

Comentarios sobre la definición de Autómata Celular^{*}

Neptalí Romero

Resumen

La finalidad primordial de estas notas es la de presentar una extensión del concepto de autómata celular proveniente de la Teoría de la Computación. Para los propósitos del artículo, enmarcamos la extensión del concepto de autómata celular en la Teoría de los Sistemas Dinámicos; y más precisamente en los Sistemas Dinámicos Discretos sobre Reticulados, apuntando hacia una visión un tanto globalizadora que incluya, entre otros ejemplos, las denominadas Aplicaciones Acopladas sobre Reticulados.

1. Introducción

La génesis de los autómatas celulares es asignada a Stanislaw Ulam y John von Neumann (década de los años 40 del siglo XX). Ulam, a partir de un conjunto de juegos para computadores, le propone a von Neumann el problema de construir un “universo abstracto” para el estudio y análisis de la reproducción automática, mecánica o robótica; ofreciendo de esta forma un marco teórico para el estudio de problemas provenientes de sistemas con comportamientos complejos y descritos por reglas sencillas.

En el primer ejemplo de autómata celular propuesto por von Neumann, el universo era un tablero infinito, cada celda del tablero asumía diferentes estados dentro de un conjunto finito de valores, y la evolución de los estados en cada una de las celdas eran gobernadas por leyes simplificadas de la Física que dependían de un número finito de parámetros. A partir de allí el estudio y desarrollo de los autómatas celulares ha venido recibiendo una notable atención

^{*} Conferencia Plenaria en las XVI Jornadas de Matemáticas. Abril 7–9, 2003. USB, Caracas

por investigadores en diferentes áreas del conocimiento. Citamos, por ejemplo, que en la Teoría de la Computación promovió el impulso del procesamiento paralelo y el procesamiento de imágenes; en la Biología han sido empleados para modelar problemas provenientes de la Genética; en la Física son usados para el estudio, entre otros, de problemas de la dinámica de fluidos; y en Química para el estudio de problemas de reacciones de difusión.

El primer ejemplo de von Neumann es un tanto complicado como para utilizarlo en un artículo de divulgación acerca de la definición de autómata celular. No obstante, existe un autómata celular que se hizo famoso en la década de los setenta del siglo pasado; se trata de denominado *Juego de la Vida*, el cual fue inventado por John Horton Conway, y mostrado como una curiosidad de Matemática Recreativa en la sección Mathematical Games de la revista Scientific American, ver [6]. Este autómata celular está modelado en \mathbb{Z}^2 , cada célula (punto del reticulado \mathbb{Z}^2) admite dos posibles estados: 0 = célula muerta y 1 = célula viva. La evolución de los estados de las células en \mathbb{Z}^2 ocurre de manera simultánea; de manera que la evolución del estado de cada célula depende del estado de ella y de los estados de sus vecinas inmediatas. La siguiente figura muestra la célula c y las células vecinas inmediatas que denotamos por v .

$$\begin{array}{ccc} v & v & v \\ v & c & v \\ v & v & v \end{array}$$

Figura 1: La evolución del valor que posee c depende de ese valor y del valor de las células etiquetadas con v

La ley que gobierna este juego es como sigue:

Si una célula muerta tiene exactamente tres vecinas vivas, éstas se reproducen y le dan vida. Si una célula viva tiene dos o tres vecinas vivas, ella permanece viva; pero si hay menos de dos vecinas vivas, muere por aislamiento. Si una célula tiene más de tres vecinas vivas, muere por superpoblación si estaba viva, y permanece muerta si ya lo estaba.

La figura a continuación muestra como las células vecinas se reproducen para darle vida a la célula c que estaba muerta.

Mucha gente comenzó, y aún lo hacen, a jugar con este juego matemático

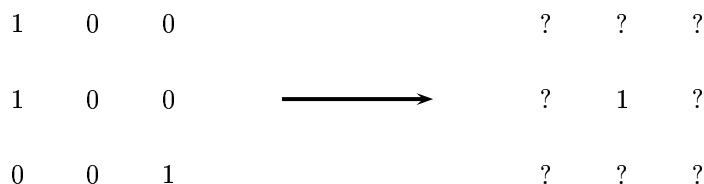


Figura 2: Los signos de interrogación que aparecen en los lugares ocupados por las vecinas de c indican la imposibilidad de asignarles un valor, no se conocen (en este caso) los estados de las células en sus respectivas vecindades inmediatas.

de Conway con el objetivo de buscar configuraciones curiosas; por ejemplo, configuraciones periódicas o preperiódicas. Versiones probabilísticas del juego de la vida han sido creadas. También se demostró que el juego de la vida es equivalente a una Máquina de Turing, motivando así el interés por la construcción de máquinas de computo en paralelo. De hecho en la actualidad se continúan construyendo máquinas de Turing soportadas sobre este autómata celular; ver por ejemplo [15].

Para concluir esta nota histórica, es necesario mencionar que en la década de los ochenta del siglo XX, se destaca el trabajo de Stephen Wolfram sobre la Teoría Computacional de los Autómatas Celulares. Haciendo uso de las ideas del primer ejemplo de von Neumann, Wolfram introduce variaciones sobre el reticulado unidimensional \mathbb{Z} . Cada punto, o célula, admitiendo dos valores: 0 y 1. La evolución del estado de cada célula regido por una regla que dependía de los estados de la propia célula y sus dos vecinas contiguas. Tal fue el entusiasmo de Wolfram que lo llevó a considerar las 256 posibles reglas bajo tales consideraciones; muchas de ellas conocidas en la actualidad por la numeración asignada por Wolfram. Muchas de estas reglas dan origen a dinámicas triviales; sin embargo en otras más interesantes, pueden observarse “fenómenos complejos” en los sistemas dinámicos definidos mediante tales reglas. Recientemente Wolfram ha publicado un libro relacionado con la autómatas celulares del cual L. Gray, en [10], hace una reseña del trabajo allí expuesto.¹

¹N. del E. : Véase también la reseña de A. Octavio sobre este libro de Wolfram en este mismo número del Boletín

2. La Definición Clásica de Autómata Celular

Es una convicción generalizada que el concepto de autómata celular proviene de la Teoría de la Computación. Antes de mostrar tal definición conviene señalar los elementos mediante los cuales se expresa, y el contexto general donde los autómatas celulares se enmarcan.

Los autómatas celulares constituyen una clase particular de sistemas dinámicos discretos sobre reticulados; estos son sistemas dinámicos que pueden expresarse mediante una ecuación en diferencia de orden uno:

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n \geq 0,$$

donde $x_n = \{x_n(i)\}_{i \in \mathbb{Z}^d}$ (d entero positivo fijo), cada $x_n(i)$ está en un espacio métrico M_i , llamado *espacio de fase en el punto* $i \in \mathbb{Z}^d$, y F es un endomorfismo (mapa de transición global) del producto topológico $M = \prod_{i \in \mathbb{Z}^d} M_i$ (espacio de configuraciones) que preserva tal estructura topológica, es decir, $F(x) = \{F_i(x)\}_{i \in \mathbb{Z}^d}$ donde $F_i : M \rightarrow M_i$. De esta forma, un sistema dinámico discreto sobre el reticulado \mathbb{Z}^d es la acción de \mathbb{N} con la evolución del sistema dada por F ; en el caso de ser F invertible la acción se extiende a \mathbb{Z} .

Veamos cuales son los elementos necesarios para definir un autómata celular en este marco general:

1. \mathbb{Z}^d es el reticulado; para cada $i \in \mathbb{Z}^d$, $M_i = \mathcal{A}$ (métrica discreta) es un conjunto finito, denominado *alfabeto*;
2. el espacio de configuraciones, $\Sigma(\mathcal{A}, d)$, es el conjunto de todas las sucesiones d -infinitas con valores en \mathcal{A} , es decir $\Sigma(\mathcal{A}, d) = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$;
3. una vecindad finita \mathbb{V} del origen en \mathbb{Z}^d ;
4. todas las posibles funciones de \mathbb{V} en \mathcal{A} , $\mathcal{A}^{\mathbb{V}}$; y
5. una función $f : \mathcal{A}^{\mathbb{V}} \rightarrow \mathcal{A}$ que es la regla que rige la evolución del autómata celular; también es conocida como *función bloque*.

Es simple chequear que $D(x, y) = 2^{-i}$ con $i = \inf\{\|n\| : n \in \mathbb{Z}^d, x(n) \neq y(n)\}$ y

$$\|n\| = \max\{|n_i| : 1 \leq i \leq d\} \quad \text{si } n = (n_1, \dots, n_d)$$

define una métrica compatible con la estructura producto; además, $(\Sigma(\mathcal{A}, d), D)$ es un conjunto de Cantor: compacto, perfecto y totalmente desconexo.

A partir de los elementos mencionados tenemos, ver [12], [18] y [19]:

Definición 1 *El autómata celular sobre el reticulado \mathbb{Z}^d con alfabeto \mathcal{A} y función bloque f , es el mapa de transición global $F : \Sigma(\mathcal{A}, d) \rightarrow \Sigma(\mathcal{A}, d)$ definido por:*

$$F(x)(n) = f(x|\mathbb{V} + n),$$

para cada $x \in \Sigma(\mathcal{A}, d)$ y cada $n \in \mathbb{Z}^d$; donde $x|\mathbb{V} + n$ denota la función de \mathbb{V} en \mathcal{A} dada por los valores que asume la sucesión x en el trasladado de \mathbb{V} por el vector d -dimensional n .

Observe que el nuevo estado de la célula ubicada en la posición n de $x \in \Sigma(\mathcal{A}, d)$, depende de los estados que tenga x en las células que conforman la vecindad de n dada por $\mathbb{V} + n$, justamente ese nuevo estado es el valor $f(x|\mathbb{V} + n)$. Por esta razón los autómatas celulares son considerados como *sistemas dinámicos espacialmente extendidos gobernados por interacciones locales*. La función f es la ley de interacción local, la cual es uniforme en el sentido que actúa sobre vecindades homogéneas de cada célula.

Ejemplo 1 *Tomemos como reticulado \mathbb{Z} , $\mathcal{A} = \{0, 1\} = \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{V} = \{-1, 0, 1\}$ y $f(a_{-1}, a_0, a_1) = a_{-1} + a_1 \pmod{2}$ (regla 90 en la nomenclatura de Wolfram). Entonces para la configuración*

$$x = \{\dots, 0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0 \dots\}$$

la evolución temporal hasta el “tiempo $n = 3$ ” se muestra en la siguiente figura:

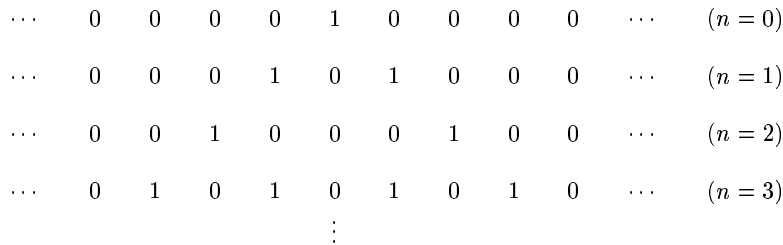


Figura 3: La primera línea es la configuración x , las restantes son las configuraciones de los sucesivos iterados por F de x hasta $n = 3$

2.1. Aplicaciones Shifts y Autómatas Celulares

En el espacio de configuraciones $\Sigma(\mathcal{A}, d)$ existe un grupo de automorfismos generado por las traslaciones en las coordenadas del reticulado \mathbb{Z}^d ; éstas son conocidas como aplicaciones shifts y son definidas, para todo $i \in \{1, \dots, d\}$, por

$$\sigma_i(x)(n) = x(n + e_i) \text{ para cada } x \in \Sigma(\mathcal{A}, d) \text{ y } n \in \mathbb{Z}^d,$$

donde e_i denota el i -ésimo vector canónico en \mathbb{R}^d . Luego es claro que σ es elemento de este grupo de traslaciones si, y sólo si, existe $q \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\sigma(x)(n) = x(n + q)$ para todo $x \in \Sigma(\mathcal{A}, d)$ y $n \in \mathbb{Z}^d$.

Observación 1 *Las aplicaciones shifts $\sigma_i : \Sigma(\mathcal{A}, d) \rightarrow \Sigma(\mathcal{A}, d)$ ($i = 1, \dots, d$) juegan un papel importante para describir el comportamiento caótico de las órbitas en determinados conjuntos invariantes (conjuntos de Cantor) en ciertos sistemas dinámicos discretos $T : X \rightarrow X$ (X espacio métrico y T continua). De hecho, los shifts σ_i son caóticos, esto significa: el conjunto de puntos periódicos son densos en $\Sigma(\mathcal{A}, d)$; existen puntos $x \in \Sigma(\mathcal{A}, d)$ tales que su órbita $(\{\sigma_i^k(x) : k \geq 0\})$ es densa en $\Sigma(\mathcal{A}, d)$. Estas dos condiciones implican que cada σ_i tiene la propiedad de sensibilidad en las condiciones iniciales: existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \Sigma(\mathcal{A}, d)$ y $\epsilon > 0$, existen $y \in \Sigma(\mathcal{A}, d)$ y $k \geq 1$ tales que $D(\sigma_i^k(x), \sigma_i^k(y)) \geq \delta$; ver [1].*

Es simple verificar que cada traslación σ es un autómata celular; además, todo autómata celular F definido en $\Sigma(\mathcal{A}, d)$ conmuta con todas las traslaciones σ . Más aún, como consecuencia de algunos resultados en [11] se tiene el siguiente teorema que permite caracterizar los autómatas celulares en términos de las aplicaciones shifts en \mathbb{Z}^d .

Teorema 1 (Curtis-Hedlund-Lyndon) *Toda $F : \Sigma(\mathcal{A}, d) \rightarrow \Sigma(\mathcal{A}, d)$ continua que conmuta con las aplicaciones shifts σ_i ($i = 1, \dots, d$) es un autómata celular.*

3. Extensión de la definición de Autómata Celular

Tomando como soporte el Teorema de Curtis-Hedlund-Lyndon se extenderá, en esta sección, el concepto de autómata celular a un contexto más abstracto, manteniendo como marco los sistemas dinámicos discretos sobre reticulados. Para ello consideremos:

1. un reticulado \mathcal{R} : conjunto con estructura discreta (topología discreta),
2. un alfabeto \mathcal{A} : espacio métrico cualquiera,
3. el espacio de configuraciones es el espacio producto

$$\mathcal{A}^{\mathcal{R}} = \prod_{r \in \mathcal{R}} \mathcal{A}_r = \{x : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}\},$$

donde $\mathcal{A}_r = \mathcal{A}$ para todo $r \in \mathcal{R}$; y

4. un subgrupo G del grupo de permutaciones (aplicaciones biyectivas) de \mathcal{R} .

Correspondiente a cada $g \in G$ se define el g -shift $\sigma_g : \mathcal{A}^{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{R}}$ como

$$\sigma_g(x)(r) = x(g(r)) = (x \circ g)(r), \text{ para todo } x \in \mathcal{A}^{\mathcal{R}} \text{ y } r \in \mathcal{R}.$$

Con estos elementos tenemos entonces:

Definición 2 *Dados \mathcal{R}, \mathcal{A} y G , decimos que $F : \mathcal{A}^{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{R}}$, continua y preservando la estructura producto, es un $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómata si conmuta con σ_g para todo $g \in G$.*

Debe observarse que si el grupo G de permutaciones en \mathcal{R} es conmutativo, entonces cada σ_g ($g \in G$) es un $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómata.

Antes de mostrar algunos casos particulares de $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómatas veamos cómo construir éstos mediante funciones bloques, tal y como fueron concebidos los autómatas celulares en la Teoría de la Computación.

Definición 3 *Un subgrupo G del grupo de permutaciones de \mathcal{R} se dice transitivo y libre de puntos fijos, si para cada $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$ existe una única $g \in G$ tal que $g(r_1) = r_2$.*

Proposición 1 *Sean \mathcal{R} un reticulado, \mathcal{A} un alfabeto y G un subgrupo transitivo y libre de puntos fijos en \mathcal{R} . Cualesquiera sean $r_0 \in \mathcal{R}$, $B = \{r_1, \dots, r_n\} \subset \mathcal{R}$ y $\phi : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}$ continua, el endomorfismo $F : \mathcal{A}^{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{R}}$ definido, para cada $x \in \mathcal{A}^{\mathcal{R}}$ y $r \in \mathcal{R}$, por*

$$F(x)(r) = \phi(x(g(r_1)), \dots, x(g(r_2))),$$

donde $g \in G$ es la única permutación que $g(r_0) = r$, es un $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómata. La función ϕ es la función bloque del autómata.

Demostración : Claramente la aplicación F así definida es continua. Mostremos que conmuta con cada g -shift de $\mathcal{A}^{\mathcal{R}}$. Fijemos $r \in \mathcal{R}$ arbitrario y tomemos el único h en G tal que $h(r_0) = r$. Para cualquier $g \in G$ y cada $x \in \mathcal{A}^{\mathcal{R}}$ se tiene:

$$\begin{aligned} (F \circ \sigma_g)(x)(r) &= F(\sigma_g(x))(r) = F(x \circ g)(r) \\ &= \phi((x \circ g)(h(r_1)), \dots, (x \circ g)(h(r_n))). \end{aligned}$$

Por otro lado, como $h(r_0) = r$, entonces $(g \circ h)(r_0) = g(r)$. Luego es claro que

$$\begin{aligned} (\sigma_g \circ F)(x)(r) &= \sigma_g(F(x))(r) = F(x)(g(r)) \\ &= \phi(x((g \circ h)(r_1)), \dots, x((g \circ h)(r_n))) \\ &= (F \circ \sigma_g)(x)(r), \end{aligned}$$

lo cual demuestra que F es un $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómata. ■

Observe que si F es un $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómata definido mediante una función bloque ϕ como en la proposición anterior, entonces la evolución del estado en cada punto del reticulado r de cualquier configuración x ($x(r) \rightarrow F(x)(r)$), depende sólo de un número finito de estados (siempre el mismo e independientes de x y r) de la configuración x en determinados puntos de \mathcal{R} únicamente definidos por r . En otras palabras, en este caso la transición global de estados está definida mediante la interacción local de los estados de cada célula y sus vecinos en una vecindad uniforme. Esto no significa que todo $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómata pueda ser expresado de tal forma. De hecho el siguiente ejemplo muestra un $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómata en el que la evolución del estado en cada punto del reticulado depende de todos los estados de la configuración.

Ejemplo 2 Tomemos $\mathcal{A} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \mathbb{Z}$ y G el grupo generado por la permutación $g(n) = n + 1$ de \mathbb{Z} ; es simple verificar que G es transitivo y libre de puntos fijos en \mathbb{Z} . Es claro que el shift asociado a g es dado por $\sigma(x)(n) = x(n + 1)$. Sea $F_0 : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $x = \{x(n) : n \in \mathbb{Z}\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ se tiene

$$F_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{x(n)}{1 + |x(n)|} 2^{-|n|},$$

entonces $F : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ definida, para cada $x = \{x(n) : n \in \mathbb{Z}\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ y $k \in \mathbb{Z}$, por

$$F(x)(k) = F_0(\sigma^k(x)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sigma^k(x)(n)}{1 + |\sigma^k(x)(n)|} 2^{-|n|},$$

es un $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómata ($F \circ \sigma = \sigma \circ F$) que no puede expresarse mediante una función bloque.

4. Algunos Casos Particulares de $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -Autómatas

En esta sección presentaremos algunos ejemplos de $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómatas que aparecen en diferentes contextos. Se han anexado, gracias a comunicaciones orales con S. Marcantognini y C. A. Di Prisco, un ejemplo relativo a operadores de Toeplitz, y una caracterización de ciertos $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómatas usando nociones del concepto de barreras de la Teoría de Conjuntos, lo cual extiende el teorema 1 de Curtis-Hedlund-Lyndon para $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómatas con $\mathcal{R} = \mathbb{Z}^d$ y \mathcal{A} discreto.

4.1. Autómatas Celulares

Los autómatas celulares de la definición 1 son obviamente $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómatas; basta tomar $\mathcal{R} = \mathbb{Z}^d$, \mathcal{A} es un conjunto finito y G es el grupo de las traslaciones en \mathbb{Z}^d , el cual es transitivo y libre de puntos fijos.

4.2. Sistemas Dinámicos Discretos

Todo sistema dinámico discreto en un espacio métrico X , $f : X \rightarrow X$, es un $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómata. Basta elegir \mathcal{R} un conjunto unitario, $\mathcal{A} = X$ y G el grupo trivial.

4.3. $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{A}, G)$ -autómatas

Consideremos el caso particular de $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{A}, G)$ -autómatas donde G es el grupo de traslaciones en \mathbb{Z}^d .

El siguiente resultado provee una propiedad general de cualquiera de estos autómatas. Aunque simple de verificar es interesante, pues muestra que todo $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{A}, G)$ -autómata se expresa mediante una función de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ en \mathcal{A} .

Proposición 2 *Si F es un $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{A}, G)$ -autómata, existe $F_0 : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que para todo $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ y $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ vale*

$$F(x)(n) = (F_0 \circ \sigma_1^{n_1} \circ \dots \circ \sigma_d^{n_d})(x),$$

donde σ_i es la traslación en el vector canónico e_i con $i = 1, \dots, d$.

Demostración : Es claro que para cada $n \in \mathbb{Z}^d$ existe $F_n : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que para todo $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$, $F(x) = \{F_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}^d}$. Dado que F conmuta con cada σ_i , entonces es simple verificar que para todo $i = 1, \dots, d$ y $n \in \mathbb{Z}^d$ se tiene $F_{n+e_i} = F_n \circ \sigma_i$. Luego, como las traslaciones conmutan entre si, el resultado sigue. ■

Para cualquier espacio métrico \mathcal{A} , el conjunto $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ dotado de la topología producto admite como una métrica que describe tal topología a $D : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \times \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow [0, +\infty)$ con $D(x, y) = 0$ si $x = y$, y

$$D(x, y) = 2^{-i}, \text{ donde } i = \inf_{n \in \mathbb{Z}^d} \{\|n\| : x(n) \neq y(n)\},$$

donde $\|n\| = \max\{|n_i| : i = 1, \dots, d\}$ si $n = (n_1, \dots, n_d)$. Por otro lado, fijados un entero no negativo k y una colección A de $(2k+1)^d$ valores a_n en \mathcal{A} (no necesariamente distintos), se define el *cilindro*

$$C(k, A) = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} : x(n) = a_n, \text{ para todo } \|n\| \leq k\}.$$

Es bien conocido que cada cilindro es abierto y cerrado; además, la colección de todos los cilindros es una base para la topología producto en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$.

La extensión más simple del teorema de Curtis-Hedlund-Lyndon, por ejemplo con \mathcal{A} compacto, es la que a continuación mostramos. Se incluye una demostración por su sencillez.

Teorema 2 Sean $\mathcal{R} = \mathbb{Z}^d$, \mathcal{A} es un espacio métrico y G es el grupo de las traslaciones de \mathbb{Z}^d . Si F es un $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómata uniformemente continuo, entonces F se expresa mediante una función bloque como en la proposición 1.

Demostración : Sabemos que existe $F_0 : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que para cada $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ y $n = (n_1, \dots, n_d)$ vale $F(x)(n) = (F_0 \circ \sigma_1^{n_1} \circ \dots \circ \sigma_d^{n_d})(x)$.

Dado que F es uniformemente continua, existe $k \geq 1$ tal que, para todo $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$:

$$D(x, y) < 2^{-k} \text{ implica } D(F(x), F(y)) < 1.$$

Esto es claramente equivalente a:

$$F_0(x) = F_0(y), \text{ siempre que } x(n) = y(n) \text{ con } \|n\| \leq k.$$

Consideremos ahora el conjunto $\mathcal{A}^{(2k+1)^d}$, cuyos elementos los entendemos como arreglos d -dimensionales $\omega = \{\omega(n) \in \mathcal{A} : \|n\| \leq k, n \in \mathbb{Z}^d\}$. Definimos

entonces la función $f : \mathcal{A}^{(2k+1)^d} \rightarrow \mathcal{A}$ por

$$f(\omega) = F_0(x) \text{ para cualquier } x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \text{ con } x(n) = \omega(n) \text{ para todo } \|n\| \leq k.$$

Note que por la continuidad uniforme de F , f está bien definida, es continua y también la función bloque que describe al autómata. ■

A continuación mostraremos otra extensión del teorema 1 para $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{A}, G)$ -autómatas, con \mathcal{A} discreto y G el grupo de las traslaciones en \mathbb{Z}^d . Esta extensión sigue muy de cerca la caracterización de funciones continuas en otro contexto, quizás un tanto más reducido, ver [9]; pero que permite extender la noción de funciones bloques empleando el concepto de barreras proveniente de la Teoría de Conjuntos.

Para cada entero no negativo k , denotamos por $D(k)$ al conjunto de todo $n \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\|n\| \leq k$. Sea \mathcal{F}_k el conjunto de funciones $f : D(k) \rightarrow \mathcal{A}$, y sea \mathcal{F} la unión de los \mathcal{F}_k con $k \geq 0$. En \mathcal{F} tenemos el orden parcial dado por:

$$f \sqsubset g \text{ si } \text{dom}(f) \subset \text{dom}(g) \text{ y } g|_{\text{dom}(f)} = f,$$

donde $\text{dom}(f)$ denota el dominio de f , y $g|_{\text{dom}(f)}$ es la restricción de g al dominio de f . Una *anticadena* en \mathcal{F} respecto de \sqsubset es cualquier colección de elementos no comparables (según \sqsubset) de \mathcal{F} .

Definición 4 (cf. [8], [9]) *Una barrera para $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ es una colección $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ tal que:*

- (i) \mathcal{B} es una anticadena respecto de \sqsubset , y
- (ii) para cada $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$, existe una única $f \in \mathcal{B}$ tal que $x|_{\text{dom}(f)} = f$.

La noción de barrera en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ está claramente relacionada con cierta colección de cilindros de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$. De hecho, para cada barrera \mathcal{B} de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ existe una única colección de cilindros \mathcal{C} en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ que describe a \mathcal{B} . En efecto, para cada $f : D(k) \rightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{B}$, sea $C(k, f(D(k)))$ el cilindro en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ formado por todos los $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ tales que $x(n) = f(n)$ para todo $\|n\| \leq k$. Si \mathcal{C} es tal colección de cilindros, entonces es obvio que dos cilindros cualesquiera en \mathcal{C} son disjuntos; además, para cada $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ existe un único $C \in \mathcal{C}$ que contiene a x . Recíprocamente, si \mathcal{C} es una colección de cilindros en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ tal que: la intersección de dos cilindros cualesquiera es vacía, y para cada $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ existe un único $C \in \mathcal{C}$ con $x \in C$, entonces \mathcal{C} determina una barrera \mathcal{B} en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$. Esto es, la definición anterior ha podido expresarse en términos de cilindros.

Teorema 3 Dado un espacio métrico discreto \mathcal{A} y el grupo G de traslaciones en \mathbb{Z}^d . Entonces:

- (i) Para cualquier barrera \mathcal{B} en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ y cualquier $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, la aplicación $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ definida, para cada $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ y $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$, por

$$F(x)(n) = \phi(f_{x,n}), \quad \text{con } f_{x,n} = (\sigma_1^{n_1} \circ \dots \circ \sigma_d^{n_d})(x) \big|_{\text{dom}(f_{x,n})} \quad (1)$$

es un $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{A}, G)$ -autómata.

- (ii) Para cada $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{A}, G)$ -autómata $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ existe una barrera \mathcal{B} y una función $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, de manera que F es expresado como en (1). La función ϕ se conoce como función bloque generalizada.

Demostración : (i) Primero veamos que F conmuta con las aplicaciones shifts σ_i ($i = 1, \dots, d$), y luego que es continua. Es claro que $(F \circ \sigma_i)(x)(n) = \phi(f_{\sigma_i(x),n})$, donde $f_{\sigma_i(x),n}$ es la única función en \mathcal{B} tal que

$$(\sigma_1^{n_1} \circ \dots \circ \sigma_d^{n_d})(\sigma_i(x)) \big|_{\text{dom}(f_{\sigma_i(x),n})} = f_{\sigma_i(x),n}.$$

Por otro lado, $(\sigma_i \circ F)(x)(n) = \sigma_i(F(x))(n) = F(x)(n + e_i) = \phi(f_{x,n+e_i})$, donde $f_{x,n+e_i}$ es la única función de \mathcal{B} tal que

$$(\sigma_1^{n_1} \circ \dots \circ \sigma_{i-1}^{n_{i-1}} \circ \sigma_i^{n_i+1} \circ \sigma_{i+1}^{n_{i+1}} \circ \dots \circ \sigma_d^{n_d})(x) \big|_{\text{dom}(f_{x,n+e_i})} = f_{x,n+e_i}.$$

Pero, como para cada $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$, $i = 1, \dots, d$ y $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ se tiene que

$$(\sigma_1^{n_1} \circ \dots \circ \sigma_d^{n_d})(\sigma_i(x)) = (\sigma_1^{n_1} \circ \dots \circ \sigma_{i-1}^{n_{i-1}} \circ \sigma_i^{n_i+1} \circ \sigma_{i+1}^{n_{i+1}} \circ \dots \circ \sigma_d^{n_d})(x),$$

entonces $f_{\sigma_i(x),n} = f_{x,n+e_i}$, por la definición de barrera; luego F conmuta con cada traslación en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$.

Ahora para mostrar la continuidad de F es suficiente verificar que la función F_0 es continua, ver proposición 2. En efecto, es claro que $F_0 : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{A}$ es dada por $F_0(x) = \phi(f_{x,0})$; como \mathcal{A} es discreto, la continuidad sigue si $F_0^{-1}(\{a\})$ es abierto para cada $a \in \mathcal{A}$. Esto último es cierto pues

$$F_0^{-1}(\{a\}) = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} : F_0(x) = a\} = \bigcup_{x \in F_0^{-1}(\{a\})} C(f_{x,0}),$$

donde $C(f_{x,0})$ es el cilindro asociado a $f_{x,0} \in \mathcal{B}$.

(ii) Sabemos que para cada $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ y $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ se tiene

$$F(x)(n) = (F_0 \circ \sigma_1^{n_1} \circ \dots \circ \sigma_d^{n_d})(x),$$

entonces la discretitud de \mathcal{A} y la continuidad de F implican que $F_0^{-1}(\{a\})$ es una unión disjunta de cilindros en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$. Denotemos esta colección por \mathcal{C}_a ; note que $F_0(C) = a$ para todo $C \in \mathcal{C}_a$. Para cada cilindro $C \in \mathcal{C}_a$, sea $f : D(k) \rightarrow \mathcal{A}$ (para algún k que depende de C) la función asociada a C ; y sea \mathcal{B}_a la colección de todas estas funciones. Luego, los elementos de \mathcal{B}_a no son comparables, y para cada $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ tal que $F_0(x) = a$, existe una única función f en \mathcal{B}_a con $x \upharpoonright_{\text{dom}(f)} = f$. De esta forma, \mathcal{B} , la unión de todos los \mathcal{B}_a con $a \in \mathcal{A}$, es una barrera en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$. Finalmente, $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ definida por $\phi(f) = a$ siempre que el cilindro C asociado a f sea tal que $F_0(C) = a$, describe a la función F_0 ; esto es, $F_0(x) = \phi(f_{x,0})$ para todo $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$. Esto implica la segunda parte del teorema. ■

4.4. Aplicaciones Acopladas en Reticulados.

Son modelos de sistemas dinámicos discretos extendidos, que a partir de los años 80, ver [13] y [14], han venido ganando considerable atención por su conveniente implementación computacional en problemas de la Física Teórica; y también por su rigurosidad en las herramientas matemáticas empleadas para el estudio de la evolución temporal y espacial de su dinámica; así lo revela el elevado número de publicaciones sobre el tema.

Una aplicación acoplada sobre el reticulado \mathbb{Z}^d y medio p -dimensional $I \subset \mathbb{R}^p$ es cualquier endomorfismo $F : I^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow I^{\mathbb{Z}^d}$ que es definido por una misma interacción local en cada componente tal y como fueron definidos inicialmente los autómatas celulares; ver definición 1. Explícitamente, fijados \mathbb{V} un conjunto finito de \mathbb{Z}^d y $f : I^{\mathbb{V}} \rightarrow I$ continua, se define F de manera que para cada $x = \{x(j) : j \in \mathbb{Z}^d\} \in I^{\mathbb{Z}^d}$ y $j \in \mathbb{Z}^d$ se tiene

$$F(x)(j) = f(x \upharpoonright_{\mathbb{V}+j}), \tag{2}$$

donde $x \upharpoonright_{\mathbb{V}+j}$ denota la función de \mathbb{V} en I dada por $k \rightarrow x(j+k)$.

En términos de un sistema de infinitas ecuaciones en diferencias de orden uno, tal y como se expresan, en algunos casos, las aplicaciones acopladas sobre reticulados, se tiene de (2) que

$$x_j(n+1) = f(x(n) \upharpoonright_{\mathbb{V}+j}) \text{ con } j \in \mathbb{Z}^d, \tag{3}$$

donde $n \geq 0$ es el tiempo (discreto) del sistema.

Observe que a diferencia de los autómatas celulares, las aplicaciones acopladas sobre reticulados tienen, en general, el alfabeto no numerable. Es simple verificar que F es un caso particular de un (\mathbb{Z}^d, I, G) -autómata donde G es el grupo de las traslaciones en \mathbb{Z}^d ; esto es, F conmuta con las aplicaciones shifts de $I^{\mathbb{Z}^d}$.

Una interesante disertación sobre el concepto de aplicaciones acopladas sobre reticulados se encuentra en [5].

4.5. Aplicaciones Acopladas en Reticulados con condiciones periódicas de frontera.

Estos son sistemas dinámicos discretos extendidos en el que también la función de transición global del sistema se expresa mediante una interacción local en vecindades uniformes; pero ahora el reticulado en lugar de ser \mathbb{Z}^d , es un producto de d reticulados finitos, digamos $\mathcal{R} = \mathbb{Z}_{\ell_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{\ell_d}$, donde $\mathbb{Z}_\ell = \{0, \dots, \ell - 1\}$ es el grupo aditivo de los enteros no negativos (*mod* ℓ). Esto corresponde a colocar condiciones periódicas de frontera en el sistema de ecuaciones en diferencia (3) empleadas para definir las aplicaciones acopladas sobre reticulados; lo que reduce el sistema de infinitas ecuaciones en diferencia a un sistema con un número finito de éstas.

La definición sigue como antes: fijados $\mathbb{V} \subset \mathcal{R}$, $I \subset \mathbb{R}^p$ y $f : I^{\mathbb{V}} \rightarrow I$ una función continua, entonces la correspondiente aplicación acoplada en \mathcal{R} es el endomorfismo $F : I^{\mathcal{R}} \rightarrow I^{\mathcal{R}}$ dado, para cada $x \in I^{\mathcal{R}}$ y $(j_1, \dots, j_d) \in \mathcal{R}$, por

$$F(x)(j_1, \dots, j_d) = f(x|_{\mathbb{V} \oplus (j_1, \dots, j_d)}), \quad (j_1, \dots, j_d) \in \mathcal{R}, \quad (4)$$

siendo $x|_{\mathbb{V} \oplus (j_1, \dots, j_d)}$ la función de \mathbb{V} en I tal que a cada $(k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{V}$ le hace corresponder el valor $x(j_1 \oplus_1 k_1, \dots, j_d \oplus_d k_d)$, donde \oplus_i denota la adición en \mathbb{Z}_{ℓ_i} . En términos de un sistema de ecuaciones en diferencia, F se expresa mediante el sistema de finitas ecuaciones en diferencias:

$$x_{(j_1, \dots, j_d)}(n+1) = f(x(n)|_{\mathbb{V} \oplus (j_1, \dots, j_d)}), \quad (j_1, \dots, j_d) \in \mathcal{R} \quad \text{y} \quad n \geq 0,$$

donde $x(n)|_{\mathbb{V} \oplus (j_1, \dots, j_d)}$ tiene la misma interpretación anterior.

Veamos como estos endomorfismos son un caso particular de (\mathcal{R}, I, G_0) -autómatas, donde G_0 es el grupo transitivo y libre de puntos fijos de permutaciones en \mathcal{R} construido como sigue. Para cada $k = 1, \dots, d$, sea g^k la

permutación en \mathbb{Z}_{ℓ_k} dada por

$$g^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \ell_k - 2 & \ell_k - 1 \\ 1 & 2 & \dots & \ell_k - 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ es decir } g^k(n) = n \oplus_k 1.$$

Entonces $g_k = i_1 \times \dots \times i_{k-1} \times g^k \times i_{k+1} \times \dots \times i_d$, con i_j la identidad en \mathbb{Z}_{ℓ_j} , define una permutación en \mathcal{R} ; cuya traslación asociada es $\sigma_k : I^{\mathcal{R}} \rightarrow I^{\mathcal{R}}$ definida, para cada $x \in I^{\mathcal{R}}$ y $(j_1, \dots, j_d) \in \mathcal{R}$, por

$$\sigma_k(x)(j_1, \dots, j_d) = x(j_1, \dots, j_{k-1}, j_k \oplus_k 1, j_{k+1}, \dots, j_d). \quad (5)$$

Se verifica que el grupo G_0 generado por $\{g_1, \dots, g_d\}$ es transitivo y libre de puntos fijos, y además que el endomorfismo F dado por (4) conmuta con σ_k para todo $k = 1, \dots, d$, ver proposición 1.

A continuación se comenta una interesante propiedad de los $(\mathcal{R}, I, \tilde{G})$ -autómatas, donde \mathcal{R} e I son como arriba y \tilde{G} es un grupo transitivo y libre generado de manera similar al grupo G_0 anterior; \tilde{G} es cualquier grupo generado por permutaciones

$$h_k = i_1 \times \dots \times i_{k-1} \times h^k \times i_{k+1} \times \dots \times i_d \quad (k = 1, \dots, d),$$

donde h^k es cualquier permutación transitiva en \mathbb{Z}_{ℓ_k} , es decir, h^k es un ℓ_k -ciclo, o equivalentemente, \mathbb{Z}_{ℓ_k} es la única órbita periódica de h^k . Entonces:

Proposición 3 *Para todo (\mathcal{R}, I, G_0) -autómata F y $(\mathcal{R}, I, \tilde{G})$ -autómata H , con G_0 y \tilde{G} como arriba, existe $T : I^{\mathcal{R}} \rightarrow I^{\mathcal{R}}$ (lineal en sus coordenadas) tal que $H = T^{-1} \circ F \circ T$. Consecuentemente, los sistemas dinámicos discretos dados por F y H tienen la misma estructura de órbitas.*

Demostración : La demostración sigue inmediatamente a partir de la siguiente propiedad algebraica: para cualquier par de ℓ -ciclos τ_1, τ_2 de \mathbb{Z}_{ℓ} , existe una permutación η en \mathbb{Z}_{ℓ} tal que $\tau_1 = \eta^{-1} \tau_2 \eta$. ■

Debido a este resultado las aplicaciones acopladas sobre reticulados con condiciones periódicas de frontera se acostumbra a denominarse *autómatas celulares reales circulares*, o más simplemente *autómatas celulares reales*, ver por ejemplo [17]. Conviene decir que para estos $(\mathcal{R}, I, \tilde{G})$ -autómatas existe una descomposición semejante a la expresada en la proposición 2.

Es frecuente encontrar en la literatura matemática los autómatas celulares reales como modelos discretos intermediarios entre los autómatas celulares y

las ecuaciones diferenciales parciales. Como es conocido, las ecuaciones diferenciales parciales son usualmente empleadas para describir fenómenos en sistemas dinámicos espacio-temporales; sin embargo, el estudio analítico de sus soluciones presenta grandes dificultades metodológicas en sistemas con comportamiento complejo. Básicamente, los resultados en esta área están restringidos a encontrar algunas soluciones simples y estudiar su estabilidad o la estimación de la dimensión de sus atractores. Por otra parte, la simulación computacional ha sido usada como una efectiva y poderosa herramienta para estudiar formas discretas de estos sistemas complejos. Esta es una de las principales motivaciones para el empleo de los autómatas celulares reales.

Estos sistemas dinámicos expresados mediante un sistema de ecuaciones en diferencia con condiciones periódicas de frontera, pueden encontrarse en el estudio de fenómenos dinámicos en diferentes contextos, por ejemplo: aparecen en [2] para modelar competencia entre diferentes empresas en el marco de modelos económicos; en [7] se estudia la hiperbolicidad de autómatas celulares reales cuadráticos mostrándose la abertura y densidad de los mismos; H. L. Smith, ver [16], emplea estos sistemas dinámicos para estudiar aplicaciones competitivas con comportamiento caótico en el marco de modelos poblacionales; y en [17] los autómatas celulares reales son usados para describir fenómenos de bifurcación de aplicaciones logísticas acopladas con una influencia lineal de sus vecinos inmediatos.

4.6. Operadores de Toeplitz

En el contexto de la Teoría de Operadores en el Análisis Matemático aparece un interesante ejemplo de $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómatas; se trata de los denominados operadores de Toeplitz. En realidad estos operadores no están definidos sobre todo el espacio de configuraciones $\mathcal{A}^{\mathcal{R}}$, y sí en subconjuntos de éste; por ejemplo en el espacio de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$ cuando $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ y $\mathcal{R} = \mathbb{Z}$.

Denotemos por \mathbb{T} el círculo unitario de \mathbb{C} . Dada una función $a \in L^\infty(\mathbb{T})$, sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ la sucesión de sus coeficientes de Fourier:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Es bien conocido, ver [3] o [4], que para toda función $a \in L^\infty(\mathbb{T})$, el operador

$T_a : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ definido, para cada $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, por

$$T_a(x) = y = \{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \text{con } y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} x_k,$$

es acotado. T_a se conoce como el operador de Toeplitz asociado a a , y la matriz $(a_{j-k})_{j,k=-\infty}^{+\infty}$ se llama matriz de Toeplitz. Es simple verificar que $\ell^2(\mathbb{Z})$ es invariante por la aplicación shift: $\sigma(x)(n) = x(n+1)$ con $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ y $n \in \mathbb{Z}$; además, T_a conmuta con σ . Esto es, $\ell^2(\mathbb{Z})$ es un subshift de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ y T_a es un $(\mathbb{Z}, \mathbb{C}, G)$ -autómata restringido a $\ell^2(\mathbb{Z})$, donde G es el grupo de las traslaciones en \mathbb{Z} .

Agradecimientos: Me gustaría agradecer a C. A. Di Prisco por sus comentarios sobre el tema. Es necesario mencionar también que el concepto extendido de autómata celular, y algunos tópicos abordados, provienen de las discusiones con los colegas J. Delgado, A. Rovella, F. Vilamajó y R. Vivas; todos con inquietudes intelectuales en el entorno de los autómatas celulares reales y la dinámica de endomorfismos.

Referencias

- [1] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis and P. Stacey. (1992), *On the Devaney's definition of chaos*, Amer. Math. Monthly. 332-334.
- [2] G. I. Bischi and L. Gardini. (2000), *Global Properties of Symmetric Competition Models with Riddling and Blowout Phenomena*. Discrete Dynamics in Nature and Society. **5**, 149–160.
- [3] A. Böttcher, S. M. Grudsky and B. Silbermann. (1997) *Norms of Inverses, Spectra, and Pseudospectra of Large Truncated Wiener-Hops Operators and Toeplitz Matrices*, New York J. Math. **3**, 1–31.
- [4] A. Bötcher and B. Silbermann. (1999) *Introduction to large truncated Toeplitz matrices*. Springer, New York.
- [5] L. Bunimovich. (1995), *Coupled map lattices: one step forward and two steps back*, Physica D. **86**, 248–255.
- [6] J. H. Conway. (1970), *Mathematical Games*, Sci. Amer. **223**, 120–123.

- [7] J. Delgado, N. Romero, A. Rovella and F. Vilamajó. (2003), *Hyperbolicity in Quadratic Real Cellular Automata*. Preprint.
- [8] C. A. Di Prisco. (2003), *Barreras y Canonización de Particiones*. Temas Avanzados de Teoría de Conjuntos. Preprint UCV.
- [9] C. A. Di Prisco and S. Todorcevic. (2003), *Remarks on shift preserving continuous functions*. Preprint IVIC.
- [10] L. Gray. (2003), *A Mathematician Looks at Wolfram's New Kind of Science*, Notices of AMS. **50(2)**, 200–211.
- [11] G. Hedlund. (1969), *Endomorphisms of the shift dynamical systems*, Ergodic Theory and Dynamical Systems. **3**, 320–375.
- [12] M. Hurley. (1990), *Attractors in cellular automata*, Ergodic Theory and Dynamical Systems. **10**, 131–140.
- [13] K. Kaneko, ed. (1993), *Theory and Applications of Coupled Map Lattices*. John Wiley & Sons Ltd, London.
- [14] K. Kaneko. (1989), *Pattern dynamics in spatiotemporal chaos*, Physica D. **34**, 1–41.
- [15] P. Rendell. (2001), *A Turing Machine in Conway's Game Life*. Preprint.
- [16] H. L. Smith. (1998) *Planar Competitive and Cooperative Difference Equations*. Journal of Difference Equations and Applications. **3**, 335–357.
- [17] J. Weitkämper. (1993), *A study of bifurcations in a circular real cellular automaton*, Int. Journal of Bifurcations and Chaos. **3(2)**, 293–321.
- [18] S. Wolfram. (1984), *Computation Theory of Cellular Automata*, Commun. Math. Phys. **96**, 15–57.
- [19] S. Wolfram. (1986), *Cellular Automata, Theory and Applications*, World Scientific.

NEPTALÍ ROMERO
UNIVERSIDAD CENTRO OCCIDENTAL LISANDRO ALVARADO
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
APARTADO POSTAL 400. BARQUISIMETO, VENEZUELA
E-MAIL: nromero@uicm.ucla.edu.ve