2=g_{ij}dx^idx^j$, имеющая в каждой точке $x\in M^n$ одномерное направление ξ, для которого $K(\xi)=0$. Тогда для любой конформной деформации $d\overline{s}^2=e^{2\sigma(x)}g_{ij}dx^idx^j$ найдутся точки x_0, $x_1\in M^n$ и соответствующие одномерные направления ξ_0, ξ_1 в этих точках, для которых выполняются неравенства*

$$\overline{K}_{x_0}(\xi_0)\le 0,\quad \overline{K}_{x_1}(\xi_1)\ge 0.$$

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 3. *Заметим, что если для одномерной секционной кривизны выполняется неравенство*

$$A_{ij}\xi^i\xi^j\ge\frac{1}{2}k_0g_{ij}\xi^i\xi^j\quad\forall\xi\in T_x(M),$$

то для кривизны Риччи выполняется неравенство

$$R_{ij}\xi^i\xi^j\ge(n-1)k_0g_{ij}\xi^i\xi^j\quad\forall\xi\in T_x(M).$$

Таким образом, если одномерная секционная кривизна неотрицательна, то кривизна Риччи также неотрицательна. Обратное вообще говоря неверно, что видно из формулы (2).

Теорема 6. *Пусть на компактном многообразии M^n определена риманова метрика $ds^2=g_{ij}dx^idx^j$, имеющая в каждой точке $x\in M^n$ нулевую кривизну Риччи по всем направлениям. Тогда для любой конформной деформации $d\overline{s}^2=e^{2\sigma(x)}g_{ij}dx^idx^j$ найдется точка $x_0\in M^n$, в которой кривизна Риччи неотрицательна.*

Данная теорема следует из формулы 2 и замечания 3.

Замечание 4. *Если кривизна Риччи исходной метрики неотрицательна и в некоторой точке положительна, то данная метрика конформно эквивалентна некоторой метрике строго положительной кривизны Риччи [9].*

Теорема 7. *Пусть на компактном многообразии M^n определена риманова метрика $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, имеющая в каждой точке $x \in M^n$ одномерное направление ξ, для которого $K(\xi) = k_0$. Тогда для любой конформной деформации $d\overline{s}^2 = e^{2\sigma(x)}g_{ij}dx^i dx^j$ найдутся точки $x_0, x_1 \in M$ и соответствующие одномерные направления ξ_0, ξ_1 в этих точках такие, что выполняются неравенства*

$$\overline{K}_{x_0}(\xi_0) \leq k_0 e^{-2\sigma(x_0)}\,, \ \ \overline{K}_{x_1}(\xi_1) \geq k_0 e^{-2\sigma(x_1)}\,.$$

Определение 2. *Введем обозначения*

$$K_x^+ = \max_{\xi} K_x(\xi), \quad K_x^- = \min_{\xi} K_x(\xi)$$
$$K^+ = \min_{x \in M} K_x^+, \qquad K^- = \max_{x \in M} K_x^-$$

Будем говорить, что одномерная секционная кривизна риманова многообразия M имеет седловой тип, если $K^+ \geq K^-$.

У любого однородного риманова многообразия одномерная секционная кривизна имеет седловой тип.

Замечание 5. *Пусть компактное риманово многообразие M имеет одномерную секционную кривизну седлового типа. Тогда для любого $k_0 \in [K^-, K^+]$ выполнены условия теоремы 7. Следовательно при любой конформной деформации метрики, имеем*

$$\max_{x,\xi} e^{2\sigma(x)}\overline{K}_x(\xi) \geq K^+, \quad \min_{x,\xi} e^{2\sigma(x)}\overline{K}_x(\xi) \leq K^-$$

3 Деформации метрики ранга один

Наряду с конформной деформацией римановых метрик существует другой тип деформаций метрик, также определяемый с помощью функции на многообразии

Определение 3. *Пусть θ – произвольная функция на многообразии M класса C^∞. Будем говорить, что метрика $d\overline{s}^2$ получена деформацией ранга 1 из метрики ds^2 если*

$$d\overline{s}^2 = ds^2 + d\theta \otimes d\theta,$$

или в координатах $\overline{g}_{ij} = g_{ij} + \theta_i\theta_j$.

Лемма 1. *При деформации ранга один $d\overline{s}^2$ метрики ds^2 имеют место следующие формулы для тензоров кривизны, Риччи, скалярной кривизны* *соответственно*

$$\overline{R}_{lkis} = R_{lkis} + \frac{(\theta_{li}\theta_{sk} - \theta_{ki}\theta_{sl})}{1 + |\nabla\theta|^2}, \tag{3}$$

$$\overline{R}_{ki} = R_{ki} + \frac{\theta_h \theta_l{}^h \theta^l \theta_{ki} - \theta_h \theta_k{}^h \theta^l \theta_{li}}{\left(1 + |\nabla\theta|^2\right)^2} + \frac{\theta_{li}\theta^l{}_k - \theta_{ki}\theta^l{}_l}{1 + |\nabla\theta|^2} + \frac{\theta^l \theta_p R_{kli}{}^p}{1 + |\nabla\theta|^2}, \tag{4}$$

$$\overline{R} = R + 2\frac{\theta_h \theta_l^{\cdot h} \theta^l \theta^k_k - \theta_h \theta^{\cdot kh} \theta^l \theta_{lk}}{\left(1 + |\nabla\theta|^2\right)^2} - 2\frac{R_{ik}\theta^i \theta^k}{1 + |\nabla\theta|^2}, \tag{5}$$

где θ_{li} ковариантные производные ковектора θ_l относительно метрики ds^2, $|\nabla\theta|^2$ – квадрат длины ковектора θ_l относительно метрики ds^2.

Доказательство. Заметим, что матрица обратная к матрице $\overline{g} = \|\overline{g}_{ij}\|$ имеет вид

$$(\overline{g})^{-1} = \|\overline{g}^{ij}\| = \left\| g^{ij} - \frac{\theta^i \theta^j}{1 + |\nabla\theta|^2} \right\|,$$

где $|\nabla\theta|^2$ – квадрат длины ковектора относительно метрики ds^2. Тензор деформации T^k_{ij} равен

$$T^k_{ij} = \frac{\theta^k \theta_{ij}}{1 + |\nabla\theta|^2}.$$

Следовательно, символы Кристофеля 1-го рода метрики $d\overline{s}^2$ равны

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \frac{\theta^k \theta_{ij}}{1 + |\nabla\theta|^2}.$$

Тензор относительной кривизны $Q_{lki}{}^q$ равен

$$\begin{aligned} Q_{lki}{}^q &= \frac{\theta_h \theta_l{}^h \theta^q \theta_{ki} - \theta_h \theta_k{}^h \theta^q \theta_{li}}{\left(1 + |\nabla\theta|^2\right)^2} + \frac{\theta_{li}\theta^q{}_k - \theta_{ki}\theta^q{}_l}{1 + |\nabla\theta|^2} + \frac{\theta^q\left(\theta_{kil} - \theta_{lik}\right)}{1 + |\nabla\theta|^2} = \\ &= \frac{\theta_h \theta_l{}^h \theta^q \theta_{ki} - \theta_h \theta_k{}^h \theta^q \theta_{li}}{\left(1 + |\nabla\theta|^2\right)^2} + \frac{\theta_{li}\theta^q{}_k - \theta_{ki}\theta^q{}_l}{1 + |\nabla\theta|^2} + \frac{\theta^q \theta_p R_{kli}{}^p}{1 + |\nabla\theta|^2}. \end{aligned}$$

Тензор кривизны метрики $d\overline{s}^2$ выражается через тензор кривизны метрики ds^2 и тензор относительной кривизны по формуле (1)

$$\overline{R}_{lki}{}^q = R_{lki}{}^q + Q_{lki}{}^q.$$

Опуская индекс q с помощью $\overline{g}_{qs}$ получим формулу (3) для тензоров кривизны. Формулы (4) и (5) получаются из формулы (3) с помощью операции свертки. □

Замечание 6. *Формулу (3) можно рассматривать как формулу Гаусса для поверхности, получаемой вложением многообразия M^n в прямое произведение $(M^n, ds^2) \times R^1$ риманова многообразия (M^n, ds^2) и евклидова пространства R^1*

$$1_{M^n} \times \theta : M^n \to (M^n, ds^2) \times R^1.$$

Замечание 7. *Формула (3) остается справедливой если рассматривать θ_i как компоненты замкнутой коформы $\theta_i dx^i$.*

Замечание 8. *Формулы значительно упрощаются, если дополнительно выполняется условие $|\nabla\theta|^2 = g^{ij}\theta_i\theta_j \equiv const$. В этом случае*

$$\theta^l \theta_{li} = 0, \quad Q_{lki}{}^q = \frac{\theta_{li}\theta^q_{.k} - \theta_{ki}\theta^q_{.l}}{1 + |\nabla\theta|^2} + \frac{\theta^q\theta_p R_{kli}{}^p}{1 + |\nabla\theta|^2},$$

$$\overline{R}_{ki} = R_{ki} + \frac{\theta_{li}\theta^l_{.k} - \theta_{ki}\theta^l_{.l}}{1 + |\nabla\theta|^2} + \frac{\theta^l\theta_p R_{kli}{}^p}{1 + |\nabla\theta|^2}, \quad \overline{R} = R - 2\frac{R_{ik}\theta^i\theta^k}{1 + |\nabla\theta|^2},$$

$$\overline{R}_{ki}\theta^i = R_{ki}\theta^i, \quad \overline{R}_{lkis}\theta^i = R_{lkis}\theta^i.$$

Замечание 9. *Пусть $\{\theta^\alpha\}_{\alpha=1,\dots,p}$ набор функций класса $C^\infty(M)$, определим на многообразии M метрику формулой*

$$d\tilde{s}^2 = g_{ij}dx^i dx^j + \sum_{\alpha=1}^{p} \theta^\alpha_i \theta^\alpha_j dx^i dx^j.$$

Тогда справедлива формула

$$\overline{R}_{lkis} = R_{lkis} + h_{\alpha\beta}\left(\theta^\alpha_{li}\theta^\beta_{sk} - \theta^\alpha_{ki}\theta^\beta_{sl}\right),$$

где $h_{\alpha\beta}$ – матрица обратная к матрице $h^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} + g^{ij}\theta^\alpha_i\theta^\beta_j$, которая по существу является формулой Гаусса поверхности $M \to M \times R^p$.

Из формулы (3) следуют утверждения аналогичные предыдущим теоремам.

Теорема 8. *Пусть на компактном многообразии M^n определена риманова метрика $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, имеющая в каждой точке $x \in M^n$ двумерную площадку нулевой секционной кривизны. Тогда для любой деформация метрики ранга 1 найдется точка $x_0 \in M^n$ и двумерная площадка в этой точке, имеющая неположительную секционную кривизну, а также точка $x_1 \in M^n$ и двумерная площадка в этой точке, имеющая неотрицательную секционную кривизну.*

Доказательство. Действительно, пусть существует деформация ранга 1 метрики, при которой в каждой точке многообразия секционная кривизна становится строго положительной. Отсюда

$$R_{lkis}\xi^l\eta^k\xi^i\eta^s + \frac{(\theta_{li}\theta_{sk} - \theta_{ki}\theta_{sl})}{1 + |\nabla\theta|^2}\xi^l\eta^k\xi^i\eta^s > 0.$$

Для двумерных площадок, где исходная метрика имеет нулевую кривизну, будем иметь

$$(\theta_{li}\theta_{sk} - \theta_{ki}\theta_{sl})\,\xi^l\eta^k\xi^i\eta^s = \det\left\| \begin{matrix} \theta_{li}\xi^l\xi^i & \theta_{sl}\eta^s\xi^l \\ \theta_{ki}\eta^k\xi^i & \theta_{sk}\eta^k\eta^s \end{matrix} \right\| > 0.$$

Следовательно, в каждой точке $x \in M^n$ собственные числа этой симметричной матрицы либо положительны, либо отрицательны. Из соображений непрерывности вытекает, что это верно для каждой связной компоненты многообразия M^n. Рассматривая точки связной компоненты многообразия M^n, в которых функция θ достигает максимального и минимального значений, получаем противоречие. Случай строго отрицательной кривизны разбирается аналогично. □

Теорема 9. *Пусть многообразие (M^n, ds^2) есть прямое произведение компактных римановых многообразий. Тогда для любой метрики $d\overline{s}^2$, полученной деформацией ранга 1 из метрики ds^2, найдется точка и двумерная площадка в этой точке имеющая неположительную секционную кривизну, а также точка и двумерная площадка в этой точке имеющая неотрицательную секционную кривизну.*

Теорема 10. *Если метрика $d\overline{s}^2$, полученная деформацией ранга 1 из однородной римановой метрики ds^2 односвязного компактного однородного пространства G/H, имеет положительную секционную кривизну, то однородное пространство G/H либо диффеоморфно КРОСПу, либо одному из многообразий Берже-Уоллача [5], [7]:*

$$Sp(2)/SU(2),\ SU(5)/Sp(2)\times S^1,\ SU(3)/T_{\max},$$
$$Sp(3)/Sp(1)^3,\ F_4/Spin(8).$$

Теорема 11. *Если метрика $d\overline{s}^2$, полученная деформацией ранга 1 из левоинвариантной римановой метрике ds^2 компактной группы Ли G, имеет положительную секционную кривизну, то группа Ли G локально изоморфна группе $SU(2)$.*

4 Непрерывная деформация ранга 1 метрики.

Определение 4. *Пусть на многообразии M^n задана семейство римановых метрик $ds_t^2 = g_{ij}^{(t)}dx^i dx^j$ зависящее от параметра $t \in [0,1]$ причем*

$$\frac{dg_{ij}^{(t)}}{dt} = \lambda\theta_i\theta_j,$$

где λ, θ – гладкие функции по совокупности переменных $(x,t) \in M \times [0,1]$, θ_i – ковариантные производные относительно связности Леви-Чевита метрики $g_{ij}^{(t)}$. Будем говорить, что в этом случае задана непрерывная деформация метрики ранга 1.

Лемма 2. *Пусть ds_t^2 непрерывная деформация метрики ранга 1 на многообразии M^n, T_{ij}^k тензор деформации связности Леви-Чевита метрики ds_0^2 в связность Леви-Чевита метрики ds_t^2. Тогда тензор T_{ij}^k удовлетворяет уравнению*

$$\frac{dT_{ij}^k}{dt} = \frac{d\Gamma_{ij}^k}{dt} = \lambda\theta^k\theta_{ij} + \frac{1}{2}\left(\lambda_i\theta_j\theta^k + \lambda_i\theta_j\theta^k - \lambda^k\theta_j\theta_i\right), \tag{6}$$

а тензор относительной кривизны метрики ds_t^2 по отношению к метрике ds_0^2 удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered}\frac{dQ_{lki}{}^q}{dt} = \frac{dR_{lki}{}^q}{dt} = \left(\frac{dT_{li}^q}{dt}\right)_k - \left(\frac{dT_{ki}^q}{dt}\right)_l = \\ = \lambda\left(\theta_{li}\theta_k^q - \theta_{ki}\theta_l^q - R_{lki}{}^p\theta_p\theta^q\right) + \\ +\frac{1}{2}\lambda_{ki}\theta_l\theta^q - \frac{1}{2}\theta_{ki}\theta_l\lambda^q - \frac{1}{2}\theta_{ki}\theta^q\lambda_l - \\ -\frac{1}{2}\lambda_{li}\theta_k\theta^q + \frac{1}{2}\theta_{li}\theta_k\lambda^q + \frac{1}{2}\theta_{li}\theta^q\lambda_k + \\ +\frac{1}{2}\lambda_l^q\theta_i\theta_k - \frac{1}{2}\theta_l^q\theta_k\lambda_i - \frac{1}{2}\theta_l^q\theta_i\lambda_k - \\ -\frac{1}{2}\lambda_k^q\theta_i\theta_l + \frac{1}{2}\theta_k^q\theta_l\lambda_i + \frac{1}{2}\theta_k^q\theta_i\lambda_l,\end{gathered} \tag{7}$$

где ковариантные производные берутся относительно метрики ds_t^2.

Доказательство. Обратный метрический тензор $g_{(t)}^{ij}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dg_{(t)}^{ij}}{dt} = -\lambda\theta^i\theta^j.$$

Дифференцируя по t равенство

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{ks}\left(\frac{\partial g_{si}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{sj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s}\right),$$

и заменяя частные производные на ковариантные, получим формулу (6). Из равенства

$$\begin{aligned}\frac{dQ_{lki}{}^q}{dt} &= \frac{dR_{lki}{}^q}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta R_{lki}{}^q}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T_{li,k}^q + \Delta T_{kp}^q\Delta T_{li}^p - \Delta T_{ki,l}^q - \Delta T_{lp}^q\Delta T_{ki}^p}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T_{li,k}^q - \Delta T_{ki,l}^q}{\Delta t} = \left(\frac{dT_{li}^q}{dt}\right)_k - \left(\frac{dT_{ki}^q}{dt}\right)_l,\end{aligned}$$

после подстановки, получим формулу (7). Аналогично получается формула для производной по t тензора кривизны в ковариантной форме

$$\begin{aligned}
\frac{dR_{lkiq}}{dt} &= \lambda\left(\theta_{li}\theta_{kq}-\theta_{ki}\theta_{lq}\right)+ \\
&+\frac{1}{2}\lambda_{ki}\theta_l\theta_q-\frac{1}{2}\theta_{ki}\theta_l\lambda_q-\frac{1}{2}\theta_{ki}\theta_q\lambda_l- \\
&-\frac{1}{2}\lambda_{li}\theta_k\theta_q+\frac{1}{2}\theta_{li}\theta_k\lambda_q+\frac{1}{2}\theta_{li}\theta_q\lambda_k+ \\
&+\frac{1}{2}\lambda_{lq}\theta_i\theta_k-\frac{1}{2}\theta_{lq}\theta_k\lambda_i-\frac{1}{2}\theta_{lq}\theta_i\lambda_k- \\
&-\frac{1}{2}\lambda_{kq}\theta_i\theta_l+\frac{1}{2}\theta_{kq}\theta_l\lambda_i+\frac{1}{2}\theta_{kq}\theta_i\lambda_l.
\end{aligned}$$

□

Следствие 2. *Пусть* $\xi=(\xi^i)$, $\eta=(\eta^i)$ *два вектора, тогда справедлива формула*

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(R_{lkiq}\xi^l\eta^k\xi^i\eta^q\right)}{dt} &= \lambda\left[D^2\theta\left(\xi,\xi\right)D^2\theta\left(\eta,\eta\right)-\left(D^2\theta\left(\xi,\eta\right)\right)^2\right]- \\
&-\frac{1}{2}D^2\lambda\left[\xi d\theta(\eta)-\eta d\theta(\xi),\xi d\theta(\eta)-\eta d\theta(\xi)\right]+ \\
&+D^2\theta\left[\xi d\theta(\eta)-\eta d\theta(\xi),\xi d\lambda(\eta)-\eta d\lambda(\xi)\right],
\end{aligned}$$

где $D^2\theta$, $D^2\lambda$ *– гессианы функций* θ *и* λ.

Определение 5. *Следуя работе [2], вариацию* ds_t^2 *назовем неотрицательной первого порядка в точке* $x\in M^n$ *на площадке* $\xi\wedge\eta$, *при* $t=0$, *если*

$$\left.\frac{dK_x(\xi\wedge\eta)}{dt}\right|_{t=0}\geq 0$$

Следствие 3. *Пусть на компактном многообразии* M^n *определена риманова метрика* $ds^2=g_{ij}dx^idx^j$ *имеющая в каждой точке* $x\in M^n$ *двумерную площадку нулевой секционной кривизны. Тогда для любой непрерывной деформации* ds_t^2 *ранга 1 исходной метрики найдется точка* $x_0\in M^n$ *и двумерная площадка в этой точке имеющая неотрицательную вариацию первого порядка в этой точке, а также точка* $x_1\in M^n$ *и двумерная площадка в этой точке имеющая неположительную вариацию первого порядка в этой точке.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bourguignon J.P., Deschamps A., Sentenac P. // *Paris: Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 1972. V. **5**. P. 277-302. Zbl 0241.53025

[2] Strake, Martin.// *Schriftenr. Math. Inst. Univ. Muenster.* 1986. 2. Ser. 41, 133 p. Zbl 0596.53033

[3] П.К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ. М. Наука, 1964г. Zbl 0114.37404

[4] Leysen J., Verstraelen L.// *Soochow J. Math.* 1987. V. **13**. №. 2. P. 175-178. Zbl 0658.53035

[5] Berger M.// *Ann. scuola norm. super Pisa. Sci. fis. e. mat.*, 1961. V. **15** P. 179-246. Zbl 0101.14201

[6] А. Бессе. Четырехмерная риманова геометрия. - М.: Мир, 1985. - 334 с. Zbl 0472.00010

[7] Wallach N.// *Ann. math.* 1972. V. **96**. P. 277-295. Zbl 0261.53033

[8] Bergery B.// *J. math. pures et appl.* 1976. V. **55**. №. 1. P. 179-246.

[9] Ehrlich Paul.// *Math. Nachr.*. 1977. V. **72**. P. 137-140. Zbl 0287.53030

Барнаульский государственный педагогический университет
e-mail: rodionov@math.dcn-asu.ru

Алтайский государственный университет
e-mail: slav@math.dcn-asu.ru