Труды конференции «Геометрия и приложения»
13 – 16 марта 2000 г., Новосибирск

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОБЪЕМА МНОГОГРАННИКА

И. Х. Сабитов [1]

1. В работах автора [7], [8], [9], [15] была доказана теорема, представляющая собой обобщение формулы Герона для площади треугольника на объемы ориентируемых многогранников. Именно, пусть P – ориентируемый многогранник с *комбинаторным строением* K. Это означает, что для симплициального комплекса K, триангулирующего некоторое ориентируемое двумерное многообразие M, дано его непрерывное отображение $P : K \to R^3$, линейное на каждом симплексе комплекса K, в предположении, что K задан как некоторое множество евклидовых треугольников с соответствующим правилом отождествления их сторон и вершин. Геометрический образ $P(K)$ многогранника в R^3 может иметь очень сложное строение, с какими-то вырождениями, самопересечениями и т.д. Поэтому понятие *объема* для таких многогранников требует специального уточнения, состоящее в том, что объем V понимается в *обобщенном смысле как сумма ориентированных объемов тетраэдров, имеющих некоторую общую вершину O, и с основаниями на согласованно ориентированных гранях многогранника*, считая, что ориентация на грани $P(K)$ перенесена отображением $P : K \to R^3$ из произвольно выбранной ориентации многообразия M. Таким образом определенный объем не зависит от выбора точки O и для вложенных многогранников он совпадает с их обычным ориентированным объемом. Обозначим через $(l) = (l_1^2, \ldots, l_e^2)$ совокупность квадратов длин ребер многогранника, пронумерованных в некотором порядке, где e – число ребер. Тогда упомянутое выше обобщение формулы Герона можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Для любого многогранника P с треугольными гранями существует полиномиальное уравнение*

$$Q(V, l) = V^{2N} + a_1(l)V^{2N-2} + \ldots + a_{N-1}(l)V^2 + a_N(l) = 0, \qquad (1)$$

такое, что обобщенный объем V многогранника P является корнем этого уравнения, в котором коэффициенты a_i сами являются многочленами от $(l) = (l_1^2, \ldots, l_e^2)$ с некоторыми рациональными числовыми коэффициентами, зависящими только от комбинаторного строения K многогранника.

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант No. 99-01-00867 и ИНТАС-РФФИ, грант No. 97-01-71010.

Таким образом, имеем, что объемы *всех* многогранников, изометричных в классическом смысле многограннику P, тоже являются корнями того же уравнения (1) и, следовательно, получается, что объем многогранника является функцией (вообще говоря, многозначной) его метрики.

Для дальнейшего важно знать алгебраический смысл уравнения (1). Пусть $(x_{3i+1},\ x_{3i+2},\ x_{3i+3}),\ 0 \le i \le n-1,$ – координаты всех n вершин многогранника и пусть точка O выбрана в начале координат. Тогда ориентированный объем каждого тетраэдра вычисляется через смешанное произведение векторов, идущих из начала координат в вершины граней многогранника, и поэтому обобщенный объем V многогранника будет выражаться через координаты вершин как некоторый однородный многочлен степени 3. Далее, квадраты длин ребер тоже выражаются через координаты вершин как некоторые однородные многочлены степени 2. Эти два факта мы будем записывать как

$$V = V(x),\ l = l(x), \tag{2}$$

имея в виду, что x обозначает совокупность всех координат всех вершин, занумерованных в некотором произвольном, но фиксированном порядке. Так вот, то, что объемы всех изометричных многогранников являются корнями одного и того же полиномиального уравнения (1), выражается следующим алгебраическим свойством многочлена $Q(V, l)$: если мы подставим в Q значения V и l из (2) как многочленов от x, то получим тождественный нуль, т.е.

$$Q(V(x), l(x)) \equiv 0 \text{ относительно всех } x_1, \dots, x_{3n}. \tag{3}$$

Оказывается, определимость возможных значений объема многогранника по его комбинаторному строению K и набору длин ребер дает чрезвычайно богатую информацию, с использованием которой удается дать алгоритмическое решение практически всех основных вопросов метрической теории многогранников, по крайней мере тех, что находятся в общем положении. Например, можно решить такие вопросы, как вычисление длин диагоналей многогранника, нахождение углов между гранями с последующим применением этой информации для решения задачи изометрической реализации данной многогранной метрики и т.д. В настоящей работе мы дадим некоторые примеры применения теоремы 1 к таким вопросам.

2. Начнем с проблемы *изометрической реализации* в R^3 данной полиэдральной метрики. В нашей постановке эта проблема формулируется так: пусть задано некоторое множество K евклидовых треугольников, с таким правилом отождествления их сторон и вершин, при котором пересечение любой пары треугольников или пусто, или состоит из одной общей вершины или из одной общей стороны, так что после отождествления мы должны получить некоторое компактное ориентируемое многообразие, для которого K является его триангуляцией; ищется многогранник $P : K \to R^3$, такой, что треугольники из K являются его гранями (в том смысле, что образ $P(F)$ каждой грани F из K является треугольником в R^3, конгруентным F). Таким образом, отображение $P : K \to R^3$ должно дать изометрическую реализацию (мы не говорим об изометрическом погружении, так как полученное отображение может и не оказаться погружением в топологическом смысле, более того, в некоторых вырожденных случаях изометрического погружения может не быть даже априори) метрического симплициального комплекса K в R^3 *с сохранением* двумерных симплексов как граней. В случае существования такой реализации комплекс K будет представлять собой *натуральную развертку* многогранника $P(K)$. В такой постановке задачи об изометрическом погружении до недавнего времени не было известно никакого – ни положительного, ни отрицательного – результата[2]. Теорема 1 позволяет получить следующее очевидное *необходимое* условие изометрической реализуемости многогранной метрики: *для того, чтобы данная метрическим симплициальным комплексом K многогранная метрика была изометрически реализуема (вложима) в R^3, необходимо, чтобы многочлен $Q(V)$, построенный по комбинаторному строению и метрике K, имел хотя бы один неотрицательный (положительный) корень V^2.*

Вопрос о нахождении какого-либо *достаточного* условия изометрической реализуемости данной многогранной метрики остается пока открытым, но мы можем указать для каждой данной развертки *алгоритм* проверки такой возможности. Для этого мы покажем, что для многогранников в общем положении существует алгоритм, позволяющий установить *конечность* множества возможных значений двугранных углов между гранями во всех парах граней с общим ребром. Одновременно алгоритм дает способ вычисления значений этих углов. Очевидно, знание величины двугранного угла между двумя гранями с общим ребром равносильно знанию длины диагонали, соединяющей те две вершины граней, которые не инцидентны их общему ребру. Мы будем называть такие диагонали *малыми*. Покажем, что верна следующая

Теорема 2. *Для каждой малой диагонали есть полиномиальное уравнение, коэффициенты которого зависят только от метрики и комбинаторного строения многогранника, и для многогранников в общем положении они не все равны нулю.*

Для доказательства теоремы нам будет нужна следующая

Лемма 1. *Пусть l_k – длина произвольным образом выбранного ребра в многогранниках данного комбинаторного строения K. Тогда не может быть, чтобы между длинами ребер этих многогранников существовала зависимость вида* [3]

$$L(\hat{l}_k, l)) \overset{def}{\equiv} A_0(\hat{l}_k) l_k^S + \ldots + A_{S-1}(\hat{l}_k) l_k + A_S(\hat{l}_k) = 0, \tag{4}$$

[2] В известных работах [1], [4] о существовании изометрического погружения полиэдральных метрик не предполагается и, вообще говоря, *не получается*, что данная в виде K развертка искомого многогранника окажется его натуральной разверткой.

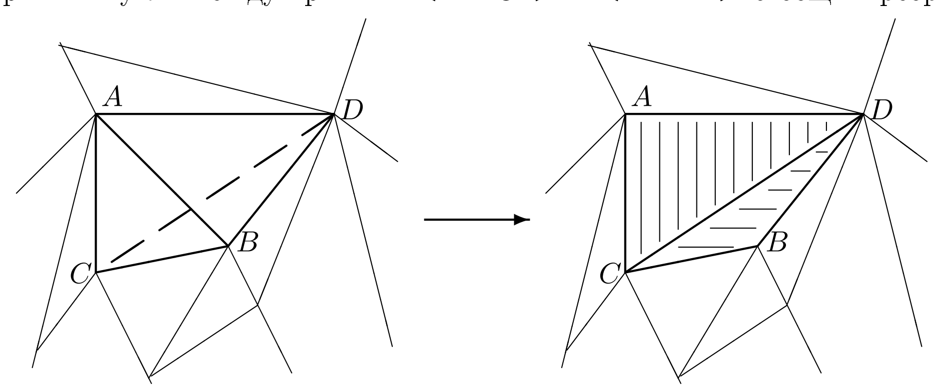
[3] Тот факт, что уравнение (4) выполняется для длин ребер *именно многогранников*, а не для длин одномерных симплексов комплекса K, означает, что подстановка в (4) значений $l = l(x)$ из (2) обращает это уравнение в тождество $L(\hat{l}_k(x), l(x)) \equiv 0$.

такая, что $A_0^2(\hat{l}_k) + \ldots + A_{S-1}^2(\hat{l}_k) \neq 0$ *при* $l_1^2 + \ldots + l_{k-1}^2 + l_{k+1}^2 + \ldots l_e^2 \neq 0$, *где* e *– число ребер, а запись* $\hat{l}_k$ *означает, что в аргументе участвуют все длины* $l_1, \ldots, l_e$*, кроме* l_k.

Действительно, пусть в K концевые вершины k-го ребра имеют номера i и j, а прилегающие к этому ребру грани F и G имеют вершины i, j, p и i, j, q. Построим в R^3 многогранник $P(K)$ по следующему отображению $P : K \to R^3$: вершинам i, j, p и q сопоставим соответственно точки $M_i(0, y_i, z_i), M_j(0, y_j, z_j), M_p(a, 0, 0)$ и $M_q(-a, 0, 0)$, $a \neq 0$, а все остальные вершины отобразим в некоторые точки на оси Ox. Теперь будем вращать точки M_i и M_j вокруг оси Ox, оставляя все остальные вершины на месте. В процессе такой деформации будем получать новые многогранники P_t с тем же комбинаторным строением K. При этом длины всех ребер, кроме k-го, не изменяются, и поэтому наличие уравнения (4) с указанным в условиях леммы свойством означало бы, что при данных значениях длин $l_1, \ldots, l_{k-1}$, $l_{k+1}, \ldots, l_e$, не все равных нулю, длина l_k могла бы иметь только некоторое конечное число значений, что невозможно ввиду непрерывного изменения l_k в процессе вращения многогранника. Лемма доказана.

Замечание 1. Справедливость леммы для гомеоморфных сфере многогранников является следствием жесткости строго выпуклых многогранников и возможности построения для каждой триангуляции сферы изоморфного ей выпуклого многогранника, см. об этом более подробно в [3].

Дадим достаточно детальное изложение доказательства теоремы 2. Пусть $< CD >$ – малая диагональ в многограннике P (рис. 1) для двугранного угла между гранями $< ABC >$ и $< ABD >$ с общим ребром



многогранник P многогранник P_1

Рис. 1

$< AB >$. Выбросим эти две грани и заклеим образовавшуюся дыру двумя новыми гранями $< ADC >$ и $< BDC >$; получим новый многогранник P_1, для которого малая диагональ $< CD >$ многогранника P является одним из ребер. Так же как объем $V = vol(P)$ является корнем уравнения (1), объем $V_1 = vol(P_1)$ является корнем некоторого уравнения вида

$$Q_1 = V_1^{2q} + a_1(\hat{l}, d)V_1^{2q-2} + \ldots + a_q(\hat{l}, d) = 0, \tag{5}$$

в котором коэффициенты a_i, $1 \leq i \leq q$, зависят от длин ребер многогранника P (но не от длины ребра $< AB >$, что отражено в обозначении

$\hat{l}$) и длины d диагонали $< CD >$. Объемы $V = vol(P)$ и $V_1 = vol(P_1)$ отличаются на геометрический объем $V_T \geq 0$ тетраэдра $< ABCD >$:

$$V_1 = V + \epsilon V_T,\ \epsilon = \pm 1.$$

Исключаем отсюда ϵ и получаем уравнение:

$$V_1^4 - 2(V^2 + V_T^2)V_1^2 + (V^2 - V_T^2)^2 = 0. \qquad (6)$$

Рассматривая (5) и (6) как уравнения относительно общей переменной $v = V_1^2$, мы должны иметь равенство нулю их результанта R, являющегося определителем порядка $q+2$:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_q & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{q-1} & a_q \\ 1 & (*) & (V^2 - V_T^2)^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & (V^2 - V_T^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & .. & (*) & (V^2 - V_T^2)^2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (7)$$

где для краткости записи использовано обозначение $(*) = -2(V^2 + V_T^2)$.

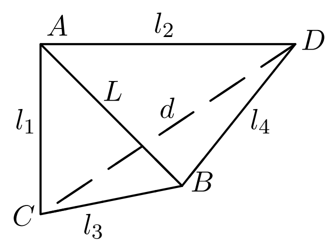


Рис. 2

Объем тетраэдра (см. рис. 2) вычисляется по известной формуле

$$144V_T^2 = L^2d^2(l_1^2 + l_3^2 + l_2^2 + l_4^2 - L^2 - d^2) +$$
$$+ l_1^2 l_4^2 (L^2 + d^2 + l_2^2 + l_3^2 - l_1^2 - l_4^2) +$$
$$+ l_3^2 l_2^2 (L^2 + d^2 + l_1^2 + l_4^2 - l_3^2 - l_2^2) -$$
$$- L^2(l_1^2 l_2^2 + l_3^2 l_4^2) - d^2(l_1^2 l_3^2 + l_2^2 l_4^2). \qquad (8)$$

(обозначения длин понятны из рисунка). Когда мы раскроем этот определитель и соберем слагаемые при степенях d, то с учетом формулы (8) получим относительно d некоторый многочлен вида

$$A_0(\hat{l}, L, V)d^{2s} + A_1(\hat{l}, L, V)d^{2s-2} + \ldots + A_s(\hat{l}, L, V) = 0. \qquad (9)$$

Уравнения (5) и (6) верны для всех многогранников с одним и тем же данным комбинаторным строением, т.е. они выполнены тождественно относительно $x = (x_1, \ldots, x_{3n})$, когда вместо длин ребер, диагоналей и объемов подставлены их значения (2) через координаты вершин многогранников. Это значит, что если в коэффициенты уравнений (5) и (6) относительно $v = V_1^2$ подставлены значения диагонали d, объема V и длин всех ребер многогранника P как функций от x, то они *всегда* имеют общее решение $v(x) = V_1^2(x)$, поэтому их результант

$$R(x) = R(\hat{l}(x), L(x), d(x), V(x)) \equiv 0. \qquad (10)$$

Наша задача – показать, что если в (9) оставить d как переменную, то тождественного равенства нулю относительно переменных (x, d) не будет. Это равносильно тому, что при подстановке в коэффициенты $A_i, 0 \le i \le s-1$, уравнения (9) вместо длин ребер и объема их выражений (2) через координаты вершин мы получим хотя бы один коэффициент при ненулевой степени d, который не окажется равным тождественно нулю. Допустим обратное и исследуем распределение в (9) степеней переменной L. По теореме о весе общий j-й член (моном) результанта (7) имеет вид

$$c_j a_1^{\mu_1^{(j)}} \cdot \ldots \cdot a_q^{\mu_q^{(j)}} (-2)^{\nu_1^{(j)}} (V^2 + V_T^2)^{\nu_1^{(j)}} (V^2 - V_T^2)^{2\nu_2^{(j)}}, \tag{11}$$

где c_j – некоторое отличное от нуля целое число, а неотрицательные целые числа $\mu_0^{(j)}, \mu_1^{(j)} \ldots, \nu_2^{(j)}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} \mu_0^{(j)} + \mu_1^{(j)} + \ldots + \mu_q^{(j)} = 2,\ \nu_0^{(j)} + \nu_1^{(j)} + \nu_2^{(j)} = q, \\ \mu_1^{(j)} + 2\mu_2^{(j)} + \ldots + q\mu_q^{(j)} + \nu_1^{(j)} + 2\mu_2^{(j)} = 2q. \end{gathered} \tag{12}$$

В коэффициентах a_i переменной L нет вовсе, а с учетом вида множителей $(V^2 + V_T^2)^{\nu_1^{(j)}} (V^2 - V_T^2)^{2\nu_2^{(j)}}$, и формул (8) и (12), можно убедиться, что переменная L входит в результант в наивысшей степени в *единственном* мономе $cL^{8q} d^{4q}$, где постоянная $c = 1/144^{2q}$. Выпишем коэффициент $A_{2s-4q}(\hat{l}, L, V)$ при d^{4q}. В нем обязательно есть слагаемое cL^{8q}, которому не с чем уничтожиться, так как во всех остальных слагаемых переменная L имеет меньшую степень, следовательно, $A_{2s-4q}(\hat{l}, L, V) \neq 0$ тождественно как функция выписанных аргументов. Представим $A_{2s-4q}(\hat{l}, L, V)$ как многочлен относительно V и пусть он равен нулю тождественно как функция от x. Тогда получим уравнение вида

$$B_0(\hat{l}, L)V^{2p} + \ldots + B_{p-1}(\hat{l}, L)V^2 + B_p(\hat{l}, L) = 0, \tag{13}$$

где степени всех коэффициентов $B_i, 0 \le i \le p-1$, относительно L меньше $8q$, а $B_p(\hat{l}, L) = cL^{8q} + B_p^{(0)}(\hat{l}, L)$, причем степень $B_p^{(0)}$ относительно L меньше $8q$.

Выпишем теперь коэффициент $A_s(\hat{l}, L, V)$ в (9) при d^0. Туда, в частности, войдет моном V^{4q} из R, который получается из вида (11) общего члена результанта при значениях степеней $\mu_0 = 2, \mu_1 = \ldots = \mu_q = 0,\ \nu_0 = \nu_1 = 0, \mu_2 = q$, причем во всех остальных мономах степень V меньше чем $4q$. Мы предположили, что все коэффициенты в (9) при ненулевых степенях d обращаются в тождественный нуль относительно x; согласно (10), тождественно равен нулю относительно x и сам результант. Следовательно, коэффициент $A_s(x)$ тоже должен равняться нулю. Тогда имеем:

$$V^{4q} + C_1(\hat{l}, L)V^{4q-2} + \ldots + C_{2q}(\hat{l}, L) = 0. \tag{14}$$

Исключим теперь из уравнений (13) и (14) общую переменную $v = V^2$.

Получим уравнение для результанта

$$R_1 = \begin{vmatrix} 1 & C_1 & ... & ... & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & ... & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 & ... & C_{2q-1} & C_{2q} \\ B_0 & B_1 & ... & & B_p & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & ... & ... & B_{p-1} & B_p \end{vmatrix} = 0. \qquad (15)$$

Снова выписывая общий член результанта и исследуя степени переменной L, приходим к выводу, что наивысшая степень L в результанте (15) бывает в *единственном* мономе $c^{2q}L^{16q^2}$. Тем самым мы получаем, что тождество $R_1(\hat{l}(x), L(x)) \equiv 0$ сводится к тому, что равенство

$$c_0 L^{16q^2} + c_1(\hat{l}) L^{16q^2-2} + \ldots + c_{8q^2}(\hat{l}) = 0,\ c_0 = c^{2q},$$

превращается в тождество относительно x, т.е. в многогранниках такого комбинаторного строения K как у P, одно ребро определяется значениями других ребер, что по лемме 1 невозможно. Тем самым не может быть, чтобы многочлен (9) относительно диагонали d был нулевым. Теорема 2 доказана.

Из этой теоремы немедленно получаем такие следствия.

Следствие 1. *Для многогранников в общем положении их малые диагонали при данных длинах ребер могут принимать только конечное число значений, определяемых как корни уравнений вида (9), в каждом из которых вместо V^2 подставлены поочередно возможные значения квадрата объема многогранника, получаемые как неотрицательные корни уравнения (1) относительно V^2.*

Следствие 2. *Для того, чтобы многогранник был изгибаемым, необходимо, чтобы хотя бы для одной малой диагонали в соответствующем уравнении (9) все коэффициенты $A_i(l, V) = 0, 0 \le i \le K$, при значениях длин ребер и объема этого многогранника.*

Следствие 3. *Почти все многогранники в R^3 являются неизгибаемыми.*

Утверждение Следствия 3 в случае многогранников рода $g = 0$ доказано в [12], для рода $g = 1$ и выше оно известно только в препринтных публикациях – [13] и [17] для случая $g = 1$, а для общего случая – в [14] с очень сложным доказательством (правда, в любой размерности).

Замечание 2. При вычислении малых диагоналей можно и не обращаться к значениям объема многогранника. Для этого достаточно исключить переменную V из уравнений (1) и (9) и получить полиномиальное уравнение степени $2Ns$ относительно d^2 с коэффициентами, зависящими только от длин ребер. Но при этом возрастет число ненужных вычислений, так как при использовании объемов мы учитываем *только неотрицательные* значения корней V^2 уравнения (1) и поэтому число значений d^2 получается, вообще говоря, меньше чем $2Ns$.

Из Следствия 1 получается следующий алгоритм построения многогранников с их данной натуральной разверткой: находятся все неотрицательные корни V^2 уравнения (1), затем они по очереди подставляются в каждое из уравнений (9) (в общем случае их число равно e – числу ребер многогранника), находятся неотрицательные корни d^2 всех этих уравнений и тем самым составляется список всех возможных значений длин всех малых диагоналей, затем по этому списку составляется новый список, представляющий собой все варианты длин совокупности малых диагоналей для каждого искомого многогранника (т.е. для каждой малой диагонали берется одно из возможных значений ее длины)[4]. Затем для каждого априори возможного варианта комбинации длин диагоналей проверяется его реализуемость в пространстве Это делается достаточно легко, если не нужно искать других "немалых"диагоналей. Такова комбинаторная схема, например, октаэдров, и для них этот алгоритм реализован аспирантом МГУ С.Н.Михалевым на компьютерах с использованием системы Maple. Приведем пример работы его программы.

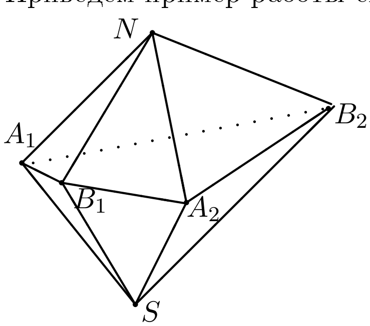


Рис. 6. Модель октаэдра.

Пусть дан изоморфный октаэдру метрический симплициальный комплекс со следующими длинами ребер: $NA_1^2 = 41$, $NB_1^2 = 34, NA_2^2 = 29, NB_2^2 = 26,\ A_1B_1^2 = = 25,\ B_1A_2^2 = 13,\ A_2B_2^2 = 5,\ B_2A_1^2 = 17$, $SA_1^2 = 52, SB_1^2 = 45, SA_2^2 = 40, SB_2^2 = 37$. Минимальное (по степени) полиномиальное уравнение для объема, найденное по методу работы [2], имеет следующий вид:

$$v^8 - 97600v^7 + 2150278656v^6 - 14733766400v^5 + 28949731124248576v^4 - \\ - 164295593693282304 00v^3 + 267393235838794570 1376v^2 - \\ - 1353422296527516205056 00v + 1546362629160356875862016 = 0,$$

где $v = 36V^2, V$ – объем многогранника. Корнями этого уравнения являются числа $16, 64, 144, 576, 1936, 7744, 17424, 69696$, что соответствует восьми возможным значениям квадрата объема $V^2 = 4/9, 16/9, 4, 16, 484/9, 1936/9, 484, 1936$. Для каждой из трех диагоналей D_1, D_2, D_3 октаэдра, которые все являются малыми, составлялись 8 уравнений вида (9), в которых коэффициенты вычислялись с учетом каждого из восьми возможных значений объема, а неизвестными были квадраты диагоналей: $d_1 = D_1^2$,

[4]Кстати, получаем, что число возможных реализаций данной развертки с числом вершин n и топологического рода g в общем случае не больше, чем $N \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_e$, где $2N$ степень многочлена (1) для объема, $2s_i, 1 \leq i \leq e$ – степени многочленов (7) для малых диагоналей, а $e = 3n - 6 + 6g$ –число ребер многогранника.

$d_2 = D_2^2, d_3 = D_3^2$, и выписывались неотрицательные корни этих уравнений. Затем для каждого из значений V^2 производился отбор допустимых комбинаций значений трех диагоналей, для которых в R^3 можно было найти октаэдр, реализующий эти значения длин ребер и диагоналей. Ниже приводится распечатка списка потенциально возможных значений объема и диагоналей октаэдров в R^3 с данными выше длинами ребер, а в конце счета для каждого значения объема даны отобранные значения реально существующих диагоналей.

$$
\begin{array}{ll}
V^2 = 4/9, & d_1 = [2.081694436, 4.000000000, 31.44166642, 31.73100134] \\
V^2 = 16/9, & d_1 = [2.021168018, 2.175016267, 2.312589081, 16.00000000, \\
 & \quad 31.23214714, 31.77887004] \\
V^2 = 4, & d_1 = [2.035877753, 2.304949497, 4.000000000, 25.52184877, \\
 & \quad 30.98377340, 31.61511810] \\
V^2 = 16, & d_1 = [2.313393820, 2.936605635, 16.00000000, 29.99931417] \\
V^2 = 484/9, & d_1 = [2.060243697, 3.360259116, 4.000000000, 5.018904852, \\
 & \quad 27.37671706, 31.57700220] \\
V^2 = 1936/9, & d_1 = [2.567442580, 3.740236092, 4.308719174, 9.301471323, \\
 & \quad 16.00000000, 26.66250012] \\
V^2 = 484, & d_1 = [4.000000000, 7.485206007, 9.084766929, 26.47949383] \\
V^2 = 1936, & d_1 = [16.00000000, 27.76308932] \\
> & \\
V^2 = 4/9, & d_2 = [3.576012742, 3.653258653, 4.000000000, 10.20814794, \\
 & \quad 39.85885066, 40.11735153] \\
V^2 = 16/9, & d_2 = [3.579239880, 3.736961331, 4.000000000, 27.13688493, \\
 & \quad 39.68513202, 40.20288543] \\
V_2 = 4, & d_2 = [3.610222062, 3.852077009, 5.677424734, 36.00000000, \\
 & \quad 39.48078587, 40.25796612] \\
V_2 = 16, & d_2 = [3.863268530, 4.400763198, 19.74547423, 36.00000000, \\
 & \quad 38.67277165, 40.26348038] \\
V^2 = 484/9, & d_2 = [4.000000000, 4.813288766, 6.119238093, 6.360328867, \\
 & \quad 36.56370024, 39.71220656] \\
V^2 = 1936/9, & d_2 = [4.000000000, 5.191888121, 5.836989071, 9.835911172, \\
 & \quad 24.51784495, 35.35659901] \\
V^2 = 484, & d_2 = [5.415779901, 9.316632439, 11.32390248, 36.00000000] \\
V_2 = 1936, & d_2 = [16.49162805, 36.00000000] \\
> & \\
V^2 = 4/9, & d_3 = [.9747869856, 1.000000000, 1.054234393, 74.68927287, \\
 & \\
 & \quad 120.5563512, 121.4151441] \\
V^2 = 16/9, & d_3 = [.9748130474, 1.000000000, 1.142932772, 85.19747307, \\
 & \quad 120.0833829, 121.8025063] \\
V^2 = 4, & d_3 = [1.190766164, 1.196156004, 1.271393891, 93.19502451, \\
 & \quad 119.5801870, 122.1627160, 1., 1.]
\end{array}
$$

$V^2 = 16, \quad d_3 = [1.000000000, 1.045100811, 1.203486490, 1.204323642, 1.925714648, 2.309423273, 3.145288082, 108.7713509, 117.8786745, 123.0851900]$
$V^2 = 484/9, \quad d_3 = [1.177526555, 1.408032135, 1.888971747, 2.062233883, 4.002344336, 5.939546784, 9.386696355, 114.3225064, 121.0000000, 124.0951087]$
$V^2 = 1936/9, \quad d_3 = [1.969558108, 2.992830021, 4.917251896, 5.847359378, 13.96859475, 24.36678384, 43.62897578, 102.0412689, 121.0000000, 124.1867124]$
$V^2 = 484, \quad d_3 = [3.315078265, 5.724170843, 10.32464360, 12.69018056, 41.05804879, 73.51321607, 121., 121.]$
$V^2 = 1936, \quad d_3 = [11.14259787, 23.22774529, 113.5650136, 121.0000000]$
>
$V^2 = 4/9, \quad d_1, d_2, d_3 = [4.000000000, 3.99999646, 1.00000010]$
$V^2 = 16/9, \quad d_1, d_2, d_3 = [16.00000000, 4.00000114, 1.00000000]$
$V^2 = 4, \quad d_1, d_2, d_3 = [4.000000000, 36.00001599, 1.00000010]$
$V^2 = 16, \quad d_1, d_2, d_3 = [16.00000000, 35.99999696, 1.00000000]$
$V^2 = 484/9, \quad d_1, d_2, d_3 = [4.000000000, 3.99999994, 120.9999999]$
$V^2 = 1936/9, \quad d_1, d_2, d_3 = [16.00000000, 3.99999994, 121.0000000]$
$V^2 = 484, \quad d_1, d_2, d_3 = [4.000000000, 36.00000009, 120.9999999]$
$V^2 = 1936, \quad d_1, d_2, d_3 = [16.00000000, 36.00000007, 121.0000000]$

Видим, например, что самое большое значение объема $V = 44$ (или $V^2 = 1936$) соответствует октаэдру P с диагоналями $D_1 = 4, D_2 = 6, D_3 = 11$ и со следующими координатами вершин

$$A_1(-4,0,0),\ A_2(2,0,0),\ B_1(0,-3,0),\ B_2(0,1,0),\ N(0,0,5),\ S(0,0,-6),$$

т.е. с вершинами на осях координат. Остальные семь изометричных P реализаций октаэдра получаются зеркальными отражениями октаэдра P относительно координатных плоскостей xOy, xOz и yOz и, между прочим, эти реально существующих 8 изометричных между собой октаэдров доказывают, что минимально допустимая степень многочлена $Q(V)$ для объема октаэдра действительно равна 8.

Конкретный способ использования малых диагоналей для построения многогранников описан в следующем пункте.

3. Теперь мы опишем процедуру нахождения длин других диагоналей многогранника. Основой для этого является формула для нахождения расстояния между двумя точками с известными расстояниями до трех *базовых* точек, не лежащих на одной прямой [6]. Длину ребра $< p_i p_j >$ обозначим через l_{ij} (см. рис. 3). Далее, пусть S_{123} – площадь треугольника $< p_1 p_2 p_3 >$, V_{1234} и V_{1235} – объемы соответствующих тетраэдров. Тогда расстояние d_{45} между вершинами p_4 и p_5 вычисляется по формуле

$$d_{45}^2 = l_{34}^2 + l_{35}^2 + \frac{D + 36\epsilon V_{1234} V_{1235}}{S_{123}^2}, \qquad (16)$$

где

$$D = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2l_{23}^2 & l_{12}^2 - l_{23}^2 - l_{13}^2 & l_{25}^2 - l_{35}^2 - l_{23}^2 \\ l_{12}^2 - l_{23}^2 - l_{13}^2 & 2l_{13}^2 & l_{35}^2 + l_{13}^2 - l_{15}^2 \\ l_{24}^2 - l_{23}^2 - l_{34}^2 & l_{13}^2 - l_{34}^2 - l_{14}^2 & 0 \end{vmatrix},$$

а $\epsilon = \pm 1$ в зависимости от того, лежат ли вершины p_4 и p_5 по разные или по одну сторону от плоскости треугольника $< p_1 p_2 p_3 >$ (если одна из вершин p_4 и p_5 или обе лежат на плоскости основания, то соответствующий объем равен нулю и величина ϵ значения не имеет).

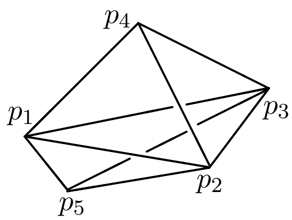


Рис. 3.

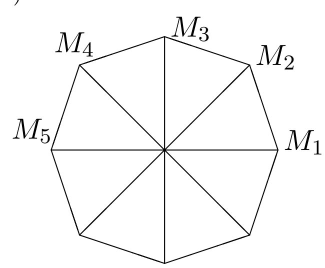


Рис. 4

Пусть требуется найти длину диагонали между двумя вершинами, принадлежащими краю одной звезды (рис. 4), скажем, расстояние между вершинами M_1 и M_5. Расстояния M_1M_3, M_2M_4 и M_3M_5 известны как длины малых диагоналей. Определяем теперь расстояние между M_1 и M_4 по формуле (16) как расстояние между точками с известными расстояниями до вершин базового треугольника $< OM_2M_3 >$, после этого по той же формуле находим расстояние между M_1 и M_5 как между точками с известными расстояниями до базовых точек O, M_3 и M_4. Очевидно, таким образом мы можем последовательно определить длины всех диагоналей в одной звезде и заодно отбросить неподходящие выборы длин малых диагоналей, так как каждую "не малую"диагональ можно вычислить двумя способами, идя к рассматриваемой вершине по двум разным направлениям и требуя совпадения результатов вычислений.

Пусть теперь диагональ соединяет вершины из разных звезд. Опишем алгоритм вычисления ее длины на примере из рис. 5 для диагонали MN. Найдем кратчайший (по числу ребер) путь между точками M и N (на рисунке это ломаная $MA_1A_2A_3N$). Расстояния между вершинами

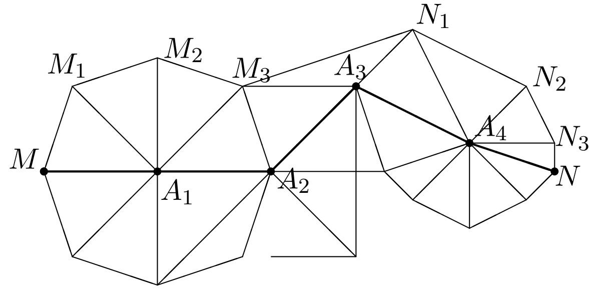


Рис. 5

внутри одной звезды мы умеем вычислять. Покажем, как найти расстояния от M до вершин звезды A_2. Звезды вершин A_1 и A_2 имеют общее ребро $< A_1A_2 >$ и общую грань $< A_1A_2M_3 >$, которая является базовым треугольником для определения расстояния между M и A_3 по формуле (16), так как все расстояния от них до вершин грани $A_1A_2M_3$ известны. Нетрудно проверить, что грань $< A_2A_3M_3 >$ – базовая для определения расстояния между M и N_1; после определения этого расстояния грань $M_3A_3N_1$ становится базовой для определения расстояния MA_4. Наконец, известные расстояния от M и N до вершин грани $< A_3A_4N_1$ позволяют определить расстояние между M и N. Конечно, не надо забывать, что на каждом шаге мы находим *два* возможных значения вычисляемых расстояний, поэтому в итоге получаем не точные значения расстояний, а некоторый *конечный* набор их возможных значений, что и достаточно для конечности алгоритма.

Для окончательного решения проблемы изометрической реализации данной развертки мы можем пойти двумя путями. Если мы хотим узнать *только существование* искомого многогранника, то можем сначала найти расстояния между всеми парами вершин будущего многогранника, а затем воспользоваться известным критерием (см., напр., [11]) существования в R^3 n точек с данными расстояниями между ними (а в силу треугольности граней и знания комбинаторной схемы существования вершин достаточно для утверждения существования ребер и граней). Но если мы хотим явно найти многогранник, то для однозначного определения положения вершин достаточно знать их расстояния от четырех вершин, не лежащих на одной плоскости; следовательно, не нужно искать *все* расстояния, а сначала нужно найти четыре вершины, составляющие невырожденный тетраэдр, и искать расстояния от остальных вершин только до этих четырех вершин, по ним найти положения вершин многогранника и для таким образом найденных вершин проверить, определяют ли они ребра именно той длины, которые предписаны данной разверткой.

4. Последняя часть статьи является кратким изложением готовящейся к публикации совместной работы Р.В. Галиулина, С.Н. Михалева и И.Х. Сабитова, составившей часть доклада И.Х.Сабитова на конференции в честь В.А.Топоногова и которая в виде тезисов опубликована в [16]. Эта работа посвящена явному нахождению уравнения (1) для объемов октаэдров с симметриями с последующим нахождением значений их объемов. Дело в том, что так называемый канонический многочлен $Q(V)$ для октаэдра (т.е. многочлен для объема, имеющий наименьшую возможную степень), найденный в работе [2], содержит порядка нескольких миллиардов мономов и поэтому он не может быть выписан в явном виде. Но если некоторые ребра октаэдра равны между собой, то происходит "приведение подобных"и число мономов существенно сокращается. А условие симметричности октаэдров оказывается даже более полезным для приложений, чем общий случай, так как, скажем, в кристаллографии (см., например, [5]) и в некоторых задачах физхимии (см., например, [10]) имеют дело именно с пространственно симметричными октаэдрами.

Введем три понятия симметрии многогранника. Мы скажем, что многогранник обладает *комбинаторной симметрией*, если существует автоморфизм множества его вершин, сохраняющий инцидентность вершин и ребер. Далее, мы скажем, что многогранник является *метрически симметричным*, если некоторый автоморфизм множества его вершин сохраняет не только инцидентность вершин и ребер, но и длины ребер. Наконец, мы скажем, что многогранник обладает *пространственной симметрией*, если есть некоторое дискретное движение пространства, переводящее многогранник в себя. Очевидно, все три вида симметрий являются группами относительно операции композиции сответствующих автоморфизмов. Обозначим эти группы как $G_k,\ G_m$ и G с включениями $G \subset G_m \subset G_k$. Первые две симметрии – комбинаторная и метрическая – являются на самом деле внутренними свойствами многогранника, зависящими от его метрики и комбинаторного строения, третий вид симметрии определяется свойством реализации комбинаторно-метрической модели многогранника в пространстве. Сразу же отметим, что не всякая изометрическая реализация метрически симметричного многогранника в пространстве является пространственно симметричным – пример дается дважды покрытой "половиной"октаэдра в общем положении. В общем, в вопросах связи между метрической симметричностью модели многогранника и пространственной симметричностью его реализаций есть еще очень много открытых вопросов.

Так как составление многочлена $Q(V)$ для объема требует знания только комбинаторного строения и метрики (т.е. длин ребер) многогранника, мы можем найти возможные значения объемов всех реализаций многогранника еще *до* фактического осуществления реализаций, а в теоретических исследованиях это может оказаться очень важной информацией. К сегодняшнему дню такие вычисления возможны пока только для октаэдров, и поэтому именно для них проведены соответствующие рассмотрения. Группа G_k комбинаторной симметрии октаэдра состоит из 48 элементов и ее можно моделировать как некоторую подгруппу группы подстановок S_6 из 6 элементов, соответствующих 6 вершинам октаэдра. У правильного октаэдра пространственная группа симметрии G, а значит, и метрическая группа симметрии G_m тоже имеют 48 элементов и они изоморфны G_k. Пространственные преобразования симметрии октаэдра известны (см., например, [5]) и они определяются *элементами* симметрии – центром симметрии, осями симметрии (2-го, 3-го или 4-го порядков) и плоскостями симметрии (координатными или диагональными), которые с некоторой вольностью речи называются также образующими соответствующих подгрупп. Легко видеть, что всякая группа метрической симметрии октаэдра изоморфна некоторой подгруппе группы G пространственной симметрии правильного октаэдра, поэтому для описания групп метрической симметрии октаэдра можно использовать известную классификацию подгрупп группы G ([5]). При этом вычисления многочлена для объема не нужно проводить для всех подгрупп, так как часть из них отличается от других только расположением элементов симметрии (например, каждая из трех осей симметрии, проходящих через пару противоположных вершин, порождает системы равенств ребер, одинаковые с точностью до замены обозначений или нумерации вершин). В итоге выделяются 31 группа метрической симметрии, и для октаэдров, обладающих одной из этих групп метрической симметрии, с учетом равенства соответсвующих длин ребер удается в большинстве случаев выписать многочлены для их объемов (исключение составляют октаэдры с метрическими симметриями из трех групп, у которых число свободных значений длин ребер равно 7 или 8 и многочлены получаются очень большие).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Александров А.Д. Выпуклые многогранники. М.- Л.: Гостехиздат, 1950.– 428 с. Zbl 0041.50901

[2] Астрелин А.В., Сабитов И.Х. Минимальный по степени многочлен для определения объема октаэдра по его метрике // Усп. мат. наук.– 1992. – 50, no. 5.– с. 245 – 246. Zbl 0863.68076

[3] Астрелин А.В., Сабитов И.Х. Канонический многочлен для объема многогранника // Усп. мат. наук.– 1999.– 54, no. 2.– с. 165 – 166. Zbl 0941.52009

[4] Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А. Изометрические кусочно-линейные погружения двумерных многообразий с полиэдральной метрикой в R^3 // Алгебра и анализ.– 1995.– 7, no. 3.– с. 76 – 95. Zbl 0851.52018

[5] Галиулин Р.В. Лекции по геометрическим основам кристаллографии // Изд-во Челябинского университета, 1989. – 80 с.

[6] Сабитов И.Х. Алгоритмическая проверка изгибаемости подвесок // Укр. геом. сб. – 1987. – 30. – с. 109 – 112. Zbl 0629.51027

[7] Сабитов И.Х. К проблеме об инвариантности объема изгибаемого многогранника // Успехи мат. наук.– 1995.– 50, no. 2.– с. 223 – 224. Zbl 0857.52004

[8] Сабитов И.Х. Объем многогранника как функция его метрики // Фундам. и прикладн. математика.– 1996.– 2, no. 4.– с. 1235 – 1246. Zbl 0904.52002

[9] Сабитов И.Х. Обобщенная формула Герона-Тарталья и некоторые ее следствия // Мат. сборник.– 1998.– 189, no. 10.– с. 105 – 134. Zbl 0941.52020

[10] Balabin A.I., Sack R.O. Thermodynamics of (Zn,Fe)S Sphalerite. A CVM Approach with Large Basis Clusters // Mineralogical Magazine.– 2000.– 64, no. 5.– p. 923 – 943. (submitted, 1999)

[11] Blumental L.M. Theory and Applications of Distance Geometry, 2nd ed., Chelsea, N.-Y., 1970. Zbl 0208.24801

[12] Gluck H. Almost all simple connected closed surfaces are rigid // Lec. Notes in Math.– 1975.– 438.– p. 225 – 239. Zbl 0315.50002

[13] Graver J. Rigidity of triangulated surfaces // Colloquium during the Special Semester on Structural Rigidity.- 1987.- Centre de recherches Mathématiques, Université de Monréal.

[14] Fogelsanger A. The generic rigidity of minimal cycles // Preprint, Cornell University.- 1987.- 60 p.

[15] Sabitov I.Kh. The Volume as a Metric Invariant of Polyhedra // Discrete and Computat. Geometry.– 1998.– 20, no. 4.– p. 405 – 425. Zbl 0922.52006

[16] Sabitov I.Kh., Galiulin R.V., Mikhalyov S.N. Some Applications of the Formula for Volume of Octahedron // Международная конференция "Геометрия и приложения", посвященная 70-летию В.А.Топоногова. 13-16 марта 2000 г., Новосибирск. Тезисы докладов.– с. 77 – 78.

[17] Whiteley W. Infinitesimal rigid polyhedra III: triangulated tori // Preprint, Champlain Regional College, St. Lambert, Quebec J4P 3B8.- 1985.

Московский государственный университет
e-mail: isabitov@mail.ru