

Los Números de (Euler)-Catalan.

Mercedes H. Rosas

A Rafael Sánchez Lamonedá

Fue el gran Leonhard Euler (1707–1783) la primera persona en calcular los números de Catalan. Esto nos lo relata su contemporáneo Johann Segner (1704–1777) en su artículo: *Enumeratio modorum, quibus figurae planae rectilineae per diagonales dividuntur in triangula*, *Novi Commentarii Acad. Sci. Petropolitanae*, 7 (1758–59) 203–209.

Segner nos cuenta que los primeros valores para los números de Catalan le fueron comunicados por Euler, quien, sin embargo, le escondió la técnica que utilizó para calcularlos. *“quos numeros mecum benevolus communicavit summus Eulerus; modo, quo eos reperit, atque progressionis ordine, celatis.”*

En el trabajo mencionado Segner obtiene la recurrencia de Catalan, tal como la presentamos en la primera sección de este artículo. En un artículo posterior, y del mismo título, Segner conjeturó correctamente la fórmula cerrada para los números de Catalan, más no logró demostrarla.

Euler responde a los artículos de Segner sacando sus garras. En su “*Summary, Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 7, (1758/59), 13–15.” Reimpreso en su “*Opera Omnia* (1) 26 (1953), xvi–xviii,” Euler calcula la función generatriz de Catalan, y de ella deriva la fórmula cerrada de Catalan utilizando las ideas descritas en la sección 3 de este trabajo. La genialidad de Euler para atacar este problema, así como sus famosos trabajos en la teoría de particiones, inician el estudio de las funciones generatrices y con él una larga y fructífera unión entre el análisis y la combinatoria, [1].

Alrededor de un siglo después Eugene Catalan (1814–1894), volverá a calcular el número de maneras de triangular un polígono. En su memoria, los números de Catalan llevan hoy en día su nombre.

En su página en la internet <http://www-math.mit.edu/~rstan/ec>, Richard Stanley nos reta con 95 familias de objetos enumerados por los números de Catalan. Las primeras 66 familias constituyen el famoso problema 6.19 de su libro EC2 [5]. Las restantes 29 (en la versión del 14 de Abril del 2003) conforman el “Catalan Addendum” que es actualizado frecuentemente.

Mi objetivo es recorrer junto al lector uno de los capítulos más simpáticos de la Combinatoria Enumerativa y luego remitirlo a la página de Richard Stanley,

para que se divierta con las muy diferentes interpretaciones de los números de Catalan que allí se encuentran, y quizás descubra la verdadera razón por la cual los números de Catalan aparecen con tanta frecuencia, y en situaciones tan diversas, en las matemáticas.

1 La recurrencia de Catalan

Una triangulación de un polígono es una manera de descomponerlo como una unión disjunta de triángulos, cuyos vértices coinciden con los del polígono. Es fácil ver que para triangular un polígono con $n + 2$ vértices se necesitan exactamente n triángulos (y viceversa).

Por ejemplo, en la Figura 1 ilustramos las cinco triangulaciones de un pentágono, cada una de ellas construida utilizando exactamente tres triángulos.

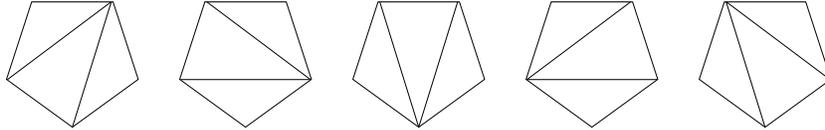


Figura 1: Las cinco triangulaciones de un pentágono.

Un sencillo cálculo convencerá al lector que podemos triangular un triángulo de una única manera, un cuadrado de dos, un pentágono de cinco, y un hexágono de catorce maneras diferentes. El problema se complica cada vez que aumentamos el número de lados del polígono. En esta sección presentaremos una recurrencia que nos permite calcular estos valores fácilmente.

Sea C_n el número de maneras de descomponer un polígono utilizando exactamente n triángulos. Procedemos por inducción en n para calcular C_n . Supongamos que sabemos triangular todos los polígonos con un máximo de $n + 2$ lados, y con esta información triangulemos un polígono con $n + 3$ lados. (El problema es trivial si tenemos un sólo triángulo.)

Procedemos de la siguiente manera. Primero escogemos a nuestro lado favorito del polígono de vértices $1, 2, \dots, n + 3$. En lo que sigue, el lado favorito del lector siempre será el que une a los vértices 1 y $n + 3$. Este lado pertenece a un único triángulo en nuestra triangulación, T_i , cuyo tercer vértice i pertenece al conjunto $\{2, 3, \dots, n + 2\}$. Ver Figura 2.

Eliminando al triángulo T_i de nuestro polígono, obtenemos dos nuevos polígonos que se encuentran triangulados. El primero de ellos tiene como vértices a los números $1, 2, \dots, i$, y en consecuencia, puede ser triangulado de C_{i-2} maneras diferentes. El segundo polígono tiene como vértices a los números $i, i+1, \dots, n+3$, y en consecuencia puede ser triangulado de C_{n-i+2} maneras distintas. Ambas

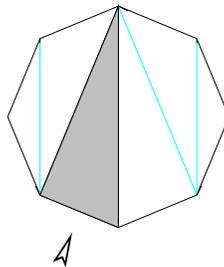


Figura 2: La disección de un polígono con un lado favorito, y cuyo tercer vértice es i .

elecciones son independientes. Así que el número de maneras de triangular al polígono (que contienen al triángulo T_i) es $C_{i-2}C_{n-i+2}$.

Al variar al tercer vértice del triángulo T_i sobre todos los valores posibles, $2, 3, \dots, n + 2$, obtenemos la recurrencia de Catalan;

$$C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + \dots + C_{n-1}C_1 + C_nC_0,$$

(Note que estamos suponiendo que $C_0 = 1$.)

La recurrencia de Catalan nos permite calcular rápidamente los primeros valores de la sucesión de Catalan:

1,	1,	2,	5,	14,	42,
132,	429,	1430,	4862,	16796,	58786,
208012,	742900,	2674440,	9694845,	35357670,	...

Para convencer al lector del poder de las recurrencias le dejaré un par de tareas. La estructura recursiva que acabamos de hallar nos permite generar todas las triangulaciones de un polígono. La primera tarea consiste en escribir un programa de computación que genere todas las triangulaciones de un polígono de manera recursiva.

La recurrencia de Catalan también nos permite demostrar que otros conjuntos se pueden contar con los números de Catalan. Una segunda tarea para el lector consiste en demostrar que las siguientes familias obedecen a la recurrencia de Catalan: Maneras (legales) de colocar parejas de paréntesis, caminos de Dyck, y escrutinios electorales, donde el candidato ganador siempre va a la cabeza (o empatado) y termina con exactamente un voto más que el perdedor.

Las cinco maneras de colocar 3 parejas de paréntesis son $((()))$, $()(())$, $(())()$, $(())()$ y $()()()$.

Un camino de Dyck es el resultado de una caminata con pasos de longitud constante y en las direcciones noreste y sureste, y de manera tal que nunca nos

encontramos en un punto con altura menor a la altura que teníamos al inicio del recorrido.

Los cinco caminos de Dyck de longitud $2 \cdot 3$ están ilustrados en la Figura 3.

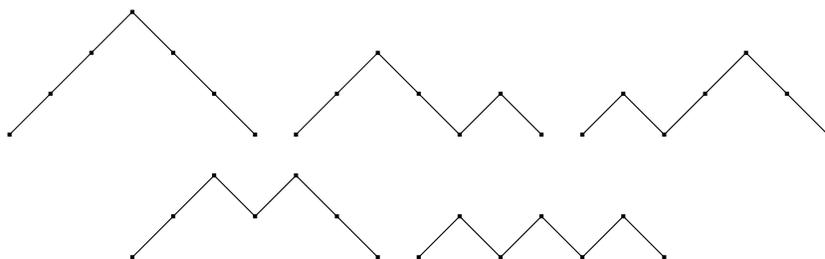


Figura 3: Los cinco caminos de Dyck de longitud $2 \cdot 3$.

Finalmente, los cinco resultados electorales donde el candidato ganador, en todo momento se encuentra a la cabeza o empatado con el candidato perdedor (y donde el candidato ganador recibe un voto más que el perdedor) son: *aaabb*, *aabab*, *aabba*, *abaab* y *ababa*.

A pesar de no ser particularmente elegante, es común deducir a la fórmula cerrada de Catalan utilizando la recurrencia que acabamos de encontrar. El lector interesado puede consultar para esto al segundo apéndice de este trabajo.

2 La fórmula cerrada de los números de Catalan.

Una manera particularmente elegante para derivar a la fórmula cerrada para los números de Catalan fue encontrada por Alfred Rényi.

Los números de Catalan enumeran a la familia de los árboles binarios. Esta afirmación le queda de tarea al lector, quien podrá ver fácilmente que la familia de los árboles binarios satisface a la recurrencia de Catalan.

Imaginemos que nuestros árboles son como los árboles genealógicos, donde cada padre tiene exactamente 2 hijos, uno derecho y el otro izquierdo. (Los árboles vienen dibujados en el plano, así que podemos hablar de izquierda, derecha, arriba y abajo)

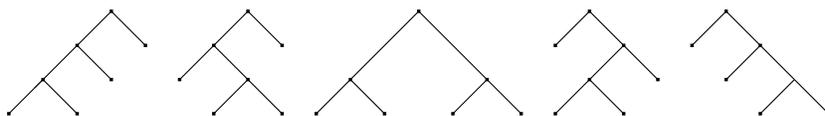


Figura 4: Los cinco árboles binarios con 3 padres.

Sea $B(n)$ el número de árboles binarios con n padres. Nuestra tarea consiste en demostrar que los árboles binarios satisfacen la recurrencia:

$$(n + 1)B(n) = 2(2n - 1)B(n - 1) \quad (n > 1)$$

El lector deberá demostrar que un árbol binario con n niños (un niño es un vértice sin descendientes) tiene exactamente $n - 1$ padres, y en consecuencia $2n - 1$ vértices.

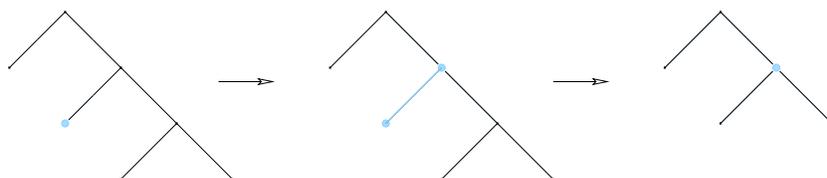


Figura 5: La biyección de Alfred Renyi.

Para demostrar la recurrencia procedemos como sigue. Construimos un árbol con n padres (de $B(n)$ maneras) y seleccionamos en él al hijo menos favorito. Los eliminamos a él y a su padre y promovemos al hermano al lugar del padre.

Obtenemos así un árbol con n vértices, donde uno de ellos, el que corresponde al hermano recién promovido, está marcado.

Para que este procedimiento sea una biyección, necesitamos recordar si el hijo menos favorito era el derecho o era el izquierdo. Tenemos dos posibilidades, y aparece entonces un factor de dos en el lado derecho de nuestra ecuación.

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} B(n) &= \frac{2(2n - 1)}{n + 1} B(n - 1) = \frac{2(2n - 1)}{n + 1} \frac{2(2n - 3)}{n} B(n - 2) \\ &= \frac{2(2n - 1)}{n + 1} \frac{2(2n - 3)}{n} \dots \frac{2(2n - 2k + 1)}{n - k + 1} \dots 3 \cdot 1 \\ &= \frac{2n(2n - 1)2(n - 1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n + 1)! n!} \\ &= \frac{1}{n + 1} \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

El lector demostró que $B(n) = C_n$. De manera que los números de Catalan vienen dados por la fórmula cerrada:

$$C_n = \frac{1}{n + 1} \binom{2n}{n}$$

3 Funciones Generatrices no conmutativas

En esta sección describimos una manera elegante de hallar a la función generatriz de Catalan. Es interesante mencionar que este fue el enfoque originalmente utilizado por Euler. La sección esta basada en el excelente libro de Flajolet y Sedgewick [2].

3.1 Triangulaciones.

Sea \mathcal{T} el conjunto formado por los poligonos triangulados.

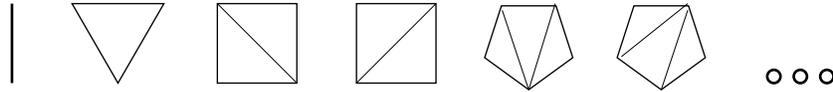


Figura 6: Los elementos de \mathcal{T} .

En la primera sección observamos que cualquier polígono triangulado podía ser descompuesto, univocamente y de manera canónica, como una sucesión consistente en un polígono triangulado, un triángulo (el que corresponde a nuestro lado favorito), y luego otro polígono triangulado.

Obtenemos entonces a la siguiente ecuación:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T} \Delta \mathcal{T}$$

Al escribir a una sucesión k conjuntos de manera consecutiva estamos definiendo un nuevo conjunto cuyos elementos se obtienen juxtaponiendo los elementos de estos conjuntos. Por ejemplo,

$$\{a, b\}\{a, c\}\{d\} = \{(a, a, d), (a, c, d), (b, a, d), (b, c, d)\}$$

Si definimos de manera canónica al lado favorito de un polígono triangulado, entonces cualquier triangulación puede ser descompuesta de manera única, tal y como se indica en La Figura 7.

Definimos el peso de un polígono triangulado como el resultado de elevar a la indeterminada z al número de triángulos que se encuentran en ella. Por ejemplo, los pesos de los poligonos triangulados que aparecen en la figura 7 son z^7 , z^3 , z y z^3 , respectivamente. Más aún, la igualdad descrita en la figura se traduce en $z^7 = z^3 \cdot z \cdot z^3$.

Sea T la función generatriz que se obtiene al sumar los pesos de todos los elementos de \mathcal{T} . La descomposición que hemos descrito se traduce en la ecuación cuadrática de Catalan:

$$T(z) = 1 + T(z) \cdot z \cdot T(z)$$

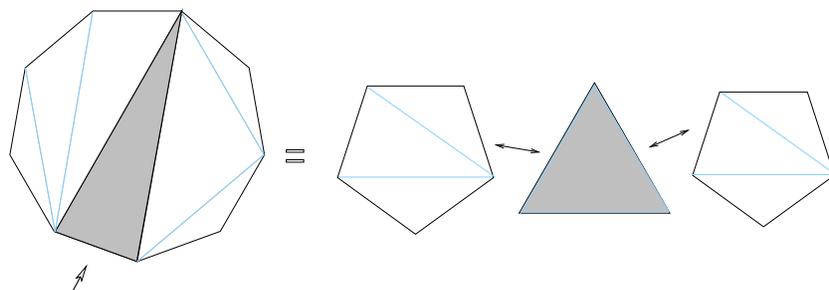


Figura 7: Descomposicion de una triangulación.

En particular, el coeficiente de z^n en el desarrollo en serie de $T(z)$ es el n -ésimo número de Catalan, C_n . (Ver sección 1).

Utilizando la fórmula del discriminante, obtenemos dos posibles soluciones de la ecuación cuadrática de Catalan:

$$T(z) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4z}}{2z}$$

$$T(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}.$$

Verificando que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = 1 = T(0)$ y que por otra parte la otra alternativa a de ser descartada ya que el $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \infty$ obtenemos que la función generatriz de Catalan:

$$T(z) = \sum_{n \geq 0} C_n z^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}$$

Por cierto, es posible evitar calcular este límite desarrollando ambas soluciones como series de potencias, y observando entonces cuál de ellas satisface nuestras condiciones iniciales, tal como lo indicamos en el primer apéndice de este trabajo.

Si el lector está familiarizado con el teorema del binomio de Newton, ya lo que queda es rutina. En caso contrario, lo invito a leer en este momento el primer apéndice de este trabajo.

Desarrollando a la función generatriz de Catalan como una serie de potencias

conseguimos una vez mas a la fórmula cerrada de Catalan:

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} z^n \\ &= 1 + z + 2z^2 + 5z^3 + 14z^4 + 42z^5 + \dots \end{aligned}$$

3.2 Árboles de Catalan.

Definimos a un árbol de Catalan como un árbol plano, con raíz, y sin etiquetas. Para aclarar los términos nada mejor que un dibujo. En la Figura 8 se encuentran los cinco árboles de Catalan con $3 + 1$ vértices.

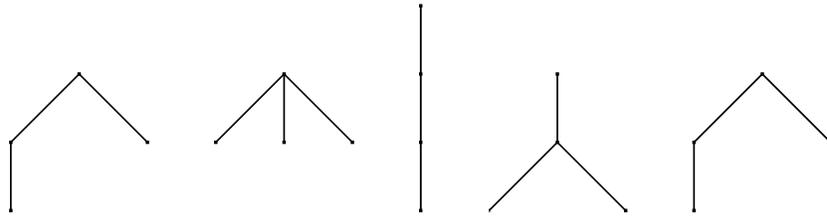


Figura 8: Los cinco árboles de Catalan con $3 + 1$ vértices.

Sea \mathcal{G} el conjunto de todos los árboles de Catalan. Se deja al lector la tarea de ver que \mathcal{G}^2 es el conjunto de los pares ordenados de árboles de Catalan, que \mathcal{G}^3 es el conjunto de todos los triples ordenados de Catalan, y en general que \mathcal{G}^k es el conjunto de todas las k -uplas ordenadas de Catalan.

Ahora viene el paso crucial. Cualquier árbol de Catalan puede ser descompuesto como un punto, (que corresponde a la raíz y que denotaremos por o), seguido por una sucesión de árboles de Catalan, que bien podría ser vacía.

$$\mathcal{G} = o \cdot (1 + \mathcal{G} + \mathcal{G}^2 + \mathcal{G}^3 + \dots) = \frac{o}{1 - \mathcal{G}}$$

Un ejemplo de esta correspondencia se encuentra ilustrado en la Figura 9.

Como en la sección anterior, le asociamos un peso a cada árbol de Catalan. En este caso, el peso de un árbol de Catalan se calcula elevando la indeterminada z al número de vértices que conforman el árbol. Sea $G(z)$ la función generatriz obtenida sumando a todos los pesos de todos los árboles en el conjunto \mathcal{G} . La ecuación anterior entre el conjunto \mathcal{G} se traduce en la siguiente ecuación algebraica que satisface su función generatriz .

$$G(z) = \frac{z}{1 - G(z)}$$



Figura 9: La descomposición de un árbol como la unión de su raíz y una sucesión ordenada de árboles.

Un razonamiento similar al utilizado en la sección 3.1 y que se dejó al lector nos permitirá desarrollar a la función generatriz $G(z)$ como serie de potencias:

$$G(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{n-1} z^n$$

y concluir que $G_n = C_{n-1}$.

3.3 Polidominos

Un polidomino es una colección de cuadrados del mismo tamaño donde cada uno de estos cuadrados está conectado con sus vecinos a través de sus lados y con los que constituye una sola pieza. En la Figura 10 se encuentra dibujado un polidomino que consiste en 13 cuadrados. En la Figura 11, se encuentran dibujados tres configuraciones que no son polidominos.

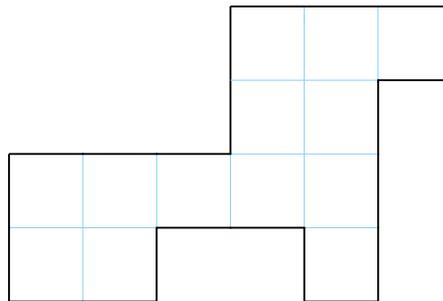


Figura 10: Un polidomino formado con 13 cuadrados.

A pesar de ser una pregunta que intriga a muchos matemáticos, nadie conoce una fórmula cerrada que permita calcular el número de polidominos que existen de un área dada, ni de un perímetro dado. Ahora, si imponemos la condición adicional que sea posible recorrer la frontera del polidomino caminando pasos norte (o este) y luego regresarse con pasos hacia el sur (u oeste) al punto de

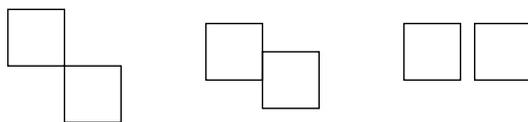


Figura 11: Configuraciones que no son polidominos.

partida, la respuesta fue hallada por Pólya en 1969, [4]. Por razones que pronto serán evidentes llamamos a esta familia los polidominos de Catalan. Describimos el resultado de Polya utilizando un argumento de Flajolet [3].

Enumeramos a esta familia de polidominos de acuerdo con su perímetro. Más precisamente, $P(n)$ es el número de polidominos de Catalan de perímetro $2n + 2$.

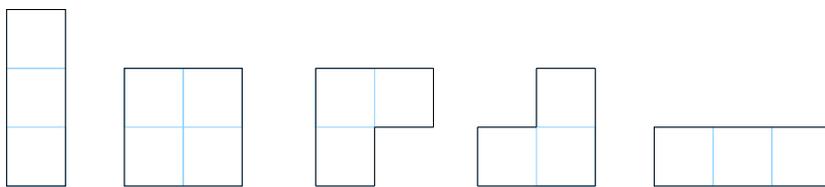


Figura 12: Los 5 polidominos de Catalan de perímetro $2 \cdot 3 + 2$.

Dados dos conjuntos \mathcal{F} y \mathcal{C} , si los elementos de \mathcal{F} se pueden identificar de manera única con sucesiones de elementos de \mathcal{C} , entonces las funciones generatrices asociadas a estos conjuntos satisfacen las siguientes ecuaciones algebraicas:

$$F = \frac{1}{1 - C} \qquad C = 1 - \frac{1}{F}$$

Cualquier pareja de caminos que empiezan y terminan en el mismo punto se puede descomponer como una sucesión de dominos de Catalan, más dos casos degenerados, que corresponden a las situaciones donde los caminos se superponen. En la Figura 13 se ilustra esta afirmación. En particular, el caso degenerado, donde ambos caminos se superponen, está señalado por una flecha. Cada polidomino de Catalan aparecerá dos veces (*¿Por qué?*).

El número de parejas de caminos, cada uno de ellos de longitud n viene dado

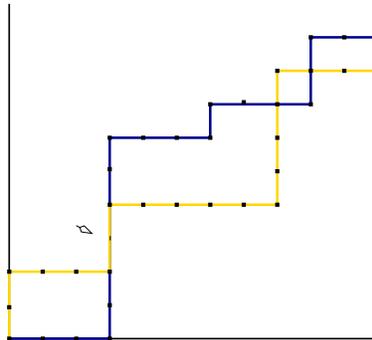


Figura 13: Una pareja de caminos que empiezan y terminan en el mismo punto.

por

$$\begin{aligned}
 F &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} z^n \\
 &= \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} z^n \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-4z}}
 \end{aligned}$$

Si el lector tiene problemas para justificar esta cadena de igualdades, entonces puede consultar el primer apéndice de este trabajo.

Así que,

$$\begin{aligned}
 C(z) &= \frac{1}{2}(1 - 2z - \sqrt{1-4z}) \\
 &= z^2 + 2z^3 + 5z^4 + 14z^5 + 42z^6 + \dots
 \end{aligned}$$

Nótese que estamos substrayendo $2z$ para evitar la ocurrencia de los casos degenerados en nuestra función generatriz.

Concluimos entonces que el número de polidominos de Catalan de perímetro $2n$ es el número de Catalan

$$\frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{n-1}$$

4 Una nueva ocurrencia de los Números de Catalan.

El Valle de Sartanejas es sede de una Olimpiada de Matemáticas. Como siempre todos los estudiantes están invitados a participar. Hay dos tipos de preguntas: Las menos difíciles valen n puntos; las demás valen $n + 1$ puntos.

Para hacer la competencia más divertida a cada jugador se le otorga una puntuación inicial de acuerdo al ranking local. El número uno del ranking empieza a jugar sin ningún punto.

Dado un número natural, no hay ninguna razón para suponer que algún estudiante esté en la posibilidad de obtenerlo. Por ejemplo, si las preguntas valen tres o cuatro puntos y todos los jugadores ocupan el mismo lugar en el ranking, entonces ningún estudiante puede sacar 1, 2, ni 5 puntos. (Todas las demás puntuaciones son posibles. ¿Por qué?)

Hay exactamente cuatro posibles escenarios más (¿Por qué?):

Que un estudiante empiece con un punto (con la posibilidad de obtener 5 puntos contestando una pregunta de 4 puntos correctamente) y nadie pueda obtener 2 puntos.

Que un estudiante empiece con 2 puntos (y con la posibilidad de obtener 5 puntos) y nadie pueda obtener 1 punto.

Que un estudiante empiece el torneo con 5 puntos, y finalmente, que existan tanto un estudiante que empiece con 1 punto, como un estudiante que empiece con 2 puntos (ambos dos con la posibilidad de obtener 5 puntos).

Pregunta: Si fijamos los valores de n (y $n + 1$), cuántos escenarios diferentes existen?

Una posible respuesta es la siguiente: (No es la misma que incluyó el profesor Richard Stanley en su Catalan Addendum, que tiene naturaleza más algebraica. ¡Espero que también sea diferente de la que conseguirá el lector!)

Llamemos S al conjunto de todas las puntuaciones posibles si todo los jugadores empiezan el torneo con 0 puntos.

Es fácil de demostrar que es posible obtener a todos los números mayores o iguales a $n(n - 1)$. Más aún, un argumento bastante estándar nos asegura que exactamente la mitad de los números entre 1 y $n(n - 1)$ pertenecen a S , [7].

Construyamos el siguiente arreglo:

1				
2	$n + 2$			
3	$n + 3$	$2n + 3$		
4	$n + 4$	$2n + 4$	$3n + 4$	
...
$n - 2$	$n(n - 2) - 2$	
$n - 1$	$2n - 1$	$3n - 1$	$n(n - 2) - 1$	$(n - 1)n - 1$

Este arreglo tiene las siguientes propiedades:

1. Los números en el arreglo son exactamente aquellos que no pertenecen a S .
2. Los números en cada línea horizontal están en progresión aritmética. (La diferencia entre los números consecutivos es n).

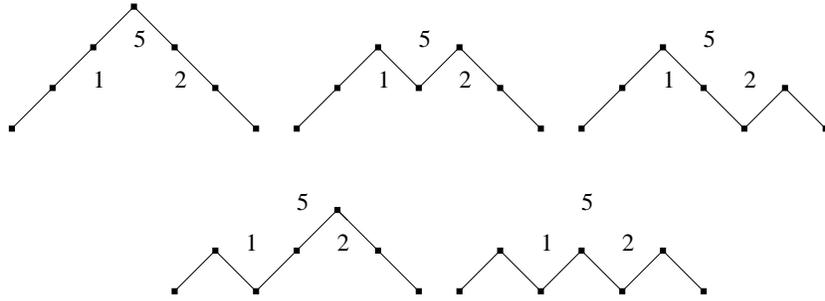


Figura 14: Biyección con los caminos de Dyck.

3. Los números en cada diagonal también están en progresión aritmética. La diferencia entre los números consecutivos es $n + 1$).

Rotemos este arreglo de manera que $(n - 1)n - 1$ se convierta en la primera fila, $n(n - 2) - 1$ y $n(n - 2) - 2$ la siguiente fila, y así hasta la última fila que será $1, 2, \dots, n - 1$. Dispongamos estos números en forma de pirámide.

Si uno de los números del arreglo rotado se torna posible por cambios en el ranking, entonces los que están inmediatamente por encima de él, se hacen posibles también. Eso permite obtener una biyección entre los escenarios posibles y los caminos de Dick. En consecuencia los posibles escenarios están contados por los números de Catalan.

Por ejemplo, en la Figura 14, está el resultado de rotar el arreglo cuando $n = 3$, así como los 5 posibles escenarios que describimos al enunciar la nueva interpretación de los números de Catalan.

5 Primer Apéndice

Queremos desarrollar como serie de potencias a la función generatriz de Catalan:

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z} = \frac{1 - (1 - 4z)^{1/2}}{2z}$$

Utilizamos al binomio de Newton para desarrollar como serie a la expresión $(1 - 4z)^{1/2}$:

$$\begin{aligned} (1 - 4z)^{1/2} &= \sum_{n \geq 0} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) \cdots (\frac{1}{2} - n + 1)}{n!} (-4z)^n \\ &= 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{(1 - 2)(1 - 4) \cdots (1 - 2n + 2)}{n!} (-2z)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{(2n-3) \cdots 3 \cdot 1 \cdot (n-1)!}{n!(n-1)!} (2z)^n \\
&= 1 - 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} z^n
\end{aligned}$$

Obtenemos entonces la fórmula cerrada para los números de Catalan.

$$\begin{aligned}
C(z) &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} z^{n-1} \\
&= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} z^n
\end{aligned}$$

6 Segundo Apéndice

La manera que se encuentra en la mayoría de los libros de texto de combinatoria para conseguir a la fórmula cerrada de Catalan a partir de la recurrencia descrita en la primera sección, es la siguiente.

Sea

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

Multiplicando la recurrencia de Catalan por z^n y sumando los resultados obtenidos para todos los valores de n obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (C_0 C_n z^n + C_1 C_{n-1} z^n + \cdots + C_{n-1} C_1 z^n + C_n C_0 z^n).$$

Ahora el lado derecho se puede describir como

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} = C^2(z).$$

Similarmente, el lado izquierdo se puede describir como

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^{n-1} = \frac{1}{z} (C(z) - 1)$$

Obtenemos entonces a la ecuación cuadrática de Catalan:

$$C(z) = 1 + zC^2(z).$$

7 Agradecimientos

Quiero agradecer a Philippe Flajolet por la historia de los números de Catalan, a Doron Zeilenberger por la biyección expuesta en la sección 2, a Richard Stanley por los problemas referentes a los números de Catalan, y a Mike Zabrocki por su sugerencia acerca de cómo plantear la nueva interpretación de los números de Catalan descrita en este trabajo.

Quiero darles las gracias a Eduardo Lima de Sá por sus acertados comentarios, y a Argimiro Arratia y al árbitro anónimo por sus sugerencias sobre cómo mejorar la presentación de este trabajo.

Por último, y con mucho cariño, quiero darles las gracias a David Seguí, Adolfo Rodríguez, Paúl Monasterio, Hector Chang y Fernando Delgado.

Referencias

- [1] Dunham, William, Euler: The master of us all. The Dolciani Mathematical Expositions, 22. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1999.
- [2] Philippe Flajolet and Sedgewick, Singular Combinatorics/ Analytcs Combinatorics.
Este libro se puede imprimir de manera gratuita de la página del profesor Flajolet: <http://algo.inria.fr/flajolet/Publications/books.html>
- [3] Philippe Flajolet, Polya Festoons, INRIA Research Report, No 1507, September 1991.
<http://algo.inria.fr/flajolet/Publications>
- [4] George Pólya, On the number of certain lattice polygons, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 6:102–105, 1969.
- [5] Richard Stanley, Enumerative Combinatorics 2
Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 62. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [6] Richard Stanley, Catalan Addendum,
<http://www-math.mit.edu/~rstan/ec>
- [7] Wilf, Herbert S, generatingfunctionology. Second edition. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994.
Este libro se puede imprimir de manera gratuita de la página del profesor Wilf: <http://www.cis.upenn.edu/~wilf/>

MERCEDES H. ROSAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
mrosas@ma.usb.ve
<http://www.ma.usb.ve/~mrosas>