Simetría y nuevas soluciones de la ecuación de Black Scholes

Nikolay Sukhomlin

Resumen

En el enfoque local estudiamos la ecuación de Black Scholes, construimos sus operadores de simetría, mostramos que su función de Green y otras soluciones usadas en la práctica financiera son las funciones propias de un operador de simetría (o de la combinación lineal de ellas). Este hecho sugiere la importancia del estudio de la simetría del "master equation" del modelo dinámico. Introducimos el concepto de leyes de conservación en el modelo de Black Scholes, las cuales en los casos sencillos se manifiestan por la existencia de relaciones estables durante la evolución del proceso entre el valor de una opción y la rapidez de su cambio. También encontramos el grupo de equivalencia de la ecuación de Black Scholes lo que permite clasificar los operadores de simetría diferenciales hasta tercer orden, realizar la separación de variables y encontrar varias clases de nuevas soluciones de esta ecuación.

Introducción

El modelo de Black Scholes es el más usado en la teoría de los mercados financieros. La ecuación de Black Scholes constituye la parte principal del modelo, véase por ejemplo [1]:

$$A\,V \;\equiv\; \left\{\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r\,x\,\frac{\partial}{\partial x} - r\right\} V(t,\,x) \;=\; 0 \qquad (1)$$

donde $V\,(\,t\,,\,x\,)$ es el valor de la opción de comprar o de vender un bien financiero con el precio x en el momento t. En la teoría de finanzas la constante real σ $(\,\sigma \neq 0)$ se llama volatilidad; la constante r define el riesgo de la inversión. En el modelo de Black Scholes la ecuación (1) se deduce a partir de un proceso estocástico de tipo de difusión. Se conoce que la transformación

$$\tau \;=\; -\sigma^2 t \,+\, const,\;\; \xi \;=\; \ln x, \qquad (2\text{ a})$$

$$V(t,\,x) \;=\; U(\tau,\,\xi)\,\exp\left\{\beta \ln x \,-\, (\beta-1)^2\,t\,/\,2\right\} \qquad (2\text{ b})$$

$$\beta \;\equiv\; \frac{1}{2} \,-\, \frac{r}{\sigma^2} \qquad (2\text{ c})$$

reduce la ecuación (1) a la ecuación de difusión:

$$- \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0 \qquad \text{(2 d)}$$

En la teoría de procesos estocásticos la ecuación de Black Scholes (1) corresponde a la ecuación retrógrada de Kolmogorov adonde la difusión se realiza "hacia el pasado". Actualmente la ecuación de Black Scholes se estudia activamente en diferentes aspectos, véase por ejemplo [2-7].

La estructura del artículo es la siguiente: en la sección 1 establecemos los operadores de simetría de primer orden, notamos que ellos crean un álgebra de Lie, constatamos la estructura especial del operador A y encontramos las funciones propias de dos tipos de estos operadores. También introducimos el concepto de *ley de conservación en el modelo de Black Scholes*. En la sección 2 construimos el grupo de equivalencia de dicha ecuación como el producto cartesiano de dos subgrupos: uno es continuo y otro discreto. En la sección 3 clasificamos los operadores de simetría hasta el tercer orden relacionado al grupo de equivalencia. En la sección 4, al separar las variables, encontramos los representantes más sencillos de las soluciones correspondientes a todas las cinco clases de los operadores de simetría de segundo orden y construimos algunas otras nuevas soluciones que entran en estas clases.

1 Simetría de la ecuación de Black Scholes y Leyes de conservación

La idea básica de nuestro enfoque consiste en la búsqueda y en el estudio de ciertas relaciones entre el valor de una opción $V(t, x)$ y la rapidez de su cambio relacionado con el precio. El hecho de la existencia de relaciones que se conservan durante todo el proceso modelado, nos lleva a información practica muy importante. Por ejemplo, este nos permite evaluar la volatilidad, o sugiere la formulación apropiada de los problemas de frontera.

En la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales el primer paso del programa de resolución consiste en el estudio del álgebra de simetría de la ecuación. Este estudio puede tener varios objetivos: con la finalidad de la separación de variables [8, 9] o para la aplicación de la teoría de Lie [4, 7, 10-12]. Nosotros seguimos la primera orientación.

La simetría de la ecuación de difusión es bien conocida. Dado que la ecuación de Black Scholes se puede reducir a la ecuación de difusión, su simetría es similar. Sin hacer los cálculos, pasamos directamente a los resultados.

El conjunto de los operadores de simetría de la ecuación (1) diferenciales lineales de primer orden y que conmutan con el operador A constituye un espacio vectorial con la base:

$$B_1 \;=\; x\,\tfrac{\partial}{\partial\, x} \;-\; \beta\,, \qquad\qquad (3\text{ a})$$
$$B_2 \;=\; \sigma^2\, t\; x\,\tfrac{\partial}{\partial\, x} \;-\; \ln x \;-\; \sigma^2\, t\; \beta \qquad\qquad (3\text{ b})$$

y también un operador de simetría trivial del orden cero: $B_3 = 1$. Observamos que:

$$B_2 \;=\; \sigma^2\, t\; B_1 \;-\; \ln x \qquad\qquad (3\text{ c})$$

y que se verifican las condiciones de conmutación:

$$[\,B_2\,,\,B_1\,] \;=\; B_3\,, \quad [\,B_2\,,\,B_3\,] \;=\; [\,B_1\,,\,B_3\,] \;=\; 0 \qquad\qquad (3\text{ d})$$

La simetría mencionada es intrínseca de la ecuación de Black Scholes (1). Es fácil verificar que el operador (3a) define totalmente el operador A:

$$A \;=\; \sigma^2\,\left\{\,\tfrac{1}{\sigma^2}\,\tfrac{\partial}{\partial t} \;+\; \tfrac{1}{2}\,B_1^2 \;-\; \tfrac{1}{2}\,(\beta\,-\,1)^2\right\}. \qquad\qquad (3\text{ e})$$

Visto que $[\,A\,,\; B_i\,] = 0\;\;(\,i = 1,\,2,\,3\,)$, es obvio que toda función de los operadores $B_1\,,\; B_2\,,\; B_3$ conmutará con A y en consecuencia, será un operador de simetría de la ecuación (1). Este hecho nos permitirá en las secciones 3 y 4 clasificar los operadores de simetría y construir las nuevas soluciones exactas de la ecuación de Black Scholes usando el metodo de separacion de variables en el enfoque de V. Shapovalov [8].

En las teorías económicas, sociales y financieras no se suele usar la noción de operador de simetría. Sin embargo la importancia de este concepto reside en el hecho de que cada operador de simetría está ligado con una ley de conservación, pero el concepto de ley de conservación tampoco está desarrollado en dichas teorías. Como en la mecánica clásica y la cuántica, aquí este concepto tiene un papel importante en la descripción del sistema dinámico. Vamos introducir el concepto de ley de conservación y lo ilustramos para el modelo de Black Scholes.

Hallamos las soluciones de la ecuación (1) que son las funciones propias del operador de simetría (3 a), es decir resolvemos el sistema:

$$A\,V\,(t,\,x) \;=\; 0\,, \qquad\qquad (4\text{ a})$$
$$B\,V\,(t,\,x) \;=\lambda\,V\,(t,\,x)\,. \qquad\qquad (4\text{ b})$$

con $B = B_1$ en este caso. Después de cálculos sencillos encontramos una familia de soluciones parametrizadas por λ:

$$V_\lambda\,(\,t,\,x\,) \;=\; C\,x^{\lambda\,+\,\beta}\,\exp\left\{\,\tfrac{\sigma^2}{2}\,\left[(\beta\,-\,1)^2 \;-\; \lambda^2\right]\,t\,\right\}\;\;(C \;=\; const\,)\;(5)$$

Esta familia de soluciones corresponde a la ley de conservación que se expresa por la relación (4 b): elasticidad-precio del valor de la opción que se conserva en este caso:

$$E_p \;\equiv\; \frac{x}{V}\,\frac{\partial V}{\partial x} \;=\; (\lambda \;+\; \beta\,) \;=\; const. \qquad (6)$$

Este hecho significa que al elegir la solución (5), elegimos la relación (6) entre el valor V y la rapidez de su variación. La existencia de esta ley de conservación permite experimentalmente evaluar la potencia del precio en la función (5): $\lambda + \beta$.

En el caso general las relaciones entre la función incógnita y sus derivadas pueden ser mucho menos evidentes: véase por ejemplo las formulas (7), (14) y (15). La importancia práctica de una ley de conservación se encuentra en el hecho de que matemáticamente es mucho más fácil encontrarla que resolver la ecuación (1). Además, la existencia de una ley de conservación no depende del sistema de coordenadas en las cuales está escrita la ecuación. Nuestro estudio permite explicitar la simetría que verifica la solución (5) y establecer el sentido de las constantes que la definen. Esta función es cóncava a la condición: $0 < \lambda + \beta < 1$.

El segundo operador de simetría de primer orden B_2 define otra ley de conservación: la relación (4 b) informa que la misma elasticidad ahora no se conserva, sino depende linealmente del logaritmo del precio y es inversamente proporcional al tiempo. En consecuencia se conserva la expresión:

$$\sigma^2\, t\, \left[\frac{x}{V}\,\frac{\partial V}{\partial x} \;-\; \beta\right] -\; \ln x \;=\; \lambda \;=\; const. \qquad (7)$$

Esta igualdad se construye usando la formula (3 c). También es posible interpretar esta ley como conservación del valor inicial del precio x_0 : para el tiempo $t \to 0$ el operador B_2 se reduce a la expresión: $-\,(\ln\, x_0) \;\Rightarrow\; x_0 = \exp\,\{-\lambda\}$. Ahora la relación (7) se puede escribir:

$$E_p \;\equiv\; \frac{x}{V}\,\frac{\partial V}{\partial x} \;=\; \frac{1}{\sigma^2\, t}\;\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) \;+\; \beta\,.$$

La resolución del sistema de tipo (4) con el operador B_2 (3 b) nos lleva al resultado siguiente:

$$V_\lambda\,(t,\,x) \;=\; \frac{C}{\sqrt{t}}\;\exp\left\{\frac{\left[\ln x \,+\, \sigma^2\,\beta\, t \,+\, \lambda\right]^2}{2\,\sigma^2\, t}\right\} \;\; (C \;=\; const). \qquad (8)$$

Esta función representa la función de Green de la ecuación de Black Scholes (1) bien conocida en la literatura. Mencionamos que si $r = \sigma^2/2$ entonces la solución (8) queda:

$$V_\lambda(t,x) \;=\; \frac{C}{\sqrt{t}}\;\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{1}{2\,\sigma^2\,t}\;\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)}.$$

Podemos constatar que la función (8) es cóncava con la condición:

$$\ln(x/x_0) \;-\; rt^2 + 1 < \left(\frac{\sigma^2\, t}{2} \;-\; 1\right),$$

lo que se verifica a partir del momento del tiempo $t = 4/\sigma^2$.

2 Grupo de equivalencia de la ecuación de Black Scholes

Sea la ecuación de Black Scholes (1). Estudiamos las transformaciones de variables:

$$\tau = \tau(t), \quad \xi = \xi(t, x), \quad V(t, x) = a(t, x)\, Q(\tau, \xi) \qquad (9)$$

tales que la ecuación (1) no cambia su estructura, salvo que aparece un factor multiplicativo a la izquierda:

$$f(t, x) \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma_0^2 \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + r_0 \xi \frac{\partial Q}{\partial \xi} - r_0 Q \right\} = 0, \ (10)$$

donde Q es la nueva incógnita. Así aparece una libertad complementaria: considerar las constantes σ_0, r_0 como distintas de las constantes σ, r o como iguales. El problema de encontrar todas las transformaciones con la propiedad mencionada se resuelve por el Teorema 1 y para prepararlo enunciamos dos proposiciones.

Proposición 1. *Sea la ecuación de Black Scholes (1). La transformación siguiente:*

$$\tau = \frac{\alpha^2 \sigma^2}{\sigma_0^2}(t - t_0), \quad \xi = \left(\frac{x}{x_0}\right), \qquad (11\text{ a})$$
$$V(t, x) = Q(\tau, \xi)\, \exp\{(\beta - \alpha\beta_0)\ln x +$$
$$+ \frac{\sigma^2}{2}\left[(\beta - 1)^2 - \alpha^2(\beta_0 - 1)^2\right] t\} \qquad (11\text{ b})$$

convierte la ecuación (1) en la ecuación de tipo (10) con el factor exterior:

$$f(t, x) = \frac{\alpha^2 \sigma^2}{\sigma_0^2} \exp\{(\beta - \alpha\beta_0)\ln x +$$
$$+ \frac{\sigma^2}{2}\left[(\beta - 1)^2 - \alpha^2(\beta_0 - 1)^2\right] t\}$$

para cualesquiera valores de las constantes: α, t_0, x_0 $(\alpha \neq 0,\ x_0 \neq 0)$. *Aquí la constante* β *está definida por (2 c) y* $\beta_0 \equiv \frac{1}{2} - \frac{r_0}{\sigma_0^2}$.

Las transformaciones (11) constituyen un grupo continuo con tres parámetros: la constante α corresponde a un cambio en la escala del tiempo con la variación simultánea de la coordenada x ; la constante t_0 representa la libertad de elección del origen del tiempo y la constante x_0 está ligada con la libertad de elección del precio inicial (notamos la imposición: $x_0 \neq 0$).

Llamamos este grupo galileano G por analogía con el grupo correspondiente en la teoría de difusión. El grupo galileano G crea una relación de equivalencia sobre el conjunto de las soluciones de la ecuación (1). Además de este grupo, existe una transformación especial que tampoco cambia la estructura de la ecuación (1).

Proposición 2. *Sea la ecuación de Black Scholes (1). La transformación siguiente:*

$$\tau \;=\; -\frac{1}{\sigma_0^2\,\sigma^2}\;\frac{1}{t}\,,\quad \xi \;=\; \exp\left\{-\,\frac{\ln x}{\sigma^2\,t}\right\}, \qquad (12\ \mathrm{a})$$

$$V\,(\,t\,,\;x\,)\;=\;\frac{Q\,(\,\tau\,,\;\xi\,)}{\sqrt{t}}\;\exp\{\;\frac{(\,\ln\,x\,+\,\beta_0\,)^2}{2\,\sigma^2\,t}\;+$$

$$+\,\beta\,\ln\,x\;+\;\frac{\sigma^2(\,\beta\,-\,1\,)^2}{2}\,t\;+\;\frac{r_0}{\sigma_0^2\,\sigma^2}\;\frac{1}{t}\} \qquad (12\ \mathrm{b})$$

convierte la ecuación (1) en la ecuación de tipo (10) con el factor exterior:

$$f\,(\,t\,,\;x\,)\;=\;\frac{1}{\sigma_0^2\,\sigma^2\,t^2\sqrt{t}}\;\exp\{\;\frac{(\,\ln\,x\,+\,\beta_0\,)^2}{2\,\sigma^2\,t}\;+$$

$$+\,\beta\,\ln\,x\;+\;\frac{\sigma^2(\,\beta\,-\,1\,)^2}{2}\,t\;+\;\frac{r_0}{\sigma_0^2\,\sigma^2}\;\frac{1}{t}\}\,.$$

Ambas proposiciones se comprueban fácilmente por la sustitución. En realidad las constantes en la fórmula (12 a) se pueden eliminar por una transformación del grupo galileano G: por ejemplo, usando la transformación (11), la ecuación (1) se puede reducir a otra de la misma estructura con $\sigma_0 = 1$ y la constante r_0 puede ser igual a cero o a una constante cualquiera. En este caso la transformación (12 a) se presenta por:

$$x^I \;=\; \exp\left\{-\,\frac{\ln x}{t}\right\}, \quad t^I \;=\; -\,\frac{1}{t}\,. \qquad (12\ \mathrm{c})$$

La denotamos ν. Estudiamos ahora las potencias de ν:

ν^2 corresponde a $x^{II} = \exp\left\{-\,\frac{\ln x^I}{t^I}\right\} = \frac{1}{x}\,,\ t^{II} \,=\, -\,\frac{1}{t^I} \,=\, t\,;$

ν^3 corresponde a $x^{III} = \exp\left\{\,\frac{\ln x}{t}\right\}\,,\quad t^{III} \,=\, -\,\frac{1}{t};$

ν^4 corresponde a $x^{IV} = x$, $t^{IV} = t$: transformación idéntica i.

Concluimos que el conjunto $\{\nu,\ \nu^2,\ \nu^3,\ \nu^4 = i\}$ constituye un grupo discreto que denotamos N.

Teorema 1. *Sea la ecuación de Black Scholes (1) con las constantes* σ $(\sigma \neq 0)$, r *dadas. El grupo de equivalencia más amplio que admite la ecuación (1) es* $\Gamma = G \otimes N$ *donde* G *es el grupo galileano y* N *es el grupo discreto definidos arriba por las fórmulas (11) y (12).*

El teorema se verifica sin dificultad por la sustitución de la transformación (9) en la ecuación (1) y la imposición de la estructura (10). Notamos que el grupo galileano G (y en consecuencia el grupo Γ) es parametrizado por tres parámetros $\alpha,\ t_0,\ x_0$ $(\alpha \neq 0,\ x_0 \neq 0)$. Así se crea una partición sobre el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (1). Observamos que al mismo tiempo se crea una clasificación de las leyes de conservación.

Es fácil verificar que el operador (3 a) se transforma por el elemento ν del grupo N en el operador (3 b) y viceversa, lo que significa que las soluciones (5) y (8) entran en la misma clase de equivalencia. Más exactamente, la aplicación de la transformación (9) en la forma (12) con el factor definido por la relación (12 b) resulta:

$$a^{-\,1}\,B_1\,a \;=\; B_2^{'}\,; \qquad a^{-\,1}B_2\,a \;=\; -\,B_1^{'}\,; \qquad (13)$$

donde los operadores $B_1^{'}$ $B_2^{'}$ tienen las formas (3 a) y (3 b) escritas en las coordenadas τ, ξ (12 a) y con $\sigma_0,\ \beta_0$. Recordamos que los operadores B_1 y B_2 no conmutan: véase la formula (3 d); entonces es normal que se pongan en relación de equivalencia sólo por los elementos del grupo discreto N y no se puedan poner en equivalencia por los elementos del grupo continuo G.

3 Clasificación de los operadores de simetría de la ecuación de Black Scholes hasta el tercer orden

En nuestro articulo [13] hicimos la clasificación de los operadores de simetría hasta tercer orden para la ecuación de Schrödinger libre. La misma clasificación relacionada con el grupo de equivalencia Γ del Teorema 1 se puede hacer para la ecuación de difusión (2 d) y en consecuencia para la ecuación de Black Scholes (1). Los resultados se presentan en el teorema siguiente.

Teorema 2. *Sea la ecuación de Black Scholes (1) con el operador A por ejemplo en la forma (3 e). Todos los operadores lineales diferenciales de hasta tercer orden que conmutan con A entran en una de las siguientes 6 clases de equivalencia y en 8 agrupaciones de clases de equivalencia:*

1) Todos los operadores de primer orden constituyen una sola clase de equivalencia cuyo representante más sencillo es B_1 (ó B_2) definido por la fórmula (3 a).

2) Todos los operadores de segundo orden constituyen cinco clases de equivalencia cuyos representantes más sencillos son:

$$\text{a) } B_2^2 \ + \ B_1^2, \tag{14 a}$$

$$\text{b) } B_2^2 \ - \ B_1^2, \tag{14 b}$$

$$\text{c) } B_1\,B_2 \ + \ B_2\,B_1, \tag{14 c}$$

$$\text{d) } B_1^2 \ + \ B_2, \tag{14 d}$$

$$\text{e) } B_1^2. \tag{14 e}$$

3) Todos los operadores de tercer orden constituyen ocho agrupaciones de clases de equivalencia parametrizadas por tres o cuatro constantes arbitrarias $\omega\,,\ \mu\,,\ \nu\,,\ \eta$ y cuyos representantes más sencillos son:

$$1.\quad B_2^3 \ + \ (B_2\,B_1^2 \ + \ B_1^2\,B_2) \ + \ \omega\,B_1^3 + \mu\,B_1^2 \ + \ \nu\,B_2 \ + \eta\,B_1, \tag{15 a}$$
$$2.\quad B_2^3 \ - \ (B_2\,B_1^2 \ + \ B_1^2\,B_2) \ + \ \omega\,B_1^3 + \mu\,B_1^2 \ + \ \nu\,B_2 \ + \eta\,B_1, \tag{15 b}$$
$$3.\quad B_2^3 \ + \ B_1^3 + \mu\,B_1^2 \ + \ \nu\,B_2 \ + \eta\,B_1, \tag{15 c}$$
$$4.\quad B_2^3 \ - \ B_1^3 + \mu\,B_1^2 \ + \ \nu\,B_2 \ + \eta\,B_1, \tag{15 d}$$
$$5.\quad B_2^3 \ + \ \mu\,B_1^2 \ + \ \nu\,B_2 \ + \eta\,B_1, \tag{15 e}$$

6. $(B_2^2 B_1 \ + \ B_1 B_2^2) \ + \ B_1^3 + \mu B_1^2 \ + \ \nu B_2 \ + \eta B_1,$ (15 f)
7. $(B_2^2 B_1 \ + \ B_1 B_2^2) \ - \ B_1^3 + \mu B_1^2 \ + \ \nu B_2 \ + \eta B_1,$ (15 g)
8. $(B_2^2 B_1 \ + \ B_1 B_2^2) \ + \ \mu B_1^2 \ + \ \nu B_2 \ + \eta B_1.$ (15 h)

La demostración del teorema similar para la ecuación de Schrodinger libre está hecha en nuestro artículo [13]. El Teorema 2 se comprueba de la misma manera. La idea de la demostración es la siguiente: se construye la forma cúbica de los operadores B_1, B_2, B_3 de estructura más general. Luego se aplican las transformaciones del grupo Γ para simplificar el operador inicial. El hecho que cualquier operador de simetría diferencial lineal de tercer orden de la ecuación de Black Scholes (1) tiene la estructura de esta forma cúbica es también nuevo.

Notamos que el Teorema 2 también dice que existen 6 clases y 8 agrupaciones de clases de las leyes de conservación, cada una está definida por la relación (4 b) y las fórmulas (14) y (15).

Como mencionamos arriba, cada operador de simetría está ligado con una ley de conservación específica. Además, a cada operador corresponde un conjunto de funciones propias que son las soluciones de la ecuación (1) y que constituyen una base en un espacio funcional. También cada operador de simetría corresponde a un sistema privilegiado de coordenadas que permite separar las variables en la ecuación (1) y resolverla exactamente. Realizamos este programa en la sección siguiente.

4 Nuevas soluciones exactas de la ecuación de Black Scholes

El Teorema 2 de la sección anterior nos permite abordar el problema de la resolución sistemática de la ecuación de Black Scholes (1). Algunas soluciones son muy conocidas como aquellas que presentamos en la sección 1; pero la mayoría de las soluciones que enumeramos abajo son nuevas. Recordamos que las soluciones con la simetría dada las buscamos a partir del sistema de tipo (4).

La solución (5) representa la solución más sencilla de la clase de soluciones equivalentes que admiten un operador de simetría de primer orden. Cualquier solución de esta clase se puede construir al desarrollar la función (5) usando todos los elementos del grupo Γ del Teorema 1. Visto los resultados de la fórmula (13) podemos constatar que la función de Green (8) entra en la misma clase de equivalencia.

En nuestro artículo [14] encontramos las soluciones de la ecuación de Schrödinger libre correspondientes a las cinco clases de operadores de segundo orden correspondientes a las fórmulas (14) arriba. Usando las relaciones de similitud entre esta última ecuación, ecuación de difusión (2 d) y la ecuación de Black

Scholes (1) podemos construir por el mismo procedimiento las soluciones de cada una de las cinco clases de equivalencia de la ecuación de Black Scholes. Todos estos resultados son nuevos.

Conforme al Teorema 2 el conjunto de las soluciones de la ecuación (1) que verifican el sistema (4) con los operadores de simetría de segundo orden se separa en 5 clases de equivalencia. Los operadores más sencillos de cada clase de equivalencia son enumerados en las fórmulas de (14 a) hasta (14 e). Pasemos ahora a la resolución del sistema (4) para cada una de estas cinco clases.

a) Sea la clase de equivalencia definida por el operador (14 a):

$B = B_2^2 + B_1^2 = (\sigma^4 t^2 + 1) B_1^2 - 2\sigma^2 t \, (\ln x) \, B_1 + \ln^2 x - \sigma^2 t$.

Es fácil verificar que la función siguiente cumple el sistema (4) y en consecuencia es la solución de la ecuación de Black Scholes:

$$\begin{gathered} V_\lambda(t, x) = \frac{\Phi(\xi)}{(\sigma^4 t^2 + 1)^{1/4}} \exp\left\{ \frac{\sigma^2 t}{2(\sigma^4 t^2 + 1)} \ln^2 x + \right. \\ \left. + \beta \ln x - \frac{\lambda}{2} \, arctg(\sigma^2 t) + \frac{\sigma^2}{2} (\beta - 1)^2 t \right\}, \\ \xi \equiv (\sigma^4 t^2 + 1)^{-1/2} \ln x . \end{gathered} \tag{16}$$

La función $\Phi(\xi)$ verifica la ecuación diferencial ordinaria siguiente:

$$\Phi'' + \xi^2 \Phi = \lambda \Phi ,$$

cuyas soluciones son las funciones del cilindro parabólico. Las soluciones correspondientes a la familia de soluciones (16) describen en la mecánica cuántica los estados llamados coherentes.

b) Sea la clase definida por el operador (14 b):

$B = B_2^2 - B_1^2 = (\sigma^4 t^2 - 1) B_1^2 - 2\sigma^2 t \, (\ln x) \, B_1 + \ln^2 x - \sigma^2 t. .$

En este caso la solución de la ecuación de Black Scholes se presenta en la forma:

$$\begin{gathered} V_\lambda(t, x) = \frac{\Phi(\xi)}{|\sigma^4 t^2 - 1|} \exp\left\{ \frac{\sigma^2 t}{2(\sigma^4 t^2 - 1)} \ln^2 x + \right. \\ \left. + \beta \ln x + \frac{\lambda}{2} \, arcth(\sigma^2 t) + \frac{\sigma^2}{2} (\beta - 1)^2 t \right\}, \\ \xi \equiv \left| \sigma^4 t^2 - 1 \right|^{-1/2} \ln x . \end{gathered} \tag{17}$$

La función $\Phi(\xi)$ verifica la ecuación diferencial ordinaria de tipo de oscilador armónico en la mecánica:

$$\Phi'' - \xi^2 \Phi = \lambda \Phi .$$

Las soluciones que se anulan al infinito se expresan por los polinomios de Tchebyshev - Hermite $H_n(\xi)$; el espectro de los valores propios del operador mencionado es discreto:

$$\Phi_n(\xi) = C_n\ H_n(\xi) \exp\left\{-\xi^2/2\right\},\quad \lambda_n = -(2n+1),\ \ n = 0, 1, 2, ...$$

con las funciones $H_n(\xi)$ que verifican la ecuación de Hermite:

$$H_n'' - 2\xi H_n' + 2n H_n = 0.$$

Como se conoce las funciones $\Phi_n(\xi)$ representan una base ortonormal en L^2. Las soluciones (17) se definen sobre un intervalo finito del tiempo y se pueden fácilmente adaptar al modelo de Black Scholes.

c) Sea la clase de equivalencia definida por el operador (14 c):

$$B = B_2 B_1 + B_2 B_1 = 2\sigma^2 t\, B_1^2 - 2(\ln x) B_1 - 1.$$

La solución de la ecuación de Black Scholes se presenta como:

$$\begin{gathered} V_\lambda(t, x) = \Phi(\xi) \exp\{ \tfrac{1}{4\sigma^2 t} \ln^2 x + \\ + \beta \ln x - \tfrac{\lambda+1}{4} \ln(\sigma^2 t) + \tfrac{\sigma^2}{2}(\beta - 1)^2 t \}, \\ \xi \equiv (\sigma^2 t)^{-1/2} \ln x, \end{gathered} \tag{18}$$

$$\Phi'' - (\xi^2/4)\Phi = (\lambda/2)\Phi.$$

Las funciones $\Phi(\xi)$ de la última ecuación como en el caso anterior se expresan por los polinomios de Tchebyshev - Hermite H_n; el espectro de los valores propios del operador mencionado es también discreto:

$$\Phi_n(\xi) = C_n\ H_n(\xi/\sqrt{2}) \exp\left\{-\xi^2/4\right\},\quad \lambda_n = -2n - 1,\ \ n = 0, 1, 2, ...$$

Finalmente la solución (18) en este caso se presenta como:

$$V_\lambda(t, x) = C_n\ t^{\frac{n}{2}}\ H_n(\xi/\sqrt{2}) \exp\{\beta \ln x + \tfrac{\sigma^2}{2}(\beta - 1)^2 t\} \tag{19}$$

Esta solución tiene una propiedad interesante: ella verifica una de las condiciones complementarias del modelo de Black Scholes (si $\beta > 0$):

$$\begin{gathered} x \to 0^+ \ \Rightarrow\ V_n \sim x^\beta (\ln x)^n \ \Rightarrow \\ \lim_{x\to 0^+}(V_n) = \lim_{x\to 0^+}(const\ x^\beta) = 0. \end{gathered}$$

Por otro lado constatamos que si $x \to \infty \Rightarrow V_n \sim x^\beta (\ln x)^n$. Esto permite aproximar bastante bien la otra condición de frontera si β es pequeña y construir una serie de tipo exponencial usando las soluciones (19). Más exactamente para $C_n = \sigma^n$:

$$V^\circ(t, x) \equiv \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} V_n(t, x) = x^{1+\beta} \exp\left\{ \frac{\sigma^2}{2}(\beta - 1)^2 t \right\} \tag{20}$$

Esta función es el caso particular de la solución (5) para $\lambda = 1$. En la aproximación $\beta \approx 0$, $\beta \neq 0$, la solución de la ecuación de Black Scholes que verifica las condiciones complementarias será la combinación lineal de (20) y de (19) para $n = 0$:

$$V(t, x) = x^{\beta} \exp\left\{ \frac{\sigma^2}{2} (\beta - 1)^2 (t - T) \right\} \left[x e^{-\frac{\sigma^2}{2}(t-T)} - K \right].$$

Precisamente la aproximación es en la presencia del factor $x^{\beta} \approx 1$ si . $\beta \approx 0$. Por ejemplo, para . $r = 0.05$; $\sigma = 0.317 \Rightarrow \beta = 0.002$.

d) Sea la clase de equivalencia definida por el operador (14 d): $B = B_1^2 + B_2$. La solución de la ecuación de Black Scholes en este caso tiene la forma siguiente:

$$V_{\lambda}(t, x) =$$

$$\Phi(\xi) \exp\left\{ \left(\beta - \frac{\sigma^2 t}{2} \right) \ln x - \frac{\sigma^6 t^3}{12} + \frac{\sigma^2}{2} \left[(\beta - 1)^2 - \lambda \right] t \right\} \quad (21)$$

$\xi \equiv \ln x + \sigma^4 t^2 / 4$.

La función $\Phi(\xi)$ verifica la ecuación de Airy: $\Phi'' - \xi \Phi = \lambda \Phi$.

e) La última clase de equivalencia de los operadores de segundo orden tiene como operador más sencillo (14 e): $B = B_1^2$. Las soluciones de la ecuación de Black Scholes con $B = B_1^2$ para cualesquiera valores del parámetro λ son parecidas a las funciones (5) pero aquí dependen de dos constantes arbitrarias C, D (porque el operador de simetría en este caso es de segundo orden):

$$V_{\lambda}(t, x) =$$

$$(C e^{\sqrt{\lambda} \ln x} + D e^{-\sqrt{\lambda} \ln x}) \exp\left\{ \beta \ln x + \frac{\sigma^2}{2} \left[(\beta - 1)^2 - \lambda \right] t \right\} \quad (22)$$

En conclusión notamos que se pueden construir otras soluciones de cada clase de equivalencia a partir de las soluciones mencionadas usando todos los elementos del grupo de equivalencia Γ del Teorema 1. Al aplicar, por ejemplo la transformación (12 c) del subgrupo discreto N a la última función (21), llegamos a nueva solución de la ecuación de Black Scholes (que queda sin embargo equivalente a la solución (22)):

$$V'_{\lambda} = \frac{C'}{\sqrt{t}} \exp\left\{ \frac{\lambda + 2\sqrt{\lambda} \ln x + (\ln x + \beta \sigma^2 t)^2 + 2 r \sigma^2 t^2}{2 \sigma^2 t} \right\} +$$
$$+ \frac{D'}{\sqrt{t}} \exp\left\{ \frac{\lambda - 2\sqrt{\lambda} \ln x + (\ln x + \beta \sigma^2 t)^2 + 2 r \sigma^2 t^2}{2 \sigma^2 t} \right\} \quad (23)$$

Aquí no utilizamos las primas arriba de las variables. Observamos que si por ejemplo $\lambda < 0$, las soluciones (22) y (23) contienen las funciones *senos* y *cosenos* del $\ln x$, lo que permite usar el desarrollo en la serie de Fourier para verificar las condiciones de frontera. Recordamos que nuestro enfoque es local y entonces el problema de condiciones de frontera necesita un paso más para su estudio.

También la nueva solución de la ecuación de Black Scholes que pertenece a la clase de equivalencia definida por la solución (19) es:

$$V_n'(t,\, x) \;=\; C_n' \;t^{-\frac{n+1}{2}}\; H_n\,(\rho)\; \exp\{\, \tfrac{\ln^2 x}{2\,\sigma^2\, t} \,+\, \beta\, \ln\, x \,+\, \tfrac{\sigma^2}{2}\, (\beta \;-\; 1\,)^2\; t\,\}\,,$$
$$\rho \;\equiv\; \tfrac{\ln\, x}{\sqrt{-\,2\,\sigma^2\, t}}\,.$$

La unidad imaginaria $\sqrt{-1}$ en la expresión ρ no influye en el resultado porque los polinomios de numero par $H_{2\,k}(\,\rho\,)$ contienen únicamente los términos con potencias pares de ρ y por lo tanto son reales. En los polinomios $H_{2\,k\,+\,1}(\,\rho\,)$ todos los términos son de potencia impar y la unidad imaginaria se puede sacar como factor común, el que queda incluido en la constante $C_{2\,k\,+\,1}'$ que será en este caso también imaginaria.

La solución "clásica" de la ecuación de Black Scholes es la función siguiente (véase por ejemplo [2], p. 17):

$$V\,(\,t\,,\; x\,) \;=\; x\,\Phi\,(\,\theta\,) \;-\; K\, e^{-\,r\,(T\,-\,t\,)}\,\Phi\,(\,\omega\,) \tag{24}$$

con la función de distribución normal estandar:

$$\Phi\,(\,z\,) \;\equiv\; \tfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\,\infty}^{z} e^{-\,u^2\,/\,2}\, d\,u\,,$$
$$\theta \;\equiv\; \frac{\ln\, x \,-\, (1-\beta)\,\sigma^2\, t \,+\, T\,\sigma^2\,(1-\beta) \,-\, \ln\, K}{\sigma\sqrt{T-t}}\,,$$
$$\omega \;\equiv\; \frac{\ln\, x \,+\beta\,\sigma^2\, t \,-\, \big(T\,\sigma^2\,\beta \,+\, \ln\, K\big)}{\sigma\,\sqrt{T-t}}\,,$$

En realidad cada término de la fórmula (24) representa una solución de la ecuación de Black Scholes. Dichos términos tienen la simetría superior: el operador de simetría correspondiente es un operador integral. Observando que las funciones $x\,,$ y $e^{-\,r\,(T\,-\,t\,)}$ son las soluciones particulares de la ecuación de Black Scholes (1), constatamos que cada uno de los términos de la solución (24) represente un producto de dicha solución particular por la función $\Phi\,(\,z\,)$ que en consecuencia verifica la ecuación diferencial ordinaria: $\Phi'' + z\,\Phi' \;=\; 0\,.$

La nueva solución de la ecuación de Black Scholes que es equivalente a (24) relacionada con el grupo discreto N es la función siguiente:

$$V'\;(\,t\,,\; x\,) \;=\; V_1 \;-\; V_2 \tag{25}$$

donde cada término es también una solución de la ecuación de Black Scholes:

$$V_1 \;\equiv\; \frac{\Phi\,(\,\nu\,(t,x)\,)}{\sqrt{\sigma^2\, t}}\; \exp\left\{\, \frac{\ln^2 x}{2\,\sigma^2\, t} \,+\, \Big(\beta \,+\, \frac{1-b}{\sigma^2\, t}\Big)\, \ln\, x \,+\, \frac{(b-1)^2}{2\,\sigma^2\, t} \,+\, \left(r \,+\, \frac{\sigma^2\,\beta^2}{2}\right)\; t\,\right\},$$
$$\nu\,(t,\, x) \;\equiv\; \frac{\ln\, x \,+\, (1-b) \,+\, [\,T\,\sigma^2\,(1-b) \,-\, \ln\, K]\,\sigma^2\, t}{\sqrt{\sigma^2\, t\,(T\, s^2\sigma^2\, t+1)}}\,,$$
$$V_1 \;\equiv\; \frac{K\, e^{-\,\rho\, T}\; \exp\big((2b-1)\,/\,2\,\sigma^2\, t\big)}{\sqrt{\sigma^2\, t}}\,\Phi\,(\,\mu\,(t,\, x)\,)\; \exp\{\, \frac{\ln^2 x}{2\,\sigma^2\, t} \,+$$

$$+ \left(\beta - \tfrac{b}{\sigma^2 t}\right) \ln x + \tfrac{(b-1)^2}{2\sigma^2 t} + \left(r + \tfrac{\sigma^2 \beta^2}{2}\right) t \} ,$$
$$\mu(t, x) \equiv \frac{\ln x - b - [T\sigma^2 b + \ln K]\sigma^2 t}{\sqrt{\sigma^2 t(T s^2 \sigma^2 t + 1)}} ,$$

Concluimos que la función (25) $V'(t, x) = V_1 - V_2$ es una solución de la ecuación de Black Scholes (1) para cualesquiera valores de las constantes K, T, s, ρ $\left(K > 0, T > 0, s > 0, b \equiv \frac{1}{2} - \frac{\rho}{s^2}\right)$ y la función $\Phi(z)$ es la función de distribución normal.

Encontrar las soluciones exactas a partir de los operadores de tercer orden y de orden superior es más difícil porque sus órdenes son superiores al orden de la ecuación (1). Por ejemplo en nuestro artículo [15] encontramos tal solución de la ecuación de Schrödinger libre correspondiente a una subclase de la clase 5 de los operadores de tercer orden correspondiente a la fórmula (15 e). Esta solución se presenta como una serie de potencias con coeficientes dependientes del tiempo. Usando este resultado es fácil construir la nueva solución de ecuación de Black Scholes.

Finalizamos al mencionar que el modelo estudiado se puede extrapolar en diferentes direcciones. Por ejemplo, es posible considerar la ecuación de Black Scholes como la "proyección" de una ecuación de este tipo relacionada con varias variables $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. También es posible considerar que las fluctuaciones aleatorias no son válidas para todas las variables x_i: así llegamos a una ecuación ultraparabólica.

Otro modelo puede estudiar la influencia de la variación de los valores de unas opciones sobre otras, lo que nos lleva al sistema de ecuaciones ligadas que generalizan el modelo de Black Scholes.

También es posible usar el paralelismo entre la mecánica cuántica y la mecánica clásica que pone en relación la ecuación de Schrödinger y la ecuación correspondiente de Hamilton Jacobi. En este sentido es posible también desarrollar el paralelismo entre la ecuación de Black Scholes y una ecuación diferencial no lineal de primer orden de tipo de Hamilton Jacobi. Este permitirá usar los métodos poderosos de la mecánica analítica en la teoría de Black Scholes.

El autor agradece a los árbitros anónimos por las sugerencias interesantes y a Rodolfo Echarri y Alexander Shapovalov por las discusiones fructíferas sobre el tema y al Departamento de Física de la Universidad Autónoma de Santo Domingo por el apoyo.

Bibliografía

1. J. Stampfi, V. Goodman (2002), *Matemáticas para las finanzas*, Thomson, Australia.

2. H. Fontanals, R. Lacayo, J. Vives (2002), *Alternative solutions of the Black Scholes equation*, (http://www.ub.es/div2/recerca/documents/resum/e58.htm).

3. P. Poncet, R. Abgrall (2002), *A few Multiresolution Schemes for the Black Scholes equation*, (http://perso.wanadoo.fr/poncet/research/C-2000-Cemracs.pdf).

4. A. Charlemagne (2003), *Classification of invariant solutions of the Black-Scholes equation*, (http://duck.cs.und.ac.za/˜banasiak/pooe.pdf).

5. D. Silverman (1999), *Solution of the Black Scholes equation using the Green's function of the Diffusion equation*, (http://www.physics.uci.edu/˜silverma/bseqn/bs.pdf).

6. R. Almgren (2001), *Solving the Black-Scholes Equation*, (http://www.math.toronto.edu/almgren/finmath/pde-01/notes1.pdf).

7. C Wafo Soh, N H Ibragimov (1999), "Solution of the Cauchy Problem for the Black-Scholes Equation using its symmetries", Proceedings of the International Conference at the Sophus Lie Conference Centre, Nordfjordeid, 30 June-5 July (Norway: Mars Publishers). (http://www.cam.wits.ac.za/staff/wafo.html).

8. V. Shapovalov (1980), Differential Equations, 16, pp. 1864 - 1874.

9. W. Miller, Jr. (1977), *Symmetry and Separation of Variables*, Addison-Wesley Publishing Company, London.

10. L. V. Ovsiannikov (1982), *Group analysis of differential equations*, Boston, Academic Press.

11. P. Oliver (1996), *Equivalence, Invariants and Symmetry*, Cambridge.

12. M. Cohen de Lara (1995), "Geometric and symmetry properties of non-degenerate diffusion processes", The Annals of Probability, Vol 25, pp. 1557 - 1604.

13. N. Sukhomlin, M. Arias (2004), "Estudio de simetría y de posibilidades de la resolución exacta de las ecuaciones de Schrödinger y Hamilton - Jacobi para un sistema aislado, I. Clasificación de los operadores de simetría de tercer orden" (en publicación).

14. N. Sukhomlin (2004), "Estudio de simetría y de posibilidades de la resolución exacta de las ecuaciones de Schrödinger y Hamilton - Jacobi para un sistema aislado, II. Resolución exacta de las ecuaciones de Schrödinger y de Hamilton - Jacobi" (en publicación).

15. N. Sukhomlin, J. Álvarez, D. Pérez (2003), "Función de Green para una partícula cuasi relativista I. Partícula libre" (en publicación).

Nikolay Sukhomlin
Departamento de Física,
Universidad Autónoma de Santo Domingo,
República Dominicana