

MATEMÁTICAS RECREATIVAS

π : la letra griega que los griegos no usaron

Douglas Jiménez

Así como *anecdotario* es el nombre que damos a una colección –escrita, o mantenida de cualquier otra forma– de anécdotas y *bestiario*, la palabra con la que reconocemos la colección de fábulas referentes a seres míticos o extraordinarios; creo que podemos sin temor denominar *absurdario* al conjunto de los hechos que nos llaman la atención por caer en terrenos en los que, no sin cierta pizca de humor negro, queda incómodamente confusa cualquier mente racional, por poderosa que sea su armazón lógica.

Los elementos que componen el absurdario podrían encontrarse dondequiera que se vea la actividad del Hombre. Se dice que Einstein afirmó: “Sólo hay dos cosas infinitas: el universo y la estupidez humana; de la primera no estoy tan seguro”. Sin embargo, cuando se mezclan algunas de estas actividades parece haber una cierta tendencia a engrosar el volumen de la colección; por ejemplo, la mezcla de política con ciencia. Quizás con muy mala intención por parte de sus adversarios, se hizo correr la “anécdota” de que un concejal barquisimetano, ante la imposibilidad de hacer llegar agua a una población usando un sistema que violaba la ley de la gravedad, propuso sin ninguna mortificación derogar de inmediato tal impertinente ley.

En beneficio del personaje, y a pesar de su vistosa ignorancia, me atrevo a pensar que la anécdota es forzada. También creo que subraya maliciosamente nuestro subdesarrollo. Para incomodar a sus autores, puedo contar un hecho del absurdario que, aunque sucedió en 1897, tuvo lugar en los, ya para entonces, muy avanzados Estados Unidos. Se trata de que el Senado discutió, muy seriamente, un proyecto de ley destinado a fijar un valor oficial de la constante π , de hecho el valor $\pi = 3$, que coincide con lo establecido en la Biblia. Este proyecto de ley fue presentado por el senador Taylor Record, a instancias de un médico que respondía al nombre de Edwin Goodwin, quien se afirmaba descubridor de tal verdad, adeudada desde hacía mucho tiempo atrás a las sagradas escrituras.

No contentos con tan llamativa proposición, la propuesta N° 246 –que así se identificó–, llevaba la encomienda de reservar este valor para el uso gratuito exclusivo del estado de Indiana y sus instituciones educativas, mas cualquier otro estado que pretendiera hacer uso de él debía pagar las correspondientes regalías. Uno de los argumentos que sostenía tan coloridas propuestas era el hecho de que el artículo, en el que el simpático Dr. Goodwin había escrito su “descubrimiento”, salió publicado en el *American Mathematical Monthly*, la publicación matemática de mayor prestigio de los Estados Unidos. Se cuidaron, eso sí, de decir que la publicación llevaba esta nota: “Publicado por requerimiento

del autor”; uno podría suponer que luego de este disparatado proceso, el AMM comenzó a aplicar el celo actual en la selección de sus artículos, que la hace hoy un punto de referencia universal en la divulgación del saber matemático.

El proceso supuso para los senadores la burla pública por parte de los periódicos locales. El orden fue recuperado por un matemático, C. A. Waldo, quien, aparentemente de forma accidental, asistió a los debates e informó a los legisladores del absurdo en el que habían caído. La propuesta se guardó para “discusión posterior”. Por supuesto, nadie ha vuelto a reclamarla.

Esta arrancada con tono de chanza, viene por el camino de la disculpa, pues me siento forzado a advertir a los lectores que el título del artículo no es otra cosa que un fraude. Porque si nos atenemos a él, es de esperar encontrar en lo que viene referencias seguras a la notación usada por los matemáticos griegos o a cosas por el estilo. A donde quiero ir, sin embargo, es a otro lugar: la historia inicial de la famosa relación constante circunferencia/diámetro.

Sin embargo, para no hacer de esto una desilusión total, es saludable advertir que la letra π para indicar esta relación constante fue usada por vez primera por William Jones, en 1706. Antes de esto, las menciones a la constante o bien eran textuales explícitas, es decir “*relación constante circunferencia/diámetro*” o bien adoptaban formas como $\frac{\pi}{\delta}$, en las que π era la inicial de $\pi\epsilon\rho\iota\phi\epsilon\rho\epsilon\iota\alpha$ (circunferencia) y δ la de $\delta\iota\alpha\mu\epsilon\tau\rho\varsigma$ (diámetro).

La iniciativa de Jones fue seguida (con o sin conocimiento de causa) por Euler, quien adopta el símbolo (y el propósito) de manera definitiva en 1748 en su *Introductio in analysin infinitorum* y publicaciones posteriores.

Entre algunas idas y venidas de otros escritores menos notables, Legendre le da carta de bienvenida al símbolo en sus *Elements de Geometrie*, el primer libro de texto elemental en el que π se usa con el significado que hoy tiene entre nosotros.

De todo lo anterior resalta con claridad un aspecto importante de la enseñanza de la historia de la matemática, que tiene que ver con el uso de símbolos modernos para referirse a descubrimientos antiguos. Por ejemplo, cuando se dice que Arquímedes descubrió que

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

quizá el primer sorprendido con tal afirmación sería el propio Arquímedes.¹ Sin embargo, quizás entendería mejor si traducimos la ecuación anterior diciendo que el triángulo parabólico (es decir la figura formada por dos lados de un cuadrado y una sección de parábola, incluyendo su vértice) cabe tres veces dentro del cuadrado.

¹Este juego temporal es un poco perverso, pero sólo tiene sentido pedagógico.

Y esta nota nos queda como anillo al dedo para entrar en nuestra materia pues de lo que queremos hablar es de áreas y longitudes. En particular, para los matemáticos griegos antiguos, conseguir el área de una figura equivalía a comparar la figura con otra, como hizo Arquímedes con el triángulo parabólico y el cuadrado. De hecho, el cuadrado, la figura rectilínea perfecta por excelencia, se impuso desde el principio como el principal patrón de comparación. De allí que la palabra “*cuadratura*” fuera utilizada como una forma de referirse a lo que hoy denominamos cálculo del área.

Se puede expresar matemáticamente el problema anterior usando el siguiente enunciado: *Dada una figura cualquiera, construir un cuadrado que tenga su misma área*. Ahora bien, en este enunciado el verbo “construir” tiene un significado *sui generis*, que fue el que le dieron los propios griegos. Significa *construir con regla y compás* o, en otras palabras, mostrando un conjunto finito de rectas y circunferencias en cuyas intersecciones y segmentaciones aparezca el cuadrado buscado. Desconocer esta restricción ha sido (como bien me apunta Argimiro Arratia) fuente permanente de falsas concepciones y apoyo lunanco de los cuadradores del círculo, a quienes nombraremos varias veces en este artículo.

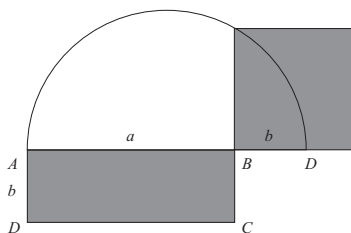


Figura 1: Cuadratura del rectángulo

Como es sabido, el conocimiento matemático de la Grecia antigua se gesta desde los tiempos de Tales y Pitágoras, pero la primera obra conocida que resume todo este trabajo son los famosos trece libros que Euclides, su autor, identificó como *Elementos*. Por esta razón cuando echemos mano a algún resultado conocido por los matemáticos griegos indicaremos en qué lugar de los *Elementos* puede encontrarse dicho resultado. Volviendo entonces al tema de las cuadraturas, el problema más sencillo de plantear es el de encontrar un cuadrado equivalente a un rectángulo dado. La solución de este problema está en la proposición VI,13 (proposición 13 del sexto libro de los *Elementos*) en la que se muestra cómo construir un segmento que sea media geométrica entre otros dos. La construcción en cuestión se ilustra en la figura 1 donde vemos una circunferencia cuyo diámetro es la suma de los lados del rectángulo y en el punto de enlace de ambas longitudes dibujamos una perpendicular al diámetro hasta la circunferencia: el segmento así generado es el lado del cuadrado buscado.

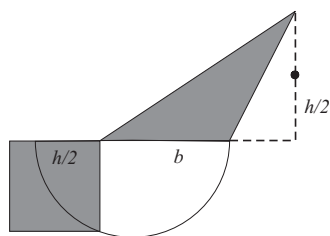


Figura 2: Cuadratura del triángulo

La cuadratura de un triángulo, por su parte, se sustenta en la proposición I,10 (*Dividir en dos partes iguales una recta finita dada*) y en la cuadratura anterior, pues bastaría prolongar la base del triángulo en la mitad de la altura del triángulo y tomar la media geométrica de estas dos cantidades como el lado del cuadrado buscado. (Figura 2.)

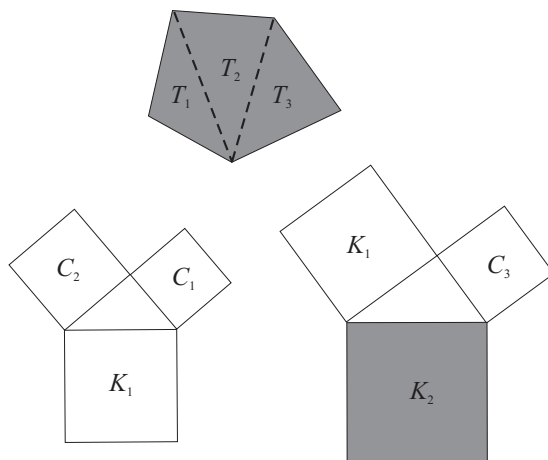


Figura 3: Cuadratura de polígonos

Con estas herramientas a la mano es sencillo cuadrar cualquier polígono por triangulación y aplicaciones repetidas del teorema de Pitágoras (proposición I,47 de los *Elementos*). Así, el polígono de la figura se descompone en los triángulos T_1 , T_2 y T_3 cuyas cuadraturas producen los cuadrados C_1 , C_2 y C_3 de lados c_1 , c_2 y c_3 , respectivamente. Una aplicación del teorema de Pitágoras nos da un cuadrado K_1 de área $c_1^2 + c_2^2$ y la siguiente el cuadrado K_2 de área $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$. (Figura 3.)

(Al margen: la construcción de los triángulos rectángulos exigidos se sustenta en las proposiciones I,2 y I,11. La primera permite construir segmentos de cualquier tamaño y la segunda, ángulos rectos en puntos dados de un segmento.)

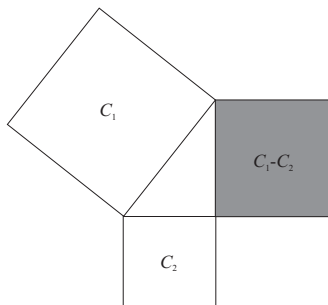


Figura 4: Diferencia de cuadrados

Dados dos cuadrados de diferentes áreas, puede construirse un cuadrado cuya área sea la diferencia entre las áreas de los cuadrados dados. Para ello, a diferencia del procedimiento usado con los polígonos que construye los cuadrados sobre las hipotenusas, en este caso el cuadrado “diferencia” se construye sobre un cateto, tal como se muestra en la figura 4. Evidentemente, este procedimiento permitiría cuadrar figuras que pueden obtenerse por “sustracción” como, por ejemplo, un trapecio isósceles.

Sin embargo, todos estos procedimientos sólo funcionan bien cuando se trata de cuadrar figuras poligonales, mas no para regiones cuya frontera es curva como por ejemplo, el círculo. En este sentido, hay un resultado recogido en los *Elementos* que es clave en todo este asunto: la proposición XII,2: *Los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros*. En el lenguaje moderno, si C_i es el área de un círculo i de diámetro d_i , entonces²

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2},$$

independientemente de los círculos C_1 y C_2 .

La proposición anterior, que hoy la expresamos como $A = \pi r^2$, está demostrada en los *Elementos* con una base teórica provista por uno de los mejores discípulos de Platón, el matemático Eudoxo. Se conoce como *método de exhaustión* y es uno de los antecedentes del moderno cálculo integral. La demostración procede por comparación del área del círculo con las áreas de los polígonos regulares inscritos y circunscritos y el análisis de las pequeñas diferencias entre

²Usaremos C_i como el área del círculo o, a veces, como el círculo mismo. El contexto nos ayudará. Lo mismo haremos con otras figuras, sean o no circulares.

estas áreas, que se reducen al aumentar el número de lados de los polígonos. Sin embargo, demostraciones como éstas, basadas en procesos que potencialmente estamos en capacidad de repetir cuantas veces deseemos, es decir lo que hoy llamamos procesos infinitos, mostraban la dificultad de conseguir la cuadratura del círculo y retaban a los espíritus inquisidores.

(Por cierto, se supone que la constancia de la razón circunferencia/diámetro fue demostrada con el uso de este método mas, hasta donde llegan mis averiguaciones, no existe verificación escrita de tal demostración, al punto de no aparecer en ningún lugar de los *Elementos*. Sin embargo, como tendremos oportunidad de ver más adelante, se usaba con entera libertad y confianza, lo que hace suponer, tomando en cuenta la minuciosidad y acuciosidad de los matemáticos griegos antiguos, que tal demostración gozaba de cierta difusión.)

La proposición XII,2 de Euclides se atribuye a un matemático del siglo V a.C. que tiene el mismo nombre de un también famoso médico griego: Hipócrates. El nuestro (el matemático) era originario de la isla de Chios y fue el primero que, motivado por la imposibilidad de conseguir la cuadratura del círculo,

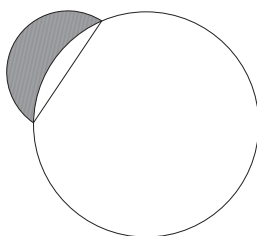


Figura 5: Lúnula

llevó las soluciones de cuadraturas más allá de las figuras con fronteras poligonales. Hipócrates logró cuadrar una figura que conocemos como *lúnula* y que mostramos en la figura 5.

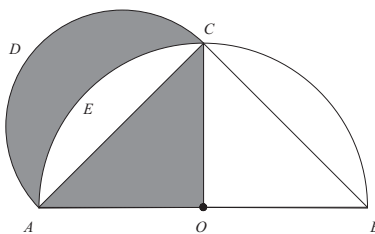


Figura 6: Lúnula de Hipócrates

Hipócrates comprobó que es posible cuadrar lúnulas como, por ejemplo, la mostrada en la figura 6 en donde el triángulo $\triangle AOC$ es recto en O , el cual es el centro de la circunferencia de diámetro \overline{AB} . Podemos seguir, con nuestras notaciones actuales, la esencia de la demostración de Hipócrates. Antes de ello, es bueno acotar que las herramientas que necesitó Hipócrates para su demostración las recogió Euclides de la siguiente manera:

Proposición I,47 Teorema de Pitágoras.

Proposición III,31 *En un círculo el ángulo en el semicírculo es recto.* Es decir: el ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

Proposición XII,2 *Los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros.*

A continuación, la demostración. Usaremos la siguiente nomenclatura:

Γ : semicírculo ADC

Θ : semicírculo ACB

Υ : cuadrante AOC

Ω : región entre el arco AEC y la cuerda \overline{AC}

Por III,31 y I,47,

$$(AC)^2 = \frac{1}{2}(AB)^2 \quad (1)$$

Por (1) y XII,2

$$\frac{\Gamma}{\Theta} = \frac{1}{2}$$

Lo que conduce a que $\Gamma = \Upsilon$.

Por otra parte, de

$$\Lambda = \Gamma - \Omega \quad \text{y} \quad (\triangle AOC) = \Upsilon - \Omega,$$

se deduce directamente que

$$\Lambda = (\triangle AOC).$$

Dado que el triángulo es una figura cuadrable, este resultado garantiza por transitividad que la lúnula también lo es.

La lúnula es una figura cuya construcción es más difícil que la del círculo, lo que hace pensar, a partir de este éxito hipocrático, que si la primera es cuadrable debe serlo el segundo. Sin embargo, sabemos que las cosas no eran tan fáciles, aunque desde esa misma época comenzaron a aparecer los *cuadradores de círculo*, especie humana caracterizada por una extraordinaria persistencia aún en las condiciones más adversas para ellos. Esta frase identifica a todos y cada

uno de los particulares personajes que han creído tener (y, algunos, defendido hasta extremos absurdos³) una demostración de la cuadratura del círculo. Se comenta, aunque sin la base histórica necesaria para aceptar el comentario con

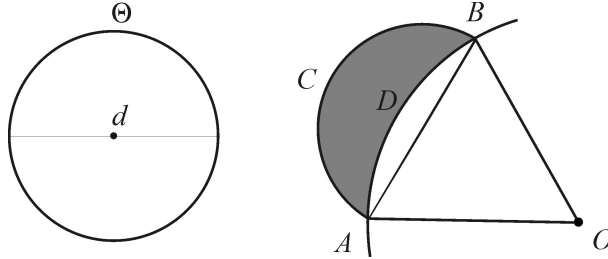


Figura 7: “Cuadratura” del círculo

alguna seguridad, que uno de los primeros cuadradores del círculo fue el propio Hipócrates. La “demostración” que se le adjudica está basada en la construcción de una lúnula sustentada en uno de los lados de un hexágono regular inscrito en un círculo. Como todos sabemos (o podemos deducir), el lado de tal hexágono es igual al radio del círculo. La pretendida demostración puede seguirse con la ayuda de la figura 7.

Sea Θ un círculo de diámetro d y construyamos, usando el lema anterior, el hexágono regular inscrito en el círculo de radio d y centro O , uno de cuyos lados se muestra en la figura 7, lado que se tomó de base para construir la lúnula $ADBC$, que identificaremos con la letra Λ . Si Υ representa al semicírculo ABC , es claro que $\Theta = 2\Upsilon$, por lo cual, si es posible cuadrar Υ también será posible cuadrar Θ .

Para fijar ideas, denominemos Γ al sector circular limitado por el ángulo $\angle AOB$ y el arco ADB . Entonces

$$(\triangle AOB) + \Upsilon = \Gamma + \Lambda.$$

También, por la proposición XII,2

$$\Gamma = \frac{2}{3}\Upsilon.$$

Por lo tanto

$$(\triangle AOB) + \Upsilon = \frac{2}{3}\Upsilon + \Lambda,$$

lo que conduce a

$$\Upsilon = 3[(\triangle AOB) - \Lambda].$$

³Como muestra, recuérdese al Dr. Goodwin, el promotor del proyecto de ley N° 246.

En consecuencia, como tanto $\triangle AOB$ como Λ son cuadrables, se tiene que Υ lo es.

Una de las razones que lleva a dudar de la autoría de Hipócrates sobre esta “demostración”, es que si fue lo suficientemente hábil como matemático para producir la proposición XII,2 de Euclides y cuadrar la lúnula construida sobre el lado del cuadrado inscrito, sería torpe de su parte no observar que la lúnula que se usa en el argumento presente está construida sobre el lado de un hexágono regular y por tanto no ha sido cuadrada, como se afirma en el razonamiento.

Pero seguir con los intentos de cuadrar el círculo –degollados de una vez por todas con la demostración de Lindemann en el siglo antepasado, (aunque, como los reptiles, mantienen el movimiento de la cola luego de muertos)– harían de éste un artículo triste. Por lo cual, parece más sensato orientarnos hacia los caminos en los que el estudio del círculo se tornó productivo e inspirador. Sin duda que en este aspecto quien recoge los mas cerrados aplausos es Arquímedes, en particular con su pequeña obra *Medida del círculo*, de la que queremos comentar algunos puntos.

Sabiendo que hay una razón constante entre la circunferencia de un círculo y su diámetro, así como también una razón constante entre el área de un círculo y el cuadrado de su diámetro, Arquímedes se interrogó sobre la relación entre estas dos constantes. Manteniendo la línea de pensamiento griego orientada

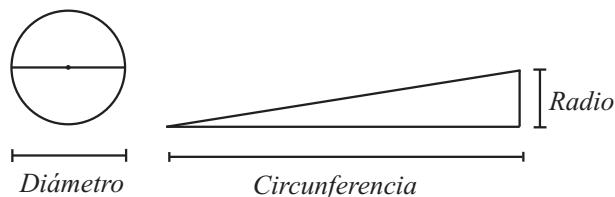


Figura 8: Fórmula $A = \pi r^2$

hacia la comparación de figuras, Arquímedes demuestra que cualquier círculo “es igual” (es decir, tiene la misma área) que un triángulo rectángulo uno de cuyos catetos es igual al radio del círculo y el otro igual a la circunferencia del círculo, como se muestra en la figura 8. La demostración de esta equivalencia es una joya intelectual tallada con dos herramientas que el analista de hoy maneja con soltura, pero que para la época en que fueron aplicadas significaron un salto intelectual de magnitud incalculable.

La primera de estas herramientas se puede formular así: si una serie de pasos consecutivos lleva a un límite, entonces la diferencia entre el límite y alguno de los pasos puede hacerse todo lo pequeña que uno quiera. Por ejemplo, si representamos el área de un círculo por C , por a_n el área del polígono regular de n lados inscrito en el círculo y por A_n el área del polígono regular circunscrito,

entonces dado un número positivo ε por pequeño que sea, siempre se encontrarán valores de n para los que $C - a_n < \varepsilon$ y $A_n - C < \varepsilon$.

La otra herramienta la conocemos como *tricotomía* y establece que dados dos números cualesquiera a y b (hoy por supuesto, aclaramos que se habla de números reales, en los tiempos de Arquímedes no había otros), una y sólo una de las tres proposiciones siguientes puede ser verdadera:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

La demostración arquimediana está basada justamente en que entre el círculo y el triángulo rectángulo de la figura 8 la primera y la última proposiciones son imposibles. El razonamiento es una exposición magistral del método de reducción al absurdo, que para los antiguos griegos era una forma predilecta de razonamiento; en este caso se trata de dos reducciones al absurdo. Antes de proseguir, recordamos que el área de un polígono regular de n lados se calcula por la fórmula $A_n = \frac{1}{2}P_n H_n$, en donde P_n representa el perímetro del polígono y H_n la apotema, esto es, la distancia desde el centro del polígono hasta cualquiera de los lados del mismo.⁴ Denotemos también por c la longitud de la circunferencia y por R el área del triángulo rectángulo de la figura 8.

Supongamos primero que $C > R$, es decir, $C - R > 0$. Entonces, existe a_n tal que $C - a_n < C - R$, de donde $R < a_n$. Ahora bien, el perímetro p_n del polígono inscrito es menor que c , la longitud de la circunferencia del círculo y su apotema h_n es menor que el radio. (Ver figura 9.) Luego $a_n = \frac{1}{2}p_n h_n < \frac{1}{2}cr = R$, lo cual significa una contradicción.

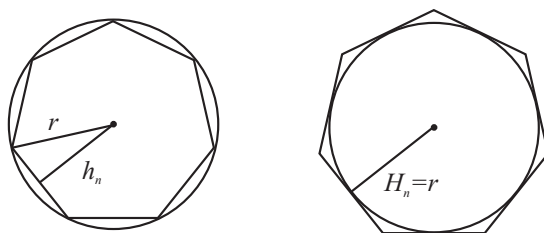


Figura 9: Polígonos inscritos y circunscritos

Por otra parte, si suponemos que $C < R$ se tiene que $R - C > 0$. Por lo tanto, existe A_n tal que $A_n - C > R - C$, es decir, $A_n > R$. Pero el perímetro P_n del polígono circunscrito es mayor que c , la longitud de la circunferencia y su apotema H_n es igual al radio del círculo (ver figura 9), por lo cual $A_n = \frac{1}{2}P_n H_n > \frac{1}{2}cr = R$, lo que también es contradictorio.

⁴Hemos usado la notación correspondiente a los polígonos circunscritos pero, en general, se aplica a cualquier polígono.

La posteridad llamó π a la razón constante circunferencia/diámetro, es decir, si c es la circunferencia de un círculo y d su diámetro debe tenerse $c = \pi d$. Hipócrates (se supone) demostró que hay una razón constante entre el área del círculo y el cuadrado de su diámetro, proposición que Euclides recogió en su proposición 2 del libro XII. Esto es, si C es el área de un círculo de diámetro d entonces $C = kd^2$, donde k es la constante de la proposición hipocrática. Arquímedes entonces logra, con la proposición que analizamos arriba, establecer la relación entre estas constantes.

Porque si el triángulo rectángulo tiene como catetos la circunferencia y el radio del círculo entonces su área es

$$R = \frac{1}{2}(\pi d)r = \frac{1}{2}\pi d \cdot \frac{1}{2}d = \frac{1}{4}\pi d^2.$$

Pero como $R = C$, esto significa que $k = \frac{1}{4}\pi$. Lo que, en resumen se traduce en la forma

$$c = 2\pi r, \quad C = \pi r^2,$$

que es como las manejamos usualmente hoy en día.

Medida del círculo es uno de esos libros que pueden compararse a un joyero: lo pequeño de su tamaño no da la medida del valor que lleva en su interior. Si la joya anterior no bastara podemos apreciar otra: la determinación del valor

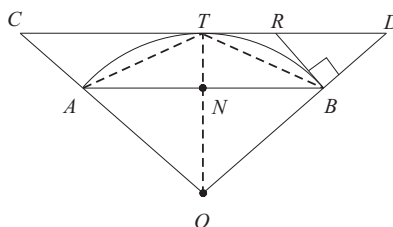


Figura 10: Determinación del valor de π

de π dentro de un intervalo de longitud $\frac{1}{497}$. Veamos los detalles, apoyándonos en la figura 10.

La proposición III,36 de Euclides establece: *Si se toma un punto fuera de un círculo y de él al círculo caen dos rectas, y una de ellas corta el círculo y la otra lo toca, el rectángulo (comprendido) por la secante entera y la (parte) exterior tomada entre el punto y la circunferencia convexa es igual al cuadrado de la tangente.* Esta proposición establece lo que hoy conocemos con el nombre de *potencia de un punto respecto a una circunferencia*, pero para el objetivo presente es importante porque nos permite establecer un rápido corolario: *los*

dos segmentos trazados desde un punto exterior de una circunferencia tangentes a la misma tienen igual longitud.

El arco ATB está subtendido por el lado \overline{AB} del n -gono regular inscrito en la circunferencia de centro O y radio OA ; por su parte, \overline{CD} es el lado (paralelo a \overline{AB}) del n -gono regular circunscrito y T es el punto de tangencia de este lado con la circunferencia. El punto N es el corte entre \overline{OT} y \overline{AB} .

Es claro entonces que las líneas punteadas \overline{AT} y \overline{TB} son los lados del $2n$ -gono regular inscrito en la circunferencia. Nos ayudará la línea auxiliar \overline{BR} , tangente a la circunferencia en B , con R situado sobre \overline{TD} ; este segmento es la mitad del lado del $2n$ -gono circunscrito y, por el corolario a III,36 se tiene que $TR = BR$.

Como anteriormente, denotaremos con P_n el perímetro del polígono regular circunscrito de n lados, y con p_n el perímetro del polígono regular inscrito. Haremos un par de afirmaciones que se refieren a las líneas del dibujo de la figura 10.

TR es media armónica entre TD y NB ; es decir,

$$\frac{1}{TR} = \frac{1}{TD} + \frac{1}{NB}.$$

Veamos. La semejanza $\triangle DBR \sim \triangle DTO$ lleva a la proporción

$$\frac{RB}{TD - TR} = \frac{OT}{OD}.$$

De la misma forma, la semejanza $\triangle DTO \sim \triangle BNO$ produce la proporción

$$\frac{NB}{TD} = \frac{OB}{OD},$$

y ambas proporciones conducen a

$$\frac{TR}{TD - TR} = \frac{NB}{TD},$$

que es, en esencia, el resultado buscado.

TB es la media geométrica entre AB y TR , es decir

$$\frac{AB}{TB} = \frac{TB}{TR}.$$

La misma proporción sugiere la semejanza de triángulos que hay que establecer.

Finalmente, la afirmación principal es: La mitad de P_{2n} es la media armónica entre P_n y p_n , mientras que p_{2n} es la media geométrica entre P_{2n} y p_n .

En efecto:

$$P_n = 2nTD; \quad p_n = nAB = 2nNB$$

$$P_{2n} = 2n(2BR) = 4nTR; \quad p_{2n} = 2nTB$$

Es decir:

$$TD = \frac{P_n}{2n}; \quad NB = \frac{p_n}{2n}$$

$$AB = \frac{p_n}{n}; \quad TB = \frac{p_{2n}}{2n}$$

Por la relación de media armónica ya descrita:

$$\frac{2}{P_{2n}} = \frac{1}{P_n} + \frac{1}{p_n},$$

y, por la relación de media geométrica

$$\frac{P_{2n}}{p_{2n}} = \frac{p_{2n}}{p_n}, \quad c.q.d.$$

Las igualdades con las que remata la demostración anterior pueden escribirse en la forma

$$P_{2n} = \frac{2P_n p_n}{P_n + p_n} \quad y \quad p_{2n} = \sqrt{P_{2n} p_n},$$

las que definen relaciones de recurrencia que facilitan el cálculo. Por ejemplo, si $n = 6$ estamos partiendo de un hexágono regular para el cual es fácil ver que $P_6 = 4\sqrt{3} \approx 6,9282$ y $p_6 = 6$ (tomando la circunferencia de radio 1). La aplicación de la recurrencia da:

$$\begin{array}{ll} P_{12} = 6,43078; & p_{12} = 6,21166 \\ P_{24} = 6,31932; & p_{24} = 6,26526 \\ P_{48} = 6,29217; & p_{48} = 6,2787 \\ P_{96} = 6,28543; & p_{96} = 6,28206 \end{array}$$

lo que significa aproximaciones para π por exceso de 3,14271 y por defecto de 3,14103.

Arquímedes, sin embargo, carente de un sistema de numeración adecuado no procedió en la forma anterior. De hecho, inicia el cálculo con la aproximación

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{380},$$

y en cada paso del cálculo apela a una sorprendente aproximación racional de este tipo, para llegar al polígono de 96 lados obteniendo

$$3\frac{1}{7} < \pi < 3\frac{10}{71}.$$

Cualquier jovencito que haya aprendido a programar computadoras, podría escribir un programa que realice los cálculos de Arquímedes en apenas segundos. Si se le pidiera hacerlos sólo con una calculadora operacional (es decir, sin capacidad de programación), es posible que exprese alguna queja. Pero si se le despoja de este instrumento y se le deja nada más con lápiz y papel, sólo si es muy valiente aceptará el reto. Sin embargo, dispone para ello del sistema posicional decimal, es decir, el sistema que usamos para escribir nuestros números y operar con ellos en las disposiciones tabulares que nos enseñaron en la primaria. Imagina, entonces, lector que nuestro joven carece de todas estas herramientas facilitadoras del cálculo y déjale nada más la posibilidad de representar los números (enteros y fraccionarios) con las letras de su alfabeto, en una forma parecida a como nos enseñaron que hacían los romanos. Si logras situarte, te alejarás de aquellos que se han preguntado por qué Arquímedes dejó las cosas en el polígono de 96 lados. Más todavía, sabiendo que sustituyó algunos números irracionales por aproximaciones racionales, cuya motivación no está clara aún hoy a pesar del reconocimiento de su justeza. Este trabajo debió haberle consumido horas y horas de ardua labor. Ergo, antes de criticarlo debemos considerar heroico su intento.

De cualquier manera, –de hecho, seguro que sin proponérselo– Arquímedes inaugura un deporte que hoy, con el advenimiento y mejoras constantes de las grandes computadoras, llega a extremos asombrosos: la cacería de dígitos de π . Desde el renacimiento se comenzó a tratar de mejorar el algoritmo arquimediato, lográndose fórmulas en forma de series y productos infinitos cada vez más sorprendentes como, por ejemplo, la fórmula de Vietà o el algoritmo de Snell, hasta el siglo XX en el que conocemos las mágicas fórmulas de Srinivasa Ramanujan.

Innumerables calculistas se armaron con estas fórmulas maravillosas y se dieron a la tarea de buscar dígitos y más dígitos decimales del número que nos ocupa. Primero unas cuantas decenas, luego cientos, algunos se atrevieron a miles. Pero la computación mecánica los envalentonó aún más y hoy llegan a billones las cifras registradas. Algunos, como los hermanos Chudnovsky, construyen sus propias supercomputadoras fabricando más y más cifras de π en espera, dicen ellos, de descifrar posibles patrones en esta compleja y, posiblemente aleatoria, estructura decimal. Quizás, como en la película *Pi* del cineasta norteamericano Darren Aronofsky, estén buscando el número de 216 cifras que contiene el nombre de Dios. ¿Llegarán a algún lado? Si hay tales regularidades, ¿quién dice que no están en la representación de π en base 2, o en base a un número primo aún no descubierto?

En todo caso, la magia del número π trasciende los intentos de quienes han querido encerrarlo en callejones numéricos y, al igual, que Petr Beckmann, uno se pregunta por qué no hay el mismo alboroto alrededor de la expansión decimal de $\sqrt{2}$ o de $\sin 1^\circ$, que también son números irracionales. Quizá la

respuesta tenga que ver con el hecho de que π está asociado a la figura de mayor simetría y perfección que pueda concebirse en geometría: el círculo. Entonces, con indulgencia podemos pensar que, al igual que Max el protagonista de *Pi*, los cazadores de cifras sólo quieren encontrar algo de orden en el caos.

DOUGLAS JIMÉNEZ
UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL POLITÉCNICA
“ANTONIO JOSÉ DE SUCRE”. VENEZUELA
dougjim@cantv.net; djimenez@bqto.unexpo.edu.ve