MOMENTELE DISTRIBUȚIILOR MULTINOMIALĂ, POISSON MULTIPLĂ ŞI HIPERGEOMETRICĂ MULTIPLĂ

Lucia Căbulea

Abstract. In this paper the author presents formula (7) for the calculus of the moment of order $(r_1, r_2, ..., r_S)$ of the multinomial distribution. In formula (9) and (15) using the Stirling number of the second kind. Considering the limit case we obtain from the multinomial distribution the expression for the moment of order $(r_1, r_2, ..., r_S)$ of the multiple Poisson distribution. Also in (14) and (15) we find the formula for the moment of order $(r_1, r_2, ..., r_S)$ of the multiple hypergeometric distribution.

I. INTRODUCERE

Considerăm un şir de experiențe independente şi evenimentele posibile pentru fiecare din aceste experiențe E_1, E_2, ..., E_{s+1} şi presupunând că probabilitatea de realizare a fiecărui eveniment E_k este p_k (k = 1, 2, ..., s+1) , avem $p_1 + p_2 + \ldots + p_{s+1} = 1$. Este cunoscut faptul că probabilitatea ca în n experiențe evenimentul E_1 să se realizeze de k_1 ori, evenimentul E_2 să se realizeze de k_2 ori , ..., evenimentul E_{s+1} să se realizeze de k_{s+1} ori, pentru orice numere întregi nenegative k_i care verifică condiția $k_1 + k_2 + \ldots + k_{s+1} = n$, este dată de expresia

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_{s+1}!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_{s+1}^{k_{s+1}}$$

Dacă $p_{s+1} = 1 - p_1 - \ldots - p_s$, $k_{s+1} = n - k_1 - \ldots - k_s$, această probabilitate poate fi exprimată sub forma

$$P_n^{k_1,\ldots,k_s}(p_1,\ldots,p_s) = \frac{n!}{k_1!\ldots k_s!(n-k_1-\ldots-k_s)!} p_1^{k_1}\ldots p_s^{k_s}(1-p_1-\ldots-p_s)^{n-k_1-\ldots-k_s} \quad (1)$$

Această formulă ne dă cunoscuta distribuție multinomială. Este uşor de văzut că formula (1) poate fi scrisă şi sub forma

$$P_n^{k_1,\ldots,k_s}(p_1,\ldots,p_s) =$$

$$= \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\cdots\binom{n-k_1-\ldots-k_{s-1}}{k_s} p_1^{k_1}\ldots p_s^{k_s}(1-p_1-\ldots-p_s)^{n-k_1-\ldots-k_s} \quad (2)$$

Fie $r_1, r_2, \ldots, r_s$ numere întregi nenegative. Momentul de ordinul $(r_1, r_2, \ldots, r_s)$ al distribuţiei multinomiale este definit de

$$\nu_{r_1,\ldots,r_s}(n; p_1,\ldots,p_s) = \sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n-k_1}\cdots\sum_{k_s=0}^{n-k_1-\ldots-k_{s-1}} k_1^{r_1}\ldots k_s^{r_s} P_n^{k_1,\ldots,k_s}(p_1,\ldots,p_s) \quad (3)$$

În continuare vom deduce o formulă pentru aceste momente care este mult mai utilă în calculul numeric şi care foloseşte diferenţele lui zero.

Este cunoscut faptul că diferenţa de ordinul k a funcţiei f(x), cu pasul h şi punctul iniţial a este dată de

$$\Delta_h^k f(a) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i} f(a+(k-i)h) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i} f(a+ih)$$

În cazul particular f(x) = x^r, h = 1, a = 0 se obţine

$$\Delta_1^k 0^r = \Delta^k 0^r = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^r = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i} i^r, \quad (4)$$

care este diferenţa de ordinul k al lui zero la puterea r.

II. DISTRIBUŢIA TRINOMIALĂ.

Considerăm cazul s = 2, când formula (3) devine

$$\nu_{r_1,r_2}(n; p_1, p_2) = \sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n-k_1}\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2} p_1^{k_1} p_2^{k_2}\cdot(1-p_1-p_2)^{n-k_1-k_2} k_1^{r_1} k_2^{r_2} \quad (5)$$

Dacă

$$(1-p_1-p_2)^{n-k_1-k_2} = \sum_{i_2=0}^{n-k_1-k_2}(-1)^{i_2}\binom{n-k_1-k_2}{i_2}\cdot(1-p_1)^{n-k_1-k_2-i_2} p_2^{i_2}$$

şi

$$(1-p_1)^{n-k_1-k_2-i_2} = \sum_{i_1=0}^{n-k_1-k_2-i_2}(-1)^{i_1}\binom{n-k_1-k_2-i_2}{i_1} p_1^{i_1}$$

se obţine că

$$\nu_{r_1,r_2}(n;p_1,p_2)=\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n-k_1}\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\cdot\sum_{i_2=0}^{n-k_1-k_2}\sum_{i_1=0}^{n-k_1-k_2-i_2}(-1)^{i_1+i_2}\binom{n-k_1-k_2}{i_2}\cdot$$
$$\cdot\binom{n-k_1-k_2-i_2}{i_1}p_1^{k_1+i_1}p_2^{k_2+i_2}k_1^{r_1}k_2^{r_2}$$

Este uşor de văzut că aceste momente reprezintă un polinom de grad n în p_1 şi p_2, care este de forma

$$\nu_{r_1,r_2}(n;p_1,p_2)=\sum_{j_1=0}^{n}\sum_{j_2=0}^{n-j_1}A_{j_1,j_2}\,p_1^{j_1}p_2^{j_2}\,.$$

În continuare vom determina coeficienţii A_{j_1,j_2}, observând că termenii în care apare produsul $p_1^{j_1}p_2^{j_2}$ se obţin dând perechilor $(k_1,i_1),(k_2,i_2)$ respectiv următoarele şiruri de valori

$$(j_1,0),(j_1-1,1),\ldots,(j_1-k_1,k_1),\ldots,(1,j_1-1),(0,j_1)$$
$$(j_2,0),(j_2-1,1),\ldots,(j_2-k_2,k_2),\ldots,(1,j_2-1),(0,j_2)$$

Apoi luând $j_1=0,1,\ldots,n$ şi $j_2=0,1,\ldots,n-j_1$, obţinem:

$$\nu_{r_1,r_2}(n;p_1,p_2)=\sum_{j_1=0}^{n}\sum_{j_2=0}^{n-j_1}\sum_{k_1=0}^{j_1}\sum_{k_2=0}^{j_2}(-1)^{k_1+k_2}\binom{n}{j_1-k_1}\cdot$$
$$\cdot\binom{n+k_1-j_1}{j_2-k_2}\binom{n+k_1+k_2-j_1-j_2}{k_1}\cdot$$
$$\cdot\binom{n+k_2-j_1-j_2}{k_2}p_1^{j_1}p_2^{j_2}\cdot(j_1-k_1)^{r_1}(j_2-k_2)^{r_2}$$

Dar folosind relaţia

$$\binom{n}{j_1-k_1}\binom{n+k_1-j_1}{j_2-k_2}\cdot\binom{n+k_1+k_2-j_1-j_2}{k_1}\cdot\binom{n+k_2-j_1-j_2}{k_2}=$$
$$\binom{n}{j_1}\binom{n-j_1}{j_2}\binom{j_1}{k_1}\binom{j_2}{k_2}$$

rezultă

$$\nu_{r_1,r_2}(n;p_1,p_2)=\sum_{j_1=0}^{n}\sum_{j_2=0}^{n-j_1}\binom{n}{j_1}\binom{n-j_1}{j_2}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k_1=0}^{j_1}\sum_{k_2=0}^{j_2}(-1)^{k_1+k_2}\binom{j_1}{k_1}\binom{j_2}{k_2}\cdot\\ \cdot(j_1-k_1)^{r_1}(j_2-k_2)^{r_2}\end{array}\right]p_1^{j_1}p_2^{j_2}\,.$$

Având în vedere relaţia (4) avem

$$\nu_{r_1,r_2}(n;p_1,p_2)=\sum_{j_1=0}^{r_1}\sum_{j_2=0}^{r_2}\binom{n}{j_1}\binom{n-j_1}{j_2}(\Delta^{j_1}0^{r_1})(\Delta^{j_2}0^{r_2})\cdot p_1^{j_1}p_2^{j_2}. \quad (6)$$

dacă $\Delta^m 0^r = 0$ pentru m > r şi $\binom{m}{k} = 0$ pentru k > m.

III. DISTRIBUŢIA MULTINOMIALĂ.

În cazul general al distribuţiei multinomiale (1), după un calcul similar se obţine expresia pentru momentul de ordinul $(r_1, r_2, \ldots, r_s)$:

$$\nu_{r_1,\ldots,r_s}(n;p_1,\ldots,p_s)=\sum_{j_1=0}^{r_1}\sum_{j_2=0}^{r_2}\cdots\sum_{j_s=0}^{r_s}\binom{n}{j_1}\binom{n-j_1}{j_2}\cdots$$
$$\binom{n-j_1-\ldots-j_{s-1}}{j_s}(\Delta^{j_1}0^{r_1})\ldots(\Delta^{j_s}0^{r_s})\cdot p_1^{j_1}\ldots p_s^{j_s} \quad (7)$$

Pentru s = 1 această formulă se reduce la

$$\nu_{r_1}(n;p)=\sum_{j_1=0}^{r_1}\binom{n}{j_1}(\Delta^{j_1}0^{r_1})p_1^{j_1}, \quad (8)$$

care reprezintă expresia momentului de ordinul r_1 pentru distribuţia binomială

$$P_n^{k_1}(p_1)=\binom{n}{k_1}p_1^{k_1}(1-p_1)^{n-k_1}$$

Formula (8) a fost stabilită prima dată de G. Bohlmann [1], dar poate fi văzută şi în [3]. În lucrarea [5], D.D. Stancu a dat două metode pentru obţinerea aceste formule.

Dacă $S_j^r = \dfrac{\Delta^j 0^r}{j!}$ reprezintă numerele lui Stirling de speţa a doua şi

$$\binom{n}{j_1}\binom{n-j_1}{j_2}\cdots\binom{n-j_1-\ldots-j_{s-1}}{j_s}=\frac{n(n-1)\ldots(n-j_1-\ldots-j_s+1)}{j_1!\,j_2!\ldots j_s!}$$

atunci formula (7) devine

$$\nu_{r_1,\ldots,r_s}(n;p_1,\ldots p_s)=\sum_{j_1=0}^{r_1}\cdots\sum_{j_s=0}^{r_s}n(n-1)\ldots(n-j_1-\ldots-j_s+1)\cdot S_{j_1}^{r_1}\ldots S_{j_s}^{r_s}p_1^{j_1}\ldots p_s^{j_s}. \quad (9)$$

IV. DISTRIBUŢIA POISSON MULTIPLĂ

Vom considera acum cazul distribuţiei Poisson multiple, care este definită de

$$P^{k_1,\ldots,k_s}(a_1,\ldots,a_s) = \frac{a_1^{k_1}\ldots a_s^{k_s}}{k_1!\ldots k_s!}e^{-(a_1+\ldots+a_s)}$$

Aceasta poate fi obținută din distribuția multinomială dacă presupunem că p_k depinde de n astfel încât pentru $n \to \infty$ să avem $np_k \to a_k \succ 0$ (k = 1, 2, ..., s).

Considerând acest caz limită obținem din (9) expresia următoare pentru momentul de ordinul $(r_1,\ldots,r_s)$ al distribuției Poisson multiple

$$v_{r_r,\ldots,r_s}(a_a,\ldots,a_s) = \sum_{j_1=0}^{r_1}\ldots\sum_{j_s=0}^{r_s} a_1^{j_1}\ldots a_s^{j_s} S_{j_j}^{r_1}\ldots S_{j_j}^{r_s}, (10)$$

dacă avem

$$n(n-1)\ldots(n-j_1-\ldots-j_s+1)p_1^{j_1}\ldots p_s^{j_s} \to a_1^{j_1}\ldots a_s^{j_s}, n\to\infty$$

Formula corespunzătoare pentru cazul s = 1 a fost dată de T. Gerstenkorn [4].

V. DISTRIBUȚIA HIPERGEOMETRICĂ MULTIPLĂ

Distribuția hipergeometrică multiplă este definită de

$$P_n^{k_1,\ldots,k_s}(n;p_1,\ldots,p_{s+1}) = \frac{\binom{Np_1}{k_1}\cdots\binom{Np_s}{k_s}\binom{Np_{s+1}}{k_{s+1}}}{\binom{N}{n}}$$

iar dacă $p_{s+1} = 1 - p_1 - \ldots - p_s$ și

$k_{s+1} = n - k_1 - \ldots - k_s$ această probabilitate poate fi exprimată sub forma

$$P_n^{k_1,\ldots,k_s}(n;p_1,\ldots,p_s) = \frac{\binom{Np_1}{k_1}\cdots\binom{Np_s}{k_s}\binom{N(1-p_1-\ldots-p_s)}{n-k_1-\ldots-k_s}}{\binom{N}{n}}$$

Considerând $r_1, r_2, \ldots, r_s$ numere întregi nenegative , momentul de ordinul $(r_1, r_2, \ldots, r_s)$ al distribuției hipergeometrice multiple este dat de relația

$$v_{r_1,\ldots,r_s}(n;p_1,\ldots,p_s) =$$
$$\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n-k_1}\ldots\sum_{k_s=0}^{n-k_1-\ldots-k_{s-1}} k_1^{r_1}\ldots k_s^{r_s}\cdot P_n^{k_1,\ldots,k_s}(p_1,\ldots,p_s)(11)$$

Pentru a deduce o formula de calcul a acestor momente vom considera cazul particular s = 2, când formula (11) devine

$$\nu_{r_1,r_2}(n;p_1,p_2) = \sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n-k_1}\frac{\binom{Np_1}{k_1}\binom{Np_2}{k_2}}{\binom{N}{n}}\cdot\binom{N(1-p_1-p_2)}{n-k_1-k_2}k_1^{r_1}k_2^{r_2} \tag{12}$$

Dacă

$$k_1^{r_1} = \sum_{j_1=1}^{r_1} k_1^{[j_1\}}\frac{\Delta^{j_1}0^{r_1}}{j_1!}$$

$$k_2^{r_2} = \sum_{j_2=1}^{r_2} k_2^{[j_2]}\frac{\Delta^{j_2}0^{r_2}}{j_2!}$$

şi $k^{[j]} = k(k-1)\ldots(k-j+1)$ este puterea factorială a lui k avem

$$\nu_{r_1r_2}(n;p_1,p_2) = \sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n-k_1}\frac{\binom{Np_1}{k_1}\binom{Np_2}{k2}}{\binom{N}{n}}\cdot\binom{N(1-p_1-p_2)}{n-k_1-k_2}\sum_{j_1=1}^{r_1}k_1^{[j_1]}\frac{\Delta^{j_1}0^{r_1}}{j_1!}\cdot\sum_{j_2=1}^{r_2}k_2^{[j_2]}\frac{\Delta^{j_2}0^{r_2}}{j_2!}$$

Folosind relațiile adevărate

$$\binom{Np_1}{k_1} = \frac{(Np_1)^{[j_1]}}{k_1^{[j_1]}}\binom{Np_1-j_1}{k_1-j_1}$$

$$\binom{Np_2}{k_2} = \frac{(Np_2)^{[j_2]}}{k_2^{[j_2]}}\binom{Np_2-j_2}{k_2-j_2}$$

precum şi

$$\sum_{k_2=0}^{n-k_1}\binom{Np_2-j_2}{k_2-j_2}\binom{N(1-p_1-p_2)}{n-k_1-k_2} = \binom{N(1-p_1)-j_2}{n-k_1-j_2}$$

$$\sum_{k_1=0}^{n}\binom{Np_1-j_1}{k_1-j_1}\binom{N(1-p_1)-j_2}{n-k_1-j_2} = \binom{N-j_1-j_2}{n-j_1-j_2}$$

se obține expresia

$$\nu_{r_1,r_2}(n;p_1,p_2) = \sum_{j_1=1}^{r_1}\sum_{j_2=1}^{r_2}\binom{n}{j_1}\binom{n-j_1}{j_2}\cdot\frac{(Np_1)^{[j_1]}(Np_2)^{[j_2]}}{N^{[j_1+j_2]}}\Delta^{j_1}0^{r_1}\Delta^{j_2}0^{r_2}. \tag{13}$$

În cazul general al distribuţiei hipergeometrice multiple printr-un calcul similar se obţine următoarea expresie a momentului de ordin $(r_1, r_2, \ldots, r_s)$

$$\nu_{r_1,\ldots,r_s}(n; p_1,\ldots,p_s) =$$
$$\sum_{j_1=1}^{r_1} \ldots \sum_{j_s=1}^{r_s} \binom{n}{j_1}\binom{n-j_1}{j_2}\ldots\binom{n-j_1-\ldots-j_{s-1}}{j_s} \frac{(Np_1)^{[j_1]}\ldots(Np_s)^{[j_s]}}{N^{[j_1+\ldots+j_s]}} \Delta^{j_1}0^{r_1}\ldots\Delta^{j_s}0^{s_s} \quad (14)$$

Pentru s = 1 această formulă se reduce la

$$\nu_{r_1}(n; p_1) = \sum_{j_1=1}^{r_1} \binom{n}{j_1} \frac{(Np_1)^{[j_1]}}{N^{[j_1]}} \Delta^{j_1} 0^{r_1}$$

care reprezintă momentul de ordinul r_1 al distribuţiei hipergeometrice

$$P_n^{k_1}(p_1) = \frac{\binom{Np_1}{k_1}\binom{N(1-p_1)}{n-k_1}}{\binom{N}{n}}$$

Folosind numerele lui Stirling de speţa a doua expresia momentului de ordinul $(r_1, r_2, \ldots, r_s)$ pentru distribuţia hipergeometrică multiplă devine

$$\nu_{r_1,\ldots,r_s}(n; p_1,\ldots,p_s) =$$
$$\sum_{j_1=1}^{r_1} \ldots \sum_{j_s=1}^{r_s} n(n-1)\ldots(n-j_1-\ldots-j_s+1)$$
$$\frac{(Np_1)^{[j_1]}\ldots(Np_s)^{[j_s]}}{N^{[j_1+\ldots+j_s]}} S_{j_1}^{r_1}\ldots S_{j_s}^{r_s} \quad (15)$$

BIBLIOGRAFIE

[1] G. Bohlmann, *Formulierung und Begründung zweier Hilfssätze der mathematische Statistik*, Math. Ann., 74 (1913), 341 - 409.
[2] R. A. Fisher and F. Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, 6th ed., London : Oliver and Boyd, 1963.
[3] M. Fréchet, *Les probabilités associées à un systéme d'événements compatibles et dépendants*, Actualités Sci. Ind. No. 859, Herman, Paris, 1940.
[4] T. Gerstenkorn, *On the Formula for the Moments of the poisson Distribution*, Bull. Soc. Sci. Lettres Lódz, 11 (1960), 1 - 5.
[5] D. D. Stancu, *Asupra momentelor unor variabile aleatoare discrete,* Studia Univ. Babeş-Bolyai Ser. Math. - Phys., 9 (1964), 35 - 48.

[6] D. D. Stancu, *A Method for Computing the Moments of the Multinomial and Multiple Poisson Distributions,* Studia Univ. Babeş-Bolyai Ser. Math. - Phys., 1964, 49 - 54.
[7] E. T. Whittaker and G. Robinson, *The Calculus of Observations, London* - Glasgow, Blakie, 1929.

Autor

Lucia Căbulea, „1 Decembrie 1918” University of Alba Iulia, e-mail: lcabulea@uab.ro.