

Root system of $\mathfrak{sp}_6(\mathbb{C})$

(Ver *Graphical introduction to classical Lie algebras*, p. 185)

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana

Volumen XII, Número 2, Año 2005

I.S.S.N. 1315-4125

Editor

Argimiro Arratia

Comité Editorial

Oswaldo Araujo Eduardo Lima de Sá

Alejandra Cabaña Gerardo Mendoza Joaquín Ortega

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana se publica dos veces al año en forma impresa y en formato electrónico. Sus objetivos, información para los autores y direcciones postal y electrónica se encuentran en el interior de la contraportada. Desde el Volumen VI, Año 1999, el Boletín aparece reseñado en *Mathematical Reviews*, *MathScinet* y *Zentralblatt für Mathematik*.

Asociación Matemática Venezolana

Presidente

Carlos A. Di Prisco

Capítulos Regionales

CAPITAL

Carlos A. Di Prisco, Matemáticas, IVIC
cdiprisc@ivic.ve

LOS ANDES

Oswaldo Araujo, Matemáticas, ULA
araujo@ciens.ula.ve

ZULIA-FALCON

Fernando Sánchez, Matemáticas, LUZ
fsanchez@luz.ve

CENTRO-OCCIDENTAL

Neptalí Romero
nromero@uicm.ucla.edu.ve

Matemáticas, UCLA

ORIENTE

Jacques Laforgue
laforgue@sucre.udo.edu.ve
Matemáticas, UDO

La Asociación Matemática Venezolana fue legalmente fundada en 1990 como una organización civil cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de la matemática en Venezuela. Para más información ver su portal de internet o escribir a su dirección postal.

Asociación Matemática Venezolana

Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela

amv@usb.ve <http://amv.ivic.ve/>

Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041 – A, Venezuela

**Boletín
de la
Asociación
Matemática
Venezolana**

Vol. XII • No. 2 • Año 2005

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Volumen XII, Número 2, Año 2005

ARTÍCULOS

Polinomios positivos y desigualdades polinomiales Carlos Andradás	123
Un teorema de De Rham en el contexto de la Geometría no Conmutativa Fernando Mejías	135
Completeness conditions in certain Weyl complexes, combinatorics and parsimony Mari Sano	159
Graphical introduction to classical Lie algebras Rafael Díaz & Eddy Pariguan	185
Boundary value problems in complex analysis II Heinrich Begehr	217

EDUCACIÓN

The catenary (almost) everywhere Juan B. Gil	251
--	------------

DIVULGACIÓN MATEMÁTICA

Permutaciones y el Juego del 15 José Heber Nieto	259
--	------------

INFORMACIÓN NACIONAL

El trabajo matemático de Pedro Berrizbeitia T. G. Berry	265
XIX Jornadas de Matemáticas	275

INFORMACIÓN INTERNACIONAL

La Esquina Olímpica Rafael Sánchez Lamonedá	277
---	------------

AGRADECIMIENTO	281
-----------------------	------------

Polinomios positivos y desigualdades polinomiales*

Carlos Andradas

1. Introducción

Consideremos un polinomio en una variable $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Todos explicamos en nuestras clases que $f(x)$ factoriza de la forma

$$f(x) = (x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_r)^{m_r} ((x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{\ell_1} \cdots ((x - \alpha_s)^2 + \beta_s^2)^{\ell_s}$$

donde a_1, \dots, a_r son las raíces reales de f y los factores cuadráticos corresponden a los pares de raíces complejas conjugadas $\alpha_k \pm i\beta_k$.

Supongamos ahora que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces todos los exponentes m_j tienen que ser pares pues si no $f(x)$ cambiaría signo en a_j y por consiguiente $f(x)$ es una suma de cuadrados de polinomios. Además, gracias a la bien conocida identidad

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

resulta que los productos de sumas de dos cuadrados es, a su vez, una suma de dos cuadrados por lo que obtenemos que $f(x)$ es suma de dos cuadrados de polinomios. En particular, concluimos que toda suma de cuadrados de polinomios en una variable puede escribirse como suma de (a lo más) DOS cuadrados. Denotaremos esto diciendo que el número de Pitágoras de $\mathbb{R}[x]$ es ≤ 2 . Por otra parte, $1 + x^2$ es un ejemplo de una suma de dos cuadrados que no es un cuadrado, con lo que la cota anterior es inmejorable.

Pasemos al caso de dos variables. Hilbert ya observó (por razonamientos teóricos y geométricos, utilizando propiedades clásicas de las cúbicas, pero sin exhibir ningún ejemplo concreto) que hay polinomios no negativos sobre todo el plano afín \mathbb{R}^2 que no son sumas de cuadrados.

Robinson puso ecuaciones al razonamiento de Hilbert produciendo el primer ejemplo concreto de un polinomio en dos variables, no negativo sobre todo el plano afín, pero que no es suma de cuadrados de polinomios. Unos años más tarde Motzkin (1967) dió el siguiente sencillo (y simétrico) ejemplo:

$$M(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1$$

*Charla inaugural de la XIX Escuela Venezolana de Matemáticas.

¿Por qué es $M(x, y) \geq 0$? En este caso hay un fácil truco para observarlo: la desigualdad entre la media geométrica y la aritmética aplicada a la terna $1, x^2y^4, x^4y^2$ nos proporciona

$$\frac{x^2y^4 + x^4y^2 + 1}{3} \geq ((x^2y^4)(x^4y^2))^{1/3} = x^2y^2$$

¿Por qué $M(x, y)$ no es suma de cuadrados? Aquí no hay más remedio que hacer algunas cuentas: pongamos

$$x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1 = g_1(x, y)^2 + \cdots + g_t(x, y)^2 \quad (1)$$

En primer lugar los g_i deben tener grado ≤ 3 . Haciendo $x = 0$ resulta

$$1 = g_1(0, y)^2 + \cdots + g_t(0, y)^2$$

de donde resulta que los $g_i(0, y)$ son constantes, esto es,

$$g_i(x, y) = xh_i(x, y) + c_i$$

con

$$c_1^2 + \cdots + c_t^2 = 1$$

Sustituyendo en la ecuación (1) y haciendo $y = 0$ obtenemos

$$1 = (xh_1(x, 0) + c_1)^2 + \cdots + (xh_t(x, 0) + c_t)^2$$

con lo que $h_i(x, 0) = 0$, es decir,

$$h_i(x, y) = yb_i(x, y).$$

En definitiva,

$$g_i(x, y) = xyb_i(x, y) + c_i$$

(como era esperable por razones de simetría), y además, por razones de grado, $b_i(x, y)$ es de grado 1. Sustituyendo de nuevo en la ecuación (1) tenemos:

$$x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1 = x^2y^2 \sum_i b_i^2 + 2xy \sum_i b_i c_i + \sum_i c_i^2$$

Simplificando $1 = \sum_i c_i^2$ resulta que x^2y^2 divide a la expresión de la izquierda y el primer sumando de la derecha, luego xy debe dividir a $\sum_i b_i(x, y) c_i$ que, como hemos señalado, es un polinomio de grado 1, por lo que $\sum_i b_i(x, y) c_i = 0$. Pero entonces, volviendo a la ecuación anterior y dividiendo por x^2y^2 obtenemos que

$$x^2 + y^2 - 3 = \sum b_i(x, y)^2$$

lo que es claramente absurdo sin más que evaluar en 0.

Tras estas pequeñas cuentas puede ser el momento de señalar dos cuestiones. Denotemos por $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}$ el conjunto de polinomios no negativos sobre \mathbb{R}^2 y por $\Sigma_{\mathbb{R}^2}$ el de sumas de cuadrados de polinomios en dos variables (omitiremos el subíndice cuando no haya duda de en qué espacio estamos trabajando).

Problema 1.1. *Decidir si un polinomio $f(x, y)$ es no negativo sobre \mathbb{R}^2 (es decir está en $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}$).*

Problema 1.2. *Decidir si $f(x, y)$ es una suma de cuadrados de polinomios (esto es, f está en Σ).*

Aunque ambos problemas puedan parecer de dificultad similar, existen diferencias entre ellos: Dado un polinomio $f(x, y)$ que sea suma de cuadrados, su grado debe ser par, digamos $2d$, por lo que el grado de los posibles sumandos es menor igual que d y el número de sumandos necesarios puede también acotarse en función de d (puede comprobarse que es menor o igual que $\binom{d+2}{2}$, esto es, la dimensión del espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que d). Por tanto el problema puede plantearse como la resolución sobre los números reales de un sistema (algebraico) de $\binom{d+2}{2}$ ecuaciones (de grado ≤ 2) en $\binom{d+2}{2}^2$ variables. La resolución de sistemas algebraicos ha experimentado grandes avances recientemente (gracias por ejemplo a algoritmos eficaces de cálculo de las bases de Gröbner).

El primer problema también es teóricamente decidible: se trata de decidir si el conjunto $\{f(x) < 0\}$ es vacío. El método de eliminación de cuantificadores de Tarski nos dice que esto es posible, pero no existen por el momento métodos eficaces para ello.

¡Atención! Obsérvese que la cota $\binom{d+2}{2}$ del número de cuadrados mencionada en el párrafo anterior, es para polinomios de grado fijo $2d$ y no debe confundirse con el número de Pitágoras de $\mathbb{R}[x, y]$, esto es, con el número de cuadrados necesario para expresar cualquier polinomio que sea suma de cuadrados, independiente del grado. Podemos plantearnos un tercer problema, sobre el que volveremos más tarde:

Problema 1.3. *¿Es finito el número de Pitágoras de $\mathbb{R}[x, y]$?*

En [7] se muestra que la colección de polinomios:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 1 \\ f_2(x, y) &= \Delta_1^2 f_1 + 1 = \Delta_1^2 + 1 \\ f_3(x, y) &= \Delta_2^2 f_2 + 1 = \Delta_2^2 \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + 1 \\ f_4(x, y) &= \Delta_4^2 f_3 + 1 = \Delta_4^2 \Delta_2^2 \Delta_1^2 + \Delta_4^2 \Delta_2^2 + \Delta_4^2 + 1 \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\Delta_1(x, y) &= y \\ \Delta_2(x, y) &= y(y - 2x) \\ \Delta_3(x, y) &= y(y - 2x)(y - 3x) \\ \Delta_4(x, y) &= y(y - 2x)(y - 3x)(y - 4x) \\ &\vdots \\ &\vdots\end{aligned}$$

son todos sumas de cuadrados pero que el número de cuadrados necesarios para representar f_n es exactamente n , por lo que el número de Pitágoras del anillo $\mathbb{R}[x, y]$ es infinito. Vemos pues que el cambio de situación al pasar de 1 a 2 variables ha sido drástico.

Volvamos a nuestros conjuntos \mathcal{P} y Σ de polinomios no negativos y sumas de cuadrados respectivamente. Ambos son conos convexos en el espacio vectorial $\mathbb{R}[x, y]$ (quizás sería más correcto decir semi-conos ya que naturalmente sólo contienen a las semirrectas correspondientes al producto por escalares positivos) y, claramente, Σ está estrictamente contenido en \mathcal{P} , a la vista del ejemplo anterior ($M(x, y)$ está en \mathcal{P} pero no en Σ). Surge así otro interesante:

Problema 1.4. *¿Cómo es de grande la diferencia entre \mathcal{P} y Σ ?*

Para precisar un poco más esta cuestión denotemos por \mathcal{P}_d el conjunto de polinomios no negativos de grado menor o igual que $2d$ y por Σ_d el conjunto de las sumas de cuadrados de polinomios de grado menor o igual que d . Ambos conjuntos son conos convexos en un espacio afín de dimensión finita: el de todos los monomios de grado menor o igual que $2d$ en las variables. G. Blehkerman, [Bl], ha comparado los volúmenes de estos dos conos, demostrando el siguiente resultado que prueba que hay muchos más polinomios no negativos que sumas de cuadrados. En particular esta diferencia se va agrandando con el grado y el número de variables:

Teorema 1.5. *Existe una constante $c(d)$ que depende sólo del grado d tal que*

$$\left(\frac{\text{Vol } \mathcal{P}_d}{\text{Vol } \Sigma_d}\right)^{\frac{1}{r}} \geq c(d)n^{(d-1)/2}$$

donde r es la dimensión de un determinado hiperplano de formas en el espacio de polinomios de grado $2d$ en n variables.

2. El problema 17 de Hilbert

Volvamos a Hilbert. Ya hemos comentado que él probó que \mathcal{P} y Σ son, en general, distintos. En 1900 en su famosa lista de problemas en el ICM de París enunció su problema número 17:

Problema 17 de Hilbert: ¿Es todo polinomio no negativo sobre \mathbb{R}^n una suma de cuadrados de funciones racionales (i.e. fracciones de polinomios)? En otras palabras, si $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ es ≥ 0 sobre todo \mathbb{R}^n , ¿existen polinomios g_0, g_1, \dots, g_t tales que $g_0^2 f = g_1^2 + \dots + g_t^2$?

La pregunta de Hilbert fue respondida por E. Artin en 1929 por medio de la teoría conocida hoy como de Artin-Schreier. Su idea esencial es el estudio y comprensión de las distintas formas de “ordenar” el anillo de los polinomios (o más exactamente su cuerpo de fracciones). Por una parte, las sumas de cuadrados son los elementos totalmente positivos, es decir, aquellos que son positivos en todos los órdenes posibles. Por otra parte, la posibilidad de definir un orden debe traducirse de alguna forma en términos geométricos.

Dar un orden en el anillo de polinomios (o cualquier otro anillo) consiste en fijar un criterio para comparar cuando un polinomio es mayor que otro, o equivalentemente, en definir cuando un polinomio es mayor que 0, esto es, cuando es positivo en ese orden. Por supuesto nos referimos siempre a órdenes compatibles con la estructura de cuerpo, es decir, que la suma y el producto de positivos debe ser positivo.

Intuitivamente hay un modo muy fácil de definir órdenes en los polinomios: basta fijar un punto y decir que un polinomio es positivo si es mayor que cero en una “región” determinada adyacente a dicho punto. (Siendo un poco más precisos: si es positivo en algún elemento de un filtro de conjuntos, de dimensión máxima, adherentes al punto. Para el caso de dimensión 1, para cada punto sólo existen dos tales filtros—y por consiguiente dos órdenes centrados en dicho punto—los intervalos $(a - \varepsilon, a)$ y $(a, a + \varepsilon)$).

La idea genial de Artin fue demostrar que a pesar de los muchos órdenes existentes en el cuerpo de fracciones del anillo de polinomios, la información fundamental está contenida en el tipo de órdenes mencionado y que puede rescatarse por tanto mediante la evaluación en los puntos del espacio afín:

Teorema 2.1 (Artin). *Existe un orden en $\mathbb{R}(x_1, \dots, x_n)$ en el que los polinomios f_1, \dots, f_r son simultáneamente positivos si y sólo si hay un punto $x \in \mathbb{R}^n$ en el que dichos polinomios son simultáneamente positivos, es decir, si y sólo si el conjunto*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) > 0, \dots, f_r(x) > 0\}$$

es no vacío.

Una vez conocida la respuesta afirmativa a la pregunta de Hilbert surge la pregunta cuantitativa acerca del número de cuadrados necesario. Recordemos que dado un cuerpo K llamamos número de Pitágoras de K al mínimo p tal que toda suma de cuadrados en K puede reducirse a una suma de $\leq p$ cuadrados.

Problema 17 cuantitativo (número de Pitágoras): ¿Cuántos cuadrados son necesarios? En otras palabras, ¿cual es el número de Pitágoras del cuerpo de fracciones del anillo de polinomios en n indeterminadas?

El problema cuantitativo fue resuelto mucho más tarde por A. Pfister [10] por medio de la teoría de formas cuadráticas (y en particular de las formas que llevan su nombre). Demostró que, si representamos por p_n el número de Pitágoras del cuerpo de funciones racionales en n variables, entonces

$$n + 1 \leq p_n \leq 2^n.$$

Sin embargo, a día de hoy no se sabe si estas cotas son óptimas, por lo que terminamos esta sección con el siguiente problema abierto:

Problema 2.2. *Probar si las cotas anteriores de p_n son óptimas.*

3. Conjuntos semialgebraicos: una pequeña digresión

A partir del espectacular resultado de Artin, y más tarde del Teorema de Tarski sobre eliminación de cuantificadores para cuerpos real cerrados, el estudio de los subconjuntos del espacio afín \mathbb{R}^n definidos por desigualdades polinomiales experimentó un notable desarrollo. Estos conjuntos reciben el nombre de semialgebraicos. Más precisamente, un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es *semialgebraico* si es una combinación booleana de desigualdades polinomiales, es decir si puede describirse en la forma:

$$S = \bigcup_{i=1}^t \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) = 0, g_{i1} > 0, \dots, g_{is_i} > 0\}$$

con $f_i, g_{ij} \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$.

Los conjuntos semialgebraicos tienen buenas propiedades:

1. Son cerrados por combinaciones booleanas (uniones e intersecciones finitas y complementario).
2. Son cerrados por productos: Si $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ son semialgebraicos entonces $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ es semialgebraico.
3. Son cerrados por proyecciones (Teorema de Tarski-Seidenberg).
4. Los semialgebraicos de la recta son las uniones finitas de intervalos.

Hay una muy abundante literatura sobre las propiedades topológicas de los conjuntos semialgebraicos, [3], [6]. Por ejemplo, los conjuntos semialgebraicos son triangulables, tienen una estructura local sencilla y un comportamiento esencialmente finito, es decir, fijado el grado de los polinomios que los describen pueden encontrarse cotas del número de tipos topológicos posibles, del número de componentes conexas que pueden tener, etc. De hecho, las 4 propiedades

definitorias señaladas antes se toman como definición de las llamadas estructuras **o-minimales**, cuyo ejemplo más sencillo son los conjuntos semialgebraicos, y que comparten un buen número de las propiedades de los mismos.

También tienen curiosas propiedades combinatorias, entre las que citaremos sólo una a título de ejemplo: cualquier intersección de desigualdades polinomiales estrictas en \mathbb{R}^n es equivalente a ... **¡una intersección con sólo n desigualdades!** Es decir, por muy grande que sea el número r tenemos que

$$\{g_1 > 0, \dots, g_r > 0\} = \{f_1 > 0, \dots, f_n > 0\}$$

para ciertos polinomios f_i . En concreto, en el plano \mathbb{R}^2 , cualquier intersección arbitraria de desigualdades estrictas puede describirse mediante sólo dos desigualdades.

Problema 3.1. *Encontrar algoritmos para construir esta representación corta a partir de la dada.*

Del mismo modo, cualquier intersección de desigualdades polinomiales laxas en \mathbb{R}^n es equivalente a una intersección de un número de desigualdades que depende sólo de n , en este caso $n(n+1)/2$. Es decir, por muy grande que sea el número r tenemos que

$$\{g_1 \geq 0, \dots, g_r \geq 0\} = \{f_1 \geq 0, \dots, f_n \geq 0\}$$

para ciertos polinomios f_i . Como en el caso de las desigualdades estrictas, esta cota es óptima. Sin embargo, es muy plausible que para determinadas clases “regulares” de semialgebraicos (los polihedros por ejemplo) la cota en el caso laxo coincida también con n , pero este problema está aun abierto.

4. Positivstellensätze

En la Sección 2 tratamos los polinomios que son no negativos sobre todo el espacio afín \mathbb{R}^n y vimos que pueden ser escritos como suma de cuadrados de funciones racionales. ¿Qué podemos decir del “aspecto” de los polinomios $f \in \mathbb{R}[x]$ que son positivos sobre un conjunto semialgebraico $S = \{g_1 \geq 0, \dots, g_r \geq 0\}$?

Comencemos analizando un sencillo ejemplo:

Ejemplo: Sea $f(x)$ un polinomio en una variable y supongamos que es positivo en la semirrecta $S = \{x \geq 0\}$. Descomponemos f como al principio

$$f(x) = (x + a_1)^{m_1} \dots (x + a_k)^{m_k} \cdot (x - a_{k+1})^{m_{k+1}} \dots (x - a_r)^{m_r} \cdot ((x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{\ell_1} \dots ((x - \alpha_s)^2 + \beta_s^2)^{\ell_s}$$

donde ahora $a_1 > 0, \dots, a_r > 0$, de modo que las k primeras raíces reales de f son negativas y las restantes positivas. Como $f(x)$ es no negativo en todo

$\{x \geq 0\}$, resulta que los exponentes m_{k+1}, \dots, m_r deben ser pares; además, para $i \leq k$, descomponiendo los m_i que sean impares como

$$(x + a_i)(x + a_i)^{2\nu_i} = x(x + a_i)^{2\nu_i} + a_i(x + a_i)^{2\nu_i}$$

resulta que

$$f = x \sum_j h_j^2 + \sum_k g_k^2$$

es decir se puede escribir como una combinación de los polinomios que describen S con coeficientes sumas de cuadrados. Con un razonamiento similar, pero un poco más de esfuerzo, puede comprobarse que si f es positivo en el intervalo $\{x \geq 0, 1 - x \geq 0\}$ entonces puede escribirse de la forma

$$f = s_0 + xs_1 + (1 - x)s_2 + x(1 - x)s_3$$

donde los s_i son sumas de cuadrados de polinomios.

Volviendo al planteamiento general, consideremos el conjunto

$$\Sigma_S = \sum_{\varepsilon=(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)} s_\varepsilon g_1^{\varepsilon_1} \cdots g_r^{\varepsilon_r}$$

Observemos que todos sus elementos son polinomios no negativos sobre S . Este conjunto va a jugar el papel de “cono de sumas de cuadrados” sobre S .

Denotemos por \mathcal{P}_S el conjunto de polinomios no negativos sobre S .

Tomando $S = \mathbb{R}^2 = \{1 \geq 0\}$ recuperamos $\Sigma_S = \Sigma$ y $\mathcal{P}_S = \mathcal{P}$ como en la Sección 1, y el ejemplo de Motzkin muestra que en general \mathcal{P}_S es estrictamente más grande que Σ_S . ¿Existe un análogo al problema 17 de Hilbert?

Teorema 4.1. (*PositiveStellensatz*, [13]) *a) f es no negativo ($f \geq 0$) sobre S si y sólo si existen $t_1, t_2 \in \Sigma_S$, $N \in \mathbb{N}$ tales que*

$$ft_1 = f^{2N} + t_2$$

b) f es positivo ($f > 0$) sobre S si y sólo si existen $t_1, t_2 \in \Sigma_S$ tales que

$$f(1 + t_1) = 1 + t_2$$

Es decir, f es de nuevo suma de cuadrados sobre S , si admitimos denominadores.

Problema 4.2. *Decidir si un polinomio $f(x, y)$ es no negativo sobre S (es decir si está en \mathcal{P}_S).*

Problema 4.3. *Decidir si $f(x, y)$ está en Σ_S .*

Estos problemas son más difíciles que en el caso del espacio afín, ya que la introducción de los polinomios g_j que definen S en la ecuación impide, por ejemplo, cualquier consideración sobre grados.

5. Teorema de Schmüdgen

En 1991, K. Schmüdgen en su estudio del problema de los momentos (i.e. cuando un funcional lineal puede ser expresado como una integral para una cierta medida de Borel) sobre conjuntos semialgebraicos, demostró que si $S = \{g_1 \geq 0, \dots, g_r \geq 0\}$ es compacto y $f > 0$ sobre S entonces lo es sobre Σ_S , es decir no necesita denominadores para ser expresado como suma de cuadrados sobre S , [12]. Por otra parte, la siguiente modificación del polinomio de Motzkin: $M'(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4 - x^2y^2 + 1$ es estrictamente positivo sobre \mathbb{R}^2 pero (de modo similar a lo hecho en la Sección 1) no es suma de cuadrados, por lo que sin la hipótesis de compacidad el resultado es, en general, falso. Ello ha despertado el interés sobre el siguiente:

Problema 5.1. *Caracterizar los conjuntos S que tienen la propiedad de Schmüdgen, es decir para los que $\mathcal{P}_S^+ \subset \Sigma_S$. donde \mathcal{P}_S^+ representa los polinomios que son estrictamente positivos sobre S .*

Para S no compacto, la respuesta está lejos de conocerse, incluso para dimensión dos. Obsérvese que la solución depende, en general, de los descriptores g_1, \dots, g_r del conjunto S . Así, en el ejemplo expuesto en la sección anterior, el semieje $S = \{x \geq 0\}$ puede también describirse como $S = \{x^3 \geq 0\}$. Sin embargo no es cierto que todo polinomio $f(x) > 0$ sobre S se pueda expresar como una combinación de x^3 con coeficientes sumas de cuadrados. Por ejemplo, el polinomio x no puede expresarse de esta forma. Esto lleva a introducir la noción de descriptor natural de un semialgebraico, en la que no entraremos. Simplemente nos basta con la idea de que x es un generador natural para el semieje positivo, mientras que x^3 no. Sin entrar en precisiones, en el caso de que $\dim S = 1$, esto es S es un subconjunto semialgebraico de una curva algebraica, se sabe que S tiene la propiedad de Schmüdgen si los descriptores de S son “buenos”, [8].

Si $\dim S = 2$ la situación es mucho más desconocida. Si $S \subset \mathbb{R}^2$ y contiene un cono (esto es, la región comprendida entre dos semirectas concurrentes en un punto) S no tiene la propiedad de Schmüdgen. De modo más preciso, si denotamos por \bar{S} la clausura de S en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ y $\bar{S} \setminus S$ es denso en la recta del infinito, entonces $\mathcal{P}_S^+ \not\subset \Sigma_S$, [11]. Pero por ejemplo, la cuestión de decidir si la franja

$$S = [1, 1] \times \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 1 \geq 0, 1 - x \geq 0\}$$

tiene o no la propiedad de Schmüdgen está abierta. Finalmente en dimensiones superiores sólo conocemos que si S contiene un cono bidimensional entonces S no tiene la propiedad de Schmüdgen.

Si admitimos que f tenga ceros en S , entonces el resultado de Schmüdgen sabemos que no es cierto en general y tiene sentido plantearse el siguiente

Problema 5.2. *¿Hay alguna clase identificable de conjuntos S para los que $\mathcal{P}_S = \Sigma_S$?*

En resultados recientes sobre este problema, C. Scheiderer, [11], ha probado que si $\dim S \geq 3$ estos conos son distintos, independientemente de que S sea o no compacto y de los descriptores g_j de S . Como antes, en el caso de curvas (esto es $\dim S = 1$) la situación es esencialmente conocida, y en dimensión dos se tienen resultados parciales. Si S es compacto y sus funciones descriptoras son no singulares y se cortan transversalmente dos a dos, entonces $\mathcal{P}_S = \Sigma_S$, [11]. También sabemos que esta igualdad es cierta en el caso de S tenga sólo un número finito de ceros en S y que en cada uno de ellos f pueda expresarse localmente (en el anillo de series en el punto) como suma de cuadrados sobre S . Y por supuesto los resultados negativos expuestos antes para el caso de $f > 0$ también son válidos, con mayor motivo, aquí.

Observación. Hasta ahora hemos trabajado siempre sobre el afín \mathbb{R}^n , pero todos los problemas expuestos pueden plantearse, más generalmente, sobre una variedad algebraica irreducible $V \subset \mathbb{R}^n$, reemplazando el anillo $\mathbb{R}[X]$ por el anillo de funciones polinomiales $\mathbb{R}[X]/I$ donde I es el ideal de polinomios que se anulan sobre V . Todos los resultados comentados (solución al problema 17 de Hilbert, Positivstellensatz, etc.) son válidos en este contexto con los cambios obvios.

En la línea del último problema expuesto, podemos plantearnos entonces:

Problema 5.3. *Caracterizar las variedades algebraicas V para las que $\mathcal{P} = \Sigma$, esto es las funciones de $\mathbb{R}[V]$ no negativas son sumas de cuadrados de elementos de $\mathbb{R}[V]$ (también expresado en la literatura por el acrónimo $psd = sos$ (positive semidefined = sums of squares)).*

El teorema de Schmüdgen afirma, en este caso, que si V es compacta toda función estrictamente positiva es *sos*. C. Scheiderer, en el trabajo ya mencionado, muestra que para curvas algebraicas puede darse una caracterización precisa de aquellas para las que $psd = sos$ y que esta igualdad es falsa para todas las variedades con dimensión ≥ 3 . En el caso de superficies por el momento sólo se han obtenido resultados parciales estando el caso general abierto.

6. Otras Extensiones

Finalizamos comentando brevemente algunas extensiones de las cuestiones expuestas a otros contextos. En particular podemos sustituir el anillo de polinomios por otros anillos de funciones como las funciones analíticas, funciones C^∞ , de Nash, ..., los conjuntos semialgebraicos por la correspondiente clase de conjuntos (combinaciones booleanas de desigualdades de las funciones consideradas) y repetir las mismas preguntas mencionadas a lo largo del texto:

problema 17 de Hilbert, Positivstellensatz, números de pitágoras, etc. El caso de las funciones de Nash (funciones algebraicas sobre los polinomios) la situación es esencialmente idéntica a la del anillo de polinomios. En el caso de las funciones analíticas en el entorno de un punto (i.e. gérmenes de funciones analíticas) el comportamiento es también análogo al caso polinomial, [1]. La situación es radicalmente distinta para el caso de funciones analíticas globales. En este caso conocemos que el problema 17 de Hilbert es “cierto” para \mathbb{R}^2 , es decir toda función analítica no negativa sobre \mathbb{R}^2 es suma de cuadrados de funciones meromorfas [5], pero es un problema abierto para $n \geq 3$.

Recientemente ha habido también avances en la dirección de encontrar algoritmos eficientes para representar un polinomio no negativo como suma de cuadrados [9]. Estos resultados utilizan técnicas de programación semidefinida y deben seguir explorándose.

Referencias

- [1] Andradas, C., Bröcker, L., Ruiz, J.M. Real Constructible Sets. Erg. Math. **33** Springer, Berlin (1996)
- [2] Blekherman, G. There Are Significantly More Nonnegative Polynomials than Sums of Squares. arXiv:math.AG/0309130v1 (2003)
- [3] Bochnak, J., Coste, M., Roy, M.F. Real Algebraic Geometry. Erg. Math. **36** Springer, Berlin (1998)
- [4] Bröcker, L. Minimale Erzeugung von Positivbereichen. Geom. Dedicata **16**, 335-350 (1984)
- [5] Castilla, A., Artin-Lang property for analytic manifolds of dimension two. Math. Z. **217**, 5-14 (1994)
- [6] Coste, M. An Introduction to Semialgebraic Geometry. Dip. Mat. Univ. Pisa, Dottorato di Ricerca in Matematica, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, Pisa (2000)
- [7] Delzell, C. Prestel, A. Positive Polynomials: From Hilbert’s 17th Problem to Real Algebraic Geometry. Springer Monographs in Mathematics, (2001).
- [8] Kuhlman, S., Marshall, M. Positivity, sums of squares end the multidimensional moment problem. Trans. Am. Math. Soc. **354** 4285-4301 (2002)

- [9] Parrilo, P., Sturmfels, B. Minimizing polynomial functions. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, **60**: Algorithmic and Quantitative Real Algebraic Geometry. AMS, (2003)
- [10] Pfister, A. Quadratische Formen in beliebigen Körpern. Invent. math. **1**, 116-132 (1966)
- [11] Scheiderer, C. Positivity and sums of squares: a guide to some recent results.
<http://www.uni-duisburg.de/FB11/FGS/F1/claus.html#preprints>
- [12] Schmüdgen, K. The K-moment problem for compact semialgebraic sets. Math. Ann. **289**, 203-206 (1991)
- [13] Stengle, G. *A Nullstellensatz and a Positivstellensatz in semialgebraic geometry. Math. Ann.* **207**, 87-97 (1974)

CARLOS ANDRADAS,
CATEDRÁTICO DE ALGEBRA,
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID.
PRESIDENTE DE LA REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA.

Un teorema de De Rham en el contexto de la Geometría no Conmutativa *

Fernando Mejías

Resumen

Presentamos una perspectiva histórica sobre como se usan las formas diferenciales no conmutativas (las cuales fueron primero introducidas por A. Connes) para construir una versión no conmutativa del complejo de Cenkly y Porter $\Omega^{*,*}(X)$ para un conjunto simplicial de tipo finito X , donde $\Omega^{*,*}(X)$ es un álgebra diferencial graduada con una filtración $\Omega^{*,q}(X) \subset \Omega^{*,q+1}(X)$, tal que $\Omega^{*,q}(X)$ es un módulo sobre \mathbf{Q}_q (el menor subanillo de los racionales que contiene a $1/p$ si $p \leq q$). Seguidamente se usan versiones no conmutativas del Lema de Poincaré y del teorema de Stokes para demostrar el teorema no conmutativo moderado de De Rham: si X es un conjunto simplicial de tipo finito, entonces para cada $q \geq 1$ y cualquier módulo M sobre \mathbf{Q}_q , la integración de formas induce un isomorfismo natural de módulos sobre \mathbf{Q}_q $I : H^i(\Omega^{*,q}(X), M) \rightarrow H^i(X; M)$ para todo $i \geq 0$.

Abstract

We present a historical view about how noncommutative differential forms (which were first introduced by A. Connes) can be used to construct a noncommutative version of the complex of Cenkly and Porter $\Omega^{*,*}(X)$ for a simplicial set of finite type X , such that $\Omega^{*,*}(X)$ is a differential graded algebra with a filtration $\Omega^{*,q}(X) \subset \Omega^{*,q+1}(X)$, and $\Omega^{*,q}(X)$ is a module over \mathbf{Q}_q (the smallest subring of the rationals which contains $1/p$ whenever $p \leq q$). Next we use noncommutative versions of the Poincaré Lemma and Stokes' theorem to prove the noncommutative tame de Rham theorem: if X is a simplicial set of finite type, then for each $q \geq 1$ and any \mathbf{Q}_q -module M , then integration of forms induces a natural isomorphism of \mathbf{Q}_q -modules $I : H^i(\Omega^{*,q}(X), M) \rightarrow H^i(X; M)$ for all $i \geq 0$.

Palabras Clave/Keywords: Complejo de Cenkly y Porter, formas diferenciales no conmutativas moderadas, conjuntos simpliciales, teorema de De Rham.

2001 Mathematics Subject Classification. Primary 55N35.

*El contenido de este trabajo es una versión ampliada del material presentado por el autor en una conferencia durante las XVII Jornadas de Matemática de la Asociación Matemática Venezolana, realizada en el Núcleo Universitario "Rafael Rangel" de la Universidad de Los Andes en Trujillo en el año 2004.

1 Introducción

Los inicios de la topología diferencial se encuentran asociados a la exploración de triangulación de una variedad incentivados por los trabajos de Poincaré. En especial, E. Cartan usó la teoría global de formas diferenciales con relación a este problema. En particular, Cartan demostró que sobre \mathbf{R}^n cualquier p -forma es la diferencial de una $(p-1)$ -forma; una generalización del caso clásico $p=1$ que Cartan denominó el “recíproco del lema de Poincaré”. Cartan mismo hizo notar que dicho resultado no es cierto si en lugar del espacio \mathbf{R}^n se considera una variedad suave arbitraria X .

Para la exploración de este tema Cartan sugirió considerar la función bilineal

$$(c, \omega) \rightarrow \langle c, \omega \rangle = \int_c \omega,$$

donde c es un p -ciclo de una triangulación de X y ω es una p -forma diferencial cerrada sobre X y planteó utilizar el teorema de Stokes para resolver los siguientes problemas:

- (I) Si ω es una p -forma cerrada con $\langle c, \omega \rangle = 0$ para todos los p -ciclos c , entonces ω es exacta.
- (II) Si c es un p -ciclo cerrado con $\langle c, \omega \rangle = 0$ para todas las p -formas cerradas ω , entonces c es una frontera.

El problema de Cartan fue publicado en 1928. Por esos días De Rham consideró el problema de Cartan como parte de su trabajo de tesis. En dicho trabajo De Rham demostró que cualquier p -forma sobre X se puede escribir como $\omega + d\zeta$, donde ω es una combinación lineal de p -formas elementales y ζ es una $(p-1)$ -forma y a partir de esta idea dedujo las proposiciones (I) y (II).

Con el desarrollo de la teoría de homología, más específicamente las técnicas de cohomología, resultó claro que el trabajo de De Rham podía ser expresado en términos del complejo $(\Omega^*(X), d)$ de las formas diferenciales sobre X y del complejo de cocadenas singulares estándar $(C^*(X), \delta)$ derivado de la triangulación de X , así, si $H^i(\Omega^*(X), \mathbf{R})$ y $H^i(C^*(X), \mathbf{R})$ representan los i -ésimos espacios vectoriales de cohomología de los respectivos complejos tenemos

Teorema. *Sea X una variedad suave de dimensión n . Entonces para cada $i \geq 0$ existe un isomorfismo natural de espacios vectoriales sobre \mathbf{R}*

$$H^i(X; \mathbf{R}) \xrightarrow{\cong} H^i(\Omega_{*,q}(X); \mathbf{R}).$$

En 1976, H. Cartan publicó en [5] otra versión del teorema de De Rham considerando una filtración $A^{*,q}(X; \mathbf{Z}) \subset A^{*,q+1}(X)$ para el complejo de las

formas polinómicas $A^*(X; \mathbf{Q})$ sobre un espacio simplicial X , obteniendo un isomorfismo

$$H^i(A^{*,q}(X; \mathbf{Z})) \xrightarrow{\cong} H^i(X; \mathbf{Z}),$$

para $i \leq q$.

Aunque en este caso no se pudo construir un “modelo” para A^* , en el sentido de la estructura construida por Sullivan en [38] para estudiar el complejo $\Omega^*(X; \mathbf{Q})$. Esta situación fue parcialmente mejorada hacia 1983, cuando Cenkl y Porter [10,11] construyeron un “modelo” especial después de demostrar el teorema de De Rham para formas cúbicas. Cenkl y Porter construyeron un complejo de formas diferenciales polinómicas $T^*(X, \mathbf{Z})$ con filtración $T^{*,q}(X) \subset T^{*,q+1}(X)$ dependiendo del grado de los polinomios y las formas elementales, de tal manera que $T^{*,q}(X)$ es un módulo sobre \mathbf{Q}_q (el menor subanillo de los racionales que contiene a $1/p$ si $p \leq q$). Así ellos demostraron que la integración de formas induce un isomorfismo de módulos $I : H^i(T^{*,q}(X; \mathbf{Q}_q)) \xrightarrow{\cong} H^i(X; \mathbf{Q}_q)$ para todo i y para todo q , siendo X un espacio simplicial de tipo finito.

Posteriormente Boullay, Kefer, Majewski, Stelzer, Scheerer, Unsöld y Vogt [4] extendieron la teoría de Cenkl y Porter a un conjunto simplicial general.

En 1987 Karoubi intentó obtener en [21] un “modelo” más general considerando el complejo de De Rham $\Omega^*(X)$ de las formas diferenciales no conmutativas sobre un espacio simplicial X (las cuales fueron introducidas originalmente por Connes en [12]) y demostrando una versión del teorema de De Rham en este contexto. Trabajando con esta idea, por ejemplo, Battikh en [3] introdujo una generalización del *cup product* \cup en cohomología.

Una versión ligeramente más general del resultado de Karoubi fue demostrada en 1998 por Cenkl (ver [7]). Tanto Karoubi como Cenkl probaron los mencionados teoremas usando técnicas similares a las que usó Cartan en su *paper* de 1976. Sin embargo, en [20] que si el anillo Λ de coeficientes se supone ser un subanillo de los racionales, entonces una versión del teorema no conmutativo de De Rham podría ser demostrada al estilo del teorema clásico. El objetivo final del presente artículo es la presentación de una solución a dicho problema, para lo cual se considera una versión no conmutativa del complejo de formas diferenciales de Cenkl y Porter $\Omega^{*,*}(X)$ para un espacio simplicial de tipo finito, obteniendo el siguiente *teorema no conmutativo moderado de De Rham*:

Teorema. *Sea X un espacio simplicial de tipo finito. Entonces para cada $q \geq 1$ y cada módulo M sobre \mathbf{Q}_q existe un isomorfismo natural de módulos sobre \mathbf{Q}_q tal que*

$$H^i(\Omega^{*,q}(X); M) \xrightarrow{\cong} H^i(X; M)$$

para todo $i \geq 0$. El isomorfismo es inducido por integración.

2 Conjuntos simpliciales

En esta sección presentamos una breve introducción al concepto de objeto simplicial y estudiamos algunos ejemplos. Para más detalles ver [26], [27] y [29].

Un *conjunto simplicial* X es un conjunto graduado con índices enteros no negativos junto con los operadores $d_i : X_k \rightarrow X_{k-1}$ y $s_i : X_k \rightarrow X_{k+1}$, $0 \leq i \leq k$, los cuales satisfacen las siguientes identidades:

- (i) $d_i d_{j+1} = d_j d_i$ si $i \leq j$,
- (ii) $s_i s_j = s_{j+1} s_i$ si $i \leq j$,
- (iii) $d_i s_j = s_{j-1} d_i$ si $i < j$,
- (iv) $d_j s_j = \text{identidad} = d_{j+1} s_j$,
- (v) $d_i s_j = s_j d_{i-1}$ si $i > j + 1$.

Los elementos de X_k se denominan *simplices de dimensión k* o simplemente *k -simplices*.

Dados dos conjuntos simpliciales X e Y , y una función $f : X \rightarrow Y$, decimos que f es una *transformación simplicial (de grado cero)* si f conmuta con los operadores d_i y s_i para todo i y para todo k . El *producto cartesiano* $X \times Y$ es el conjunto simplicial $(X \times Y)_k = X_k \times Y_k$ con

$$d_i(x, y) = (d_i x, d_i y), \quad s_i(x, y) = (s_i x, s_i y), \quad \text{para todo } x \in X_k, y \in Y_k \text{ y } 0 \leq i \leq k.$$

Ejemplo 2.1 Sea V un conjunto parcialmente ordenado. Sea X_k el conjunto de todas las sucesiones finitas (x_0, \dots, x_k) , con $x_0 \leq \dots \leq x_k$, $x_0, \dots, x_k \in V$. Definamos $d_i : X_k \rightarrow X_{k-1}$ y $s_i : X_k \rightarrow X_{k+1}$, $0 \leq i \leq k$ por

$$d_i(x_0, \dots, x_k) = (x_0, \dots, x_{i-1}, \hat{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_k) \quad (\text{omitir } x_i)$$

y

$$s_i(x_0, \dots, x_k) = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, x_i, x_{i+1}, \dots, x_k) \quad (\text{repetir } x_i).$$

Entonces $X = \{X_k\}$ es un conjunto simplicial.

Ejemplo 2.2 Denotemos por Δ la categoría cuyos objetos son todas las sucesiones finitas de enteros $\Delta(n) = \{0, 1, \dots, n\}$ y los morfismos son todas las funciones crecientes $f : \Delta(n) \rightarrow \Delta(m)$ (para todo $0 \leq i \leq j \leq n$ tenemos $f(i) \leq f(j)$).

Definimos los operadores $\delta_i : \Delta(n-1) \rightarrow \Delta(n)$ y $\sigma_i : \Delta(n+1) \rightarrow \Delta(n)$ para $0 \leq i \leq n$ por

$$\delta_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j < i, \\ j+1 & \text{si } j \geq i \end{cases} \quad \text{y} \quad \sigma_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j \leq i, \\ j-1 & \text{si } j > i. \end{cases}$$

Entonces cada $f \in \text{Hom}(\Delta(n), \Delta(m))$ puede ser escrita como un producto finito de algunas δ y σ .

Un *objeto simplicial en una categoría \mathcal{C}* es un functor contravariante $F : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$. Un conjunto simplicial X puede ser identificado con un objeto simplicial en la categoría de los conjuntos **Set**, $F : \Delta \rightarrow \mathbf{Set}$, $X = F(\Delta_n) = X$ (ver [26], p. 233 o [29], p. 4).

Si Λ es un anillo, un Λ -*módulo simplicial* es un objeto simplicial en la categoría **Mod** de los módulos sobre el anillo Λ . Si M y N son Λ -módulos simpliciales, entonces el producto tensorial $M \otimes N$ es también un Λ -módulo simplicial con d_i y s_i sobre $(M \otimes N)_k = M_k \otimes N_k$ definidos así:

$$d_i(x \otimes y) = d_i x \otimes d_i y, \quad s_i(x \otimes y) = s_i x \otimes s_i y, \quad \text{para todo } x \in X_k, y \in Y_k \text{ y } 0 \leq i \leq k.$$

Un *álgebra graduada simplicial* $A^* = \bigoplus_{n \geq 0} A^n$ es una familia de álgebras graduadas $A_k^* = \bigoplus_{n \geq 0} A_k^n$, $k = 0, 1, 2, \dots$ sobre un anillo conmutativo Λ la cual es un conjunto simplicial y los operadores d_i y s_i son morfismos de álgebras graduadas.

Ejemplo 2.3 Sea $\Delta_n = \{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid 0 \leq a_i \leq 1, \sum a_i = 1\}$ el n -simplex estándar (Figure 1-1). Las funciones $\delta_i : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$ y $\sigma_i : \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n$

$$\delta_i(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})$$

y

$$\sigma_i(x_0, \dots, x_{n+1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+1}).$$

Sea P_n la colección de todos los polinomios $f : \Delta_n \rightarrow \mathbf{R}$ con coeficientes en \mathbf{Z} y sea $P = \{P_n\}_{n \geq 0}$. Entonces P es un conjunto simplicial. En este caso tenemos $\partial_i : P_n \rightarrow P_{n-1}$ y $s_i : P_n \rightarrow P_{n+1}$ definidos para dada $f \in P_n$ por

$$\partial_i(f) = f \circ \delta_i \quad \text{y} \quad s_i(f) = f \circ \sigma_i,$$

La multiplicación de polinomios induce una estructura de álgebra sobre P . Entonces P es un álgebra simplicial.

Ejemplo 2.4 En lugar del simplex estándar Δ_n (como en el Ejemplo 2.3) consideramos Δ_n como el subconjunto de la frontera de I^{n+1} (el $(n+1)$ -cubo en \mathbf{R}^{n+1}) dado por

$$\{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} : 0 \leq x_i \leq 1 \text{ y } \prod_i x_i = 0\},$$

es decir, Δ_n es identificado con las caras posteriores de I^{n+1} (Figure 1-2).

Definimos las funciones $\delta_i : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$ y $\sigma_i : \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n$ por

$$\delta_i(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1})$$

y

$$\sigma_i(x_0, \dots, x_{n+1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_i \cdot x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+1})$$

(ver [10] y [9]).

Si T_n es la colección de los polinomios $f : \Delta_n \rightarrow \mathbf{R}$ con coeficientes en \mathbf{Z} y si $T = \{T_n\}_{n \geq 0}$, entonces T es un álgebra simplicial. En este caso tenemos $\partial_i : P_n \rightarrow P_{n-1}$ y $s_i : P_n \rightarrow P_{n+1}$ están definidos para cada $f \in P_n$ por

$$\partial_i(f) = f \circ \delta_i \quad \text{y} \quad s_i(f) = f \circ \sigma_i,$$

Ejemplo 2.5 Sea \mathcal{I}_n el ideal generado por los polinomios $\prod_{j=0}^n x_j$. Entonces P_n se puede identificar con el cociente $T_n = \mathbf{Z}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{I}_n$. Si $T = \{T_n\}_{n \geq 0}$, entonces la multiplicación sobre $\mathbf{Z}[x_0, \dots, x_n]$ induce una estructura de \mathbf{Z} -álgebra sobre T_n . Luego T es un álgebra simplicial.

Sean X un conjunto simplicial y $C_n(X)$ el grupo libre sobre X_n . Denotemos por $C_*(X)$ el complejo de cadenas $(C_n(X), \partial)$ con el *operador frontera* $\partial = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$. Los elementos de $C_n(X)$ son denominados *n-cadenas* en X . Si X es un conjunto simplicial y G es un grupo abeliano entonces la *homología de X con coeficientes en G* está definida por

$$H_*(X; G) = H(C_*(X) \otimes G).$$

Si $C^*(X)$ denota el complejo $(C^n(X), \delta)$ de *cocadenas en X con coeficientes en G* , es decir $C^n(X; G) = \text{Hom}(C_n(X), G)$ y el *operator cofrontera* δ es el dual de ∂ . La *cohomología de X con coeficientes en G* está definida por

$$H^*(X; G) = H(C^*(X), G).$$

3 El complejo de Cenkly y Porter

En esta sección introducimos el complejo de Cenkly y Porter, es decir el complejo de las formas diferenciales compatibles sobre las caras posteriores del cubo estándar. Cenkly y Porter primero demostraron el teorema de De Rham para el complejo de formas diferenciales cúbicas usando integración (ver [10]). Posteriormente, Boullay, Kefer, Majewski, Stelzer, Scheerer, Unsöld y Vogt [4] introdujeron *el complejo de Cenkly y Porter* o *el complejo de De Rham de formas diferenciales moderadas* y demostraron el teorema de De Rham para un conjunto simplicial siguiendo las ideas de Cartan.

Denotemos por $\Delta_n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ el simplex convencional (Ejemplo 2.4). Una forma básica de peso q sobre Δ_n en las coordenadas x_0, x_1, \dots, x_n es una forma diferencial de

$$x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_j}^{a_j} x_{k_1}^{b_1} dx_{k_1} \wedge \cdots \wedge x_{k_p}^{b_p} dx_{k_p}$$

donde $\{i_1, \dots, i_j\}$ y $\{k_1, \dots, k_p\}$ son subconjuntos disjuntos de $\{0, 1, \dots, n\}$, a_i y b_j son enteros no negativos y $q = \max\{a_1, \dots, a_j, b_1 + 1, \dots, b_p + 1\}$. Sea $\mathbf{Q}_q = \mathbf{Z}[\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{q}]$ el menor subanillo de los racionales tales que $1/p$ si $0 < p \leq q$ para $q > 1$, y $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Z}$. Denotemos por $T^{p,q}(\Delta_n)$ el módulo de las combinaciones lineales sobre de las p -formas básicas de peso $\leq q$. El producto exterior \wedge induce una función

$$\wedge : T_n^{p_1, q_1}(\mathbf{Z}) \otimes T_n^{p_2, q_2}(\mathbf{Z}) \rightarrow T_n^{p_1+p_2, q_1+q_2}(\mathbf{Z})$$

y la diferencial usual d se extiende a un morfismo de \mathbf{Z} -módulos $d : T_n^{p,q}(\mathbf{Z}) \rightarrow T_n^{p+1,q}(\mathbf{Z})$. También tenemos la inclusión $T_n^{p,q}(\mathbf{Z}) \hookrightarrow T_n^{p,q+1}(\mathbf{Z})$. Entonces para todo $n \geq 0$, $T^{*,*} = \{T^{p,q}(\Delta_n)\}_{n \geq 0}$ es un álgebra diferencial graduada (ADG) con filtración.

Sea $X = \{X_n\}$ un conjunto simplicial y sea $T(X) = \text{Mor}(T^{*,*}, X)$ (morfismos de conjuntos simpliciales). El teorema de Stokes implica que para cualquier $q \geq 0$, integración de formas moderadas induce una transformación de complejos de cocadenas $I : T^{*,q}(X) \rightarrow C^*(X; \mathbf{Q}_q)$. Entonces tenemos el siguiente teorema (para la demostración ver [4] y [10]).

Teorema 3.1 (El Teorema Moderado de De Rham) *Sea X un conjunto simplicial de tipo finito. Entonces para cada $q \geq 1$ y para cualquier módulo M sobre \mathbf{Q}_q existe un isomorfismo natural de módulos sobre \mathbf{Q}_q*

$$H^i(T^{*,q}(X), M) \xrightarrow{\cong} H^i(X; M)$$

para todo $i \geq 0$. El isomorfismo es inducido por integración.

4 El cálculo diferencial universal

Una versión generalizada del Cálculo Diferencial sobre variedades fue introducida por Connes ([12] and [13]) a partir del concepto de formas diferenciales no conmutativas. Karoubi [21] usó las ideas de Connes para definir el complejo de De Rham $\Omega(X)$ no conmutativo sobre un espacio simplicial X y utilizó una técnica similar a la de Cartan para demostrar el teorema de De Rham en este contexto (ver [20].) A continuación presentamos una breve descripción del trabajo de Karoubi.

Sea A un álgebra sobre un anillo conmutativo Λ . Denotemos por $\mu : A \otimes A \rightarrow A$ la multiplicación sobre A (todos los anillos considerados en este artículo son conmutativos y con elemento neutro, similarmente suponemos que todas las álgebras contienen elemento neutro). Las *formas diferenciales de grado n* son los elementos del producto tensorial de Λ -álgebras

$$T^n(A) = \underbrace{A \otimes_{\Lambda} A \otimes_{\Lambda} \cdots \otimes_{\Lambda} A}_{n+1 \text{ veces}}$$

Tenemos pues que $\mathcal{T}^*(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{T}^n(A)$ es una Λ -álgebra con multiplicación $\cdot : \mathcal{T}^n(A) \otimes \mathcal{T}^m(A) \rightarrow \mathcal{T}^{n+m}(A)$ definida mediante la fórmula

$$(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \cdot (b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_m) = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes (a_n \cdot b_0) \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_m.$$

El *diferencial* operador $D : \mathcal{T}^n(A) \rightarrow \mathcal{T}^{n+1}(A)$ está definido por

$$\begin{aligned} D(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &= 1 \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \\ &\quad + \sum_{j=1}^n (-1)^j a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{j-1} \otimes 1 \otimes a_j \otimes \cdots \otimes a_n \\ &\quad + (-1)^{n+1} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1. \end{aligned}$$

Teorema 4.1 *Si $\omega \in \mathcal{T}^n(A)$ y $\theta \in \mathcal{T}^m(A)$, entonces*

$$(1) \quad D^2(\omega) = 0.$$

$$(2) \quad D(\omega \cdot \theta) = D(\omega) \cdot \theta + (-1)^n \omega \cdot D(\theta) \quad (\text{la identidad de Leibniz}).$$

Entonces $\mathcal{T}^*(A)$ es un ADG. La cohomología del complejo $(\mathcal{T}^*(A), D)$ es trivial. Supongamos que A es una Λ -álgebra aumentada, con extensión $\lambda : A \rightarrow \Lambda$ (morfismo de anillos) tal que $\lambda(1) = 1$. Si $\iota_\lambda : \mathcal{T}^n(A) \rightarrow \mathcal{T}^{n-1}(A)$ es el morfismo de módulos definido por

$$\iota_\lambda(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \lambda(a_0)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n),$$

entonces ι es una contracción de homotopía, es decir

$$D\iota_\lambda + \iota_\lambda D = 1.$$

Definamos $\Omega^0(A) = A$ y $\Omega^1(A) = \ker \mu$, el módulo $\Omega^1(A)$ sobre Λ es un bimódulo sobre A . Las *formas diferenciales no conmutativas de grado n* son los elementos del producto tensorial de A -módulos

$$\Omega^n(A) = \underbrace{\Omega^1(A) \otimes_A \Omega^1(A) \otimes_A \cdots \otimes_A \Omega^1(A)}_{n \text{ veces}}.$$

El producto de formas diferenciales está definido por yuxtaposición de productos tensoriales. Entonces la suma directa

$$\Omega^*(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \Omega^n(A)$$

es un álgebra graduada. La *diferencial* $d : \Omega^0(A) \rightarrow \Omega^1(A)$ está definida por la ecuación

$$d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1.$$

Así tenemos el isomorfismo de Λ -módulos $A \otimes A/\Lambda \rightarrow \Omega^1(A)$ tal que $a \otimes \bar{b} \mapsto a db$. Entonces $\Omega^n(A)$ puede ser identificado con el producto tensorial de Λ -módulos

$$A \otimes \underbrace{A/\Lambda \otimes A/\Lambda \otimes \cdots \otimes A/\Lambda}_{n \text{ veces}}.$$

Una forma diferencial de grado n puede escribirse como una combinación lineal de términos del tipo $a_0 da_1 da_2 \dots da_n$ y el morfismo d se extiende a las formas de grado n de $\Omega^n(A)$ por

$$d(a_0 da_1 \dots da_n) = da_0 da_1 \dots da_n = 1 da_0 da_1 \dots da_n.$$

Teorema 4.2 *Si $\omega \in \Omega^n(A)$ y $\theta \in \Omega^m(A)$, entonces*

- (1) $d^2(\omega) = 0$.
- (2) $d(\omega \cdot \theta) = d(\omega) \cdot \theta + (-1)^n \omega \cdot d(\theta)$ (la identidad de Leibniz).

Nota 4.3 El álgebra $\Omega^*(A)$ es un álgebra diferencial graduada y constituye la solución a un problema universal: Para un ADG B^* y un morfismo de álgebras $f : A \rightarrow B^0$ existe un único morfismo de álgebras diferenciales graduadas $f^* : \Omega^*(A) \rightarrow B^*$ el cual coincide con f en grado 0. El complejo $(\Omega^*(A), d)$ se denomina el *cálculo diferencial universal* de A o el *complejo no conmutativo de De Rham* of A .

Existe una inclusión que envía $\Omega^*(A)$ hacia $\mathcal{T}^*(A)$. Por otra parte, para cualquier $n \geq 0$ existe un *operador proyección* $J : \mathcal{T}^n(A) \rightarrow \Omega^n(A)$ dado por $J(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_0 da_1 \dots da_n$.

Una forma diferencial no conmutativa ω es *cerrada* si $d\omega = 0$. Decimos que $\omega \in \Omega^n(A)$ es *exacta* si existe $\eta \in \Omega^{n-1}(A)$ tal que $\omega = d\eta$. El hecho de que el complejo $(\Omega^*(A), d)$ tiene cohomología trivial conocido como el Lema no Conmutativo de Poincaré.

Lema 4.4 *Sea A un álgebra aumentada sobre el anillo Λ . Entonces toda forma cerrada $\omega \in \Omega^*(A)$ es exacta.*

Demostración. Sea $\lambda : A \rightarrow \Lambda$ una forma Λ -lineal con $\lambda(1) = 1$. Probaremos que existe una contracción homotópica $j_\lambda : \Omega^n(A) \rightarrow \Omega^{n-1}(A)$. Para definir j_λ expresamos los elementos de $\Omega^n(A)$ como elementos de $\mathcal{T}^{n+1}(A)$ usando la inclusión, luego aplicamos ι_λ , y posteriormente aplicamos la proyección J . Así para $\omega = a_0 da_1 \dots da_n$ obtenemos $j_\lambda(\omega) = \lambda(a_0)a_1 da_2 \cdots da_n - \lambda(a_0 a_1) da_2 \cdots da_n$. Primero demostraremos que j_λ está bien definida. Obviamente es suficiente probar que $j_\lambda : \Omega^1(A) \rightarrow \Omega^0(A)$ está bien definida. Supongamos que $\omega = a_0 da_1 \in \Omega^1(A)$, $a \in \Lambda$ y $a'_1 = a_1 + a \cdot 1 \in A$. Entonces $j_\lambda(a_0 da'_1) = \lambda(a_0)a'_1 - \lambda(a_0 a'_1) \cdot 1 = \lambda(a_0)a_1 - \lambda(a_0 a_1) \cdot 1 = j_\lambda(a_0 da_1)$. Ahora para $\omega = a_0 da_1 \cdots da_n \in \Omega^n(A)$ tenemos

$$\begin{aligned}
d_{J\lambda}(\omega) + J\lambda d(\omega) &= \lambda(a_0)da_1da_2 \dots da_n - \lambda(a_0a_1) d1da_2 \dots da_n \\
&\quad + \lambda(1)a_0 da_1da_2 \dots da_n - \lambda(1 \cdot a_0) da_1 \dots da_n \\
&= \omega.
\end{aligned}$$

Pero $d\omega = 0$. Por lo tanto $d_{J\lambda}(\omega) = \omega$. \blacksquare

Si $A = \{A_n\}_{n \geq 0}$ es un álgebra simplicial, entonces $\Omega^*(A) = \{\Omega^*(A_n)\}_{n \geq 0}$ es un ADG simplicial. En efecto, si $A = \{A_n^*\}_{n \geq 0}$, para cada n consideramos el álgebra tensorial

$$\mathcal{T}^*(A_n) = \bigoplus_{p \geq 0} A_n^{\otimes p},$$

con los operadores $\partial_i : A_n^{\otimes p} \rightarrow A_{n-1}^{\otimes p}$ y $s_i : A_n^{\otimes p} \rightarrow A_{n+1}^{\otimes p}$ definidos así

$$\partial_i(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_p) = \partial_i a_0 \otimes \partial_i a_1 \otimes \dots \otimes \partial_i a_p$$

y

$$s_i(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_p) = s_i a_0 \otimes s_i a_1 \otimes \dots \otimes s_i a_p.$$

En forma similar podemos definir los operadores ∂_i y s_i sobre $\Omega^*(A)$ y tenemos

Proposición 4.5 *Sea $A = \{A_n^*\}_{n \geq 0}$ un álgebra simplicial. Si D es la diferencial sobre $\mathcal{T}^*(A_n)$, entonces $\mathcal{T}^*(A)$ y $\Omega^*(A)$ son álgebras diferenciales graduadas simpliciales.*

Una versión no conmutativa del Teorema de De Rham fue probado por Karoubi en [20]. Karoubi consideró el caso particular en que A_n es el cociente de la Λ -álgebra $\Lambda[x_0, x_1, \dots, x_n]/(x_0 + x_1 + \dots + x_n - 1)$. Sean $\Omega^*(A_n)$ el álgebra de formas no conmutativas sobre A_n y $A = \{A_n\}_{n \geq 0}$. Entonces $\Omega^*(A_n)$ es el álgebra no conmutativa generada por los símbolos x_i y dx_i , $0 \leq i \leq n$ y las relaciones siguientes

$$\sum_{i=0}^n x_i = 1, \quad \sum_{i=0}^n dx_i = 0 \quad \text{y} \quad x_i x_j = x_j x_i.$$

Luego

Teorema 4.6 (El Teorema no Conmutativo de De Rham) *Sean X un conjunto simplicial, A un álgebra simplicial sobre un anillo conmutativo Λ y $\Omega^*(X) = \text{Mor}(X, \Omega^*(A))$. Entonces existe un isomorfismo natural de módulos sobre Λ*

$$H^i(\Omega^*(X)) \cong H^i(X; \Lambda)$$

para todo $i \geq 0$.

Una versión ligeramente más general del teorema anterior fue demostrada por Cenkli en [7] y [8].

5 Formas diferenciales no conmutativas moderadas

En [20] Karoubi propuso como problema demostrar el teorema no conmutativo de De Rham usando integración asumiendo que el anillo Λ contenga a los racionales. En este artículo presentamos una solución a un problema ligeramente más general construyendo una versión no conmutativa del complejo de Cenkli-Porter, el cual es construido definiendo una filtración sobre el álgebra de formas diferenciales no conmutativas $\Omega^*(T)$ sobre $T = \bigoplus_{n \geq 0} T_n$, donde T_n son los polinomios restringidos al n -simplex Δ_n (ver Ejemplo 2.4). Esta sección constituye un estudio de las propiedades principales de dicho complejo. Para empezar notemos que la Proposición 4.5 implica que $\Omega^*(T)$ es un ADG simplicial. También establecemos la siguiente notación: \mathbf{Z}_+ denota el conjunto de los enteros no negativos; \mathbf{Z}_+^{n+1} es el conjunto de índices múltiples $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ con $\alpha_i \in \mathbf{Z}_+$, y $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$. Para $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n$ y $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbf{Z}_+^{n+1}$ sea

$$x^\alpha = x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

y

$$dx^\varepsilon = dx_0^{\varepsilon_0} dx_1^{\varepsilon_1} \cdots dx_n^{\varepsilon_n} = (dx_0)^{\varepsilon_0} (dx_1)^{\varepsilon_1} \cdots (dx_n)^{\varepsilon_n}.$$

Si $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\} \subset \{0, 1, \dots, n\}$ escribimos

$$\begin{aligned} x_A^\alpha &= x_{a_1}^{\alpha_{a_1}} x_{a_2}^{\alpha_{a_2}} \cdots x_{a_p}^{\alpha_{a_p}} \\ (1 - x_A)^\alpha &= (1 - x_{a_1})^{\alpha_{a_1}} (1 - x_{a_2})^{\alpha_{a_2}} \cdots (1 - x_{a_p})^{\alpha_{a_p}} \\ dx_A^\varepsilon &= dx_{a_1}^{\varepsilon_{a_1}} dx_{a_2}^{\varepsilon_{a_2}} \cdots dx_{a_p}^{\varepsilon_{a_p}}. \end{aligned}$$

Sea $\Omega_n(\mathbf{Z})$ el álgebra de todas las combinaciones lineales de *formas diferenciales no conmutativas* sobre \mathbf{Z}

$$\omega = x^{\alpha_1} dx^{\varepsilon_1} x^{\alpha_2} dx^{\varepsilon_2} \cdots x^{\alpha_r} dx^{\varepsilon_r}, \quad \alpha_i, \varepsilon_i \in \mathbf{Z}_+^{n+1}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

con $0 \leq x_j \leq 1$ y $\prod_{j=0}^n x_j = 0$. Estas son las formas diferenciales no conmutativas compatibles con las caras posteriores del cubo I^{n+1} (Ejemplo 2.4). Si $\sum_i |\varepsilon_i| = p$ decimos que ω es una p -forma (en particular, las 0-forms son polinomios).

Si $\|\omega\|_j = \sum_i (\alpha_{ij} + \varepsilon_{ij})$, definimos el *peso* de ω por $\|\omega\| = \max\{\|\omega\|_j : j = 0, 1, \dots, n\}$.

Sea $\Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z})$ el conjunto de todas las p -formas de $\Omega_n(\mathbf{Z})$ con peso $\|\omega\| \leq q$ y sea $\Omega_n^{*,*}(\mathbf{Z}) = \{\Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z})\}_{p,q \geq 0}$. Observemos que para todos n, p y q , $\Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z})$ es un módulo sobre \mathbf{Z} finitamente generado. La siguiente proposición se deduce directamente de la definición de $\Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z})$.

Proposición 5.1 Para todo $n \geq 0$, $\Omega_n^{*,*}(\mathbf{Z}) = \{\Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z})\}_{p,q \geq 0}$ es un álgebra diferencial graduada con una filtración.

Fijemos $p \geq 0$ y $q \geq 1$, consideremos a $\omega \in \Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z})$ como un elemento de $\Omega^p(T_n)$ y los operadores ∂_i y s_i sobre $\omega \in \Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z})$ como las restricciones de los respectivos operadores sobre $\Omega^*(T)$. Además tenemos que estas restricciones son morfismos de álgebras diferenciales graduadas. Entonces

Proposición 5.2 $\Omega_n^{*,*}(\mathbf{Z}) = \{\Omega_n^{*,*}(\mathbf{Z})\}_{n \geq 0}$ es un álgebra diferencial graduada simplicial.

Ahora consideremos $0 \leq x_j \leq 1$ para $j = 0, 1, \dots, n$ con $\prod_j x_j = 0$. Definimos

$$\Omega^{p,q}(\Delta_n) = \Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_q,$$

donde $\mathbf{Q}_q = \mathbf{Z}[\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{q}]$ para $q > 1$ y $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Z}$. Sean Δ_n^k , $0 \leq k \leq n$ el k -esqueleto de Δ_n y

$$\Omega^{p,q}(\Delta_n, \Delta_n^k) = \{\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_n) : \omega|_{\Delta_n^k} \equiv 0\}.$$

Sea $\Omega^{p,q}(\Delta_n^k)$ la colección de todas las combinaciones lineales sobre \mathbf{Q}_q de formas diferenciales que son no nulas sobre una cara de dimensión k de Δ_n^k .

Proposición 5.3 La sucesión

$$\Omega^{p,q}(\Delta_n, \Delta_n^{k-1}) \xrightarrow{r} \Omega^{p,q}(\Delta_n^k, \Delta_n^{k-1}) \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de módulos sobre \mathbf{Q}_q para todos $p \geq 0$ y $q \geq 1$ (r denota la restricción respectiva).

Demostración. Consideremos $\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_n, \Delta_n^{k-1})$ con $q \geq 1$. Entonces ω es una combinación lineal $\omega = \sum_i \omega_i$, donde cada ω_i es no nula exactamente en una cara F de Δ_n^k . Entonces

$$\omega|_G \equiv 0 \quad \text{si } G \text{ es cualquier } k\text{-cara de } \Delta_n^k \text{ diferente a } F.$$

Si $F = F(A, B)$ (ver Ejemplo 2.4) donde A y B son dos conjuntos disjuntos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{n-k}\}$ con $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{k+1} \leq n$, $0 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_{n-k} \leq n$, $A \cup B = \{0, 1, \dots, n\}$, $0 \leq x_i \leq 1$, para todo $i \in A$, $\prod_{i \in A} x_i = 0$ y $x_j \equiv 1$ for all $j \in B$.

Tenemos $\omega|_{\Delta_n^{k-1}} \equiv 0$. Por lo tanto ω es una combinación lineal de formas de tipo

$$f^1(x) dx^{\varepsilon_1} \dots f^s(x) dx^{\varepsilon_s},$$

donde $f^j(x) = x_A^{\alpha_1} (1-x_A)^{\alpha_2} x_B^{\beta_1} (1-x_B)^{\beta_2} f_j(x)$ ($f_j(x)$ es un polinomio de variable x). Para F podemos asumir $|\beta_2| = 0$. Así $f^j(x) = x_A^{\alpha_1} (1-x_A)^{\alpha_2} x_B^{\beta_1} f_j(x)$.

Notemos que si $|\alpha_i| = 0$ para $i = 1, 2$ (y para todo j), entonces $\varepsilon_{it} \neq 0$ para algún t .

Sobre F tenemos $f^j(x) = x_A^{\alpha_1}(1 - x_A)^{\alpha_2} f_j(x_A)$.

Sea $G = G(A', B')$ otra k -cara de Δ_n^k . Si $A = A'$ entonces existe un $i \in B$ con $x_i \equiv 0$, luego $f^j(x) = 0$ y $\omega|_G \equiv 0$.

Si $A \neq A'$ entonces existe un $i \in A$ tal que $x_i \equiv 1$. Entonces resulta $\omega|_G \equiv 0$.

Sea $\phi(x) = x_B$, entonces $\phi \in \Omega^{0,1}(\Delta_n)$. Definimos $\omega_k = \phi \cdot \omega$. Observemos que existe un $i \in A$ tal que $\|\omega_k\|_j = 1 \leq \|\omega_k\|_i = q$ para todo $j \in B$. Por lo tanto $\omega_k \in \Omega^{p,q}(\Delta_n)$. Además

$$\omega_k|_{F(A,B)} = \phi|_{F(A,B)} \cdot \omega|_{F(A,B)} \equiv 1 \cdot \omega = \omega.$$

Si $F(A', B')$ es otra k -cara de Δ_n^k entonces tenemos

$$\omega_k|_{F(A',B')} = \phi|_{F(A',B')} \cdot \omega|_{F(A',B')} \equiv \phi|_{F(A',B')} \cdot 0 = 0.$$

Si $F(E, H)$ es una $(k-1)$ -cara de Δ_n^k entonces existe al menos un $i \in A$ tal que $i \notin E$. Entonces x_i es o bien 0 o bien 1 sobre $F(E, H)$. to $\omega|_{F(E,H)} = 0$ y entonces $\omega_k|_{F(E,H)} \equiv 0$. Luego $\omega_k \in \Omega^{p,q}(\Delta_n, \Delta_n^{k-1})$ y $\omega_k|_{\Delta_n^k} \equiv \omega$. ■

Proposición 5.4 *La sucesión*

$$\Omega^{p,q}(\Delta_n) \xrightarrow{r} \Omega^{p,q}(\partial\Delta_n) \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de módulos sobre \mathbf{Q}_q , para todos $p \geq 0$, $q \geq 1$ (r denota la restricción respectiva).

Demostración. Para $k = 0$ la sucesión

$$\Omega^{p,q}(\Delta_n) \rightarrow \Omega^{p,q}(\Delta_n^0) \rightarrow 0,$$

es exacta, así cualquier elemento $a \in \mathbf{Q}_q$ puede ser considerado una forma $\omega(x_0, \dots, x_n) = a$ (un polinomio constante).

Asumimos por inducción que la sucesión

$$\Omega^{p,q}(\Delta_n) \rightarrow \Omega^{p,q}(\partial\Delta_n^{k-1}) \rightarrow 0$$

es exacta. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & 0 & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \Omega^{p,q}(\Delta_n, \Delta_n^{k-1}) & \xrightarrow{r_1} & \Omega^{p,q}(\Delta_n^k, \Delta_n^{k-1}) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow i_1 & & \downarrow i_2 & & \\ \Omega^{p,q}(\Delta_n) & \xrightarrow{r_2} & \Omega^{p,q}(\Delta_n^k) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 & & \\ \Omega^{p,q}(\Delta_n^{k-1}) & \xrightarrow{=} & \Omega^{p,q}(\Delta_n^{k-1}) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & & & \\ 0 & & & & \end{array}$$

La columna de la izquierda es exacta por hipótesis de inducción. La columna de la derecha es exacta por definición. La exactitud de la primera se tiene por la Proposición 5.3, luego es suficiente demostrar la exactitud de la segunda fila. Supongamos que $\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_n^k)$.

Caso 1. Si $\omega \in \ker p_2$ entonces existe $\omega' \in \Omega^{p,q}(\Delta_n^k, \Delta_n^{k-1})$ con $i_2(\omega') = \omega$. Existe un $\omega'' \in \Omega^{p,q}(\Delta_n, \Delta_n^{k-1})$ tal que $\omega'' = r_1(\omega')$. Luego $\omega = i_2(r_1(\omega')) = r_2(i_1(\omega'))$ y $\omega \in \text{im } r_2$.

Caso 2. Si $p_2(\omega) \neq 0$, entonces existe $\omega' \in \Omega^{p,q}(\Delta_n)$ tal que $p_1(\omega') = p_2(\omega)$. Luego

$$p_2(\omega - r_2(\omega')) = p_1(\omega)p_2(r_2(\omega')) = p_1(\omega') - p_2(r_2(\omega')) = 0.$$

Así $\omega' - r_2(\omega') \in \ker p_2$, entonces $\omega' - r_2(\omega') \in \text{im } r_2$ (por *Caso 1*), luego $\omega \in \text{im } r_2$.

Finalmente para $k = n - 1$ tenemos $\Delta_n^{n-1} = \partial\Delta_n$. Así, la sucesión

$$\Omega^{p,q}(\Delta_n) \rightarrow \Omega^{p,q}(\partial\Delta_n) \rightarrow 0$$

es exacta. ■

Ahora demostramos que para todo $q \geq 0$ el complejo $\Omega^{*,q}(\Delta_n)$ tiene cohomología trivial. Sea $\lambda : T \rightarrow \mathbf{Z}$ una forma lineal cualquiera con $\lambda(1) = 1$. Para cada $p \geq 0$, sea $j_\lambda : \Omega^p(T) \rightarrow \Omega^{p-1}(T)$ la función definida en $\omega = f^0 df^1 \dots df^p \in \Omega^p(T)$ por

$$j_\lambda(\omega) = \lambda(f^0) f^1 df^2 \dots df^p - \lambda(f^0 f^1) df^2 \dots df^p.$$

Entonces j_λ es una contracción homotópica (Lema 4.4). Consideremos $\Omega^{p,q}(\Delta_n)$ como un submódulo de $\Omega^p(T_n)$ y j_λ restringida a $\Omega^{p,q}(\Delta_n)$. Supongamos que

$$\omega = x^{\alpha_1} dx^{\varepsilon_1} \dots x^{\alpha_r} dx^{\varepsilon_r} = \sum f^0 df^1 \dots df^p.$$

Observemos que $\|j_\lambda(\omega)\|_j \leq \|\omega\|_j$ para todo j . Por lo tanto $\|j_\lambda(\omega)\| \leq \|\omega\| \leq q$ y $j_\lambda(\omega) \in \Omega^{p-1,q}(\Delta_n)$. Así $j_\lambda : \Omega^{p,q}(\Delta_n) \rightarrow \Omega^{p-1,q}(\Delta_n)$ es una contracción homotópica (por el Lema 4.4).

Si $\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_n)$ y $d\omega = 0$ decimos que ω es *cerrada*. Decimos que ω es *exacta* si existe $\eta \in \Omega^{p-1,q}(\Delta_n)$ tal que $\omega = d\eta$. Entonces tenemos el siguiente

Lema 5.5 (El Lema no Conmutativo Moderado de Poincaré) *Si ω está en $\Omega^{p,q}(\Delta_n)$ y es una forma cerrada, entonces ω es exacta.*

6 Integración de formas no conmutativas moderadas

En esta sección presentamos la integración de formas diferenciales no conmutativas moderadas y usamos este concepto para definir un morfismo de módulos sobre \mathbf{Q}_q $I : \Omega^{*,q}(\Delta_n) \rightarrow C^*(\Delta_n; \mathbf{Q}_q)$. También establecemos y demostramos

una versión no conmutativa del teorema de Stokes la cual nos permite utilizar a I para inducir un morfismo de complejos el cual juega un papel importante en el teorema de De Rham.

Sea $\Omega^{*,*}(\Delta_n)$ el álgebra de las formas diferenciales no conmutativas moderadas con variables x_0, x_1, \dots, x_n .

Sea $T^{*,*}(\Delta_n)$ el álgebra de las formas diferenciales de Cenk-Porter con coeficientes en \mathbf{Q}_q sobre el cubo estándar $I^{n+1} \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Definimos $F : \Omega^{p,q}(\Delta_n) \rightarrow T^{p,q}(\Delta_n)$ como sigue: si $\omega \in \Omega^{0,q}(\Delta_n)$ o $\omega = dx_j \in \Omega^{1,1}(\Delta_n)$ entonces $F(\omega) = \omega$; if $\omega = f^0 df^1 \dots df^p \in \Omega^{p,q}(\Delta_n)$ para $p > 1$, luego $F(f^0 df^1 \dots df^p) = f^0 df^1 \wedge \dots \wedge df^p$. Entonces $F : \Omega^{p,q}(\Delta_n) \rightarrow T^{p,q}(\Delta_n)$ define un morfismo de módulos sobre \mathbf{Q}_q . Observemos que para todo $p \geq 0$ tenemos

$$F(f^0 df^1 \dots df^p) = F(f^0) F(df^1) \wedge \dots \wedge F(df^p).$$

En particular si $\omega \in \Omega^{p_1,q_1}(\Delta_n)$ y $\eta \in \Omega^{p_2,q_2}(\Delta_n)$ entonces F es un morfismo de álgebras, es decir

$$F(\omega \cdot \eta) = F(\omega) \wedge F(\eta).$$

Para demostrar esta identidad es suficiente considerar $\omega = f^0 df^1, \eta = g^0 dg^1 \in \Omega^1(T_n)$.

Fórmulas explícitas para calcular $F(\omega)$ se muestran en [30]. Similarmente, las siguientes proposiciones son casi obvias.

Proposición 6.1 *El diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{p,q}(\Delta_n) & \xrightarrow{d} & \Omega^{p+1,q}(\Delta_n) \\ F_p \downarrow & & \downarrow F_{p+1} \\ T^{p,q}(\Delta_n) & \xrightarrow{d} & T^{p+1,q}(\Delta_n) \end{array}$$

conmuta para todo $p \geq 0$.

Proposición 6.2 *Sea $p \geq 0, q \geq 1$. If $\omega \in \Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z})$. Si G es una p -cara de Δ_n , entonces*

$$\int_G F(\omega) \in \mathbf{Q}_q.$$

Además F es una función simplicial. Si $\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_n)$ y $\sigma : \Delta_p \rightarrow \Delta_n$ es un p -simplex definimos la integral de ω sobre σ por

$$\int_\sigma \omega = \int_\sigma F(\omega) = \int_{\Delta_p} \sigma^* F(\omega).$$

Si $\sigma = \sum_i \sigma_i \otimes a_i \in C_p(\Delta_n; \mathbf{Q}_q)$, entonces la integral de ω sobre σ está definida por

$$\int_\sigma \omega = \sum_i a_i \int_{\sigma_i} \omega.$$

Proposición 6.3 (El Teorema no Conmutativo de Stokes) *Sea σ una p -cadena sobre Δ_n y supongamos que $\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_n)$. Entonces*

$$\int_{\sigma} d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega.$$

Demostración. Supongamos que $\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_n)$ y sea $\sigma : \Delta_p \rightarrow \Delta_n$ un p -simplex. Por la Proposición 6.1 y por el teorema (clásico) de Stokes tenemos

$$\int_{\sigma} d\omega = \int_{\sigma} F(d\omega) = \int_{\sigma} d(F(\omega)) = \int_{\partial\sigma} F(\omega) = \int_{\partial\sigma} \omega. \quad \blacksquare$$

Denotemos por $(C^*(\Delta_n; \mathbf{Q}_q), \delta)$ el complejo estándar de cocadenas sobre Δ_n con coeficientes en \mathbf{Q}_q . Sea

$$I : \Omega^{*,q}(\Delta_n) \rightarrow C^*(\Delta_n; \mathbf{Q}_q)$$

el morfismo de módulos sobre \mathbf{Q}_q definido así: dadas $\sigma \in C_p(\Delta_n; \mathbf{Q}_q)$ y $\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_n)$

$$I_p(\omega)(\sigma) = \int_{\sigma} \omega.$$

El teorema de Stokes implica que I es una morfismo de complejos de cocadenas y además tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^{p,q}(\Delta_{n-1}) & \xleftarrow{\partial_i} & \Omega^{p,q}(\Delta_n) & \xrightarrow{s_i} & \Omega^{p,q}(\Delta_{n+1}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C^p(\Delta_{n-1}; \mathbf{Q}_q) & \xleftarrow{\tilde{\partial}_i} & C^p(\Delta_n; \mathbf{Q}_q) & \xrightarrow{\tilde{s}_i} & C^p(\Delta_{n+1}; \mathbf{Q}_q), \end{array}$$

para $0 \leq i \leq n$. Entonces I es una función simplicial.

Proposición 6.4 *El diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Omega^{p,q}(\Delta_k, \partial\Delta_k) & \xrightarrow{i} & \Omega^{p,q}(\Delta_k) & \xrightarrow{r} & \Omega^{p,q}(\partial\Delta_k) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & C^p(\Delta_k, \partial\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \xrightarrow{i} & C^p(\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \xrightarrow{r} & C^p(\partial\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \rightarrow & 0, \end{array}$$

conmuta para todo $p \geq 0$, $q \geq 1$. (Los operadores i y r son las inclusiones y restricciones respectivas).

Demostración. Sean $\sigma \in C_p(\Delta_k; \mathbf{Q}_q)$ y $\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_k, \partial\Delta_k)$, entonces $r(\omega) = r(i(\omega))$. Luego

$$I(i(\omega))(\sigma) = \int_{\sigma} i(\omega) = \int_{\sigma \cap \partial\Delta_k} \omega + \int_{\sigma - (\sigma \cap \partial\Delta_k)} \omega = \int_{\sigma - (\sigma \cap \partial\Delta_k)} \omega = i(I(\omega))(\sigma).$$

Por otra parte tenemos

$$I(r(\omega))(\sigma) = I(\sigma)(r(\omega)) = \int_{\sigma} r(\omega) = \int_{\sigma} \omega|_{\partial\Delta_k} = \int_{\sigma \cap \partial\Delta_k} \omega = I(r(\sigma))(\omega). \quad \blacksquare$$

7 El teorema no conmutativo moderado de De Rham

En esta sección construimos el complejo moderado de De Rham o el complejo no conmutativo de Cenkly y Porter sobre un conjunto simplicial de tipo finito. Seguidamente usamos las versiones no conmutativas del Lema de Poincaré y del Teorema de Stokes para demostrar una versión no conmutativa del Teorema de De Rham.

Sean X un conjunto simplicial de tipo finito y X_n la colección de n -simplices no triviales en X . Una *forma diferencial no conmutativa tipo (p, q)* sobre X es una función simplicial $\omega : X_n \rightarrow \Omega^{p,q}(\Delta_n)$ (en otras palabras ω es una función tal que para cada $G \in X_n$ y cualquier cara F de G , $\omega(F)$ es la restricción de $\omega(G)$ a F). La colección de todas estas formas se denota por $\Omega^{p,q}(X)$.

Para una p -cadena $\sigma = \sum_i \sigma_i \otimes a_i \in C_p(X; \mathbf{Q}_q)$, $\sigma_i : \Delta_p \rightarrow X$ y $\omega \in \Omega^{p,q}(X)$ definimos

$$\int_{\sigma} \omega = \sum_i a_i \int_{\Delta_p} \omega|_{\sigma_i}$$

así podemos definir la función $I : \Omega^{p,q}(X) \rightarrow C^p(X; \mathbf{Q}_q)$ por

$$I_p(\omega)(\sigma) = \int_{\sigma} \omega.$$

Entonces

$$\delta I_p(\omega)(\sigma) = I_p(\omega)(\partial\sigma) = \int_{\partial\Delta_p} \omega|_{\partial\sigma}.$$

Por otra parte

$$I_{p+1}(d\omega)(\sigma) = I_p(d\omega)(\sigma) = \int_{\Delta_p} d\omega|_{\sigma}.$$

Así la integración induce un morfismo de complejos de cocadenas. Entonces tenemos el siguiente

Teorema 7.1 *Sea X un conjunto simplicial de tipo finito. Entonces para todo $q \geq 1$ la función*

$$I : H^i(\Omega^{*,q}(X)) \xrightarrow{\cong} H^i(X; \mathbf{Q}_q),$$

inducida por integración es un isomorfismo de módulos sobre \mathbf{Q}_q para todo $i \geq 0$.

Demostración. Usamos inducción sobre los esqueletos de X . Para $k = 0$ el enunciado es cierto porque

$$H^i(\Omega^{*,q}(X)) = \begin{cases} \mathbf{Q}_q, & \text{si } i = 0, \\ 0, & \text{si } i > 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad H^i(X; \mathbf{Q}_q) = \begin{cases} \mathbf{Q}_q, & \text{si } i = 0, \\ 0, & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

Supongamos que el enunciado es cierto para los esqueletos de dimensión ℓ , X_{ℓ} de X para $\ell < k$.

Por la Proposición 6.4 se sigue que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Omega^{*,q}(X_k, X_{k-1}) & \rightarrow & \Omega^{*,q}(X_k) & \rightarrow & \Omega^{*,q}(X_{k-1}) \rightarrow 0 \\ & & I \downarrow & & I \downarrow & & I \downarrow \\ 0 & \rightarrow & C^*(X_k, X_{k-1}; \mathbf{Q}_q) & \rightarrow & C^*(X_k; \mathbf{Q}_q) & \rightarrow & C^*(X_{k-1}; \mathbf{Q}_q) \rightarrow 0 \end{array}$$

es conmutativo. Entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \rightarrow H^{i-1}(\Omega^{*,q}(X_k, X_{k-1})) & \xrightarrow{\delta} & H^i(\Omega^{*,q}(X_k, X_{k-1})) & \xrightarrow{\delta} & H^i(\Omega^{*,q}(X_k)) & \rightarrow & H^i(\Omega^{*,q}(X_{k-1})) \rightarrow \cdots \\ & & \downarrow \iota & & \downarrow I & & \downarrow \iota \\ \cdots \rightarrow H^{i-1}(X_{k-1}; \mathbf{Q}_q) & \xrightarrow{\delta} & H^i(X_k, X_{k-1}; \mathbf{Q}_q) & \xrightarrow{\delta} & H^i(X_k; \mathbf{Q}_q) & \rightarrow & H^i(X_{k-1}; \mathbf{Q}_q) \rightarrow \cdots \end{array}$$

Las filas son exactas e ι es un isomorfismo por hipótesis. Probaremos que κ es un isomorfismo. Sea $\{\Delta_{k,j} : j \in J\}$ el conjunto de los k -simplices de X_k . Entonces

$$\Omega^{*,q}(X_k, X_{k-1}) \cong \bigoplus_j \Omega^{*,q}(\Delta_{k,j}, \partial\Delta_{k,j})$$

y

$$C^*(X_k, X_{k-1}; \mathbf{Q}_q) \cong \bigoplus_j C^*(\Delta_{k,j}, \partial\Delta_{k,j}; \mathbf{Q}_q)$$

son isomorfismos de módulos sobre \mathbf{Q}_q . Entonces es suficiente probar que la integración induce un isomorfismo

$$I : H^i(\Omega^{*,q}(\Delta_k, \partial\Delta_k)) \rightarrow H^i(C^*(\Delta_k, \partial\Delta_k; \mathbf{Q}_q)).$$

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo (Proposición 6.4)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Omega^{p,q}(\Delta_k, \partial\Delta_k) & \rightarrow & \Omega^{p,q}(\Delta_k) & \rightarrow & \Omega^{p,q}(\partial\Delta_k) \rightarrow 0 \\ & & I \downarrow & & I \downarrow & & I \downarrow \\ 0 & \rightarrow & C^p(\Delta_k, \partial\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \rightarrow & C^p(\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \rightarrow & C^p(\partial\Delta_k; \mathbf{Q}_q) \rightarrow 0, \end{array}$$

La primera fila es exacta por la Proposición 5.4.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \rightarrow H^{i-1}(\Omega^{*,q}(\partial\Delta_k)) & \xrightarrow{\delta} & H^i(\Omega^{*,q}(\Delta_k, \partial\Delta_k)) & \xrightarrow{\delta} & H^i(\Omega^{*,q}(\Delta_k)) & \rightarrow & H^i(\Omega^{*,q}(\partial\Delta_k)) \rightarrow \cdots \\ & & \downarrow \iota & & \downarrow I & & \downarrow \iota \\ \cdots \rightarrow H^{i-1}(\partial\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \xrightarrow{\delta} & H^i(\Delta_k, \partial\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \xrightarrow{\delta} & H^i(\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \rightarrow & H^i(\partial\Delta_k; \mathbf{Q}_q) \rightarrow \cdots \end{array}$$

Por lo tanto I es un isomorfismo por el “Lema Cinco”¹. ■

Finalmente, aplicando el teorema de Künneth concluimos con nuestra versión generalizada del teorema de De Rham. Sea M un módulo sobre \mathbf{Q}_q y sean

¹“the five lemma” es un resultado clásico en álgebra homológica y topología algebraica, y algunas veces se encuentra en el estudio de módulos. El nombre está sugerido porque se trata de dos sucesiones con cinco módulos cada una y a partir de información sobre la exactitud de las sucesiones y cuatro de los morfismos verticales se deduce que el morfismo vertical central es un isomorfismo. Ver e.g., [24, p. 169], [27, p. 14 y 365] y [36, pp. 185-186]

$\omega = \eta \otimes a \in \Omega^{p,q}(X) \otimes M$, y $\sigma = \theta \otimes b \in C_p(X; \mathbf{Q}_q) \otimes M$. Entonces la *integral de ω sobre σ* está definida por

$$\int_{\sigma} \omega = I(\eta)(\theta) \cdot a \otimes b = \int_{\theta} \eta \cdot a \otimes b.$$

Así la integración define un morfismo de módulos sobre \mathbf{Q}_q , $I : \Omega^{p,q}(X) \otimes M \rightarrow C^p(X; M)$. Entonces tenemos

Teorema 7.2 *Sea X un conjunto simplicial de tipo finito. Entonces para $q \geq 1$ y para cualquier módulo M sobre \mathbf{Q}_q existe un isomorfismo natural de módulos sobre \mathbf{Q}_q*

$$H^i(\Omega^{*,q}(X), M) \xrightarrow{\cong} H^i(X; M)$$

para todo $i \geq 0$. El isomorfismo es inducido por integración.

Sea $f : M_1 \rightarrow M_2$ un morfismo de módulos sobre \mathbf{Q}_q . Entonces para cada $p \geq 0$, f induce dos morfismos de módulos sobre \mathbf{Q}_q $f^* : H^i(\Omega^{p,q}(X), M_1) \rightarrow H^i(\Omega^{p,q}(X), M_2)$ y $f^* : H^i(X; M_1) \rightarrow H^i(X; M_2)$. La palabra “natural” en el teorema anterior significa que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^i(\Omega^{p,q}(X), M_1) & \xrightarrow{I} & H^i(X; M_2) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ H^i(\Omega^{p,q}(X), M_1) & \xrightarrow{I} & H^i(X; M_2) \end{array}$$

conmuta para todo $p \geq 0$, $i \geq 0$.

Como mencionamos anteriormente, se pueden utilizar la técnica de Cartan para demostrar la existencia de un isomorfismo $H^i(\Omega^*(X)) \xrightarrow{\cong} H^i(X; \Lambda)$, para un anillo conmutativo Λ con elemento neutro. Dos demostraciones ligeramente distintas de este hecho se encuentran en [7] y [8]. El teorema no conmutativo de De Rham demostrado por Cenkler es una generalización del resultado que Karoubi presentó en [20]. En ese mismo *paper* Karoubi presentó como problema la versión del teorema de De Rham como lo hemos presentado aquí.

8 Ejemplo

Concluimos este artículo con el examen de un ejemplo concreto para ilustrar el papel del teorema de De Rham y para apreciar mejor la diferencia entre las técnicas en Geometría no Conmutativa y su contraparte clásica. Otros ejemplos similares se encuentran en [30].

Ejemplo 8.1 Consideremos el complejo $\Omega^{*,3}(S^1)$ de formas no conmutativas moderadas de peso ≤ 3 sobre la circunferencia S^1 . En este caso el anillo sobre el

cual se consideran las álgebras es $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$. Resulta fácil (aunque un poco largo) verificar que $H^0(\Omega^{*,3}(S^1)) \cong H^0(S^1, \mathbf{Q}_3) \cong \mathbf{Q}_3$ y que $H^1(\Omega^{*,3}(S^1)) \cong H^1(S^1, \mathbf{Q}_3) \cong \mathbf{Q}_3$

Consideremos la triangulación de S^1 con 0-simplices v_0, v_1 y v_2 , y 1-simplices e_0, e_1 y e_2 orientados en sentido antihorario. Podemos considerar cada 1-simplice e_i como la imagen bajo una función continua e inyectiva $\psi_i : \Delta_1 \rightarrow S^1$. Sea $\phi_i = \psi^{-1} : e_i \rightarrow \Delta_1$, $i = 0, 1, 2$ (recordemos que el 1-simplice Δ_1 es considerado como la unión de las dos caras posteriores del 2-cubo I^2 en \mathbf{R}^2 , como en el Ejemplo 2.4.

Ahora supongamos que $\omega \in \Omega^{2,3}(S^1)$, es una función simplicial tal que $\omega(e_i) = \omega_i \in \Omega^{2,3}(\Delta_1) = \Omega_1^{2,3}(\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Q}_3$, con

$$\begin{aligned}\omega_0(x_0, x_1) &= a_0 dx_0^2 + a_1 dx_1^2 + a_2 x_0 dx_0^2 + a_3 x_1 dx_1^2 + a'_2 dx_0^2 x_0 + a'_3 dx_1^2 x_1 \\ \omega_1(y_0, y_1) &= b_0 dy_0^2 + b_1 dy_1^2 + b_2 y_0 dy_0^2 + b_3 y_1 dy_1^2 + b'_2 dy_0^2 y_0 + b'_3 dy_1^2 y_1 \\ \omega_3(z_0, z_1) &= c_0 dz_0^2 + c_1 dz_1^2 + c_2 z_0 dz_0^2 + c_3 z_1 dz_1^2 + c'_2 dz_0^2 z_0 + c'_3 dz_1^2 z_1.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\omega_0(x_0, x_1) &= a_2 dx_0^3 + a_3 dx_1^3 + a'_2 dx_0^3 + a'_3 dx_1^3 \\ \omega_1(y_0, y_1) &= b_2 dy_0^3 + b_3 dy_1^3 + b'_2 dy_0^3 + b'_3 dy_1^3 \\ \omega_3(z_0, z_1) &= c_2 dz_0^3 + c_3 dz_1^3 + c'_2 dz_0^3 + c'_3 dz_1^3.\end{aligned}$$

Por lo tanto si $d\omega = 0$ tenemos $a_i = -a'_i$, $b_i = -b'_i$ y $c_i = -c'_i$, para $i = 1, 2$. Luego $\dim \ker(d : \Omega^{2,3}(\Delta_1) \rightarrow \Omega^{3,3}(\Delta_1)) = 12$. Similarmente se puede verificar que $\dim \operatorname{im}(d : \Omega^{1,3}(\Delta_1) \rightarrow \Omega^{2,3}(\Delta_1)) = 12$, de donde $H^2(\Omega^{*,3}(S^1)) = 0 = H^2(S^1, \mathbf{Q}_3)$.

Ahora supongamos que $\eta \in \Omega^{3,3}(S^1)$, es una función simplicial tal que $\eta(e_i) = \eta_i \in \Omega^{3,3}(\Delta_1) = \Omega_1^{3,3}(\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Q}_3$, con

$$\begin{aligned}\eta_0(x_0, x_1) &= a_0 dx_0^3 + a_1 dx_1^3 \\ \eta_1(y_0, y_1) &= b_0 dy_0^3 + b_1 dy_1^3 \\ \eta_3(z_0, z_1) &= c_0 dz_0^3 + c_1 dz_1^3.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\eta = d\zeta$, donde $\zeta \in \Omega^{2,3}(\Delta_1)$ es del tipo

$$\begin{aligned}\zeta_0(x_0, x_1) &= \frac{a_0}{3} x_0 dx_0^2 + \frac{a_0}{3} dx_0 x_0 dx_0 + \frac{a_0}{3} dx_0^2 x_0 \\ &\quad + \frac{a_1}{3} x_1 dx_1^2 + \frac{a_1}{3} dx_1 x_1 dx_1 + \frac{a_1}{3} dx_1^2 x_1 \\ \zeta_1(y_0, y_1) &= \frac{b_0}{3} y_0 dy_0^2 + \frac{b_0}{3} dy_0 y_0 dy_0 + \frac{b_0}{3} dy_0^2 y_0 \\ &\quad + \frac{b_1}{3} y_1 dy_1^2 + \frac{b_1}{3} dy_1 y_1 dy_1 + \frac{b_1}{3} dy_1^2 y_1 \\ \zeta_3(z_0, z_1) &= \frac{c_0}{3} z_0 dz_0^2 + \frac{c_0}{3} dz_0 z_0 dz_0 + \frac{c_0}{3} dz_0^2 z_0 \\ &\quad + \frac{c_1}{3} z_1 dz_1^2 + \frac{c_1}{3} dz_1 z_1 dz_1 + \frac{c_1}{3} dz_1^2 z_1.\end{aligned}$$

Por lo tanto $H^3(\Omega^{*,3}(S^1)) = 0 = H^3(S^1, \mathbf{Q}_3)$ (note que 3 es invertible en \mathbf{Q}_3).

Finalmente, notemos que $H^i(\Omega^{*,3}(S^1)) = 0 = H^i(S^1, \mathbf{Q}_3)$ es trivial para todo $i > 3$, pues si $\theta \in \Omega^{4,3}(S^1)$, entonces $\theta = 0$.

Notas

Concluimos este artículo con algunos comentarios que pueden servir de guía al lector interesado en más detalles sobre el tema.

Primeramente, una descripción interesante de la evolución del teorema clásico de De Rham y su importancia en el desarrollo de la Topología, así como del desarrollo histórico mismo de esta disciplina matemática durante la primera mitad del siglo XX, se encuentra en el excelente libro de Dieudonné [15]. Un estudio detallado del teorema de De Rham en el contexto moderno se encuentra casi en cualquier libro básico de Geometría Diferencial o de Topología Diferencial, así que los clásicos de Spivak [37] y Warner [39] son suficientes. Por supuesto, un libro que resulta de gran valor es el original de De Rham [34] (dicho sea de paso, existe una versión en inglés por Springer-Verlag, 1984).

Para un estudio de teoría de cohomología los libros de Cartan y Eilenberg [6], Mac Lane [27] y Spanier [36] son fuertemente recomendados. Para la lectura de estos tres libros conviene tener al alcance algún libro sobre teoría de categorías, como por ejemplo el de Mac Lane [26]. allí encontrará el lector algún material sobre objetos simpliciales, pero si se necesita algo más especializado el libro de May [29] será de gran ayuda.

El teorema de De Rham demostrado por H. Cartan fue publicado en la *Nota* [5] (con mayores detalles se encuentra desarrollado en las notas de curso de Cenkl [7]). La primera versión del teorema no conmutativo de De Rham desarrollada por Karoubi apareció en [21]. Para algunas de sus aplicaciones puede consultarse los trabajos de dos de sus discípulos: la tesis de Battikh [3] y la *Nota* de Mouet [32].

El desarrollo de la Geometría no conmutativa es, principalmente, obra de Connes, quien presenta sus ideas originales en el clásico [12] y que posteriormente amplió en [13]. Algunos intentos notables se han realizado para presentar el tema (o algunas de sus partes) en forma más “simplificada,” en particular se encuentran los trabajos de Gracia-Bonda, Várilly y Figueroa [17], Kassel [22] y Madore [28]. Para algunas aplicaciones resultan muy interesantes los artículos de Baez [1] y [2] y, por supuesto, el de Connes [14].

El estudio de formas originales cúbicas con aplicaciones del teorema moderado de De Rham se encuentran en los trabajos de Cenkl y Porter [10,11]. El estudio de las propiedades del denominado complejo de Cenkl y Porter fue publicado como notas de un seminario desarrollado por Scheerer, Schuch y Vogt en [35]. En ese mismo trabajo se introduce el complejo de corrientes moderadas de De Rham (duales algebraicos de las formas moderadas) y se demuestra un teorema de De Rham para homología. Siguiendo esa idea, Mejías en [30] construye una versión no conmutativa del complejo de corrientes moderadas de De Rham y demuestra el correspondiente teorema para homología después de haber aplicado técnicas similares a las de Cenkl y Porter para la exploración

del complejo de De Rham de formas diferenciales no conmutativas moderadas, tal como se presentan en este artículo.

Referencias

- [1] N. Baez, R-commutative Geometry and Quantization of Poisson Algebras, *Adv. Math.* **95** (1992), 61-91.
- [2] N. Baez, Differential Calculi on Quantum Vector Spaces with Hecke-Type Relations, *Lett. Math. Phys.* **23** (1991), 133-141.
- [3] N. Battikh, *Cup i -Product sur les Formes Différentielles non Commutatives et Excision en K -Théorie*, (Disertación Doctoral) Universidad de Paris VII, Paris, 1997.
- [4] P. Boullay, F. Kiefer, M. Majewski, M. Stelzer, H. Scheerer, M. Unsöld y E. Vogt, *Tame Homotopy Theory via Differential Forms*, Freie Universität Berlin, Preprint No. 223. Berlin, 1986.
- [5] H. Cartan, Théories Cohomologiques, *Invent. Math.* **35** (1976) 261-271.
- [6] H. Cartan y S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1999.
- [7] B. Cenk, *Noncommutative Geometry*, Course Notes, Northeastern University, Boston, 1998.
- [8] B. Cenk, Noncommutative Differential Forms and Cohomology Operations, (*preprint*).
- [9] B. Cenk, G. Hector y M. Saralegi, Cohomologie d'Intersection Moderee. Un Theoreme de de Rham, *Pacific J. Math.* **169** (1976), 235-289.
- [10] B. Cenk y R. Porter, De Rham Theorem with Cubical Forms, *Pacific J. Math.* **112** (1984), 35-48.
- [11] B. Cenk y R. Porter, Differential Forms and Torsion in the Fundamental Group, *Adv. Math.* **48** (1983), 189-204.
- [12] A. Connes, Noncommutative Differential Geometry, *Publ. Math. IHES* **62** (1985), 257-360.
- [13] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, San Diego, CA, 1994.
- [14] A. Connes, Noncommutative Geometry and Reality, *J. Math. Phys.* **36** (1995), 6194-6231.

- [15] J. A. Dieudonné, *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960*, Birkhäuser, Boston, 1989.
- [16] P. Goerss, Simplicial Chains over a Field and p -local Homotopy Theory, (*preprint*).
- [17] J. M. Gracia-Bonda, J. C. Várilly y H. Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston, 2001.
- [18] P. Griffiths y J. Morgan, *Rational Homotopy Theory and Differential Forms*, Birkhäuser, Boston, 1981.
- [19] M. Karoubi, Algèbres Tressées et q -Cohomologie, (*preprint*).
- [20] M. Karoubi, Formes Différentielles non Commutatives et Cohomologie a Coefficients Arbitraires, *Trans. Amer. Math. Soc.* **374** (1995), 4277-4299.
- [21] M. Karoubi, Homologie Cyclique et K -Théorie, *Astérisque* **149** (1987), 1-147.
- [22] C. Kasel, *Quantum Groups*, Springer-Verlag, Nueva York, 1995.
- [23] I. Kris, p -adic Homotopy Theory, *Topology and its Applications* **52** (1993), 279-308.
- [24] S. Lang, *Algebra*, (tercera edición), Addison-Wesley, Reading, MA, 1993.
- [25] D. Lehmann, Théorie Homotopique des Formes Différentielles, *Astérisque* **45** (1987).
- [26] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician* (segunda edición), Springer-Verlag, Nueva York, 1998.
- [27] S. Mac Lane, *Homology*, Springer-Verlag, Nueva York, 1976.
- [28] J. Madore, *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications*, (segunda edición), London Mathematical Society Lecture Note Series 206, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [29] J. P. May, *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, Chicago Lectures in Mathematics, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1967.
- [30] F. Mejías, The Noncommutative Tame De Rham Theorem, *International J. Math. Sci.* **30** (2002), 667-696.
- [31] R. Miller, De Rham Cohomology with Arbitrary Coefficients, *Topology* **174** (1978), 193-203.

- [32] C. Mouet, q -Cohomologie non Commutative, *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I* (1996), 849-851.
- [33] B. Ndongol y M. El haouari, Algèbres Quasi-commutatives at Carrés de Steenrod, *Pub. Irma* **39** (1996), 1-26.
- [34] G. de Rham. *Variétés Différentiables: Forms, Courants, Formes Harmoniques*, Herman, Paris, 1960.
- [35] H. Scheerer, K. Schuch y E. Vogt, *Tame Homotopy Theory via de Rham Currents*, Freie Universität Berlin, Preprint No. A91-20, Berlin, 1991.
- [36] M. Spanier, *Algebraic Topology*, Springer-Verlag, Nueva York, 1966.
- [37] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* (volúmenes I-V, tercera edición), Publish or Perish, Houston, 1999.
- [38] D. Sullivan, Infinitesimal Computations in Topology, *Publ. Math. IHES* **47** (1977), 269-331.
- [39] F. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, Nueva York, 1983.
- [40] H. Whitney, *Geometric Integration Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1957.

FERNANDO MEJÍAS,
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES,
NÚCLEO UNIVERSITARIO "RAFAEL RANGEL", TRUJILLO.
fmejias@ula.ve

Completeness conditions in certain Weyl complexes, combinatorics and parsimony

Mari Sano *

Abstract

We describe the combinatorial relationship between different completeness theorems in certain Buchsbaum-Rota resolutions of Weyl modules. In particular this gives a completely elementary, combinatorial description of this Buchsbaum-Rota construction that shows that it is a resolution.

1 Introduction

The context of this work is the Buchsbaum-Rota program of constructing resolutions of Weyl modules in a characteristic free setting, using Letter-Place methods.

The study of resolutions of Weyl modules has several motivations: the representation theory of $GL(n)$ [3], where the Giambelli and Jacobi-Trudy identities appear in the guise of Euler-Poincaré characteristic of the resolution; the study of determinantal ideals [4, 5, 2, 12], intertwining numbers [5, 6] and the invariant theory of $GL(n)$, all in a characteristic free context [9]. We are specially interested in the use of *Letter-Place methods*, which in several instances have been essential in cutting down the amount of computation needed to arrive at the desired resolutions.

In [8], Buchsbaum and Rota constructed a characteristic-free resolution over the Schur algebra of 3-rowed Weyl modules with at most one triple overlap, using Letter-Place methods and a generalized bar complex. The fact that the Buchsbaum-Rota complex is a resolution is proven through a highly indirect proof, using the fundamental exact sequence.

The series of papers [14, 15] and the present one is an attempt to understand this resolution in a more elementary, combinatorial way. The usefulness of this understanding lies in the fact that the general program is to construct resolutions for all Weyl modules using Letter-Place methods; a deep combinatorial

*Supported by CNPq post-doctoral grant no. 150118/2003-1

understanding of the known resolutions is a necessary step for this program to succeed.

The main objective of this paper is to describe the combinatorial identities relating the different “Completeness theorems” produced by the author in the study of the Buchsbaum-Rota resolutions of 3-rowed Weyl modules ([14, 15]); this combinatorial relationship gives a neat way of organizing the computation that implies that $d^2 = 0$, and therefore gives a completely elementary proof of the fact that the Buchsbaum-Rota construction is a complex and, by the homotopy constructed in [15] assuming $d^2 = 0$, a resolution; in short, [14, 15] and this paper gives a proof of the Buchsbaum-Rota resolution that uses exclusively the combinatorics of the divided powers and the polarization operators applied to bistandard bitableaux. Let us remark in the standard bar complex, the proof that it gives a resolution also goes through these two stages: constructing the homotopy, and then showing that it is, in fact, a complex (cf. [13], page 287). Thus the sequence of papers [14, 15], with the weak and strong completeness theorems, plus the present one, can be seen as the analogous process for this particular Buchsbaum-Rota generalized bar complex in Letter-Place methods.

Let us describe this sequence of papers [14, 15] and this one in somewhat more detail:

In [14], a basis for the syzygies of the Buchsbaum-Rota resolution was constructed under certain conditions; a fundamental element of the construction is the division of the basis of each term in the resolution into two complementary subsets, the *essential* and *non-essential* elements. This division satisfies two conditions: the *completeness condition*, that roughly says that there are “enough” essential elements, and the *rank condition*, that says that there are *just* enough of them.

Then in [15], it was realized that a strong form of the completeness theorem would produce a splitting contracting homotopy for the Buchsbaum-Rota complex, (not assuming that it is a resolution) thus giving a more elementary proof of the fact that the complex is a resolution.

For a more precise description of these completeness theorems, see section 3. In this paper we show that certain terms (the “essential correcting terms” M_α and M'_α of section 3) in the completeness theorems, which look very different in the strong completeness theorem of [15] compared to the terms in the weak completeness theorem of [14], are in fact equal. As we have said, this equality will show that the Buchsbaum-Rota construction is a resolution without assuming anything at all.

The paper is organized as follows: in section 2 we give the minimum background necessary on Letter-Place and generalized bar complex construction of [8] to carry out the computations. Then in section 3 we describe briefly the Weak and Strong Completeness Theorems proved in [14] and [15], respectively. In that section we also hope that the examples given shed some light into the

heuristics of how to find the essential/non-essential partition and its relation to the “parsimony principle” mentioned in [9]. And finally in section 4 we show how these completeness theorems are related via combinatorial identities, in particular showing that $d^2 = 0$. Section 5 contains some concluding remarks.

A remark on notation. Sometimes, such elements -especially linear combinations of them- do not fit in a single line. In such cases what should be a single line splits into several lines in order to fit the printed page. Also, the binomial coefficient $\binom{k}{n}$ will be denoted by the more compact version B_n^k .

2 Notation and Preliminaries

In this section we give a very brief introduction, in fact just setting the notation, to the Buchsbaum-Rota resolution of 3-rowed Weyl modules using Letter-Place. For more in-depth descriptions, the reader can look at [11] (Letter-Place), [9], [14].

Letter-Place is a symbolic method which generalizes the ordinary algebra of polynomials in a set of A variables with integer coefficients. The set A is the union of three disjoint subsets A^+ , A^0 and A^- ; whose elements are called positively, neutral and negatively signed. These variables satisfy the following rules:

1) Positively signed variables act like the divided powers. (Recall that the divided power functor is isomorphic to the symmetric powers in characteristic zero but not in general characteristic, [1])

$$a^{(i)}a^{(j)} = B_i^{i+j}a^{(i+j)},$$

$$(a^{(i)})^{(j)} = \frac{(ij)!}{j!(i!)^j}a^{(ij)},$$

and

$$(a + b)^i = \sum_{j+k=i} a^{(j)}b^{(k)}$$

These variables and their divided powers commute.

2) Neutral variables behave like ordinary polynomial variables; in particular they also commute.

3) Negatively signed variables satisfy the rules of ordinary exterior algebra: $ab = -ba$ and $a^2 = b^2 = 0$.

We take the following discussion of Letter-Place from [9]:

The main idea is to note not only the basis elements of a given tensor product, but also to keep track of their “places”. Thus we have the positive alphabet, or basis of the underlying free module, *and* we also have a ‘*place alphabet*’ of positive places. For example, an element $w \otimes w' \in D_p \otimes D_q$ would be written, in letter-place algebra, as $(w|1^{(p)})(w'|2^{(q)})$ to indicate that it is the tensor product of a basis element of degree p in the first factor, and one of degree q in the second. This is then written in double tableau form as

$$\left(\begin{array}{c|c} w & 1^{(p)} \\ w' & 2^{(q)} \end{array} \right).$$

In this paper, instead of denoting the place alphabet by $1, 2, 3, \dots$, we denote it by a, b, c, \dots (this is in order to be consistent with the notation in [7] and [8]).

Let us also use the symbol $(v|a^{(r)}b^{(s)})$ to denote $\sum v(r) \otimes v(s)$, where this stands for the diagonalization of the element $v \in D_{r+s}$ into its image under the diagonalization map in $D_r \otimes D_s$. Then we also have double tableaux

$$\left(\begin{array}{c|c} w & a^{(p)}b^{(k)} \\ w' & b^{(q-k)} \end{array} \right),$$

which means the element $\sum w(p) \otimes w(k)w' \in D_p \otimes D_q$. Ordering the basis elements of the underlying free module and the place alphabet as well, we can now talk about ‘standard’ and ‘double standard’ tableaux. By the standard basis theorem ([11]), the set of double standard tableaux form a basis for $D_p \otimes D_q$. In a similar fashion, the Letter-Place language is used in $D_{p_1} \otimes D_{p_2} \otimes \dots \otimes D_{p_n}$ where the ‘places’ run from 1 to n ., and also with mixed products of divided and exterior powers, and negative and positive places. In this article, we will work mainly with three factors, so that our place alphabet will be $\{a, b, c\}$.

We will be working mainly on the set of standard tableaux

$$\left\{ \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(\eta)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right), \text{ where } a < b < c \text{ are positive places} \right\}.$$

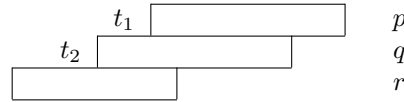
In this set, the polarization operators are given by

$$D_{ba}^{(k)} \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(\eta)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) =$$

$$B_k^{k+\sigma_1} \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(\eta-k)} & b^{(k+\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right),$$

$$\begin{aligned}
 & D_{cb}^{(k)} \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(\eta)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) = \\
 & \sum_{i=0}^k B_{\rho_1}^{i+\rho_1} B_{\rho_2}^{k-i+\rho_2} \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(\eta)} & b^{(\sigma_1-i)} & c^{(i+\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2-k+i)} & c^{(k-i+\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right), \\
 & D_{ca}^{(k)} \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(\eta)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) = \\
 & B_{\rho_1}^{k+\rho_1} \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(\eta-k)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(k+\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Let us describe the Buchsbaum-Rota resolution of 3-rowed Weyl modules using Letter-Place and the differential bar complex of [9]:



where the number of triple overlaps is at most 1, i.e., $r - t_1 - t_2 \leq 1$. Here, from [8], we have a resolution

$$\dots \longrightarrow P_k \xrightarrow{d_k} \dots \longrightarrow P_3 \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow K_{\lambda/\mu}$$

modeled on a subquotient of the differential bar complex as follows: consider free bar module $\text{Bar}(Super(L|\{a, b, c\}), A(Z_{ba}, Z_{cb}, Z_{ca}), \{x, y\})$, where we denote by $Super(L|\{a, b, c\})$ the letter-place algebra with the places a, b, c we have been working with, x and y are two separators. The algebra $A(Z_{ba}, Z_{cb}, Z_{ca})$ is the associative noncommutative algebra generated by the variables Z_{ba}, Z_{cb}, Z_{ca} , subject to the commutation relations $Z_{ca}Z_{cb} = Z_{cb}Z_{ca}$ and $Z_{ca}Z_{ba} = Z_{ba}Z_{ca}$. The algebra $A(Z_{ba}, Z_{cb}, Z_{ca})$ acts on the module $Super(L|\{a, b, c\})$ by letting Z_{ba}, Z_{cb} and Z_{ca} act like the polarization operators D_{ba}, D_{cb} and D_{ca} .

Let us impose now the relations

$$\begin{aligned}
 Z_{cb}^{(\alpha)} Z_{ba}^{(\beta)} &= \sum_{k=0}^{\alpha} Z_{ba}^{(\beta-\alpha+k)} x Z_{cb}^{(k)} Z_{ca}^{(\alpha-k)} \\
 Z_{ca}x &= xZ_{ca} \\
 Z_{cb}x &= xZ_{cb}
 \end{aligned}$$

The module P_k is freely spanned by all elements of the form

$$Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_\lambda)} y Z_{ba}^{(\alpha_1)} x \dots x Z_{ba}^{(\alpha_\mu)} x \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(\pi)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right),$$

where all the integers α_i and β_j are positive, $\beta_1 \geq t_2 + 1$ and $\alpha_1 > t_1 + \sum_j \beta_j$, $\pi = p + \sum_i \alpha_i$, $\sigma_1 + \sigma_2 q + \sum_j \beta_j - \sum_i \alpha_i$, $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r - \sum_j \beta_j$ and $\lambda + \mu = k$.

The boundary operator is $\partial_x + \partial_y$, given by place polarization by taking away the separators. Let us do an example to describe how this boundary operator works:

$$\begin{aligned} & d_4 \left(Z_{cb}^{(\beta_1)} y Z_{cb}^{(\beta_2)} y Z_{ba}^{(\alpha_1)} x Z_{ba}^{(\alpha_2)} x \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(p+\alpha_1+\alpha_2)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) \right) = \\ & B_{\alpha_2+\sigma_1} Z_{cb}^{(\beta_1)} y Z_{cb}^{(\beta_2)} y Z_{ba}^{(\alpha_1)} x \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(p+\alpha_1)} & b^{(\alpha_2+\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) - \\ & B_{\alpha_1+\alpha_2} Z_{cb}^{(\beta_1)} y Z_{cb}^{(\beta_2)} y Z_{ba}^{(\alpha_1+\alpha_2)} x \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(p+\alpha_1+\alpha_2)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) + \\ & \sum_{k=0}^{\beta_2} \sum_{j=0}^k B_{\beta_2-k}^{\beta_2-j} B_{\rho_1}^{\rho_1+\beta_2-j} B_{\rho_2}^{\rho_2+j} Z_{cb}^{(\beta_1)} y Z_{ba}^{(\alpha_1-\beta_2+k)} x Z_{ba}^{(\alpha_2)} x \\ & \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(p+\alpha_1+\alpha_2-\beta_2+k)} & b^{(\sigma_1-k+j)} & c^{(\rho_1+\beta_2-j)} \\ W' & b^{(\sigma_2-j)} & c^{(\rho_2+j)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) - \\ & B_{\beta_1}^{\beta_1+\beta_2} Z_{cb}^{(\beta_1+\beta_2)} y Z_{ba}^{(\alpha_1)} x Z_{ba}^{(\alpha_2)} x \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(p+\alpha_1+\alpha_2)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right). \end{aligned}$$

3 Completeness conditions

The main tool in [14, 15] is the division of the canonical basis of bistandard bitableaux of each module P_i in the complex in two complementary subsets, the “essential elements” and the “non-essential elements”, so that $P_i = E_{i-1} \oplus N_i$, $P_i \supset E_{i-1} = \text{span}(\text{essential elements})$, $P_i \supset N_i = \text{span}(\text{non-essential elements})$ in P_i . the essential elements are those which

- Have at least one $Z_{ba}^{(\cdot)}$ variable in front, and no b in the first row.
- Have only $Z_{cb}^{(\cdot)}$ variables in front, no c in the first row, and $\sigma \leq t_1$.

And \mathcal{N}_i is the complement of the \mathcal{E}_{i-1} in the canonical basis of P_i , that is, non-essential elements are those which

- Have at least one $Z_{ba}^{(\cdot)}$ variable, and b appears in the first row.
- Have only $Z_{cb}^{(\cdot)}$ variables, and either c appears in the first row, or $\sigma \geq t_1$.

For example in the first level a basis for P_1 is given by bistandard bitableaux of the form

$$Z_{ba}^{(\alpha)} x \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(p+\alpha)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right),$$

where $\alpha > t_1$, $\sigma_1 + \sigma_2 = q - \alpha$ and $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r$, and

$$Z_{cb}^{(\beta)} y \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(\sigma_2)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right),$$

where $\beta \geq t_2 + 1$, $\sigma_1 + \sigma_2 = q + \beta$ and $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r - \beta$.

The essential elements \mathcal{E}_0 are the elements of the form

$$Z_{ba}^{(\alpha)} x \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\alpha)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\alpha)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right),$$

where $\alpha \geq t_1 + 1$ and $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r$, plus elements of the form

$$Z_{cb}^{(\beta)} y \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma+\beta)} \\ W' & b^{(q-\sigma)} & c^{(\rho_1)} \\ W'' & c^{(\rho_2)} & \end{array} \right),$$

where $\beta \geq t_2 + 1$, $q - p \leq \sigma \leq t_1$ and $\rho_1 + \rho_2 = r - \beta$.

And the non-essential elements \mathcal{N}_1 are given by the complement of \mathcal{E}_0 .

This partition satisfies the following:

- **Weak Completeness Condition:** [14]: Given a non-essential basis element $T_\alpha \in \mathcal{N}_{i+1}$, there exists an explicit $M_\alpha \in E_i$ such that $d_{i+1}(T_\alpha) = d_{i+1}(M_\alpha)$.

•**Strong Completeness Condition** [15]: Given a non-essential basis element $T_\alpha \in \mathcal{N}_{i+1}$, there exists an explicit $C_\alpha \in E_{i+1}$ such that $d_{i+2}(C_\alpha) = T_\alpha - M'_\alpha$, where $M'_\alpha \in E_i$.

Let us remark that the word “explicit” is an essential part of both theorems.

Note that assuming $d^2 = 0$ the Strong Completeness Condition implies the Weak Completeness Condition. The terms M_α and M'_α are called the *essential correcting terms*, and the main Theorem states that they are equal and its consequences. Many computations in this theory are done modulo essential correcting terms (e.g. the main construction of [15])

The Weak Completeness Theorem (i.e. showing that the Weak Completeness Condition hold for the resolution at hand) is used in constructing a basis for the syzygies by setting $z_\alpha = d_{i+1}(\epsilon_\alpha)$; the set of $z_\alpha \in P_i$ where ϵ_α ranges in the essential basis elements of P_{i+1} forms a basis for the syzygies ([14]).

The Strong Completeness Theorem is then used for the construction of the homotopy: define $s_{i+1} : P_{i+1} \rightarrow P_{i+2}$ by $s_{i+1}(T_\alpha) = 0$ if T_α is essential; if T_α is non-essential then $s_{i+1}(T_\alpha) = C_\alpha$ where C_α is as in the Strong Completeness Condition above. The proof that s_i forms a splitting contracting homotopy reduces to showing that $s_i d_{i+1}(\epsilon) = \epsilon$ for essential elements ϵ , which follows from lemma 1 of [15], and the non-essential case then follows from the fact that $d^2 = 0$ and the construction.

Let's do an example to illustrate how the Weak and Strong Completeness Condition works in practice:

Example. Given the following non-essential basis element

$$Z_{cb}^{(\beta)} y \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right),$$

where $\sigma_1 > t_1$, $\beta \geq t_2 + 1$, $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r - \beta$ and $\rho_1 \geq 0$, we have that

$$\begin{aligned} & d_1 \left(Z_{cb}^{(\beta)} y \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) \right) = \\ & d_1 \left(\sum_{i=0}^{\beta} B_{\rho_1}^{\beta+\rho_1-i} B_i^{\rho_2+i} Z_{ba}^{(\sigma_1+i)} x \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(p+\sigma_1+i)} & b^{(\sigma_1+i)} & c^{(\beta+\rho_1-i)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-i)} & c^{(\rho_2+i)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) \right) = \\ & \sum_{i=0}^{\beta} B_{\rho_1}^{\beta+\rho_1-i} B_i^{\rho_2+i} \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+i)} & c^{(\beta+\rho_1-i)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-i)} & c^{(\rho_2+i)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right). \end{aligned}$$

Note that two different elements give the same element under the boundary map. Sometimes we can get an element either by taking away exponentials

from b 's and putting it in c 's or taking away exponential from a 's and putting it in b 's. The "principle of parsimony" states that we should try to get a given element with the least amount of work possible; thus in this case the essential elements are chosen as the ones that take exponential from a and put it into b ; that is for this kind of bitableaux the essential elements are the ones of the form

$$Z_{ba}^{(\alpha)} x \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\alpha)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\alpha)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right),$$

where $\alpha \geq t_1 + 1$ and $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r$. Then the example just provided shows that the elements of the form

$$Z_{cb}^{(\beta)} y \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta)} c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right),$$

where $\sigma_1 > t_1$, $\beta \geq t_2 + 1$, $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r - \beta$ and $\rho_1 \geq 0$, are "redundant" for the boundary map, that is, non-essential. In this case,

$$M_\alpha = \sum_{i=0}^{\beta} B_{\rho_1}^{\rho_1+\beta-i} B_{\rho_2}^{\rho_2+i} Z_{ba}^{(\sigma_1+i)} x \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+i)} & c^{(\rho_1+\beta-i)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-i)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right).$$

Let us use the same kind of bitableaux to illustrate the Strong Completeness Condition. For that non-essential element we also have that

$$\begin{aligned} d_2 \left(Z_{cb}^{(\beta)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+\beta)} x \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+\beta)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) \right) = \\ Z_{cb}^{(\beta)} y \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta)} c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) - \\ \sum_{i=0}^{\beta} B_{\rho_1}^{\rho_1+\beta-i} B_{\rho_2}^{\rho_2+i} Z_{ba}^{(\sigma_1+i)} x \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+i)} & c^{(\rho_1+\beta-i)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-i)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right). \end{aligned}$$

The previous equation is taking this game one step further, that is the non-essential element of the form

$$Z_{cb}^{(\beta)} y \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta)} c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right),$$

where $\sigma_1 > t_1$, $\beta \geq t_2 + 1$, $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r - \beta$ and $\rho_1 \geq 0$, can be reached by the boundary map applied to an essential level one level higher modulo essential element. In this case,

$$M'_\alpha = \sum_{i=0}^{\beta} B_{\rho_1}^{\rho_1+\beta-i} B_{\rho_2}^{\rho_2+i} Z_{ba}^{(\sigma_1+i)} x \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+i)} & c^{(\rho_1+\beta-i)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-i)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right).$$

Note that in this easy example there is nothing to prove, that is, $M_\alpha = M'_\alpha$ directly. In the general case they look quite different but Theorem 1 shows their equality.

4 Combinatorial equivalence of completeness conditions

Let us recall the completeness conditions of the previous section:

•**Weak Completeness Condition:** Given a non-essential basis element $T_\alpha \in \mathcal{N}_{i+1}$, there exists an explicit $M_\alpha \in E_i$ such that $d_{i+1}(T_\alpha) = d_{i+1}(M_\alpha)$.

•**Strong Completeness Condition:** Given a non-essential basis element $T_\alpha \in \mathcal{N}_{i+1}$, there exists an explicit $C \in E_{i+1}$ such that $d_{i+2}(C) = T_\alpha - M'_\alpha$, where $M'_\alpha \in E_i$.

We have the following theorem, that relates the Weak and Strong Completeness Conditions in a combinatorial way.

Theorem 1. *For all α parametrizing non-essential elements T_α , the linear combination of essential elements M_α of the Weak Completeness Condition is equal to the linear combination of essential elements M'_α of the Strong Completeness Condition.*

Before we prove this theorem, let us notice the following

Corollary. *The Buchsbaum-Rota sequence satisfies $d^2 = 0$.*

Let us show the corollary: we call it a corollary because Theorem 1 is the last step in a series of *purely computational facts* that imply that $d^2 = 0$ and then that the Buchsbaum-Rota sequence is a resolution. The merit of this way of arriving at this is that both the completeness condition plus Theorem 1 rely purely on elementary combinatorial computations instead of, for example, the homological considerations of the fundamental exact sequence of [9].

Let us show how the corollary follows from these results:

1. The Weak Completeness Condition implies that it suffices to show that $d^2 = 0$ for essential basis elements.
2. $d^2 = 0$ for linear combinations of essential elements that are in the image of the homotopy $s_{i+1} : P_{i+1} \rightarrow P_{i+2}$: indeed, the image of s_{i+1} is spanned by $\epsilon_\alpha = s_{i+1}(T_\alpha)$, $T_\alpha \in P_{i+1}$ non-essential basis element. But $d_{i+2}(\epsilon_\alpha) = T_\alpha - M'_\alpha$ as above. Then theorem 1 says that $d_{i+2}(\epsilon_\alpha) = T_\alpha - M_\alpha$ where M_α is of the Weak Completeness Condition, which satisfies $d_{i+1}(T_\alpha) = d_{i+1}(M_\alpha)$. Therefore for such elements $d^2 = 0$.
3. The homotopy condition applied to essential elements reads $s_i d_{i+1}(\epsilon) = \epsilon$ when $\epsilon \in E_i$. This is shown in [15] without assuming $d^2 = 0$ (but $d^2 = 0$ is needed to show the homotopy condition $sd + ds = 1$ for non-essential elements). This implies that the image of s_i spans the essential space E_i .

□

Proof of Theorem 1

We will do the prove in a pedagogical sequence, first we will show that $M_\alpha = M'_\alpha$ (corresponding to the non-essential element T_α) for the level one and then for the general level.

Level one. In this level we will have three cases, corresponding to the different ways in which an element can be non-essential.

Case 1. For non-essential elements of the form

$$Z_{ba}^{(\alpha)} x \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(p+\alpha)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\alpha-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right),$$

where $\alpha > t_1$, $\sigma_1 > 0$ and $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r$, the corresponding

$$M_\alpha = M'_\alpha = B_\alpha^{\alpha+\sigma_1} Z_{ba}^{(\alpha+\sigma_1)} x \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(p+\alpha+\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} & \\ W' & b^{(q-\alpha-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right).$$

Case 2. For non-essential elements of the form

$$Z_{cb}^{(\beta)} y \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right),$$

where $\sigma_1 > t_1$, $\beta \geq t_2 + 1$, $\rho_1 \geq 0$ and $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r - \beta$, the corresponding

$$M_\alpha = \sum_{i=0}^{\beta} B_{\rho_2}^{\beta-i+\rho_2} B_i^{i+\rho_1} Z_{ba}^{(\sigma_1+\beta-i)} x \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+\beta-i)} & c^{(\rho_1+i)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\beta+i)} & c^{(\beta-i+\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right),$$

and the corresponding

$$M'_\alpha = \sum_{j=0}^{\beta} B_{\beta-j}^{\rho_1+\beta-j} B_{\rho_2}^{\rho_2+j} Z_{ba}^{(\sigma_1+j)} x \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+j)} & c^{(\rho_1+\beta-j)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-j)} & c^{(\rho_2+j)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right).$$

If we put $k = \beta - j$ in M'_α we get that $M'_\alpha = M_\alpha$.

Case 3. For non-essential elements of the form

$$Z_{cb}^{(\beta)} y \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right),$$

where $q - p \leq \sigma_1 \leq t_1$, $\beta \geq t_2 + 1$, $\rho_1 > 0$ and $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r - \beta$. This case splits in two different cases: if we set $\sigma t_1 - \sigma_1 - 1$,

3.1) If $\rho_1 > \sigma + 1$ then the corresponding

$$\begin{aligned} M'_\alpha &= \sum_{k=0}^{\sigma+1} (-1)^k B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\beta}^{\beta+\rho_1-k} Z_{cb}^{(\beta+\rho_1-k)} y \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k)} & c^{(\rho_2+k)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) \\ &\quad - \sum_{l=1}^{\rho_1-\sigma-1} \sum_{n=0}^{\beta} (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+l} B_{\sigma+1}^{\sigma+l} B_{\beta-n}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-n-l} B_{\rho_2+\sigma+1+l}^{l+n} \\ &\quad Z_{ba}^{(t_1+l+n)} x \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(p+t_1+l+n)} & c^{(\beta+\rho_1-\sigma-1-n-l)} \\ W' & b^{(q-t_1-n)} & c^{(\rho_2+\sigma+1+n+l)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) = B - D, \end{aligned}$$

and the corresponding

$$M_\alpha = \sum_{i=0}^{\sigma+1} (-1)^i B_{\rho_2}^{\rho_2+i} B_{\rho_1-i}^{\beta+\rho_1-i} Z_{cb}^{(\beta+\rho_1-i)} y \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-i)} & c^{(\rho_2+i)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=\sigma+2}^{\rho_1} \sum_{j=0}^{\beta+\rho_1-i} (-1)^i B_{\rho_2}^{\rho_2+i} B_{\rho_1-i}^{\beta+\rho_1-i} B_{\rho_2+i}^{\beta+\rho_1+\rho_2-j} \\
 & Z_{ba}^{(\sigma_1+\beta+\rho_1-j)} x \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+\beta+\rho_1-j)} & c^{(j)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\beta-\rho_1+j)} & c^{(\beta+\rho_1+\rho_2-j)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Now, let $M_\alpha = A_1 + A_2$ where

$$A_1 = \sum_{i=0}^{\sigma+1} (-1)^i B_{\rho_2}^{\rho_2+i} B_{\rho_1-i}^{\beta+\rho_1-i} Z_{cb}^{(\beta+\rho_1-i)} y \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-i)} & c^{(\rho_2+i)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right),$$

and

$$\begin{aligned}
 & A_2 = \sum_{i=\sigma+2}^{\rho_1} \sum_{j=0}^{\beta+\rho_1-i} (-1)^i B_{\rho_2}^{\rho_2+i} B_{\rho_1-i}^{\beta+\rho_1-i} B_{\rho_2+i}^{\beta+\rho_1+\rho_2-j} \\
 & Z_{ba}^{(\sigma_1+\beta+\rho_1-j)} x \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+\beta+\rho_1-j)} & c^{(j)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\beta-\rho_1+j)} & c^{(\beta+\rho_1+\rho_2-j)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

CLAIM: the following combinatorial identities hold

- 1) $B = A_1$
- 2) $-D = A_2$

The first identity is clear, we only need to show the second one. In order to prove the second identity we have to consider two cases.

3.1.1) If in the expression for D we take $n+l = t$, where $1 \leq t \leq \rho_1 - \sigma - 1$, then

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{\sigma+1} \sum_{l=1}^t B_{\rho_2+\sigma+1+l}^{\rho_2+\sigma+1+n+l} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+l} B_{\sigma+1}^{\sigma+l} B_{\beta-n}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-n-l} = \\
 & (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+t} \sum_{l=1}^t B_{\sigma+1+l}^{\sigma+1+t} B_{\sigma+1}^{\sigma+l} B_{\beta-n}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-t} = X
 \end{aligned}$$

If we put $p = n$, $m = \beta$ and $q = \beta + \rho_1 - \sigma - 1 - t + n$ in the following formula

$$B_{m-p}^{q-p} = \sum_{i=0}^p (-1)^i B_m^{q-i} B_i^p,$$

we get that

$$B_{\beta-n}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-t} = \sum_{i=0}^n (-1)^i B_{\beta}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-t+n-i} B_i^n.$$

So

$$X = (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+t} \sum_{l=1}^t \sum_{i=0}^{t-l} (-1)^i B_{t-l}^{\sigma+1+t} B_{\sigma+1}^{\sigma+l} B_i^{t-l} B_{\beta}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-l-i}$$

Let $l+i=z$, where $1 \leq z \leq t$

$$\begin{aligned} X &= (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+t} \sum_{z=1}^t \sum_{l=1}^z (-1)^{z-l} B_{t-l}^{\sigma+1+t} B_{\sigma+1}^{\sigma+l} B_{t-z}^{t-l} B_{\beta}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-z} = \\ &= (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+t} \sum_{z=1}^t (-1)^z \sum_{l=1}^z (-1)^l B_{t-z}^{\sigma+1+t} B_{\sigma+1}^{\sigma+l} B_{z-l}^{\sigma+1+z} B_{\beta}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-z} = \\ &= (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+t} \sum_{z=1}^t (-1)^z B_{t-z}^{\sigma+1+t} \left[\sum_{l=1}^z (-1)^l B_{z-l}^{\sigma+1+z} B_{\sigma+1}^{\sigma+l} \right] B_{\beta}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-z} \end{aligned}$$

Set $v=l-1$, then

$$\begin{aligned} &= (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+t} \sum_{z=1}^t (-1)^{z+1} B_{t-z}^{\sigma+1+t} \left[\sum_{v=0}^{z-1} (-1)^v B_{z-1-v}^{\sigma+1+z} B_{\sigma+1}^{\sigma+v+1} \right] B_{\beta}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-z} \\ &= (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+t} \sum_{z=1}^t (-1)^{z+1} B_{t-z}^{\sigma+1+t} B_{z-1}^{z-1} B_{\beta}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-z} \\ &= (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+t} \sum_{z=1}^t (-1)^{z+1} B_{t-z}^{\sigma+1+t} B_{\beta}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-z} \end{aligned}$$

Now, if in the expression for A_2 we let $j = \beta + \rho_1 - \sigma - 1 - t$ then we get

$$\sum_{i=\sigma+2}^{\sigma+t+1} (-1)^i B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+t} B_i^{\sigma+1+t} B_{\beta}^{\beta+\rho_1-i}.$$

Set $p = i - \sigma - 1$

$$(-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+t} \sum_{p=1}^t (-1)^p B_{p+\sigma+1}^{\sigma+1+t} B_{\beta}^{\beta+\rho_1-\sigma-1-z}.$$

3.1.2) If in the expression for D we take $n+l = t$, where $\rho_1 - \sigma \leq t \leq \beta + \rho_1 - \sigma - 1$ then $t = \rho_1 - \sigma + \alpha$, where $0 \leq \alpha \leq \beta - 1$. Thus $l + n = \rho_1 - \sigma + \alpha$ and

$$\begin{aligned} & (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_1+\rho_2+\alpha+1} \sum_{n=\alpha+1}^{\beta} B_{\rho_1+\alpha+1-n}^{\rho_1+\alpha+1} B_{\sigma+1}^{\rho_1+\alpha-n} B_{\beta-n}^{\beta-1-\alpha} = \\ & (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_1+\rho_2+\alpha+1} \sum_{n=\alpha+1}^{\beta} B_n^{\rho_1+\alpha+1} B_{\sigma+1}^{\rho_1+\alpha-n} B_{\beta-n}^{\beta-1-\alpha}. \end{aligned}$$

Set $i = n - \alpha - 1$

$$(-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_1+\rho_2+\alpha+1} \sum_{i=0}^{\beta-\alpha-1} B_{i+\alpha+1}^{\rho_1+\alpha+1} B_{\sigma+1}^{\rho_1-1-i} B_i^{\beta-1-\alpha}.$$

Now, if in the expression for A_2 we let $j = \beta + \rho_1 - \sigma - 1 - t = \beta - 1 - \alpha$ we get

$$\begin{aligned} & B_{\rho_2}^{\rho_1+\rho_2+\alpha+1} \sum_{i=\sigma+2}^{\rho_1} (-1)^i B_i^{\rho_1+\alpha+1} B_{\beta}^{\beta+\rho_1-i} = \\ & B_{\rho_2}^{\rho_1+\rho_2+\alpha+1} \sum_{i=\sigma+2}^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\beta-\alpha-1} (-1)^i B_i^{\rho_1+\alpha+1} B_{\beta-k}^{\rho_1+\alpha+1-i} B_k^{\beta-\alpha-1} = \\ & B_{\rho_2}^{\rho_1+\rho_2+\alpha+1} \sum_{k=0}^{\beta-\alpha-1} B_{\beta-k}^{\rho_1+\alpha+1} \left[\sum_{i=\sigma+2}^{\rho_1} (-1)^i B_{\rho_1+\alpha+1-i-\beta+k}^{\rho_1+\alpha+1-\beta+k} \right] B_k^{\beta-\alpha-1} = \\ & B_{\rho_2}^{\rho_1+\rho_2+\alpha+1} \sum_{k=0}^{\beta-\alpha-1} B_{\beta-k}^{\rho_1+\alpha+1} \left[\sum_{i=\sigma+2}^{\rho_1} (-1)^i B_i^{\rho_1+\alpha+1-\beta+k} \right] B_k^{\beta-\alpha-1} = \\ & -B_{\rho_2}^{\rho_1+\rho_2+\alpha+1} \sum_{k=0}^{\beta-\alpha-1} B_{\beta-k}^{\rho_1+\alpha+1} \left[\sum_{i=0}^{\sigma+1} (-1)^i B_i^{\rho_1+\alpha+1-\beta+k} \right] B_k^{\beta-\alpha-1} = \\ & -(-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_1+\rho_2+\alpha+1} \sum_{k=0}^{\beta-\alpha-1} B_{\beta-k}^{\rho_1+\alpha+1} B_{\sigma+1}^{\rho_1+\alpha-\beta+k} B_k^{\beta-\alpha-1} = Y \end{aligned}$$

If we set $p = \beta - \alpha - 1 - k$ in Y we get

$$-(-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_1+\rho_2+\alpha+1} \sum_{p=0}^{\beta-\alpha-1} B_{p+\alpha+1}^{\rho_1+\alpha+1} B_{\sigma+1}^{\rho_1-1-p} B_p^{\beta-\alpha-1}.$$

3.2) If $\rho_1 \leq \sigma + 1$ then the corresponding

$$M'_\alpha = - \sum_{k=0}^{\rho_1-1} \sum_{j=0}^{\rho_1-k} (-1)^k B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\rho_2+k}^{\rho_2+k+j} Z_{cb}^{(\beta)} y$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta+k+j)} & c^{(\rho_1-k-j)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k-j)} & c^{(\rho_2+k+j)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) + \sum_{k=0}^{\rho_1-1} (-1)^k B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\beta}^{\beta+\rho_1-k}$$

$$Z_{cb}^{(\beta+\rho_1-k)} y \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k)} & c^{(\rho_2+k)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) = -A + B$$

where in the first term $k + j \geq 1$, and the corresponding

$$M_\alpha = \sum_{i=0}^{\rho_1} (-1)^i B_{\rho_2}^{\rho_2+i} B_{\beta}^{\beta+\rho_1-i} Z_{cb}^{(\beta+\rho_1-i)} y \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+\beta+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-i)} & c^{(\rho_2+i)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right).$$

To prove that $M'_\alpha = M_\alpha$ we note that:

-If in the expression for A we take $k + j = t$, where $0 < t \leq \rho_1 - 1$ then

$$\sum_{k=0}^t B_{\rho_2+k}^{\rho_2+t} B_{\rho_2}^{\rho_2+k} = B_{\rho_2}^{\rho_2+t} \sum_{k=0}^t (-1)^k B_k^t,$$

which is equal to 0 if t is different to 0.

-If in the expression for A we take $k + j = \rho_1$ then

$$\sum_{k=0}^{\rho_1-1} (-1)^k B_{\rho_2+k}^{\rho_2+\rho_1} B_{\rho_2}^{\rho_2+k} = B_{\rho_2}^{\rho_2+\rho_1} \sum_{k=0}^{\rho_1-1} (-1)^k B_k^{\rho_1} - (-1)^{\rho_1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\rho_1}.$$

General level. Let us prove the equality in general now. We will have four cases corresponding to the different ways in which an element can be non-essential.

Case 1. For non-essential elements of the form

$$Z_{ba}^{(\alpha_1)} x \dots x Z_{ba}^{(\alpha_i)} x \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(p+|\alpha|)} & b^{(\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-|\alpha|-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right),$$

where $\alpha_1 > t_1$, $\alpha_j > 0$ for $j = 2, \dots, i$, $\sigma_1 > 0$ and $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r$, the corresponding

$$M_\alpha = M'_\alpha = B_{\alpha_i}^{\alpha_i + \sigma_1} Z_{ba}^{(\alpha_1)} x \dots x Z_{ba}^{(\alpha_i + \sigma_1)} x \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+|\alpha|+\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-|\alpha|-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) +$$

$$\sum_{m=i-1}^1 (-1)^{i-m} B_{\alpha_m}^{\alpha_m + \alpha_{m+1}} Z_{ba}^{(\alpha_1)} x \dots x Z_{ba}^{(\alpha_{m-1})} x Z_{ba}^{(\alpha_m + \alpha_{m+1})} x Z_{ba}^{(\alpha_{m+2})} x \dots x$$

$$Z_{ba}^{(\alpha_i)} x Z_{ba}^{(\sigma_1)} x \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+|\alpha|+\sigma_1)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-|\alpha|-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right).$$

Case 2. For non-essential elements of the form

$$Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_\lambda)} y Z_{ba}^{(\alpha_1)} x \dots x Z_{ba}^{(\alpha_\mu)} x \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+|\alpha|)} & b^{(\rho)} \quad c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q+|\beta|-|\alpha|-\rho)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right),$$

where $\rho > 0$, $\lambda - \mu = i$, $\beta_1 \geq t_2 + 1$ and $\beta_j > 0$ for $j = 2, \dots, \lambda$, $\alpha_1 > t_1 + |\beta|$ and $\alpha_j > 0$ for $j = 2, \dots, \mu$, $|\beta| = \sum \beta_j$, $|\alpha| = \sum \alpha_j$, and $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r - |\beta|$, the corresponding

$$M_\alpha = M'_\alpha = Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_\lambda)} y Z_{ba}^{(\alpha_1)} x \dots x Z_{ba}^{(\alpha_\mu)} x$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+|\alpha|)} & b^{(\rho)} \quad c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q+|\beta|-|\alpha|-\rho)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) + B_{\alpha_\mu}^{\alpha_\mu + \rho} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_\lambda)} y Z_{ba}^{(\alpha_1)} x \dots x$$

$$Z_{ba}^{(\alpha_{\mu-1})} x Z_{ba}^{(\alpha_\mu + \rho)} x \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+|\alpha|+\rho)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q+|\beta|-|\alpha|-\rho)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) +$$

$$\sum_{k=\mu-1}^1 (-1)^{\mu-k} B_{\alpha_k}^{\alpha_k + \alpha_{k+1}} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_\lambda)} y Z_{ba}^{(\alpha_1)} x \dots x Z_{ba}^{(\alpha_k + \alpha_{k+1})} x \dots x Z_{ba}^{(\alpha_\mu)} x Z_{ba}^{(\rho)} x$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+|\alpha|+\rho)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q+|\beta|-|\alpha|-\rho)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) +$$

$$\sum_{l=\lambda-1}^1 (-1)^{\mu+\lambda-l} B_{\beta_l}^{\beta_l+\beta_{l+1}} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_l+\beta_{l+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_\lambda)} y Z_{ba}^{(\alpha_1)} x \dots x Z_{ba}^{(\alpha_\mu)} x Z_{ba}^{(\rho)} x$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+|\alpha|+\rho)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q+|\beta|-|\alpha|-\rho)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) +$$

$$(-1)^\mu \sum_{k_1=0}^{\beta_\lambda} \sum_{i=2}^\mu \sum_{k_i=0}^{k_{i-1}} \sum_{m=0}^{k_\mu} M_{\lambda,\mu,k} B_{\rho_1}^{\beta_\lambda+\rho_1-k_\mu} B_{k_\mu-m}^{\beta_\lambda+\rho_1-m} B_{\rho_2}^{\rho_2+m}$$

$$Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{\lambda-1})} y Z_{ba}^{(\alpha_1-\beta_\lambda+k_1)} x Z_{ba}^{(\alpha_2-k_1+k_2)} x \dots x Z_{ba}^{(\alpha_\mu-k_{\mu-1}+k_\mu)} x Z_{ba}^{(\rho-k_\mu+m)} x$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+|\alpha|-\beta_\lambda+\rho+m)} & c^{(\beta_\lambda+\rho_1-m)} \\ W' & b^{(q+|\beta|-|\alpha|-\rho-m)} & c^{(\rho_2+m)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right),$$

where

$$M_{\lambda,\mu,k} = B_{\beta_\lambda-k_1, k_1-k_2, \dots, k_{\mu-1}-k_\mu}^{\beta_\lambda-k_\mu} = \frac{(\beta_\lambda - k_\mu)!}{(\beta_\lambda - k_1)!(k_1 - k_2)! \dots (k_{\mu-1} - k_\mu)!}$$

is the monomial coefficient.

Case 3. For non-essential elements of the form

$$Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+|\beta|)} c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right),$$

where $\sigma_1 > t_1$, $\beta_1 \geq t_2 + 1$, $\beta_j > 0$ for $j = 2, \dots, i$, $t_1 = \sigma_1 + 1 + \sigma$ and $\rho_1 \geq 0$, the corresponding

$$M_\alpha = M'_\alpha = \sum_{j=0}^{\beta_i} B_{\rho_1}^{\beta_i+\rho_1-j} B_{\rho_2}^{\rho_2+j} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{i-1})} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|-\beta_i+j)} x$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|-\beta_i+j)} & c^{(\beta_i+\rho_1-j)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-j)} & c^{(\rho_2+j)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) + \sum_{l=i-1}^1 (-1)^{i-l} B_{\beta_l}^{\beta_l+\beta_{l+1}}$$

$$Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_l+\beta_{l+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|)} x \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|)} & c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right).$$

Case 4. For non-essential elements of the form

$$Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+|\beta|)} c^{(\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1)} & c^{(\rho_2)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right),$$

where $q - p \leq \sigma_1 \leq t_1$, $\rho_1 > 0$, $\beta_1 \geq t_2 + 1$, $\beta_j > 0$ for $j = 2, \dots, i$, and $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = r - |\beta|$. Here we have to consider two cases: if we set $\sigma = t_1 - \sigma_1 - 1$,

4.1) If $\rho_1 > \sigma + 1$ then the corresponding

$$\begin{aligned} M'_\alpha &= \sum_{k=0}^{\sigma+1} (-1)^k B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\beta_i}^{\beta_i+\rho_1-k} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{i-1})} y Z_{cb}^{(\beta_i+\rho_1-k)} y \\ &\left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k)} & c^{(\rho_2+k)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) + \sum_{k=0}^{\sigma+1} \sum_{m=i-1}^1 (-1)^{k+i-m} B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} \\ &Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_m+\beta_{m+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{cb}^{(\rho_1-k)} y \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k)} & c^{(\rho_2+k)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) \\ &- \sum_{l=1}^{\rho_1-\sigma-1} \sum_{n=0}^{\beta_i} (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2+\sigma+1+l}^{\rho_2+\sigma+1+l+n} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+l} B_{\sigma+1}^{\sigma+l} B_{\beta_i-n}^{\beta_i+\rho_1-\sigma-1-n-l} \\ &Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{i-1})} y Z_{ba}^{(t_1+|\beta|-\beta_i+l+n)} x \\ &\left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+t_1+|\beta|-\beta_i+l+n)} & c^{(\beta_i+\rho_1-\sigma-1-n-l)} \\ W' & b^{(q-t_1-l-n)} & c^{(\rho_2+\sigma+1+l+n)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) - \sum_{l=1}^{\rho_1-\sigma-1} \sum_{m=i-1}^1 (-1)^{\sigma+1+i-m} \\ &B_{\rho_2+\sigma+1+l}^{\rho_2+\sigma+1+l} B_{\sigma+1}^{\sigma+l} B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_m+\beta_{m+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{ba}^{(t_1+|\beta|+l)} x \\ &\left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+t_1+|\beta|+l)} & c^{(\rho_1-\sigma-1-l)} \\ W' & b^{(q-t_1-l)} & c^{(\rho_2+\sigma+1+l)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) = B + C - E - F \end{aligned}$$

and the corresponding

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \sum_{k=0}^{\sigma+1} (-1)^k B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\rho_1-k}^{\beta_i+\rho_1-k} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{i-1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i+\rho_1-k)} y \\ &\left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k)} & c^{(\rho_2+k)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) - \sum_{k=\sigma+2}^{\rho_1-1} (-1)^k B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\rho_1-k}^{\beta_i+\rho_1-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B_{\beta_i+\rho_1-k}^{\beta_{i-1}+\beta_i+\rho_1-k} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{i-2})} y Z_{cb}^{(\beta_{i-1}+\beta_i+\rho_1-k)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} x \\
& \left(\begin{array}{c|c} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k)} c^{(\rho_2+k)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} \end{array} \right) - (-1)^{\rho_1} B_{\rho_1}^{\rho_2+\rho_1} B_{\beta_i}^{\beta_{i-1}+\beta_i} \\
& Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{i-2})} y Z_{cb}^{(\beta_{i-1}+\beta_i)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} x \left(\begin{array}{c|c} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\rho_1)} c^{(\rho_2+\rho_1)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} \end{array} \right) \\
& + \sum_{k=\sigma+2}^{\rho_1-1} \sum_{l=i-2}^1 (-1)^{k+i-l} B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\rho_1-k}^{\beta_i+\rho_1-k} B_{\beta_l}^{\beta_l+\beta_{l+1}} \\
& Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i+\beta_{i+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{i-1})} y Z_{cb}^{(\beta_i+\rho_1-k)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} x \\
& \left(\begin{array}{c|c} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k)} c^{(\rho_2+k)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} \end{array} \right) + \sum_{l=i-2}^1 (-1)^{\rho_1+i-l} B_{\rho_2}^{\rho_2+\rho_1} B_{\beta_l}^{\beta_l+\beta_{l+1}} \\
& Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i+\beta_{i+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{i-1})} y Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} x \\
& \left(\begin{array}{c|c} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\rho_1)} c^{(\rho_2+\rho_1)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} \end{array} \right) + \sum_{k=\sigma+2}^{\rho_1} \sum_{j=0}^{\beta_i+\rho_1-k} (-1)^k B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\rho_1-k}^{\beta_i+\rho_1-k} B_{\rho_2+k}^{\rho_2+k+j} \\
& Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{i-1})} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|-\beta_i+k+j)} x \\
& \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|-\beta_i+k+j)} & c^{(\beta_i+\rho_1-k-j)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k-j)} & c^{(\rho_2+k+j)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) - \sum_{m=1}^{i-1} \sum_{\delta=0}^{\sigma+1} (-1)^{i-1-m+\delta} \\
& B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} B_{\delta}^{\rho_2+\delta} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_m+\beta_{m+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{cb}^{(\rho_1-\delta)} y \\
& \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\delta)} & c^{(\rho_2+\delta)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) + \sum_{m=1}^{i-2} \sum_{\delta=\sigma+2}^{\rho_1-1} (-1)^{i-1-m+\delta} \\
& B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} B_{\rho_2}^{\rho_2+\delta} B_{\rho_1-\delta}^{\beta_i+\rho_1-\delta} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_m+\beta_{m+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i+\rho_1-\delta)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} x \\
& \left(\begin{array}{c|c} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\delta)} c^{(\rho_2+\delta)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} \end{array} \right) + \sum_{\delta=\sigma+2}^{\rho_1-1} (-1)^\delta B_{\beta_i}^{\beta_{i-1}+\beta_i} B_{\delta}^{\rho_2+\delta} B_{\rho_1-\delta}^{\beta_{i-1}+\beta_i+\rho_1-\delta} \\
& Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{i-2})} y Z_{cb}^{(\beta_{i-1}+\beta_i+\rho_1-\delta)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{c|c} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\delta)}c^{(\rho_2+\delta)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} \end{array} \right) + \sum_{m=1}^{i-1} \sum_{\delta=\sigma+2}^{\rho_1-1} \sum_{l=i-1}^{m+2} (-1)^{\delta-1-m-l} B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} B_{\delta}^{\rho_2+\delta} \\
& B_{\beta_l}^{\beta_l+\beta_{l+1}} Z_{cb}^{(\beta_l)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_m+\beta_{m+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_l+\beta_{l+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{cb}^{(\rho_1-\delta)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} x \\
& \left(\begin{array}{c|c} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\delta)}c^{(\rho_2+\delta)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} \end{array} \right) + \sum_{m=1}^{i-2} \sum_{\delta=\sigma+2}^{\rho_1-1} (-1)^{\delta-1-m-(m+3)} \\
& B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} B_{\delta}^{\rho_2+\delta} B_{\beta_m+\beta_{m+1}}^{\beta_m+\beta_{m+1}+\beta_{m+2}} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_m+\beta_{m+1}+\beta_{m+2})} y \dots y \\
& Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{cb}^{(\rho_1-\delta)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} x \left(\begin{array}{c|c} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\delta)}c^{(\rho_2+\delta)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} \end{array} \right) + \\
& \sum_{m=2}^{i-1} \sum_{\delta=\sigma+2}^{\rho_1-1} (-1)^{\delta-1-m-(m+4)} B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} B_{\delta}^{\rho_2+\delta} B_{\beta_m+\beta_{m+1}}^{\beta_{m-1}+\beta_m+\beta_{m+1}} \\
& Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{m-1}+\beta_m+\beta_{m+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{cb}^{(\rho_1-\delta)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} x \\
& \left(\begin{array}{c|c} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\delta)}c^{(\rho_2+\delta)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} \end{array} \right) - \sum_{m=1}^{i-1} \sum_{\delta=\sigma+2}^{\rho_1-1} \sum_{l=m-2}^1 (-1)^{\delta-1-m-l} \\
& B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} B_{\delta}^{\rho_2+\delta} B_{\beta_l}^{\beta_l+\beta_{l+1}} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_l+\beta_{l+1})} y \dots y \\
& Z_{cb}^{(\beta_m+\beta_{m+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{cb}^{(\rho_1-\delta)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} x \left(\begin{array}{c|c} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\delta)}c^{(\rho_2+\delta)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} \end{array} \right) \\
& - \sum_{m=1}^{i-1} \sum_{\delta=\sigma+2}^{\rho_1-1} \sum_{j=0}^{\rho_1-\delta} (-1)^{i-1-m+\delta} B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} B_{\delta}^{\rho_2+\delta} B_{\rho_2+\delta}^{\rho_2+\delta+j} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_m+\beta_{m+1})} \\
& y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|+\delta+j)} x \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|+\delta+j)} & c^{(\rho_1-\delta-j)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\delta-j)} & c^{(\rho_2+\delta+j)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right) =
\end{aligned}$$

$$A_1 - A_2 - A_3 + A_4 + A_5 + A_6 - A_7 + A_8 + A_9 + A_{10} + A_{11} + A_{12} - A_{13} - A_{14}$$

Claim:

$$\begin{array}{lll}
1) B = A_1 & 4) -F = -A_{14} - A_3 + A_5 & 7) -A_2 + A_9 = 0 \\
2) C = -A_7 & 5) A_{10} - A_{13} = 0 & 8) A_4 + A_8 = 0 \\
3) -E = A_6 & 6) A_{11} + A_{12} = 0 &
\end{array}$$

Proof of the claim: The identities 1), 2), 5) and 8) are clear.

4)

$$\begin{aligned}
-A_{14} - A_3 + A_5 &= - \sum_{m=1}^{i-1} \sum_{\delta=\sigma+2}^{\rho_1} \sum_{j=0}^{\rho_1-\delta} (-1)^{i-1-m+\delta} B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} B_{\rho_2}^{\rho_2+\delta} B_{\rho_2+\delta}^{\rho_2+\delta+j} \\
&\quad Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_m+\beta_{m+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{ba}^{(\sigma_1+|\beta|+\delta+j)} x \\
&\quad \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+\sigma_1+|\beta|+\delta+j)} & c^{(\rho_1-\delta-j)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\delta-j)} & c^{(\rho_2+\delta+j)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right).
\end{aligned}$$

We know that $1 \leq l \leq \rho_1 - \sigma - 1$ and $\sigma + 2 \leq \delta + j \leq \rho_1$. So we let $\delta + j = \sigma + 1 + l$ or $\delta = \sigma + 1 + l - j$. Thus

$$- \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^{i-1-m+\sigma+1+l-j} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+l} B_{\rho_2}^{\rho_2+\delta} = - \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^{i-m+\sigma+l-j} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+l}$$

$$B_j^{\sigma+1+l} = -(-1)^{i-m+\sigma+l} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+l} \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j B_j^{\sigma+1+l} = -(-1)^{i-m+\sigma+l}$$

$$B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+l} (-1)^{l-1} B_{l-1}^{\sigma+l} = -(-1)^{i-m+\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+l} B_{l-1}^{\sigma+l}$$

6) $A_{11} + A_{12} = 0$ because we have

$$B_{\beta_m+\beta_{m+1}}^{\beta_m+\beta_{m+1}+\beta_{m+2}} B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} = B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}+\beta_{m+2}} B_{\beta_{m+1}}^{\beta_{m+1}+\beta_{m+2}}$$

in A_{11} where $1 \leq m \leq i - 2$ and

$$B_{\beta_{m-1}}^{\beta_{m-1}+\beta_m+\beta_{m+1}} B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}}$$

in A_{12} where $2 \leq m \leq i - 1$.

7) $-A_2 + A_9 = 0$ because

$$B_{\beta_{i-1}+\beta_i}^{\beta_{i-1}+\beta_i+\rho_1-\delta} B_{\beta_{i-1}}^{\beta_{i-1}+\beta_i} = B_{\beta_{i-1}}^{\beta_{i-1}+\beta_i+\rho_1-\delta} B_{\beta_i}^{\beta_i+\rho_1-\delta}$$

In order to prove the identity (3) we have to consider two cases depending of ρ_1 . Recall that $\rho_1 > \sigma + 1$.

Case 1. If in the expression for E we take $n+l = t$, where $1 \leq t \leq \rho_1 - \sigma - 1$, then from (3.1.1) we have that

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{\sigma+1} \sum_{l=1}^t B_{\rho_2+\sigma+1+l}^{\rho_2+\sigma+1+n+l} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+l} B_{\sigma+1}^{\sigma+l} B_{\beta_i-n}^{\beta_i+\rho_1-\sigma-1-n-l} = \\
 & (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+t} \sum_{z=1}^t (-1)^{z+1} B_{t-z}^{\sigma+1+t} B_{\beta_i}^{\beta_i+\rho_1-\sigma-1-z}
 \end{aligned}$$

On the other hand, let $u = k - \sigma - 1$ then

$$\begin{aligned}
 A_6 = & \sum_{u=1}^{\rho_1-\sigma-1} \sum_{j=0}^{\beta_i+\rho_1-\sigma-1-u} (-1)^{u+\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+u} B_{\rho_2+\sigma+1+u}^{\rho_2+\sigma+1+u+j} B_{\beta_i}^{\beta_i+\rho_1-\sigma-1-u} \\
 & Z_{cb}^{(\beta)} y \dots Z_{cb}^{(\beta_i-1)} y Z_{ba}^{(t_1+|\beta|-\beta_i+u+j)} x \\
 & \left(\begin{array}{c|cc} W & a^{(p+t_1+|\beta|-\beta_i+u+j)} & c^{(\beta_i+\rho_1-\sigma-1-u-j)} \\ W' & b^{(q-t_1-u-j)} & c^{(\rho_2+\sigma+1+u+j)} \\ W'' & c^{(\rho_3)} & \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Now, we let $u + j = t$, where $1 \leq t \leq \rho_1 - \sigma - 1$, then

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{\sigma+1} \sum_{u=1}^t (-1)^u B_{\rho_2+\sigma+1+u}^{\rho_2+\sigma+1+t} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+u} B_{\beta_i}^{\beta_i+\rho_1-\sigma-1-u} = \\
 & (-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\sigma+1+t} \sum_{u=1}^t (-1)^u B_{t-u}^{\sigma+1+t} B_{\beta_i}^{\beta_i+\rho_1-\sigma-1-u}
 \end{aligned}$$

Case 2. If in the expression for E we take $n + l = t$, where $\rho_1 - \sigma \leq t \leq \beta_i + \rho_1 - \sigma - 1$ then $t = \rho_1 - \sigma + \alpha$, where $0 \leq \alpha \leq \beta_i - 1$. Thus $n + l = \rho_1 - \sigma + \alpha$ and

$$(-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\rho_1+1+\alpha} \sum_{n=\alpha+1}^{\beta_i} B_n^{\rho_1+\alpha+1} B_{\sigma+1}^{\rho_1+\alpha-n} B_{\beta_i-n}^{\beta_i-1-\alpha}$$

Set $j = n - \alpha - 1$

$$(-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\rho_1+1+\alpha} \sum_{j=0}^{\beta_i-\alpha-1} B_{j+\alpha+1}^{\rho_1+\alpha+1} B_{\sigma+1}^{\rho_1-1-j} B_{\beta_i-\alpha-1-j}^{\beta_i-1-\alpha}$$

Now, if in A_6 we let $k + j = \sigma + 1 + t = \rho_1 + \alpha + 1$ we get

$$B_{\rho_2}^{\rho_2+\rho_1+\alpha+1} \sum_{k=\sigma+2}^{\rho_1} (-1)^k B_k^{\rho_1+\alpha+1} B_{\beta_i}^{\beta_i+\rho_1-k} =$$

$$-(-1)^{\sigma+1} B_{\rho_2}^{\rho_2+\rho_1+\alpha+1} \sum_{j=0}^{\beta_i-\alpha-1} B_{j+\alpha+1}^{\rho_1+\alpha+1} B_{\sigma+1}^{\rho_1-1-j} B_k^{\beta_i-\alpha-1}.$$

4.2) If $\rho_1 \leq \sigma + 1$ then the corresponding

$$M'_\alpha = - \sum_{k=0}^{\rho_1-1} \sum_{j=0}^{\rho_1-k} (-1)^k B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\rho_2+k}^{\rho_2+k+j} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+|\beta|+k+j)} & c^{(\rho_1-k-j)} \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k-j)} & c^{(\rho_2+k+j)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) + \sum_{k=0}^{\rho_1-1} (-1)^k B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\beta_i}^{\beta_i+\rho_1-k}$$

$$Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{i-1})} y Z_{cb}^{(\beta_i+\rho_1-k)} y \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} & \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k)} & c^{(\rho_2+k)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) +$$

$$\sum_{k=0}^{\rho_1-1} \sum_{m=i-1}^1 (-1)^{k+i-m} B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{m-1})} y Z_{cb}^{(\beta_m+\beta_{m+1})} y Z_{cb}^{(\beta_{m+2})}$$

$$y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{cb}^{(\rho_1-k)} y \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} & \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k)} & c^{(\rho_2+k)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right)$$

where in the first double sum $k + j \geq 1$, and the corresponding

$$M_\alpha = \sum_{k=0}^{\rho_1} (-1)^k B_{\rho_2}^{\rho_2+k} B_{\rho_1-k}^{\beta_i+\rho_1-k} Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_{i-1})} y Z_{cb}^{(\beta_i+\rho_1-k)} y$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} & \\ W' & b^{(q-\sigma_1-k)} & c^{(\rho_2+k)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right) - \sum_{m=1}^{i-1} \sum_{\delta=0}^{\rho_1-1} (-1)^{i-1-m+\delta} B_{\beta_m}^{\beta_m+\beta_{m+1}} B_{\delta}^{\rho_2+\delta}$$

$$Z_{cb}^{(\beta_1)} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_m+\beta_{m+1})} y \dots y Z_{cb}^{(\beta_i)} y Z_{cb}^{(\rho_1-\delta)} y \left(\begin{array}{c|ccc} W & a^{(p)} & b^{(\sigma_1+|\beta|+\rho_1)} & \\ W' & b^{(q-\sigma_1-\delta)} & c^{(\rho_2+\delta)} & \\ W'' & c^{(\rho_3)} & & \end{array} \right)$$

The proof is exactly the same as in (3.2), and this finishes the proof of theorem 1. \square

5 Concluding remarks

The series of papers [14, 15] and the present one provides a proposal to understand the Buchsbaum-Rota resolutions of Weyl modules: first, partition de Letter-Place basis of each module into “essential” and “non-essential” elements satisfying the weak completeness condition. This produces, in particular, a basis of the syzygies. Then give a strong form of the completeness condition: this provides a splitting homotopy. Finally, relating the weak and strong completeness conditions provides an “elementary” (i.e. completely combinatorial) understanding of the resolutions.

The author hopes that this strategy can be applied to the other types of shapes (e.g. the shapes considered in [9]). Of course, the hurdles imposed by the computational complexity are enormous, but they can be mitigated by using symbolic computation packages.

Also, it would be interesting to give combinatorial interpretations of the kind of computations given in these papers.

References

- [1] K. Akin, D. Buchsbaum and J. Weyman, *Schur Functors and Schur Complexes* Adv. Math **44**, No. 3 (1982) 207-278.
- [2] G. Boffi and R. Sánchez, *On the resolutions of the powers of the Pfaffian ideal*. J. Algebra **152** (1992), no. 2, 463–491.
- [3] D. Buchsbaum, *Resolutions and representations of $GL(n)$* , Adv. Studies Pure Math., Commutative Algebra Combinatorics **11**, 21-28.
- [4] D. Buchsbaum, *On commutative algebra and characteristic-free representation theory*, J. Pure and applied Algebra **152** (2000) 41-48.
- [5] D. Buchsbaum, *A characteristic-free example of a Lascoux resolution, and letter-place methods for intertwining numbers*, Eur. J. Comb. **25**, No.8, 1169-1179 (2004).
- [6] D. Buchsbaum and D. Flores de Chela, *Intertwining numbers; the three-rowed case*. J. Algebra **183** (1996), no. 2, 605–635.
- [7] D. Buchsbaum and G.-C. Rota, *Projective resolutions of Weyl modules*, Proc. Nat. Acad. Sci. **90** (1993), 2448-2450.
- [8] D. Buchsbaum and G.-C. Rota, *A new construction in homological algebra*, Proc. Nat. Acad. Sci. **91** (1994), 4115-4119.

- [9] D. Buchsbaum and G.-C. Rota, *Approaches to resolutions of Weyl modules*, Adv. Applied Math, **27**, No. 1 (2001) 82-191.
- [10] D. Buchsbaum and R. Sánchez, *On lifting maps between Weyl modules: can bad shapes be resolved by better shapes?* Adv. Math. **105** (1994), no. 1, 59–75.
- [11] F.D. Grosshans, G.-C Rota and J. Stein, *Invariant Theory and Superalgebras*, American Mathematical Society, 1987.
- [12] A. Lascoux, *Syzygies des variétés déterminantales*, Adv. Math. **30** (1978) 202-237.
- [13] J. J. Rotman, *An Introduction to homological algebra* Academic Press, New York, 1979.
- [14] M. Sano, *A combinatorial description of the syzygies of certain Weyl modules*, Comm. in Algebra, **31** no. 10, 5115-5167, 2003, errata and addenda, Comm. in Algebra, **32** no. 12, 4835-4838, 2004.
- [15] M. Sano, *Homotopies for the generalized bar complex associated to certain 3-rowed Weyl modules*, Comm. in Algebra, to appear (available at <http://www.ime.unicamp.br/~msano/homotopy.pdf>).

MARI SANO
IMECC-UNICAMP
PRAÇA SERGIO BUARQUE DE HOLANDA, 651
CP 6065, 13083-859, CAMPINAS, SP, BRASIL

Graphical introduction to classical Lie algebras

Rafael Díaz & Eddy Pariguan

Abstract

We develop a graphical notation to introduce classical Lie algebras. Although this paper deals with well-known results, our pictorial point of view is slightly different to the traditional one. Our graphical notation is elementary and easy to handle, thus it provides an effective tool for computations with classical Lie algebras. Moreover, it may be regarded as a first and foundational step in the process of uncovering the categorical meaning of Lie algebras.

1 Introduction

A first step in the study of an arbitrary category \mathcal{C} is to define the set $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ of isomorphisms classes of *simple* objects in \mathcal{C} . For example in **Set** the category of sets, the simple objects $\mathcal{S}(\mathbf{Set})$ are the empty set \emptyset and $\{\emptyset\}$. In **Top** the category of topological spaces, the set $\mathcal{S}(\mathbf{Top})$ are the homeomorphism classes of connected topological spaces. An object y of an abelian category \mathcal{C} is said to be simple if in any exact sequence

$$0 \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow 0,$$

either x is isomorphic to 0 or z is isomorphic to 0, see [7]. It is a remarkable fact that non-equivalent categories may very well have equivalent sets of simple objects. Let us introduce a list of categories that at first seem to be utterly unrelated and yet the corresponding sets of simple objects are deeply connected.

We denote by **Group** the category whose objects are groups and whose morphisms are group homomorphisms. We let **LieGroup**, (see Section 2) denote the subcategory of **Group** whose objects are finite dimensional complex Lie groups. Morphism in **LieGroup** are smooth group homomorphisms. We define **FinGroup** to be the full subcategory of **Group** whose objects are finite groups. **WeylGroup** denotes the set of isomorphisms classes of Weyl groups, which can be taken to be $A_n = S_{n+1}$, $B_n = \mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$, $D_n = \mathbb{Z}_2^{n-1} \rtimes S_n$, where S_n is the group of permutations in n letters, and E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 are the so called exceptional Weyl groups.

We proceed to introduce the corresponding sets of simple objects. $S(\mathbf{Group})$ denotes the set of isomorphisms classes of groups having no proper normal subgroups. The classification of finite simple groups is a notoriously difficult problem with a fascinating history. It was established in 1981 that every simple finite group is isomorphic to one of the following list: A cyclic group of prime order. An alternating group $A_n \subset S_n$ for $n \geq 5$. A finite group of Lie type (finite analogues of the classical Lie group). A list of 26 sporadic simple groups. The largest sporadic group is called the Monster and appears naturally as the automorphism group of a vertex algebra. $S(\mathbf{LieGroup})$ denotes the set of isomorphisms classes of Lie groups which are simple as groups and also are connected and simply connected. Consider the \mathbb{C} -vector space \mathbb{C}^n . $GL_n(\mathbb{C})$ is the group of linear automorphism of \mathbb{C}^n as is defined by $GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) \neq 0\}$. The subgroup $SL_n(\mathbb{C})$ of $GL_n(\mathbb{C})$ consists of volume preserving automorphisms of \mathbb{C}^n ,

$$SL_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}.$$

The groups $SO_n(\mathbb{C}) \subset SL_n(\mathbb{C})$ and $Sp_{2n}(\mathbb{C}) \subset SL_{2n}(\mathbb{C})$ are determined by fixing a symmetric $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and a skew-symmetric ω non-degenerated bilinear form on \mathbb{C}^n , respectively. Then

$$SO_n(\mathbb{C}) = \{A \in SL_n(\mathbb{C}) \mid \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \text{ for all } x, y \in \mathbb{C}^n\}$$

and

$$Sp_{2n}(\mathbb{C}) = \{A \in SL_{2n}(\mathbb{C}) \mid \omega(Ax, Ay) = \omega(x, y) \text{ for all } x, y \in \mathbb{C}^n\}.$$

$S(\mathbf{FinGroup})$ denotes the set of isomorphisms classes of finite simple groups.

\mathbf{LieAlg} denotes the category whose objects are finite dimensional complex Lie algebras (see Section 2), morphism are Lie algebra homomorphism. $S(\mathbf{LieAlg})$ is the set of isomorphisms classes of simple Lie algebras, i.e., Lie algebras having no proper ideals.

\mathbf{Root} denotes the category of root systems. Objects in \mathbf{Root} are triples $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Phi)$ such that

- $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ is an Euclidean space.
- $\Phi \subset V$ is a finite set generating V .
- If $\alpha \in \Phi$ then $-\alpha \in \Phi$, but $k\alpha \notin \Phi$ for any real number $k \neq \pm 1$. Element of Φ are called roots.
- For $\alpha \in \Phi$ the reflection S_α in the hyperplane α^\perp orthogonal to α given by $\alpha^\perp = \{x \in V : \langle x, \alpha \rangle = 0\}$ maps Φ to itself.
- For $\alpha, \beta \in \Phi$, $A_{\alpha, \beta} = 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}$.

A morphism in **Root** from $(V_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1, \Phi_1)$ to $(V_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2, \Phi_2)$ is a linear transformation $T : V_1 \rightarrow V_2$ such that $\langle T(x), T(y) \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1$ for all $x, y \in V_1$, and $T(\Phi_1) \subset \Phi_2$.

The direct sum of root systems is defined as follows: suppose that $(V_i, \langle \cdot, \cdot \rangle_{V_i}, \Phi_i)$, $i = 1, \dots, n$ are root systems, then the Euclidean space of the direct sum is $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$, with inner product

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_V = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \cdot \rangle_{V_i}.$$

The roots of the direct sum are $\Phi = \bigsqcup_{i=1}^n \Phi_i$. The triple $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V, \Phi)$ is a root system. $S(\mathbf{Root})$ is the set of isomorphism classes of simple root systems, i.e., root systems which are not isomorphic to the direct sum of two non-vanishing root systems.

Dynkin denotes the category of Dynkin diagrams. Objects in **Dynkin** are called Dynkin diagrams and are non-directed graphs Δ with the following properties

- The set V_Δ of vertices of Δ is equal to $\{1, \dots, n\}$ for some $n \geq 1$.
- The number of edges joining two vertices in Δ is 0, 1, 2 or 3.
- If vertices i and j are joined by 2 or 3 edges, then an arrow is chosen pointing either from i to j , or from j to i .
- The quadratic form

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i \neq j} \sqrt{n_{ij}} x_i x_j$$

is positive definite where (n_{ij}) is the adjacency matrix of Δ , i.e., n_{ij} equal the number of edges from vertex i to vertex j .

Morphism in **Dynkin** from diagram Δ_1 to diagram Δ_2 consists of maps $\rho : V_{\Delta_1} \rightarrow V_{\Delta_2}$ such that $Q_2(x_{\rho(1)}, x_{\rho(2)}, \dots, x_{\rho(n)}) = Q_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$. $S(\mathbf{Dynkin})$ denotes the set of isomorphism classes of connected Dynkin diagrams. Next theorem gives an explicit characterization of $S(\mathbf{Dynkin})$.

Theorem 1. *$S(\mathbf{Dynkin})$ consists of the Dynkin diagrams included in the following list*

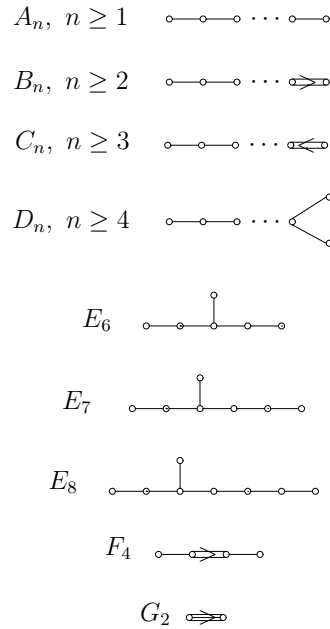


Figure 1: Simple Dynkin diagrams.

We enunciate the following fundamental

Theorem 2. 1. $S(\mathbf{FinGroup}) \subset S(\mathbf{LieGroup}) \subset S(\mathbf{Group})$.

2. $S(\mathbf{LieGroup}) \cong S(\mathbf{LieAlg}) \cong S(\mathbf{Root}) \cong S(\mathbf{Dynkin}) \rightarrow \mathbf{WeylGroup}$.

Part 1 of Theorem 2 is obvious. Although we shall not give a complete proof of part 2 the reader will find in the body of this paper many statements that shed light into its meaning. The map $S(\mathbf{Dynkin}) \rightarrow \mathbf{WeylGroup}$ is surjective but fails to be injective. Diagrams B_n and C_n of the list above have both $\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$ as its associated Weyl group.

2 Lie Algebras

We proceed to consider in details the category of Lie algebras. First we recall the notion of a Lie group.

Definition 3. A group (G, m) is said to be a complex Lie group if

1. G is a finite dimensional complex manifold.

2. the map $m : G \times G \rightarrow G$ given by $m(a, b) = ab$ for all $a, b \in G$ is analytic smooth.
3. The map $I : G \rightarrow G$ given by $I(a) = a^{-1}$ for all $a \in G$, is analytic smooth.

Definition 4. A Lie algebra $(\mathfrak{g}, [,])$ over a field k is a vector space \mathfrak{g} together with a binary operation $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, called the Lie bracket, satisfying

1. $[,]$ is a bilinear operation.
2. Antisymmetry: $[x, y] = -[y, x]$ for each $x, y \in \mathfrak{g}$.
3. Jacobi identity: $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$ for each $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

A k -algebra A may be regarded as a Lie algebra $(A, [,])$, with bracket $[x, y] = xy - yx$ for all $x, y \in A$. In particular $\text{End}(V)$ is a Lie algebra for any k -vector space V .

Let M be a smooth manifold and TM the tangent bundle of M . The space

$$\Gamma(M) = \{X : M \rightarrow TM, X(m) \in T_m M, m \in M\}$$

of vector fields on M is a Lie algebra with the Lie bracket

$$[X, Y] = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}, \text{ for all } X, Y \in \Gamma(M).$$

Let G be a Lie group. The space $T_e(G)$ tangent to the identity $e \in G$ is a Lie algebra since $T_e(G) \cong \Gamma(G)^G$ is a Lie subalgebra of $\Gamma(G)$. For the classical Lie groups one gets

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = T_I(SL_n(\mathbb{C})) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \text{tr}(A) = 0\}.$$

$$\mathfrak{so}_n(\mathbb{C}) = T_I(SO_n(\mathbb{C})) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \langle Ax, y \rangle + \langle x, Ay \rangle = 0 \text{ for } x, y \in \mathbb{C}^n\}.$$

$$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}) = T_I(Sp_{2n}(\mathbb{C})) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid w(Ax, y) + w(x, Ay) = 0 \text{ for } x, y \in \mathbb{C}^{2n}\}.$$

Definition 5. A morphism of Lie algebras $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ is a linear map ρ from \mathfrak{g} to \mathfrak{h} such that $\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)]$ for $x, y \in \mathfrak{g}$. A representation ρ of a Lie algebra \mathfrak{g} on a k -vector space V is a morphism $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ of Lie algebras.

The functor

$$\begin{array}{ccc} T_e : \mathbf{LieGroup} & \longrightarrow & \mathbf{LieAlg} \\ & G & \longmapsto T_e(G) \\ & \varphi : G \rightarrow H & \longmapsto d_e\varphi : T_e(G) \rightarrow T_e(H) \end{array}$$

induces an equivalence between $S(\mathbf{LieGroup})$ and $S(\mathbf{LieAlg})$.

Definition 6. For any Lie algebra \mathfrak{g} the adjoint representation $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ is given by $\text{ad}(x)(y) = [x, y]$ for all $x, y \in \mathfrak{g}$.

Definition 7. 1. A subspace I of a Lie algebra \mathfrak{g} is called a Lie subalgebra if $[x, y] \in I$ for all $x, y \in I$.

2. A subalgebra I of \mathfrak{g} is said to be abelian if $[x, y] = 0$ for all $x, y \in I$.

3. A subalgebra I of a Lie algebra \mathfrak{g} is called an ideal if $[x, y] \in I$ for all $x \in I$ and $y \in \mathfrak{g}$.

For any k -algebra the space of derivations of A

$$\text{Der}(A) = \{d : A \longrightarrow A \mid d(xy) = d(x)y + xd(y) \text{ for all } x, y \in A\}$$

is a Lie subalgebra of $\text{End}(A)$.

Definition 8. 1. A Lie algebra \mathfrak{g} is called simple if it has no ideals other than \mathfrak{g} and $\{0\}$.

2. A Lie algebra \mathfrak{g} is called semisimple if it has no abelian ideals other than $\{0\}$.

3. A maximal abelian subalgebra \mathfrak{h} of \mathfrak{g} is called a Cartan subalgebra.

Next theorem is due to Cartan. A proof of it may be found in [5].

Theorem 9. Let \mathfrak{g} be a finite dimensional simple Lie algebra over \mathbb{C} , then \mathfrak{g} is isomorphic to one of the list $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$, E_6, E_7, E_8, F_4 and G_2 .

Lie Algebras $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ and $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ are called classical and will be explained using our graphical notation in Sections 5, 6, 7 and 8. Lie algebras E_6, E_7, E_8, F_4 and G_2 are called exceptional and the reader may find their definitions in [5].

Definition 10. The Killing form on \mathfrak{g} is the bilinear map $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$ given for all $x, y \in \mathfrak{g}$ by $\langle x, y \rangle = \text{tr}(\text{ad}(x) \circ \text{ad}(y))$, where \circ denotes the product in $\text{End}(\mathfrak{g})$ and $\text{tr} : \text{End}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}$ is the trace map.

Denote by \mathfrak{h}^* the linear dual of vector space \mathfrak{h} . The following proposition describes representations of abelian Lie algebras.

Proposition 11. Let \mathfrak{h} be an abelian Lie algebra and $\rho : \mathfrak{h} \rightarrow \text{End}(V)$ a representation of \mathfrak{h} . Then V admits a decomposition

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \Phi} V_{\alpha} \tag{1}$$

where for each $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, $V_{\alpha} = \{x \in V : \rho(h)(x) = \alpha(h)x, \text{ for all } h \in \mathfrak{h}\}$, and $\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \mathfrak{h}_{\alpha} \neq 0\}$.

Equation (1) is called Cartan decomposition of the representation ρ of \mathfrak{h} . Proposition 11 yields a map from $S(\mathbf{LieAlg})$ into $S(\mathbf{Root})$, which turns out to be a bijection, as follows. Let \mathfrak{g} be a finite dimensional simple Lie algebra over \mathbb{C} and $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ a Cartan subalgebra. It is not difficult to see that $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ for some natural real vector space $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. The killing form $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ restricted to $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ is non-degenerated and makes the pair $(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ an Euclidean space. The linear dual $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ has an induced Euclidean structure, which we still denote by $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induced by the linear isomorphism $f : \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ given by $f(x)(y) = \langle x, y \rangle$, for all $x, y \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.

The adjoint representation $\text{ad} : \mathfrak{h} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ restricted to \mathfrak{h} give us a Cartan decomposition $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha}$ where for each $\alpha \in \mathfrak{h}$ $\mathfrak{g}_{\alpha} = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x, \text{ for all } h \in \mathfrak{h}\}$ and $\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* : \mathfrak{h}_{\alpha} \neq 0\}$.

Definition 12. *The triple $(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Phi)$ is the root system associated to Lie algebra \mathfrak{g} .*

Definition 13. *Given a root system Φ the group W generated by all reflections S_{α} with $\alpha \in \Phi$, where $S_{\alpha}(\beta) = \beta - 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha$, is known as the Weyl group associated to Φ .*

One can show that there exists a subset $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ of Φ such that Π is a basis of $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ and each root $\alpha \in \Phi$ can be written as a linear combination of roots in Π with coefficients in \mathbb{Z} which are either all non-negative or all non-positive. The set Π is called a set of fundamental roots. The integers

$$A_{ij} = 2 \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \tag{2}$$

are called the Cartan integers and the matrix $A = (A_{ij})$ is called the Cartan matrix. Notice that $A_{ii} = 2$, and that for any $\alpha_i, \alpha_j \in \Pi$ with $i \neq j$, $S_{\alpha_i}(\alpha_j)$ is a \mathbb{Z} -combination of α_i and α_j . Since the coefficient of α_j is 1, the coefficient associated to α_i in $S_{\alpha_i}(\alpha_j)$ must be a non-positive integer, i.e., $A_{ij} \in \mathbb{Z}^{\leq 0}$. The angle θ_{ij} between α_i, α_j is given by the cosine formula

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \alpha_j, \alpha_j \rangle^{\frac{1}{2}} \cos(\theta_{ij}).$$

Then we have

$$4 \cos^2(\theta_{ij}) = 2 \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} \cdot 2 \frac{\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle},$$

and therefore $4 \cos^2(\theta_{ij}) = A_{ij}A_{ji}$. Let $n_{ij} = A_{ij}A_{ji}$ clearly $n_{ij} \in \mathbb{Z}$ and $n_{ij} \geq 0$. Since $-1 \leq \cos(\theta_{ij}) \leq 1$ the only possible values for n_{ij} are $n_{ij} = 0, 1, 2$ or 3 .

Definition 14. *The Dynkin diagram Δ associated to a simple Lie algebra \mathfrak{g} is the graph Δ with vertices $\{1, \dots, n\}$ in bijective correspondence with the set Π of fundamental roots of \mathfrak{g} such that*

1. Vertices i, j with $i \neq j$ are joined by $n_{ij} = A_{ij}A_i$ edges, where A_{ij} is given by formula (2).
2. Between each double edge or triple we attach the symbol $<$, or the symbol $>$ pointing towards the shorter root with respect to Killing form.

Theorem 15. Consider the root system Φ associated to a simple Lie algebra \mathfrak{g} , let $\alpha \in \Phi$ be a root. For each nonzero $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ there is $x_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ and $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ such that $\alpha(h_\alpha) = 2$, $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$, $[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha$ and $[h_\alpha, x_{-\alpha}] = -2x_{-\alpha}$.

Theorem 15 implies that for any root $\alpha \in \Phi$, $x_\alpha, x_{-\alpha}$ and h_α span a subalgebra \mathfrak{s}_α isomorphic to $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. See Section 4 for more on $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. This fact explain the distinguished role played by $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ in the representation theory of simple Lie algebras.

Definition 16. Let $\Phi \subset \mathfrak{h}$ be the root system associated with a simple Lie algebra \mathfrak{g} .

1. For any $\alpha \in \Phi$, the Cartan element $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ given by Theorem 15 is called the coroot associated to root α . $\Phi_c = \{h_\alpha : \alpha \in \Phi\}$ is the coroot system associated to \mathfrak{h} and $\Pi_c = \{h_\alpha : \alpha \in \Pi\}$ is the set of fundamental coroots.
2. The elements w_1, \dots, w_n in \mathfrak{h}^* given by the relations $w_i(h_j) = \delta_{ij}$, for all $1 \leq i, j \leq n$, where h_j is the coroot associated to fundamental root α_j , are called the fundamental weights.

One can recover a simple Lie algebra \mathfrak{g} from its associated Dynkin diagram Δ as follows: Let n_{ij} be the adjacency matrix of Δ . The relation $n_{ij} = a_{ij}a_{ji}$ determines univocally the Cartan matrix a_{ij} . Consider the free Lie algebra generated by the symbols $h_1, \dots, h_n, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$. Form the quotient of this free Lie algebra by the relations

$$[h_i, h_j] = 0 \quad (\text{all } i, j); \quad [x_i, y_i] = h_i \quad (\text{all } i); \quad [x_i, x_j] = 0 \quad (i \neq j);$$

$$[h_i, x_j] = a_{ij}x_j \quad (\text{all } i, j); \quad [h_i, y_j] = -a_{ij}y_j \quad (\text{all } i, j);$$

and for all $i \neq j$,

$$[x_i, x_j] = 0, \quad [y_i, y_j] = 0, \quad \text{if } a_{ij} = 0.$$

$$[x_i, [x_i, x_j]] = 0, \quad [y_i, [y_i, y_j]] = 0 \quad \text{if } a_{ij} = -1.$$

$$[x_i, [x_i, [x_i, x_j]]] = 0, \quad [y_i, [y_i, [y_i, y_j]]] = 0 \quad \text{if } a_{ij} = -2.$$

$$[x_i, [x_i, [x_i, [x_i, x_j]]]] = 0, \quad [y_i, [y_i, [y_i, [y_i, y_j]]]] = 0 \quad \text{if } a_{ij} = -3.$$

Serre shows that the resulting Lie algebra is a finite-dimensional simple Lie algebra isomorphic to \mathfrak{g} . See [12] for more details.

2.1 Jacobian Criterion

Let k be a field of characteristic zero and let V be a finite dimensional k -vector space. Set $V = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ and $V^* = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ such that $x_i(e_j) = \delta_{ij}$. We have

$$x_k \left(\sum_{i=1}^n a_i e_i \right) = a_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Any $f \in V^*$ is written as $f = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n$. Denote by $S = S(V^*)$ the symmetric algebra of the dual space V^* which can be identify with the polynomial ring $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Let G be a finite group which acts on V . G also acts on V^* , and thus it acts on $S = S(V^*)$ as follows

$$\begin{aligned} S(V^*) \times G &\longrightarrow S(V^*) \\ (p, g) &\longmapsto p(g) \end{aligned}$$

where $(pg)(v) = p(gv)$, for all $g \in G$, $p \in S(V^*)$, $v \in V$. The algebra

$$k[x_1, x_2, \dots, x_n]^G = \{p \in k[x_1, x_2, \dots, x_n] : p(g) = p, \forall g \in G\}$$

is called the G -invariant subalgebra of $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Definition 17. Let k be a field and F a extension of k . Let S be a subset of F . The set S is algebraically dependent over k if for some positive integer n there is a non-zero polynomial $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ such that $f(s_1, \dots, s_n) = 0$ for some different $s_1, \dots, s_n \in S$. Otherwise S is algebraically independent.

Theorem 18. Let $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]^W$ be the subalgebra of $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ consisting of W -invariant polynomials, then $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]^W$ is generated as an \mathbb{C} -algebra by n homogeneous, algebraically independent elements of positive degree together with 1.

The idea of proof of Theorem 18 goes as follows: let I be the ideal of $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ generated by all homogeneous W -invariant polynomials of positive degree. Using Hilbert's Basis Theorem we may choose a minimal generating set f_1, f_2, \dots, f_r for I consisting of homogeneous W -invariant polynomials of positive degree. One can show that $r = n$ and furthermore $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]^W = \mathbb{C}[f_1, f_2, \dots, f_n]$.

Proposition 19. Let f_1, \dots, f_n and g_1, \dots, g_n be two sets of homogeneous, algebraically independent generators of $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^W$ with degrees d_i and e_i respectively, then (after reordering) $d_i = e_i$ for all $i = 1, \dots, n$.

The numbers d_1, \dots, d_n written in increasing order are called the *degrees* of W . Theorem 20 below is a simple criterion for the algebraic independence of polynomials f_1, \dots, f_n expressed in terms of the Jacobian determinant. We write $J(f_1, \dots, f_n)$ for the determinant of the $n \times n$ matrix whose (i, j) -entry is $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Theorem 20 (Jacobian criterion). *The set of polynomials $f_1, \dots, f_n \in k[x_1, \dots, x_n]$ are algebraically independent over a field k of characteristic zero if and only if $J(f_1, \dots, f_n) \neq 0$.*

3 Graph and matrices

We denote by $\mathbf{Digraph}^1(n, n)$ the vector space generated by bipartite directed graphs with a unique edge starting on the set $[n]$ and ending on the set $[n]$. We describe $\mathbf{Digraph}^1(n, n)$ pictorially as follows

$$\mathbf{Digraph}^1(n, n) = \left\langle \begin{array}{c} \text{---} j \\ \nearrow \\ \text{---} i \end{array}, \quad 1 \leq i, j \leq n \right\rangle$$

where the symbol



denotes the graph whose unique edge starts at vertex i and ends at vertex j . We define a product on $\mathbf{Digraph}^1(n, n)$ as follows

$$\begin{array}{c} \text{---} j \\ \nearrow \\ \text{---} i \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{---} m \\ \nearrow \\ \text{---} k \end{array} = \begin{cases} \begin{array}{c} \text{---} m \\ \nearrow \\ \text{---} i \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} m \\ \nearrow \\ \text{---} i \end{array}, & \text{if } j = k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

The trace on $\mathbf{Digraph}^1(n, n)$ is defined as the linear functional $\text{tr} : \mathbf{Digraph}^1(n, n) \rightarrow \mathbb{C}$ given by

$$\text{tr} \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} i \end{array} \right) = 1 \quad \text{and} \quad \text{tr} \left(\begin{array}{c} \text{---} j \\ \nearrow \\ \text{---} i \end{array} \right) = 0$$

Algebra $\mathbf{Digraph}^1(n, n)$ is isomorphic to $\text{End}(\mathbb{C}^n)$ through the application

$$\mathbf{Digraph}^1(n, n) \cong \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{j} \\ \diagdown \\ \xrightarrow{i} \end{array} \longrightarrow E_{ij}$$

We will use this isomorphism to give combinatorial interpretation of results on $\text{End}(\mathbb{C}^n)$ that are traditionally expressed in the language of matrices.

4 Linear special algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

We begin studying the special linear algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. It plays a distinguished role in the theory of Lie algebras. By definition we have

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{A \in \text{End}(\mathbb{C}^2) : \text{tr}(A) = 0\}.$$

As subspace of $\mathbf{Digraph}^1(2, 2)$, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ is the following vector space

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \left\langle \begin{array}{c} \xleftarrow{1} - \xrightarrow{2} \\ \hline \xrightarrow{1} \end{array}, \begin{array}{c} \xrightarrow{2} \\ \hline \xrightarrow{1} \end{array}, \begin{array}{c} \xleftarrow{1} \\ \hline \xrightarrow{2} \end{array} \right\rangle \subset \mathbf{Digraph}^1(2, 2)$$

We fix as Cartan subalgebra of $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ the 1-dimensional subspace

$$\mathfrak{h} = \left\{ a_1 \begin{array}{c} \xleftarrow{1} \\ \hline \xrightarrow{1} \end{array} + a_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{2} \\ \hline \xrightarrow{2} \end{array}, a_1 + a_2 = 0 \right\}$$

The dual space is $\mathfrak{h}^* = \langle a_1, a_2 \rangle / \{a_1 + a_2 = 0\}$, where

$$a_i \left(\begin{array}{c} \xleftarrow{1} \\ \hline \xrightarrow{j} \end{array} \right) = \delta_{ij}$$

4.1 Root system of $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Consider the projection map $\langle a_1, a_2 \rangle \longrightarrow \langle a_1, a_2 \rangle / \{a_1 + a_2 = 0\}$. We still denote by a_i the image of a_i under the projection above. Now each $h \in \mathfrak{h}$ is of the form

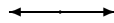
$$h = a_1 \begin{array}{c} \xleftarrow{1} \\ \hline \xrightarrow{1} \end{array} + a_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{2} \\ \hline \xrightarrow{2} \end{array}, a_1, a_2 \in \mathfrak{h}^*$$

Let us compute the roots

$$\begin{aligned}
 [a_1 \begin{array}{|c|} \hline \leftarrow \\ \hline 1 \end{array} + a_2 \begin{array}{|c|} \hline \rightarrow \\ \hline 2 \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \nearrow^2 \\ \hline 1 \end{array}] &= a_1 [\begin{array}{|c|} \hline \leftarrow \\ \hline 1 \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \nearrow^2 \\ \hline 1 \end{array}] + a_2 [\begin{array}{|c|} \hline \rightarrow \\ \hline 2 \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \nearrow^2 \\ \hline 1 \end{array}] = \\
 a_1 \left(\begin{array}{|c|} \hline \leftarrow \\ \hline 1 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \nearrow^2 \\ \hline 1 \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \nearrow^2 \\ \hline 1 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \leftarrow \\ \hline 1 \end{array} \right) + a_2 \left(\begin{array}{|c|} \hline \rightarrow \\ \hline 2 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \nearrow^2 \\ \hline 1 \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \nearrow^2 \\ \hline 1 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \rightarrow \\ \hline 2 \end{array} \right) &= \\
 a_1 \begin{array}{|c|} \hline \nearrow^2 \\ \hline 1 \end{array} - a_2 \begin{array}{|c|} \hline \rightarrow \\ \hline 1 \end{array} &= (a_1 - a_2) \begin{array}{|c|} \hline \nearrow^2 \\ \hline 1 \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [a_1 \begin{array}{|c|} \hline \leftarrow \\ \hline 1 \end{array} + a_2 \begin{array}{|c|} \hline \rightarrow \\ \hline 2 \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \searrow_2 \\ \hline 1 \end{array}] &= a_1 [\begin{array}{|c|} \hline \leftarrow \\ \hline 1 \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \searrow_2 \\ \hline 1 \end{array}] + a_2 [\begin{array}{|c|} \hline \rightarrow \\ \hline 2 \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \searrow_2 \\ \hline 1 \end{array}] = \\
 a_1 \left(\begin{array}{|c|} \hline \leftarrow \\ \hline 1 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \searrow_2 \\ \hline 1 \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \searrow_2 \\ \hline 1 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \leftarrow \\ \hline 1 \end{array} \right) + a_2 \left(\begin{array}{|c|} \hline \rightarrow \\ \hline 2 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \searrow_2 \\ \hline 1 \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \searrow_2 \\ \hline 1 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \rightarrow \\ \hline 2 \end{array} \right) &= \\
 -a_1 \begin{array}{|c|} \hline \searrow_2 \\ \hline 1 \end{array} + a_2 \begin{array}{|c|} \hline \rightarrow \\ \hline 2 \end{array} &= -(a_1 - a_2) \begin{array}{|c|} \hline \searrow_2 \\ \hline 1 \end{array}
 \end{aligned}$$

Therefore the root system of $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ is $\Phi = \{a_1 - a_2, a_2 - a_1\}$. Setting $\alpha = a_1 - a_2$ we have that the roots are α and $-\alpha$ and the set of fundamental roots is $\Pi = \{\alpha\}$. In pictures



4.2 Coroot system of $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Let x_α and $x_{-\alpha}$ be the covectors associated with the roots α and $-\alpha$ of $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ respectively.

$$\alpha = a_1 - a_2 \quad , \quad x_\alpha = \begin{array}{|c|} \hline \nearrow^2 \\ \hline 1 \end{array} \quad \quad x_{-\alpha} = \begin{array}{|c|} \hline \searrow_2 \\ \hline 1 \end{array}$$

A vector $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ is said to be the coroot associated to the root $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, if $h_\alpha = c[x_\alpha, x_{-\alpha}]$, $c \in \mathbb{C}$ and $\alpha(h_\alpha) = 2$.

$$h_\alpha = [x_\alpha, x_{-\alpha}] = \left[\begin{array}{|c|} \hline \nearrow^2 \\ \hline 1 \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \searrow_2 \\ \hline 2 \end{array} \right] = \begin{array}{|c|} \hline \leftarrow \\ \hline 1 \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \rightarrow \\ \hline 2 \end{array}$$

since

$$(a_1 - a_2) \left(\begin{array}{c} \overleftarrow{\quad} \\ \uparrow \\ 1 \end{array} - \begin{array}{c} \overrightarrow{\quad} \\ \uparrow \\ 2 \end{array} \right) = 2$$

4.3 Killing form of $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Let x and y in \mathfrak{h} . Set

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(x)\alpha(y) \\ &= 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \\ &= 2x_1y_1 + 2x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 \\ &= 2(x_1y_1 + x_2y_2) - 2(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + 2(x_1y_1 + x_2y_2) \\ &= 4\text{tr}(xy). \end{aligned}$$

4.4 Dynkin diagram of $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

We have only one fundamental root, so the Dynkin diagram is just \circ .

5 Special linear algebra $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

Let us recall the special linear algebra $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \text{End}(\mathbb{C}^n) : \text{tr}(A) = 0\}$$

$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ consider as a subspace of $\mathbf{Digraph}^1(n, n)$ is following subspace

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \left\langle \begin{array}{c} \overleftarrow{\quad} \\ \uparrow \\ i \end{array} - \begin{array}{c} \overleftarrow{\quad} \\ \uparrow \\ i+1 \end{array}, \begin{array}{c} \overrightarrow{\quad} \\ \uparrow \\ i \end{array} \begin{array}{c} \overrightarrow{\quad} \\ \uparrow \\ j \end{array}, \begin{array}{c} \overrightarrow{\quad} \\ \uparrow \\ i \end{array} \begin{array}{c} \overrightarrow{\quad} \\ \uparrow \\ j \end{array} \quad ; \quad 1 \leq i < j \leq n - 1 \right\rangle$$

5.1 Root system of $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

We take as Cartan subalgebra the subspace of $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

$$\mathfrak{h} = \left\{ a_1 \begin{array}{c} \overleftarrow{\quad} \\ \uparrow \\ 1 \end{array} + \dots + a_k \begin{array}{c} \overleftarrow{\quad} \\ \uparrow \\ k \end{array} + \dots + a_n \begin{array}{c} \overleftarrow{\quad} \\ \uparrow \\ n \end{array}, \quad \sum a_k = 0 \right\}$$

The dual space is $\mathfrak{h}^* = \langle a_1, \dots, a_n \rangle / (\sum a_i = 0)$, where

$$a_i \left(\begin{array}{c} \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \uparrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \downarrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \end{array} \right) = \delta_{ij}$$

Consider the projection $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \longrightarrow \langle a_1, \dots, a_n \rangle / (\sum a_k = 0)$. The image of a_i under the projection above is still denote by a_i . Then vector $h \in \mathfrak{h}$ can be written as

$$h = a_1 \begin{array}{c} \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \uparrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \downarrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ 1 \end{array} + \dots + a_i \begin{array}{c} \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \uparrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \downarrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ i \end{array} + \dots + a_n \begin{array}{c} \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \uparrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \downarrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ n \end{array}$$

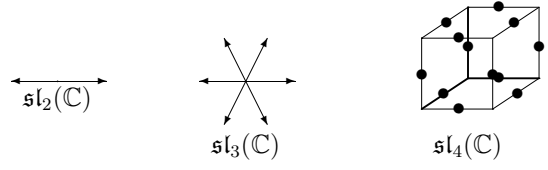
Let us compute the root system

$$\left[\begin{array}{c} a_1 \begin{array}{c} \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \uparrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \downarrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ 1 \end{array} + \dots + a_i \begin{array}{c} \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \uparrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \downarrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ i \end{array} + \dots + a_n \begin{array}{c} \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \uparrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \downarrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ n \end{array} , \begin{array}{c} \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \uparrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \downarrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ i \end{array} \right] = \\ a_i \begin{array}{c} \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \uparrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \downarrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ i \end{array} - a_j \begin{array}{c} \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \uparrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \downarrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ i \end{array} = (a_i - a_j) \begin{array}{c} \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \uparrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \downarrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ i \end{array}$$

Also

$$\left[\begin{array}{c} a_1 \begin{array}{c} \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \uparrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \downarrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ 1 \end{array} + \dots + a_i \begin{array}{c} \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \uparrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \downarrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ i \end{array} + \dots + a_n \begin{array}{c} \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \uparrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \downarrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ n \end{array} , \begin{array}{c} \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \uparrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \downarrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ j \end{array} \right] = \\ a_j \begin{array}{c} \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \uparrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \downarrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ j \end{array} - a_i \begin{array}{c} \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \uparrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \downarrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ j \end{array} = (a_j - a_i) \begin{array}{c} \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \uparrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ \downarrow \\ \overline{\leftarrow} \\ \overline{\leftarrow} \\ j \end{array}$$

Thus the root system of $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ is $\Phi = \{a_i - a_j, a_j - a_i, 1 \leq i < j \leq n - 1\} \subset \mathfrak{h}^*$. The set of fundamental roots is $\Pi = \{a_i - a_{i+1}, i = 1, \dots, n - 1\}$. In pictures for $n = 2, 3$ and 4 the root systems look like



Consider the linear map $T : \mathbf{Digraph}^1(n, n) \longrightarrow \mathbf{Digraph}^1(n, n)$ sending each directed graph into its opposite graph. Clearly T is an antimorphism, i.e., $T(ab) = T(b)T(a)$, for all $a, b \in \mathbf{Digraph}^1(n, n)$. For example,

$$T : \begin{array}{c} \xrightarrow{j} \\ \nearrow \\ \xleftarrow{i} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \xleftarrow{i} \\ \nwarrow \\ \xrightarrow{j} \end{array}$$

Notice that negative roots can be obtained from the positive ones through an application of T .

5.2 Coroots and weights for $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

1. Coroot associated to the root $a_i - a_j$

$$\left[\begin{array}{c} \xrightarrow{j} \\ \nearrow \\ \xleftarrow{i} \end{array}, \begin{array}{c} \xleftarrow{i} \\ \nwarrow \\ \xrightarrow{j} \end{array} \right] = \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \overline{i} \end{array} - \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \overline{j} \end{array}$$

2. Coroot associated to the root $a_j - a_i$

$$\left[\begin{array}{c} \xleftarrow{i} \\ \nwarrow \\ \xrightarrow{j} \end{array}, \begin{array}{c} \xrightarrow{j} \\ \nearrow \\ \xleftarrow{i} \end{array} \right] = \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \overline{j} \end{array} - \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \overline{i} \end{array}$$

The set of fundamental coroots has the form $\Pi_c = \{h_i - h_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1\}$ where

$$h_i - h_{i+1} = \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \overline{i} \end{array} - \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \overline{i+1} \end{array}$$

The set of fundamental weights is $w_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$ since

$$(a_1 + \cdots + a_i) \left(\begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \overline{i} \end{array} - \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \overline{i+1} \end{array} \right) = 1$$

$$(a_1 + \cdots + a_i) \left(\begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \overline{i-k} \end{array} - \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \overline{i+1-k} \end{array} \right) = 1 - 1 = 0$$

$$(a_1 + \cdots + a_i) \left(\begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \overline{i+k} \end{array} - \begin{array}{c} \overline{\uparrow} \\ \overline{i+1+k} \end{array} \right) = 0$$

5.3 The Killing form of $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

Let x and y in \mathfrak{h} . Set

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle &= \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(x)\alpha(y) \\
&= \sum_{i < j} (x_i - x_j)(y_i - y_j) + \sum_{i < j} (x_j - x_i)(y_j - y_i) \\
&= 2 \sum_{i < j} (x_i - x_j)(y_i - y_j) \\
&= 2 \left(\sum_{i < j} x_i y_i + \sum_{i < j} x_j y_j - \sum_{i < j} x_i y_j - \sum_{i < j} x_j y_i \right) \\
&= 2 \left(\sum (n - i) x_i y_i + \sum (i - 1) x_i y_i + \sum x_i y_i \right) \\
&= 2n \operatorname{tr}(xy).
\end{aligned}$$

5.4 Weyl group of $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

Consider the fundamental roots $\alpha_i = a_i - a_{i+1}$, $i = 1, \dots, n - 1$ and S_{α_i} the reflection associated to the fundamental root α_i . Let $h \in \mathfrak{h}$ and h_{α_i} be the coroot associated to the fundamental root α_i . By definition we have $S_{\alpha_i}(h) = h - \alpha_i(h)h_{\alpha_i}$

$$\begin{aligned}
S_{\alpha_i}(h) &= a_1 \overleftarrow{\quad}_1 + \dots + a_i \overleftarrow{\quad}_i + a_{i+1} \overleftarrow{\quad}_{i+1} + \dots + a_n \overleftarrow{\quad}_n - (a_i - a_{i+1}) \left(\overleftarrow{\quad}_i - \overleftarrow{\quad}_{i+1} \right) \\
&= a_1 \overleftarrow{\quad}_1 + \dots + a_{i+1} \overleftarrow{\quad}_i + a_i \overleftarrow{\quad}_{i+1} + \dots + a_n \overleftarrow{\quad}_n
\end{aligned}$$

so we see that reflections S_{α_i} has the form

$$S_{\alpha_i} \left(\overleftarrow{\quad}_k \right) = \overleftarrow{\quad}_k, \quad k \neq i, i + 1$$

$$S_{\alpha_i} \left(\overleftarrow{\quad}_i \right) = \overleftarrow{\quad}_{i+1}$$

$$S_{\alpha_i} \left(\overleftarrow{\quad}_{i+1} \right) = \overleftarrow{\quad}_i$$

Therefore the Weyl group A_n associated with $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ is the symmetric group on n letters

$$A_n = \langle S_{\alpha_i} \mid i = 1, \dots, n - 1 \rangle = S_n.$$

5.5 Dynkin diagram of $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ and Cartan matrix.

Using equation (2) one can check that the Cartan matrix associated to the Lie algebra $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ is

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

The Dynkin diagram associated to $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ is

$$A_{n-1}, \quad n \geq 2 \quad \circ - \circ - \circ \dots \circ - \circ$$

5.6 Invariant polynomials for $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

Consider the action of S_{n+1} on \mathbb{R}^{n+1} given by

$$\begin{aligned} S_{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (\pi, x) &\longmapsto (\pi x)_i = x_{\pi^{-1}(i)} \end{aligned}$$

notice that the permutation (ij) acts as a reflection on \mathbb{R}^{n+1} since

$$(ij)(x_i - x_j) = x_j - x_i = -(x_i - x_j)$$

$$(ij)(x) = x, \quad \text{si } x \in (x_i - x_j)^\perp \text{ (es decir } x_i = x_j)$$

Since S_{n+1} is generated by transpositions $(i \ i + 1)$, $i = 1, \dots, n$, then S_{n+1} is an example of what is called a reflection group. Recall that a linear action of a group G on a vector space V is said to be effective if the only fixed point is 0. The action of S_{n+1} on \mathbb{R}^{n+1} fixes points in \mathbb{R}^{n+1} lying on the straight line $\{(x, x, \dots, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Thus the action of A_n on \mathbb{R}^{n+1} fails to be effective. If we instead let A_n act on the hyperplane $V = \{(x_1 \dots x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1 + \dots + x_{n+1} = 0\}$ then the action becomes effective. Consider the power symmetric functions

$$f_i = x_1^{i+1} + \dots + x_{n+1}^{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Each f_i is S_{n+1} -invariant, and together the power symmetric functions form a set of basic invariants. This fact can be proven as follows: first notice that

$$\text{gr}(f_1)\text{gr}(f_2) \cdots \text{gr}(f_n) = 2 \cdot 3 \cdots n(n+1) = (n+1)! = |S_{n+1}| = |A_n|.$$

Next, it is easy to compute the Jacobian $J(f_1, f_2, \dots, f_n)$ yielding the non-vanishing polynomial

$$J(f_1, f_2, \dots, f_n) = (n+1)! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \prod_{i=1}^n (x_1 + \dots + 2x_i + \dots + x_n)$$

Finally, use the Jacobian criterion.

6 Symplectic Lie algebra $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$

Recall that the symplectic Lie algebra \mathfrak{sp}_{2n} is defined as

$$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}) = \{X : X^t S + SX = 0\}.$$

Here $S \in M_{2n}(\mathbb{C})$ is the matrix

$$S = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Equivalently,

$$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}; A, B, C \in M_n(\mathbb{C}) \text{ y } B = B^t, C = C^t \right\}$$

$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ as a subspace of $\mathbf{Digraph}^1(2n, 2n)$ is given by

$$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}) = \left\langle \begin{array}{cccc} \begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ i \quad n+i \end{array} - \begin{array}{c} \downarrow \uparrow \\ n+i \quad i \end{array}, & \begin{array}{c} \nearrow \\ i \quad n+j \end{array} + \begin{array}{c} \nwarrow \\ j \quad n+i \end{array}, & \begin{array}{c} \searrow \\ n+i \quad i \end{array} + \begin{array}{c} \swarrow \\ i \quad n+j \end{array}, & \begin{array}{c} \nearrow \\ i \quad n+i \end{array} - \begin{array}{c} \nwarrow \\ n+i \quad i \end{array}, \\ \begin{array}{c} \searrow \\ j \quad n+i \end{array} - \begin{array}{c} \swarrow \\ n+i \quad j \end{array}, & \begin{array}{c} \nearrow \\ i \quad n+i \end{array}, & \begin{array}{c} \nwarrow \\ i \quad n+i \end{array} & 1 \leq i < j \leq n \end{array} \right\rangle$$

We take as a Cartan subalgebra of $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ the following subspace

$$\mathfrak{h} = \left\langle h_k = \begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ k \quad n+k \end{array} - \begin{array}{c} \downarrow \uparrow \\ n+k \quad k \end{array}, k = 1, \dots, n \right\rangle$$

6.1 Root system of $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$

Consider $h \in \mathfrak{h}$

$$h = \sum a_i \left(\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ i \quad \quad \quad n+i \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad n+i \end{array} \right)$$

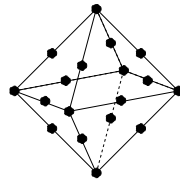
where $\{a_i\}$ denotes de base of \mathfrak{h}^* dual to the given base of \mathfrak{h} . Let us define $T : \mathbf{Digraph}^1(2n, 2n) \rightarrow \mathbf{Digraph}^1(2n, 2n)$ to be the linear map that sends each directed graph into its opposite. Clearly T es un antimorphism, i.e, $T(ab) = T(b)T(a)$ for all $a, b \in \mathbf{Digraph}^1(2n, 2n)$. For example,

$$T : \begin{array}{c} \nearrow \\ i \quad \quad \quad n+j \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \nwarrow \\ \quad \quad \quad n+j \end{array}$$

We will compute explicitly the positive roots. To obtain the negative roots it is enough to apply the transformation T to each positive root.

$$\begin{aligned} & \left[\sum a_k \left(\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ k \quad \quad \quad n+k \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad n+k \end{array} \right), \begin{array}{c} \nearrow \\ i \quad \quad \quad n+j \end{array} - \begin{array}{c} \nwarrow \\ \quad \quad \quad n+j \end{array} \right] = \\ & \quad (a_i - a_j) \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ i \quad \quad \quad n+j \end{array} - \begin{array}{c} \nwarrow \\ \quad \quad \quad n+j \end{array} \right). \\ & \left[\sum a_k \left(\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ k \quad \quad \quad n+k \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad n+k \end{array} \right), \begin{array}{c} \nearrow \\ i \quad \quad \quad n+j \end{array} + \begin{array}{c} \nwarrow \\ \quad \quad \quad n+j \end{array} \right] = \\ & \quad (a_i + a_j) \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ i \quad \quad \quad n+j \end{array} + \begin{array}{c} \nwarrow \\ \quad \quad \quad n+j \end{array} \right). \\ & \left[\sum a_k \left(\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ k \quad \quad \quad n+k \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad n+k \end{array} \right), \begin{array}{c} \nwarrow \\ i \quad \quad \quad n+i \end{array} \right] = 2a_i \begin{array}{c} \nwarrow \\ i \quad \quad \quad n+i \end{array}. \end{aligned}$$

Thus the root system of $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ is $\Phi = \{a_i - a_j, a_j - a_i, a_i + a_j, -a_i - a_j, 2a_i, -2a_i \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. The set of fundamental roots is $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ where $\alpha_i = a_i - a_{i+1}, i = 1, \dots, n - 1$ and $\alpha_n = 2a_n$. In pictures, the root system of $\mathfrak{sp}_6(\mathbb{C})$ looks like



6.2 Coroots and weights of $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$

1. Coroot associated to the root $a_i - a_j$

$$\left[\begin{array}{c} j \\ \hline \nearrow \\ i \end{array} \begin{array}{c} n+i \\ \hline \nwarrow \\ n+j \end{array} - \begin{array}{c} i \\ \hline \nwarrow \\ n+i \end{array} \begin{array}{c} n+j \\ \hline \nearrow \\ n+i \end{array} \right] = \\ \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ i \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ n+i \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ n+i \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ n+i \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ j \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ n+j \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ n+j \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ n+j \end{array} \right) = h_i - h_j$$

$h_i - h_j$ is the coroot associated to the root $a_i - a_j$, since $(a_i - a_j)(h_i - h_j) = 2$.

2. Coroot associated to the root $a_i + a_j$

$$\left[\begin{array}{c} n+j \\ \hline \nearrow \\ i \end{array} \begin{array}{c} n+i \\ \hline \nearrow \\ j \end{array} + \begin{array}{c} j \\ \hline \nwarrow \\ n+i \end{array} \begin{array}{c} i \\ \hline \nwarrow \\ n+j \end{array} \right] = \\ \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ i \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ n+i \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ n+i \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ n+i \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ j \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ n+j \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ n+j \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ n+j \end{array} \right) = h_i + h_j$$

$h_i + h_j$ is the coroot associated to the root $a_i + a_j$, since $(a_i + a_j)(h_i + h_j) = 2$.

3. Coroot associated to the root $2a_i$

$$\left[\begin{array}{c} n+i \\ \hline \nearrow \\ i \end{array} , \begin{array}{c} i \\ \hline \nwarrow \\ n+i \end{array} \right] = \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ i \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ n+i \end{array} = h_i$$

We conclude that $\Phi_c = \{h_i - h_j, h_j - h_i, h_i + h_j, -h_i - h_j, h_i, -h_i, 1 \leq i < j \leq n\}$ is the coroot system of $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$. The set of fundamental coroots is given by $\Pi_c = \{h_i - h_{i+1}, h_n; 1 \leq i \leq n - 1\}$ where

$$h_i - h_{i+1} = \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ i \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ n+i \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ n+i \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ n+i \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ i+1 \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ n+i+1 \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ n+i+1 \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ n+i+1 \end{array} \right)$$

and

$$h_n = \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ n \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ 2n \end{array}$$

The fundamental weights are $w_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$ since

$$\begin{aligned} (a_1 + \cdots + a_i) & \left\{ \left(\begin{array}{c} \uparrow \text{---} \uparrow \\ i \quad \quad \quad n+i \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \uparrow \text{---} \uparrow \\ i+1 \quad \quad \quad n+i+1 \end{array} \right) \right\} = 1 \\ (a_1 + \cdots + a_i) & \left\{ \left(\begin{array}{c} \uparrow \text{---} \uparrow \\ i-k \quad \quad \quad n+i-k \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \uparrow \text{---} \uparrow \\ i+1-k \quad \quad \quad n+i+1-k \end{array} \right) \right\} = 1 - 1 = 0 \\ (a_1 + \cdots + a_i) & \left\{ \left(\begin{array}{c} \uparrow \text{---} \uparrow \\ i+k \quad \quad \quad n+i+k \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \uparrow \text{---} \uparrow \\ i+1+k \quad \quad \quad n+i+1+k \end{array} \right) \right\} = 0 \end{aligned}$$

6.3 Killing form of $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$

Let x and y in \mathfrak{h} . Set

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(x)\alpha(y) \\ &= \sum_{i \neq j} (x_i - x_j)(y_i - y_j) + \sum_{i \neq j} (x_i + x_j)(y_i + y_j) + 2 \sum_i (2x_i)(2y_i) \\ &= 4(n+1) \sum x_i y_i \\ &= 4(n+1) \text{tr}(xy). \end{aligned}$$

6.4 Weyl group of $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$

Consider the fundamental roots of the form $\alpha_i = a_i - a_{i+1}$. Similarly to the $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, it is easy to check that they generate a copy of S_n . Let us compute the reflection associated to the root $\alpha_n = 2a_n$. Given $h \in \mathfrak{h}$, we have that $S_{\alpha_n}(h) = h - \alpha_n(h)h_{\alpha_n}$, where h_{α_n} is the coroot associated to the root α_n

$$\begin{aligned} S_{\alpha_n}(h) &= \sum a_i \left(\begin{array}{c} \uparrow \text{---} \uparrow \\ i \quad \quad \quad n+i \end{array} \right) - 2a_n \left(\begin{array}{c} \uparrow \text{---} \uparrow \\ n \quad \quad \quad 2n \end{array} \right) = \\ & a_1 \left(\begin{array}{c} \uparrow \text{---} \uparrow \\ 1 \quad \quad \quad n+1 \end{array} \right) + \cdots - a_n \left(\begin{array}{c} \uparrow \text{---} \uparrow \\ n \quad \quad \quad 2n \end{array} \right). \end{aligned}$$

This reflections are the sign changes and they generate a copy of the group \mathbb{Z}_2^n . Altogether the Weyl group associated to $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ is

$$C_n = \mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n.$$

6.5 Cartan matrix and Dynkin diagram of $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$

$$C_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

There are n vertices in this case, one for each fundamental root. The Killing form is $\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle = 1$, if $i = 1, \dots, n-1$ and $\langle \alpha_{n-1}, \alpha_n \rangle = 2$. Moreover $\langle \alpha_{n-1}, \alpha_{n-1} \rangle < \langle \alpha_n, \alpha_n \rangle$, and thus the Dynkin diagram of $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ has the form

$$C_n, n \geq 3 \quad \circ - \circ - \circ \dots \circ \Leftarrow \circ$$

6.6 Invariant functions under the action of $C_n = \mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$

Let us recall that the group structure on $\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$ is given by

$$(a, \pi)(b, \sigma) = (a \cdot \pi(b), \pi \circ \sigma)$$

where $(\pi b)_i = b_{\pi^{-1}(i)}$.

Proposition 21. $\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$ acts on \mathbb{R}^n as follows

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ ((a, \pi)x) & \longmapsto & ((a, \pi)x)_i = a_i x_{\pi^{-1}(i)} \end{array}$$

Consider the polynomials

$$f_i = x_1^{2^i} + x_2^{2^i} + \dots + x_n^{2^i}, \quad 1 \leq i \leq n$$

Each polynomial f_i is invariant under the action of $(\mathbb{Z}_2)^n \rtimes S_n$ given by

$$(f(a, \pi))(x) = f((a, \pi)x).$$

The set of invariants

$$\begin{array}{lcl} f_1 & = & x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \\ f_2 & = & x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 \\ & \vdots & \\ f_n & = & x_1^{2^n} + x_2^{2^n} + \dots + x_n^{2^n} \end{array}$$

is a basic set. This follows from the Jacobian criterion since

$$\text{gr}(f_1)\text{gr}(f_2)\cdots\text{gr}(f_n) = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n = 2^n n! = |\mathbb{Z}_2^n \times S_n|$$

and

$$J = 2^n n! x_1 \cdots x_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j^2 - x_i^2) \neq 0.$$

7 Orthogonal Lie Algebra $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$

Recall that the $2n$ -orthogonal Lie Algebra is defined as follows

$$\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}) = \{X : X^t S + SX = 0\}$$

where $S \in M_{2n}(\mathbb{C})$ is the matrix

$$S = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Explicitly

$$\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}; A, B, C \in M_n(\mathbb{C}) \text{ y } B = -B^t, C = -C^t \right\}.$$

$\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ as a subspace of $\mathbf{Digraph}^1(2n, 2n)$ is given by

$$\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}) = \left\langle \begin{array}{c} \uparrow \quad \downarrow \\ \hline \hline \\ \hline \uparrow \quad \downarrow \\ \hline \hline \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \downarrow \quad \uparrow \\ \hline \hline \\ \hline \downarrow \quad \uparrow \\ \hline \hline \\ \hline \end{array}, \begin{array}{c} \nearrow \quad \searrow \\ \hline \hline \\ \hline \searrow \quad \nearrow \\ \hline \hline \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \searrow \quad \nearrow \\ \hline \hline \\ \hline \nearrow \quad \searrow \\ \hline \hline \\ \hline \end{array}, \begin{array}{c} \nearrow \quad \searrow \\ \hline \hline \\ \hline \searrow \quad \nearrow \\ \hline \hline \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \searrow \quad \nearrow \\ \hline \hline \\ \hline \nearrow \quad \searrow \\ \hline \hline \\ \hline \end{array}, \dots, \begin{array}{c} \downarrow \quad \uparrow \\ \hline \hline \\ \hline \downarrow \quad \uparrow \\ \hline \hline \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \quad \downarrow \\ \hline \hline \\ \hline \uparrow \quad \downarrow \\ \hline \hline \\ \hline \end{array} \right\rangle.$$

where $1 \leq i < j \leq n$. We fix \mathfrak{h} the Cartan subalgebra of $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ to be

$$\mathfrak{h} = \left\langle h_k = \begin{array}{c} \uparrow \quad \downarrow \\ \hline \hline \\ \hline \uparrow \quad \downarrow \\ \hline \hline \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \downarrow \quad \uparrow \\ \hline \hline \\ \hline \downarrow \quad \uparrow \\ \hline \hline \\ \hline \end{array}, k = 1, \dots, n \right\rangle$$

7.1 Root System of $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$

$$h = \sum a_k \left(\begin{array}{c} \uparrow \quad \downarrow \\ \hline \hline \\ \hline \uparrow \quad \downarrow \\ \hline \hline \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \downarrow \quad \uparrow \\ \hline \hline \\ \hline \downarrow \quad \uparrow \\ \hline \hline \\ \hline \end{array} \right)$$

where $\{a_i\}$ is the base of \mathfrak{h}^* dual to the natural base of \mathfrak{h} . As for the case of the symplectic algebra we define a map $T : \mathbf{Digraph}^1(2n, 2n) \longrightarrow \mathbf{Digraph}^1(2n, 2n)$. T sends a given graph to its opposite if it does not cross the vertical line, and to minus its opposite if it crosses the vertical line. We have again that $T(ab) = T(b)T(a)$. For example,

$$T : \begin{array}{c} \xrightarrow{n+j} \\ \diagup \\ \hline \xrightarrow{i} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ \diagdown \\ \hline \xrightarrow{n+j} \end{array}$$

Let us find out the positive roots

$$\begin{aligned} & \left[\sum a_k \left(\begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \hline \xrightarrow{n+k} \end{array} - \begin{array}{c} \xrightarrow{n+k} \\ \hline \xrightarrow{k} \end{array} \right), \begin{array}{c} \xrightarrow{j} \\ \hline \xrightarrow{n+j} \end{array} - \begin{array}{c} \xrightarrow{n+i} \\ \hline \xrightarrow{n+j} \end{array} \right] = (a_i - a_j) \left(\begin{array}{c} \xrightarrow{j} \\ \hline \xrightarrow{n+j} \end{array} - \begin{array}{c} \xrightarrow{n+i} \\ \hline \xrightarrow{n+j} \end{array} \right) . \\ & \left[\sum a_k \left(\begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \hline \xrightarrow{n+k} \end{array} - \begin{array}{c} \xrightarrow{n+k} \\ \hline \xrightarrow{k} \end{array} \right), \begin{array}{c} \xrightarrow{n+j} \\ \diagup \\ \hline \xrightarrow{j} \end{array} - \begin{array}{c} \xrightarrow{n+i} \\ \diagup \\ \hline \xrightarrow{j} \end{array} \right] = (a_i + a_j) \left(\begin{array}{c} \xrightarrow{n+j} \\ \diagup \\ \hline \xrightarrow{j} \end{array} - \begin{array}{c} \xrightarrow{n+i} \\ \diagup \\ \hline \xrightarrow{j} \end{array} \right) \end{aligned}$$

To get the negative roots it is enough to apply T to the positive roots. Therefore the root system is $\Phi = \{a_i - a_j, a_j - a_i, a_i + a_j, -a_i - a_j, 1 \leq i < j \leq n\}$ and the fundamental roots can be taken to be $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ where $\alpha_i = a_i - a_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$ and $\alpha_n = a_{n-1} + a_n$

7.2 Coroots and weights of $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$

1. Coroot associated to the root $a_i - a_j$ in this case $(a_i - a_j)(h_i - h_j) = 2$,

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} \xrightarrow{j} \\ \diagdown \\ \hline \xrightarrow{n+j} \end{array} - \begin{array}{c} \xrightarrow{n+i} \\ \diagdown \\ \hline \xrightarrow{n+j} \end{array}, \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ \diagup \\ \hline \xrightarrow{n+i} \end{array} - \begin{array}{c} \xrightarrow{n+j} \\ \diagup \\ \hline \xrightarrow{n+i} \end{array} \right] = \\ & \left(\begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \hline \xrightarrow{n+k} \end{array} - \begin{array}{c} \xrightarrow{n+k} \\ \hline \xrightarrow{k} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \hline \xrightarrow{n+k} \end{array} - \begin{array}{c} \xrightarrow{n+k} \\ \hline \xrightarrow{k} \end{array} \right) = h_i - h_j \end{aligned}$$

thus $h_i - h_j$ is the coroot associated to the root $a_i - a_j$.

2. Coroot associated to the root $a_i + a_j$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} \xrightarrow{n+j} \\ \diagup \\ \hline \xrightarrow{j} \end{array} - \begin{array}{c} \xrightarrow{n+i} \\ \diagup \\ \hline \xrightarrow{j} \end{array}, \begin{array}{c} \xrightarrow{j} \\ \diagdown \\ \hline \xrightarrow{n+i} \end{array} - \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ \diagdown \\ \hline \xrightarrow{n+j} \end{array} \right] = \\ & - \left(\begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \hline \xrightarrow{n+k} \end{array} - \begin{array}{c} \xrightarrow{n+k} \\ \hline \xrightarrow{k} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \hline \xrightarrow{n+k} \end{array} - \begin{array}{c} \xrightarrow{n+k} \\ \hline \xrightarrow{k} \end{array} \right) = -h_i - h_j \end{aligned}$$

since $(a_i + a_j)(-h_i - h_j) = -2$, $h_i + h_j$ is the coroot associated to the root $a_i + a_j$.

We concluded that $\Phi_c = \{h_i - h_j, h_j - h_i, h_i + h_j, -h_i - h_j, 1 \leq i < j \leq n\}$ is the coroot system of $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$. The set of fundamental coroots is given by $\Pi_c = \{h_i - h_{i+1}, h_{n-1} + h_n; 1 \leq i \leq n-1\}$ where

$$h_i - h_{i+1} = \left(\begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ i \quad n+i \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ i+1 \quad n+i+1 \end{array} \right)$$

and

$$h_{n-1} + h_n = \left(\begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ n-1 \quad 2n-1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ n \quad 2n \end{array} \right)$$

The fundamental weights are given by $w_i = a_1 + \cdots + a_i$, $i = 1, \dots, n-1$ and $w_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{2}$. In a similar as for $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ one can prove that $w_i(h_j - h_{j+1}) = \delta_{ij}$. For w_n we get

$$\frac{(a_1 + \cdots + a_n)}{2} \left\{ \left(\begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ n-1 \quad 2n-1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ n \quad 2n \end{array} \right) \right\} = 1$$

$$\frac{(a_1 + \cdots + a_n)}{2} \left\{ \left(\begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ i \quad n+i \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ i+1 \quad n+i+1 \end{array} \right) \right\} = 0$$

7.3 Killing form of $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$

Let x and y in \mathfrak{h} . Set

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(x)\alpha(y) \\ &= \sum_{i \leq j} (x_i - x_j)(y_i - y_j) + \sum_{i \leq j} (x_i + x_j)(y_i + y_j) + \sum_{j \leq i} (x_i - x_j)(y_i - y_j) \\ &\quad + \sum_{j \leq i} (x_i + x_j)(y_i + y_j) \\ &= \sum_{i \neq j} 2x_i y_j + 2x_i y_i \\ &= 4(n-1) \sum x_i y_i \\ &= 4(n-1) \text{tr}(xy). \end{aligned}$$

7.4 Weyl group of $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$

Consider the fundamental roots $\alpha_i = a_i - a_{i+1}$. Just as for $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, the associated reflections associated to these roots generate the group S_n . We compute the reflections associated to the roots $\alpha_n = a_{n+1} + a_n$. Given $h \in \mathfrak{h}$, we have $S_{\alpha_n}(h) = h - \alpha_n(h)h_{\alpha_n}$ where h_{α_n} is the coroot associated to the root α_n

$$S_{\alpha_n}(h) = \sum a_i \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ i \end{array} \text{---} - \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ n+i \end{array} \text{---} \right) - (a_{n-1} + a_n) \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ n-1 \end{array} \text{---} - \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ 2n-1 \end{array} \text{---} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ n \end{array} \text{---} - \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ 2n \end{array} \text{---} \right) =$$

$$a_1 \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ 1 \end{array} \text{---} - \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ n+1 \end{array} \text{---} \right) + \dots - a_n \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ n-1 \end{array} \text{---} - \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ 2n-1 \end{array} \text{---} \right) - a_{n-1} \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ n \end{array} \text{---} - \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ 2n \end{array} \text{---} \right)$$

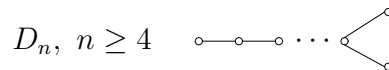
This reflection correspond to a change of sign. Thus we have that the Weyl group associated with $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ is

$$D_n = \mathbb{Z}_2^{n-1} \rtimes S_n$$

7.5 Cartan matrix and Dynkin diagram of $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$.

$$D_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

The Dynkin diagram has n vertices corresponding with the fundamental roots. The Killing has the form $\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle = 1$, if $i = 1, \dots, n - 2$, $\langle \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1} \rangle = 1$, $\langle \alpha_{n-2}, \alpha_n \rangle = 1$ and $\langle \alpha_{n-1}, \alpha_n \rangle = 0$. Thus the Dynkin diagram $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$



7.6 Invariant functions under the action of $\mathbb{Z}_2^{n-1} \rtimes S_n$

Consider the polynomials

$$f_i = \sum_{j=1}^n x_j^{2i}, \quad 1 \leq i \leq n - 1$$

$$f_n = x_1 \cdots x_n$$

clearly each f_i is invariant under the action of $\mathbb{Z}_2^{n-1} \rtimes S_n$. It is easy to check that

$$\text{gr}(f_1)\text{gr}(f_2)\dots\text{gr}(f_n) = 2^{n-1}n! = |\mathbb{Z}_2^{n-1} \rtimes S_n|$$

and

$$J = (-2)^{n-1}(n-1)! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j^2 - x_i^2) \neq 0,$$

so the Jacobian criterion tell us that f_1, \dots, f_n is a basic set of invariants.

8 Orthogonal algebra $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$

The orthogonal odd algebra

$$\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C}) = \{X : X^t S + S X = 0\}$$

where $S \in M_{2n+1}(\mathbb{C})$ is of the form

$$S = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

An explicit form

$$\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B & -H^t \\ C & -A^t & -G^t \\ G & H & 0 \end{pmatrix}; \begin{matrix} A, B, C \in M_n(\mathbb{C}), \\ B = -B^t, \\ C = -C^t \end{matrix}, \begin{matrix} H, G \in M_{1 \times n}(\mathbb{C}), \\ C = -C^t \end{matrix} \right\}.$$

$\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$ as a subspace of $\mathbf{Digraph}^1(2n+1, 2n+1)$ is given by

$$\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C}) = \left\langle \begin{matrix} \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ i & n+i \end{matrix} - \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ n+i & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \nearrow & \nearrow \\ i & j \end{matrix} - \begin{matrix} \nearrow & \nearrow \\ j & n+i \end{matrix} \\ \begin{matrix} \searrow & \searrow \\ n+i & n+j \end{matrix} - \begin{matrix} \searrow & \searrow \\ n+i & n+j \end{matrix} \\ \begin{matrix} \nearrow & \nearrow \\ i & \end{matrix} - \begin{matrix} \nearrow & \nearrow \\ \end{matrix} \end{matrix} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{matrix} \begin{matrix} \searrow & \searrow \\ j & n+i \end{matrix} - \begin{matrix} \searrow & \searrow \\ n+i & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \nearrow & \nearrow \\ i & 2n+1 \end{matrix} - \begin{matrix} \nearrow & \nearrow \\ 2n+1 & n+i \end{matrix} \\ \begin{matrix} \searrow & \searrow \\ n+i & 2n+1 \end{matrix} - \begin{matrix} \searrow & \searrow \\ 2n+1 & i \end{matrix} \end{matrix}, 1 \leq i < j \leq n \right\rangle$$

Let us fix \mathfrak{h} a Cartan subalgebra of $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$

$$\mathfrak{h} = \left\langle \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ k & n+k \end{matrix} - \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ n+k & \end{matrix}, k = 1, \dots, n \right\rangle$$

8.1 Root system of $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$

Let $h \in \mathfrak{h}$,

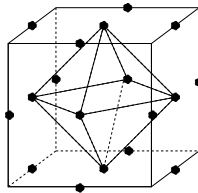
$$h = \sum a_k \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \hline k \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline n+k \\ \hline \end{array} \right)$$

where $\{a_i\}$ is a base of \mathfrak{h}^* dual to the natural base of \mathfrak{h} . We compute the positive roots. The negative roots are obtain applying the following antimorphism to the positive roots. $T : \mathbf{Digraph}^1(2n+1, 2n+1) \longrightarrow \mathbf{Digraph}^1(2n+1, 2n+1)$. For example

$$T : \begin{array}{c} \nearrow \\ \hline i \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \searrow \\ \hline n+j \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \left[\sum a_k \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \hline k \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline n+k \\ \hline \end{array} \right) , \begin{array}{c} \nearrow \\ \hline i \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \searrow \\ \hline n+j \\ \hline \end{array} \right] = \\ & \quad (a_i - a_j) \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \hline i \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \searrow \\ \hline n+j \\ \hline \end{array} \right) \\ & \left[\sum a_k \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \hline k \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline n+k \\ \hline \end{array} \right) , \begin{array}{c} \nearrow \\ \hline i \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \searrow \\ \hline j \\ \hline \end{array} \right] = \\ & \quad (a_i + a_j) \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \hline i \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \searrow \\ \hline j \\ \hline \end{array} \right) \\ & \left[\sum a_k \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \hline k \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline n+k \\ \hline \end{array} \right) , \begin{array}{c} \nearrow \\ \hline i \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \searrow \\ \hline 2n+1 \\ \hline \end{array} \right] = a_i \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \hline i \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \searrow \\ \hline 2n+1 \\ \hline \end{array} \right) \end{aligned}$$

Thus the set of roots is $\Phi = \{a_i - a_j, a_j - a_i, a_i + a_j, a_i, -a_i\}$. The fundamental roots are $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ where $\alpha_i = a_i - a_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$ and $\alpha_n = a_n$. In pictures the root system of $\mathfrak{so}_7(\mathbb{C})$ looks like



8.2 Coroots and weights of $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$

1. Coroots associated to the root $a_i - a_j$

$$\left[\begin{array}{c} \frac{j}{i} \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \frac{n+i}{n+j} \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{c} \frac{i}{j} \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \frac{n+j}{n+i} \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} \right] = \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ \hline \\ \uparrow \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ \hline \\ \uparrow \\ \hline \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ \hline \\ \uparrow \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ \hline \\ \uparrow \\ \hline \end{array} \right) = h_i - h_j$$

Since $(a_i - a_j)(h_i - h_j) = 2$, we see that $h_i - h_j$ is the coroot associated to the root $a_i - a_j$.

2. Coroot associated to the root $a_i + a_j$

$$\left[\begin{array}{c} \frac{n+j}{i} \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \frac{n+i}{j} \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{c} \frac{j}{n+i} \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \frac{i}{n+j} \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} \right] = - \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ \hline \\ \uparrow \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ \hline \\ \uparrow \\ \hline \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ \hline \\ \uparrow \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ \hline \\ \uparrow \\ \hline \end{array} \right) = -h_i - h_j$$

Here $(a_i + a_j)(-h_i - h_j) = -2$, and thus $h_i + h_j$ is the coroot associated to the root $a_i + a_j$.

3. Coroot associated to the root a_i

$$\left[\begin{array}{c} \frac{2n+1}{i} \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \frac{n+i}{2n+1} \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{c} \frac{2n+1}{n+i} \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \frac{i}{2n+1} \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} \right] = - \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ \hline \\ \uparrow \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ \hline \\ \uparrow \\ \hline \end{array} \right) = -h_i$$

Thus $2h_i$ is the coroot associated to the root a_i .

We have that $\Phi_c = \{h_i - h_j, h_j - h_i, h_i + h_j, -h_i - h_j, 2h_i, -2h_i, 1 \leq i < j \leq n\}$ is the coroot system of $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$. The set of fundamental coroot has the form $\Pi_c = \{h_i - h_{i-1}, 2h_n; 1 \leq i \leq n - 1\}$ where

$$h_i - h_{i+1} = \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ \hline \\ \uparrow \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ \hline \\ \uparrow \\ \hline \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ \hline \\ \uparrow \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ \hline \\ \uparrow \\ \hline \end{array} \right)$$

and

$$h_{n-1} + h_n = \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ \hline \\ \uparrow \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ \hline \\ \uparrow \\ \hline \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ \hline \\ \uparrow \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \\ \hline \\ \uparrow \\ \hline \end{array} \right)$$

The fundamental weights are $w_i = a_1 + \cdots + a_i$, $i = 1, \dots, n-1$ and $w_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{2}$. In a similar fashion to the $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ case we have that $w_i(h_j - h_{j+1}) = \delta_{ij}$ and $w_i(2h_n) = \delta_{in}$.

8.3 Killing form of $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$

Let x and y in \mathfrak{h} . Set

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(x)\alpha(y) \\ &= \sum_{i \leq j} (x_i - x_j)(y_i - y_j) + \sum_{i \leq j} (x_i + x_j)(y_i + y_j) + \sum_{j \leq i} (x_i - x_j)(y_i - y_j) \\ &\quad + \sum_{j \leq i} (x_i + x_j)(y_i + y_j) + \sum_i x_i y_i + \sum_i (2x_i)(2y_i) \\ &= (4n-2) \sum x_i y_i \\ &= (4n-2) \text{tr}(xy) \end{aligned}$$

8.4 Weyl group of $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$

Consider the fundamental roots $\alpha_i = a_i - a_{i+1}$. Just like for $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$, the reflections associated to these roots generate the symmetric group S_n . Let us analyze the reflection associated to the root $\alpha_n = a_n$. Let $h \in \mathfrak{h}$, we have $S_{\alpha_n}(h) = h - \alpha_n(h)h_{\alpha_n}$ where h_{α_n} is the coroot associated to the root α_n

$$\begin{aligned} S_{\alpha_n}(h) &= \sum a_i \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ i \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ n+i \end{array} \right) - 2a_n \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ n \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ 2n \end{array} \right) = \\ &= a_1 \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ n+1 \end{array} \right) + \cdots - a_n \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ n \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ 2n \end{array} \right) \end{aligned}$$

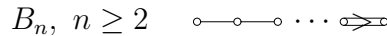
This reflections represent sign changes and generate the group \mathbb{Z}_2^n , therefore the Weyl group associated with $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$ is

$$B_n = \mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$$

8.5 Cartan matrix and Dynkin diagram of $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$.

$$B_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

The diagram has n vertices, one for each fundamental root. The killing form is given by $\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle = 1$, if $i = 1, \dots, n - 1$ and $\langle \alpha_{n-1}, \alpha_n \rangle = 2$. Furthermore $\langle \alpha_{n-1}, \alpha_{n-1} \rangle > \langle \alpha_n, \alpha_n \rangle$, and thus, the Dynkin diagram of $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$ has form



Acknowledgments

Thanks to Manuel Maia for helping us with LaTeX, Delia Flores de Chela for helpful comments and suggestions and Pedro Alson who has been teaching the value of graphical thinking for many years.

References

- [1] Theodor Bröcker, Tammo Tom Dieck. *Representations of Compact Lie Groups*. Springer-Verlag, New York 1985.
- [2] Roger Carter, Graeme Segal y Ian Macdonald. *Lecture on Lie groups and Lie algebras*. Students Texts 32, London Mathematical Society, 1995.
- [3] Rafael Díaz, Eddy Pariguan. *Super, quantum and noncommutative species*. math.CT/0509674. 2005.
- [4] Rafael Díaz, Eddy Pariguan. *Quantum symmetric functions*. Communications in Algebra. **33**. (2005), no.6, 1947-1978.
- [5] Williams Fulton, Joe Harris. *Representation Theory. A first course* . Springer-Verlag, New York 1991.
- [6] I.M. Gelfand. *Lectures on linear algebra*, Robert E. Krieger Publishing Company. Huntington, New York, 1978.
- [7] S. Gelfand and Y. Manin *Methods of homological algebra*. Second edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Velarg, Berlin, 2003.

- [8] James E. Humphreys. *Introductions to Lie Algebras and Representation theory* . Springer-Verlag, New York 1972.
- [9] James E. Humphreys. *Reflection Groups and Coxeter Groups*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 29. Cambridge University Press, 1990.
- [10] Eduard Looijenga. *Root Systems and Elliptic Curves*, Mathematisch Instituut, Toernooiveld, Driehuizerweg 200, Nijmegen, The Netherlands. Springer-Verlag, 1976.
- [11] A.L. Onishchik and E.B. Vinberg. *Lie groups and Lie algebras II*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [12] J-P. Serre. *Complex semisimple Lie algebras* . Springer-Verlag, New York 1977.
- [13] P. Slodowy. *Groups and Special Singularities*, Mathematisches Seminar, Universität Hamburg, D-20146 Hamburg, Germany.
- [14] P. Slodowy. *Platonic Solids, Kleinian Singularities, and Lie Groups*, Mathematisches Institut, Universität Bonn, Wegelerstraße 10, D-5300 Bonn, W. Germany.
- [15] A.N. Varchenko, S.V. Chmutov. *Finite irreducible groups, generated by reflections are monodromy groups of suitable Singularities and Lie Groups*.

RAFAEL DÍAZ & EDDY PARIGUAN
INSTITUTO VENEZOLANO DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS.
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA.

Boundary value problems in complex analysis II

Heinrich Begehr

Abstract

This is the continuation of an investigation of basic boundary value problems for first order complex model partial differential equations. Model second order equations are the Poisson and the inhomogeneous Bitsadze equations. Different kinds of boundary conditions are posed as combinations of the Schwarz, the Dirichlet, and the Neumann conditions. Solvability conditions and the solutions are given in explicit form for the unit disc. Exemplarily the inhomogeneous polyanalytic equation is investigated as a model equation of arbitrary order.

1 Boundary value problems for second order equations

There are two basic second order differential operators, the Laplace operator $\partial_z \partial_{\bar{z}}$ and the Bitsadze operator ∂_z^2 . The third one, $\partial_{\bar{z}}^2$ is just the complex conjugate of the Bitsadze operator and all formulas and results for this operator can be attained by the ones for the Bitsadze operator through complex conjugation giving dual formulas and results.

For the Laplace and the Poisson, i.e. the inhomogeneous Laplace equation, the Dirichlet and the Neumann boundary value problems are well studied. Before investigating them the Schwarz problem will be studied for both operators.

Theorem 1 *The Schwarz problem for the Poisson equation in the unit disc*

$w_{z\bar{z}} = f$ in \mathbb{D} , $\operatorname{Re} w = \gamma_0$, $\operatorname{Re} w_z = \gamma_1$ on $\partial\mathbb{D}$, $\operatorname{Im} w(0) = c_0$, $\operatorname{Im} w_z(0) = c_1$

is uniquely solvable for $f \in L_1(\mathbb{D}; \mathbb{C})$, $\gamma_0, \gamma_1 \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{R})$, $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. The solution is

$$w(z) = ic_0 + ic_1(z + \bar{z}) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \frac{\bar{\zeta} + z}{\zeta - z} \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}}$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) [\zeta \log(1 - z\bar{\zeta})^2 - \bar{\zeta} \log(1 - \bar{z}\zeta)^2 + z - \bar{z}] \frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta| < 1} \{f(\zeta)[\log |\zeta - z|^2 - \log(1 - \bar{z}\zeta)] - \overline{f(\zeta)} \log(1 - \bar{z}\zeta)\} d\xi d\eta \quad (1) \\
& - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta| < 1} \left\{ f(\zeta) \left[\frac{\log(1 - \bar{z}\zeta)}{\zeta^2} + \log |\zeta| \right] - \overline{f(\zeta)} \left[\frac{\log(1 - z\bar{\zeta})}{\bar{\zeta}^2} + \log |\zeta| \right] \right\} d\xi d\eta \\
& + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta| < 1} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta} + \frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta}} \right] \frac{z - \bar{z}}{2} d\xi d\eta .
\end{aligned}$$

Proof This result follows from combining the solution

$$w(z) = ic_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \frac{\bar{\zeta} + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta| < 1} \left[\frac{\omega(\zeta)}{\bar{\zeta}} \frac{\bar{\zeta} + z}{\zeta - z} + \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\zeta} \frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - \bar{z}\zeta} \right] d\xi d\eta$$

of the Schwarz problem

$$w_z = \omega \text{ in } \mathbb{D}, \operatorname{Re} w = \gamma_0 \text{ on } \partial\mathbb{D}, \operatorname{Im} w(0) = c_0$$

with the solution

$$\omega(z) = ic_1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta| < 1} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta}} \frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - \bar{z}\zeta} \right] d\xi d\eta$$

of the Schwarz problem

$$\omega_{\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D}, \operatorname{Re} \omega = \gamma_1 \text{ on } \partial\mathbb{D}, \operatorname{Im} \omega(0) = c_1 .$$

Here the relations

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta| < 1} \frac{\tilde{\zeta} + \zeta}{\tilde{\zeta} - \zeta} \frac{\overline{\tilde{\zeta} + z}}{\tilde{\zeta} - z} \frac{d\xi d\eta}{\bar{\zeta}} &= 2\tilde{\zeta} \log |\tilde{\zeta} - z|^2 - 2\tilde{\zeta} \log(1 - \bar{z}\tilde{\zeta}) - \tilde{\zeta} \log |\tilde{\zeta}|^2 + z, \\
\frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta| < 1} \frac{\overline{\tilde{\zeta} + \zeta}}{\tilde{\zeta} - \zeta} \frac{1 + \bar{z}\zeta}{1 - \bar{z}\zeta} \frac{d\xi d\eta}{\zeta} &= -2\bar{\zeta} \log(1 - \bar{z}\tilde{\zeta}) + \bar{\zeta} \log |\tilde{\zeta}|^2 - \bar{z}, \\
\frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta| < 1} \frac{1 + \zeta\bar{\zeta}}{1 - \zeta\bar{\zeta}} \frac{\overline{\tilde{\zeta} + z}}{\tilde{\zeta} - z} \frac{d\xi d\eta}{\bar{\zeta}} &= \frac{2}{\bar{\zeta}} \log(1 - z\bar{\zeta}) + z, \\
\frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta| < 1} \frac{1 + \bar{\zeta}\tilde{\zeta}}{1 - \bar{\zeta}\tilde{\zeta}} \frac{1 + \bar{z}\zeta}{1 - \bar{z}\zeta} \frac{d\xi d\eta}{\zeta} &= -\frac{2}{\bar{\zeta}} \log(1 - \bar{z}\tilde{\zeta}) - \bar{z},
\end{aligned}$$

and

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|<1} \left[\frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{\overline{\zeta+z}}{\zeta-z} - \frac{1}{\zeta} \frac{1+\bar{z}\zeta}{1-\bar{z}\zeta} \right] d\xi d\eta = -z - \bar{z}$$

are needed. More simple than this is to verify that (1) is the solution.

The uniqueness of the solution can easily be seen. In case w_1 and w_2 are two solutions then $\omega = w_1 - w_2$ would be a harmonic function with homogeneous data,

$$\omega_{z\bar{z}} = 0 \text{ in } \mathbb{D}, \text{ Re } \omega = 0, \text{ Re } \omega_z = 0 \text{ on } \partial\mathbb{D}, \text{ Im } \omega(0) = 0, \text{ Im } \omega_z(0) = 0.$$

As ω_z is analytic, say φ' in \mathbb{D} , then integrating the equation $\omega_z = \varphi'$ means $\omega = \varphi + \bar{\psi}$ where ψ is analytic in \mathbb{D} .

Then $\text{Re } \omega_z = 0$ on $\partial\mathbb{D}$, $\text{Im } \omega_z(0) = 0$ means $\text{Re } \varphi' = 0, \text{Im } \varphi'(0) = 0$. From [3], Theorem 6 then φ' is seen to be identically zero, i.e. φ a constant, say a . Then from $\text{Re } \omega = 0$ on $\partial\mathbb{D}$, $\text{Im } \omega(0) = 0$ it follows $\text{Re } \psi = -\text{Re } a$ and $\text{Im } \psi(0) = \text{Im } a$. Thus again [3], Theorem 6 shows $\psi(z) = -\bar{a}$ identically in \mathbb{D} . This means ω vanishes identically in \mathbb{D} .

There is a dual result to Theorem 1 where the roles of z and \bar{z} are interchanged. This can be attained by setting $W = \bar{w}$ and complex conjugating (1).

Theorem 1' *The Schwarz problem for the Poisson equation in the unit disc*

$$w_{z\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D}, \text{ Re } w = \gamma_0, \text{ Re } w_{\bar{z}} = \gamma_1 \text{ on } \partial\mathbb{D}, \text{ Im } w(0) = c_0, \text{ Im } w_{\bar{z}}(0) = c_1,$$

for $f \in L_1(\mathbb{D}; \mathbb{C}), \gamma_0, \gamma_1 \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{R}), c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ is uniquely solvable by

$$\begin{aligned} w(z) = & ic_0 + ic_1(z + \bar{z}) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) [\zeta \log(1 - z\bar{\zeta})^2 - \bar{\zeta} \log(1 - \bar{z}\zeta)^2 + z - \bar{z}] \frac{d\zeta}{\zeta} \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \{f(\zeta) [\log |\zeta - z|^2 - \log(1 - z\bar{\zeta})] - \overline{f(\zeta)} \log(1 - z\bar{\zeta})\} d\xi d\eta \quad (1') \\ & - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \left\{ f(\zeta) \left[\frac{\log(1 - z\bar{\zeta})}{\bar{\zeta}^2} + \log |\zeta| \right] - \overline{f(\zeta)} \left[\frac{\log(1 - \bar{z}\zeta)}{\zeta^2} + \log |\zeta| \right] \right\} d\xi d\eta \\ & - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta} + \frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta}} \right] \frac{z - \bar{z}}{2} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Theorem 2 *The Schwarz problem for the inhomogeneous Bitsadze equation in the unit disc*

$w_{\bar{z}\bar{z}} = f$ in \mathbb{D} , $\operatorname{Re} w = \gamma_0$, $\operatorname{Re} w_{\bar{z}} = \gamma_1$ on $\partial\mathbb{D}$, $\operatorname{Im} w(0) = c_0$, $\operatorname{Im} w_{\bar{z}}(0) = c_1$,

for $f \in L_1(\mathbb{D}; \mathbb{C})$, $\gamma_0, \gamma_1 \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{R})$, $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ is uniquely solvable through

$$\begin{aligned} w(z) = & ic_0 + i(z + \bar{z}) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} (\zeta - z + \overline{\zeta - z}) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|<1} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta}} \frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \right) (\zeta - z + \overline{\zeta - z}) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (2)$$

Proof Rewriting the problem as the system

$$w_{\bar{z}} = \omega \text{ in } \mathbb{D}, \operatorname{Re} w = \gamma_0 \text{ on } \partial\mathbb{D}, \operatorname{Im} w(0) = c_0,$$

$$w_{\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D}, \operatorname{Re} \omega = \gamma_1 \text{ on } \partial\mathbb{D}, \operatorname{Im} \omega(0) = c_1,$$

and combining its solutions

$$w(z) = ic_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|<1} \left(\frac{\omega(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\bar{\zeta}} \frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \right) d\xi d\eta,$$

$$\omega(z) = ic_1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|<1} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta}} \frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \right) d\xi d\eta,$$

formula (2) is obtained. Here the relations

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|<1} \left(\frac{1}{\zeta} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} - \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} \right) d\xi d\eta &= -z - \bar{z}, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\tilde{\zeta} + \zeta}{\tilde{\zeta} - \zeta} \frac{1}{\zeta} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} d\xi d\eta &= \frac{\tilde{\zeta} + z}{\tilde{\zeta} - z} (\overline{\tilde{\zeta} - z}), \\ \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{1 + \bar{\zeta}\tilde{\zeta}}{1 - \bar{\zeta}\tilde{\zeta}} \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} d\xi d\eta &= \tilde{\zeta} + z, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\tilde{\zeta} + \zeta}{\tilde{\zeta} - \zeta} \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} d\xi d\eta &= \frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} (\tilde{\zeta} - z), \\ \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{1 + \zeta\bar{\zeta}}{1 - \zeta\bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} d\xi d\eta &= \frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} (\overline{\tilde{\zeta} - z}) \end{aligned}$$

are used. The uniqueness of the solution follows from the unique solvability of the Schwarz problem for analytic functions, Theorem 6 and Theorem 9 in [3].

It is well known that the Dirichlet problem for the Poisson equation

$$w_{z\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D}, \quad w = \gamma \text{ on } \partial\mathbb{D}$$

is well posed, i.e. it is solvable for any $f \in L_1(\mathbb{D}; \mathbb{C}), \gamma \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{C})$ and the solution is unique. That the solution is unique is easily seen.

Lemma 1 *The Dirichlet problem for the Laplace equation*

$$w_{z\bar{z}} = 0 \text{ in } \mathbb{D}, \quad w = 0 \text{ on } \partial\mathbb{D}$$

is only trivially solvable.

Proof From the differential equation w_z is seen to be analytic. Integrating this quantity $w = \varphi + \bar{\psi}$ is seen where φ and ψ are both analytic in \mathbb{D} . Without loss of generality $\psi(0) = 0$ may be assumed. From the boundary condition $\varphi = -\bar{\psi}$ on $\partial\mathbb{D}$ follows. This Dirichlet problem is solvable if and only if, see [3], Theorem 7,

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \overline{\psi(\zeta)} \frac{\bar{z}d\zeta}{1 - \bar{z}\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \psi(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \psi(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \overline{\psi(z)}.$$

This also implies $\varphi = 0$ on \mathbb{D} so that $w = 0$ in \mathbb{D} .

As Bitsadze [6] has realized such a result is not true for the equation $w_{\bar{z}\bar{z}} = 0$.

Lemma 2 *The Dirichlet problem for the Bitsadze equation*

$$w_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \text{ in } \mathbb{D}, \quad w = 0 \text{ on } \partial\mathbb{D}$$

has infinitely many linearly independent solutions.

Proof Here $w_{\bar{z}}$ is an analytic function in \mathbb{D} . Integrating gives $w(z) = \varphi(z)\bar{z} + \psi(z)$ with some analytic functions in \mathbb{D} . On the boundary $\varphi(z) + z\psi(z) = 0$. As this is an analytic function this relations hold in \mathbb{D} too, see [3], Theorem 7. Hence, $w(z) = (1 - |z|^2)\psi(z)$ for arbitrary analytic ψ . In particular $w_k(z) = (1 - |z|^2)z^k$ is a solution of the Dirichlet problem for any $k \in \mathbb{N}_0$ and these solutions are linearly independent over \mathbb{C} .

Because of this result the Dirichlet problem as formulated above is ill-posed for the inhomogeneous Bitsadze equation.

With regard to the Dirichlet problem for the Poisson equation the representation formula [3], (15') is improper as is also [3], (15'''). The middle terms are improper. They can easily be eliminated by applying the Gauss Theorem, see [3]. For the respective term in [3], (15') in the case $D = \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \log |\zeta - z|^2 d\bar{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \log |1 - z\bar{\zeta}|^2 d\bar{\zeta} \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \partial_{\zeta} [w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \log |1 - z\bar{\zeta}|^2] d\xi d\eta \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} w_{\zeta\bar{\zeta}}(\zeta) \log |1 - z\bar{\zeta}|^2 d\xi d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}\zeta} d\xi d\eta \end{aligned}$$

follows. Applying the Gauss Theorem again shows

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}\zeta} d\xi d\eta = \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \partial_{\bar{\zeta}} \left[w(\zeta) \frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}\zeta} \right] d\xi d\eta \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} w(\zeta) \frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}\zeta} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} w(\zeta) \frac{\bar{z}}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta}. \end{aligned}$$

Thus inserting these in [3], (15') leads to the representation

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} w(\zeta) \left(\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} - 1 \right) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} w_{\zeta\bar{\zeta}}(\zeta) \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 d\xi d\eta. \quad (3)$$

The kernel function in the boundary integral is the Poisson kernel, the one in the area integral is called Green function for the unit disc with respect to the Laplace operator.

Definition 1 The function $G(z, \zeta) = (1/2)G_1(z, \zeta)$ with

$$G_1(z, \zeta) = \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2, \quad z, \zeta \in \mathbb{D}, \quad z \neq \zeta, \tag{4}$$

is called Green function of the Laplace operator for the unit disc.

Remark The Green function has the following properties. For any fixed $\zeta \in \mathbb{D}$ as a function of z

- (1) $G(z, \zeta)$ is harmonic in $\mathbb{D} \setminus \{\zeta\}$,
- (2) $G(z, \zeta) + \log |\zeta - z|$ is harmonic in \mathbb{D} ,
- (3) $\lim_{z \rightarrow t} G(z, \zeta) = 0$ for all $t \in \partial\mathbb{D}$,
- (4) $G(z, \zeta) = G(\zeta, z)$ for $z, \zeta \in \mathbb{D}, z \neq \zeta$.

They can be checked by direct calculations.

Green functions exist for other domains than just the unit disc. The existence is related to the solvability of the Dirichlet problem for harmonic functions in the domain. The Riemann mapping theorem can be used to find it e.g. for regular simply connected domains. Having the Green function [3], (15') and [3], (15''') can be altered as above leading to the Green representation formula, see e.g. [1]. Green functions exist also in higher dimensional spaces and for other strongly elliptic differential operators.

For the unit disc the following result is shown.

Theorem 3 Any $w \in C^2(\mathbb{D}; \mathbb{C}) \cap C^1(\bar{\mathbb{D}}; \mathbb{C})$ can be represented as

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} w(\zeta) \left(\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - z} - 1 \right) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} w_{\zeta\bar{\zeta}}(\zeta) G_1(z, \zeta) d\xi d\eta, \tag{3'}$$

where $G_1(z, \zeta)$ is defined in (4).

Formulas [3], (15') and [3], (15''') are both unsymmetric. Adding both gives some symmetric formula which is for the unit disc

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{4\pi i} \int_{|\zeta|=1} w(\zeta) \left(\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi i} \int_{|\zeta|=1} (\zeta w_{\zeta}(\zeta) + \bar{\zeta} w_{\bar{\zeta}}(\zeta)) \log |\zeta - z|^2 \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} w_{\zeta\bar{\zeta}}(\zeta) \log |\zeta - z|^2 d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{5}$$

Motivated by the procedure before, the Gauss Theorems are applied in a symmetric way to

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta| < 1} w_{\zeta\bar{\zeta}}(\zeta) \log |1 - z\bar{\zeta}|^2 d\xi d\eta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta| < 1} \left\{ \partial_{\zeta} [w_{\bar{\zeta}}(\zeta) \log |1 - z\bar{\zeta}|^2] + \partial_{\bar{\zeta}} [w_{\zeta}(\zeta) \log |1 - z\bar{\zeta}|^2] \right. \\
&\quad \left. + \partial_{\bar{\zeta}} \left[w(\zeta) \frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}\zeta} \right] + \partial_{\zeta} \left[w(\zeta) \frac{z}{1 - z\bar{\zeta}} \right] \right\} d\xi d\eta \\
&= \frac{1}{4\pi i} \int_{|\zeta|=1} \log |1 - z\bar{\zeta}|^2 [\zeta w_{\zeta}(\zeta) + \bar{\zeta} w_{\bar{\zeta}}(\zeta)] \frac{d\zeta}{\zeta} \\
&\quad + \frac{1}{4\pi i} \int_{|\zeta|=1} w(\zeta) \left[\frac{\bar{z}\zeta}{1 - \bar{z}\zeta} + \frac{z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \right] \frac{d\zeta}{\zeta} \\
&= \frac{1}{4\pi i} \int_{|\zeta|=1} \log |\zeta - z|^2 [\zeta w_{\zeta}(\zeta) + \bar{\zeta} w_{\bar{\zeta}}(\zeta)] \frac{d\zeta}{\zeta} \\
&\quad + \frac{1}{4\pi i} \int_{|\zeta|=1} w(\zeta) \left[\frac{z}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta} - z} \right] \frac{d\zeta}{\zeta} .
\end{aligned}$$

Here are two possibilities. At first the second term in (5) can be eliminated giving

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} w(\zeta) \left(\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - z} - 1 \right) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta| < 1} w_{\zeta\bar{\zeta}}(\zeta) \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 d\xi d\eta ,$$

i.e. (3). Next the first term in (5) is simplified so that

$$\begin{aligned}
w(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (\zeta w_{\zeta}(\zeta) + \bar{\zeta} w_{\bar{\zeta}}(\zeta)) \log |\zeta - z|^2 \frac{d\zeta}{\zeta} \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta| < 1} w_{\zeta\bar{\zeta}}(\zeta) \log |(\zeta - z)(1 - z\bar{\zeta})|^2 d\xi d\eta . \tag{6}
\end{aligned}$$

Here the normal derivative appears in the second term while a new kernel function arises in the area integral.

Definition 2 The function $N(z, \zeta) = -(1/2)N_1(z, \zeta)$ with

$$N_1(z, \zeta) = \log |(\zeta - z)(1 - z\bar{\zeta})|^2 , \quad z, \zeta \in \mathbb{D} , \quad z \neq \zeta , \tag{7}$$

is called Neumann function of the Laplace operator for the unit disc.

Remark The Neumann function, sometimes [7] also called Green function of second kind or second Green function, has the properties

- (1) $N(z, \zeta)$ is harmonic in $z \in \mathbb{D} \setminus \{\zeta\}$,
- (2) $N(z, \zeta) + \log |\zeta - z|$ is harmonic in $z \in \mathbb{D}$ for any $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$,
- (3) $\partial_\nu N(z, \zeta) = -1$ for $z \in \partial\mathbb{D}, \zeta \in \mathbb{D}$,
- (4) $N(z, \zeta) = N(\zeta, z)$ for $z, \zeta \in \mathbb{D}, z \neq \zeta$.
- (5) $\frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} N(z, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = 0$.

They can be checked by direct calculations.

The last result may therefore be formulated as follows.

Theorem 4 Any $w \in C^2(\mathbb{D}; \mathbb{C}) \cap C^1(\overline{\mathbb{D}}; \mathbb{C})$ can be represented as

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \partial_\nu w(\zeta) \log |\zeta - z|^2 \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} w_{\zeta\bar{\zeta}}(\zeta) N_1(z, \zeta) d\xi d\eta. \tag{6'}$$

This formula can also be written as

$$w(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_{|\zeta|=1} [w(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} N_1(z, \zeta) - \partial_\nu w(\zeta) N_1(z, \zeta)] \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} w_{\zeta\bar{\zeta}}(\zeta) N_1(z, \zeta) d\xi d\eta. \tag{6''}$$

Theorem 3 immediately provides the solution to the Dirichlet problem.

Theorem 5 The Dirichlet problem for the Poisson equation in the unit disc

$$w_{z\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D}, \quad w = \gamma \text{ on } \partial\mathbb{D},$$

for $f \in L_1(\mathbb{D}; \mathbb{C})$ and $\gamma \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{C})$ is uniquely given by

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \left(\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - z} - 1 \right) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) G_1(z, \zeta) d\xi d\eta. \tag{8}$$

This is at once clear from the properties of the Poisson kernel and the Green function.

As the Dirichlet problem formulated as for the Poisson equation is not uniquely solvable for the Bitsadze equation another kind Dirichlet problem is considered which is motivated from decomposing this Bitsadze equation in a first order system.

Theorem 6 *The Dirichlet problem for the inhomogeneous Bitsadze equation in the unit disc*

$$w_{\bar{z}\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D}, \quad w = \gamma_0, \quad w_{\bar{z}} = \gamma_1 \text{ on } \partial\mathbb{D},$$

for $f \in L_1(\mathbb{D}; \mathbb{C})$, $\gamma_0, \gamma_1 \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{C})$ is solvable if and only if for $|z| < 1$

$$\frac{\bar{z}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \left(\frac{\gamma_0(\zeta)}{1 - \bar{z}\zeta} - \frac{\gamma_1(\zeta)}{\zeta} \right) d\zeta + \frac{\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{\overline{\zeta - z}}{1 - \bar{z}\zeta} d\xi d\eta = 0 \quad (9)$$

and

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \frac{\bar{z}d\zeta}{1 - \bar{z}\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{\bar{z}d\xi d\eta}{1 - \bar{z}\zeta} = 0. \quad (10)$$

The solution then is

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z} d\xi d\eta. \quad (11)$$

Proof Decomposing the problem into the system

$$w_{\bar{z}} = \omega \text{ in } \mathbb{D}, \quad w = \gamma_0 \text{ on } \partial\mathbb{D},$$

$$\omega_{\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D}, \quad \omega = \gamma_1 \text{ on } \partial\mathbb{D},$$

and composing its solutions

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \omega(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z},$$

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z},$$

and the solvability conditions

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \frac{\bar{z}d\zeta}{1 - \bar{z}\zeta} = \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \omega(\zeta) \frac{\bar{z}d\xi d\eta}{1 - \bar{z}\zeta},$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \frac{\bar{z}d\zeta}{1 - \bar{z}\zeta} = \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{\bar{z}d\xi d\eta}{1 - \bar{z}\zeta},$$

proves (11) together with (9) and (10). Here

$$\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{d\xi d\eta}{(\tilde{\zeta} - \zeta)(1 - \bar{z}\zeta)} = \frac{\overline{\tilde{\zeta} - z}}{1 - \bar{z}\tilde{\zeta}} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\overline{\tilde{\zeta} - z}}{1 - \bar{z}\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta - \tilde{\zeta}} = \frac{\overline{\tilde{\zeta} - z}}{1 - \bar{z}\tilde{\zeta}}$$

and

$$-\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{d\xi d\eta}{(\zeta - \tilde{\zeta})(\zeta - z)} = -\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{1}{\tilde{\zeta} - z} \left(\frac{1}{\zeta - \tilde{\zeta}} - \frac{1}{\zeta - z} \right) d\xi d\eta = \frac{\overline{\tilde{\zeta} - z}}{\tilde{\zeta} - z}$$

are used.

This problem can also be considered for the Poisson equation.

Theorem 7 *The boundary value problem for the Poisson equation in the unit disc*

$$w_{z\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D}, \quad w = \gamma_0, \quad w_z = \gamma_1 \text{ on } \partial\mathbb{D},$$

for $f \in L_1(\mathbb{D}; \mathbb{C})$, $\gamma_0, \gamma_1 \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{C})$ is uniquely solvable if and only if

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \frac{z d\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \log(1 - z\bar{\zeta}) d\zeta \\ & = \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \log(1 - z\bar{\zeta}) d\xi d\eta \end{aligned} \tag{12}$$

and

$$\frac{\bar{z}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \frac{d\zeta}{1 - \bar{z}\zeta} = \frac{\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{1 - \bar{z}\zeta}. \tag{13}$$

The solution then is

$$\begin{aligned} w(z) & = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \frac{d\bar{\zeta}}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \log(1 - z\bar{\zeta}) d\zeta \\ & \quad + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) (\log|\zeta - z|^2 - \log(1 - \bar{z}\zeta)) d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{14}$$

Proof The system

$$w_z = \omega, \quad \omega_{\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D}, \quad w = \gamma_0, \quad \omega = \gamma_1 \text{ on } \partial\mathbb{D}$$

is uniquely solvable according to Theorem 10 if and only if

$$\begin{aligned} -\frac{z}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \frac{d\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} &= \frac{z}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \omega(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{1-z\bar{\zeta}}, \\ \frac{\bar{z}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \frac{d\zeta}{1-\bar{z}\zeta} &= \frac{\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{1-\bar{z}\zeta}. \end{aligned}$$

The solution then is

$$\begin{aligned} w(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \frac{d\bar{\zeta}}{\zeta-z} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \omega(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}, \\ \omega(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta-z} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}. \end{aligned}$$

Inserting ω into the first condition gives (12) for

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \omega(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{1-z\bar{\zeta}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tilde{\zeta}|=1} \gamma_1(\tilde{\zeta}) \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{d\xi d\eta}{(\tilde{\zeta}-\zeta)(1-z\bar{\zeta})} d\tilde{\zeta} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{|\tilde{\zeta}|<1} f(\tilde{\zeta}) \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{d\xi d\eta}{(\tilde{\zeta}-\zeta)(1-z\bar{\zeta})} d\tilde{\zeta} d\tilde{\eta} \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{z d\xi d\eta}{(\zeta-\tilde{\zeta})(1-z\bar{\zeta})} &= -\log(1-z\bar{\zeta}) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \log(1-z\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta-\tilde{\zeta}} \\ &= -\log(1-z\bar{\zeta}) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\log(1-z\bar{\zeta}) d\bar{\zeta}}{1-\tilde{\zeta}\bar{\zeta}} \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}} \\ &= -\log(1-z\bar{\zeta}). \end{aligned}$$

Combining the two integral representations for w and ω leads to (13) as

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \omega(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta-z} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\tilde{\zeta}|=1} \gamma_1(\tilde{\zeta}) \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{d\xi d\eta}{(\tilde{\zeta}-\zeta)(\zeta-z)} d\tilde{\zeta} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{|\tilde{\zeta}|<1} f(\tilde{\zeta}) \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{d\xi d\eta}{(\tilde{\zeta}-\zeta)(\zeta-z)} d\tilde{\zeta} d\tilde{\eta} \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{d\xi d\eta}{(\bar{\zeta}-z)(\zeta-\tilde{\zeta})} &= \log |\tilde{\zeta}-z|^2 - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \log |\zeta-z|^2 \frac{d\zeta}{\zeta-\tilde{\zeta}} \\ &= \log |\tilde{\zeta}-z|^2 - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \log(1-\bar{z}\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta-\tilde{\zeta}} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \log(1-z\bar{\zeta}) \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}(1-\tilde{\zeta}\bar{\zeta})} \\ &= \log |\zeta-z|^2 - \log(1-\bar{z}\tilde{\zeta}) . \end{aligned}$$

Remark In a similar way the problem

$$w_{z\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D} , w = \gamma_0 , w_{\bar{z}} = \gamma_1 \text{ on } \partial\mathbb{D}$$

with $f \in L_1(\mathbb{D}; \mathbb{C})$, $\gamma_0, \gamma_1 \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{C})$ can be solved.

That integral representations may not always be used to solve related boundary value problems as was done in the case of the Dirichlet problem with formula (3), can be seen from (6'). If w is a solution to the Poisson equation $w_{z\bar{z}} = f$ in \mathbb{D} satisfying $\partial_\nu w = \gamma$ on $\partial\mathbb{D}$ and being normalized by

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = c$$

for proper f and γ then on the basis of Theorem 16 it may be presented as

$$\begin{aligned} w(z) &= c - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \log |\zeta-z|^2 \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \log |(\zeta-z)(1-z\bar{\zeta})|^2 d\xi d\eta . \end{aligned} \tag{15}$$

But this formula although providing always a solution to $w_{z\bar{z}} = f$ does not for all γ satisfy the respective boundary behaviour. Such a behaviour is also known from the Cauchy integral.

Theorem 8 *The Neumann problem for the Poisson equation in the unit disc*

$$w_{z\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D} , \partial_\nu w = \gamma \text{ on } \partial\mathbb{D} , \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = c ,$$

for $f \in L_1(\mathbb{D}; \mathbb{C})$, $\gamma \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{C})$, $c \in \mathbb{C}$ is solvable if and only if

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{2}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) d\xi d\eta . \tag{16}$$

The unique solution is then given by (15).

Proof As the Neumann function is a fundamental solution to the Laplace operator and the boundary integral is a harmonic function, (15) provides a solution to the Poisson equation. For checking the boundary behaviour the first order derivatives have to be considered. They are

$$w_z(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{(\zeta-z)\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta-z} + \frac{\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} \right) d\xi d\eta,$$

$$w_{\bar{z}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{(\zeta-z)\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta-z} + \frac{\zeta}{1-\bar{z}\zeta} \right) d\xi d\eta,$$

so that

$$\begin{aligned} \partial_\nu w(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \left(\frac{\zeta}{\zeta-z} + \frac{\bar{z}}{\zeta-z} - 1 \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \left[\frac{z}{\zeta-z} + \frac{\bar{z}}{\zeta-z} + \frac{z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} + \frac{\bar{z}\zeta}{1-\bar{z}\zeta} \right] d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \left(\frac{\zeta}{\zeta-z} + \frac{\bar{\zeta}}{\zeta-z} - 2 \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \left[2 - \frac{z}{\zeta-z} - \frac{\bar{z}}{\zeta-z} - \frac{1}{1-z\bar{\zeta}} - \frac{1}{1-\bar{z}\zeta} \right] d\xi d\eta. \end{aligned}$$

For $|z|=1$ this is using the property of the Poisson kernel

$$\partial_\nu w(z) = \gamma(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{2}{\pi} \int_{|\zeta|=1} f(\zeta) d\xi d\eta.$$

Therefore $\partial_\nu w = \gamma$ on $|z|=1$ if and only if condition (16) holds. At last the normalization condition has to be verified. It follows from $|\zeta-z|=|1-z\bar{\zeta}|$ for $|z|=1$ and

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \log|1-z\bar{\zeta}|^2 \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \log(1-z\bar{\zeta}) \frac{dz}{z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \log(1-\bar{z}\zeta) \frac{d\bar{z}}{\bar{z}} = 0.$$

Theorem 9 *The Dirichlet-Neumann problem for the inhomogeneous Bitsadze equation in the unit disc*

$$w_{\bar{z}\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D}, \quad w = \gamma_0, \quad \partial_\nu w_{\bar{z}} = \gamma_1 \text{ on } \partial\mathbb{D}, \quad w_{\bar{z}}(0) = c,$$

for $f \in L_1(\mathbb{D}; \mathbb{C}) \cap C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{C})$, $\gamma_0, \gamma_1 \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{C})$, $c \in \mathbb{C}$ is solvable if and only if for $z \in \mathbb{D}$

$$c - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \frac{d\zeta}{1 - \bar{z}\zeta} + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{1 - |\zeta|^2}{\zeta(1 - \bar{z}\zeta)} d\xi d\eta = 0 \tag{17}$$

and

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (\gamma_1(\zeta) - \bar{\zeta}f(\zeta)) \frac{d\zeta}{\zeta(1 - \bar{z}\zeta)} + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\bar{z}f(\zeta)}{(1 - \bar{z}\zeta)^2} d\xi d\eta = 0 . \tag{18}$$

The solution then is

$$\begin{aligned} w(z) = & c\bar{z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (\gamma_1(\zeta) - \bar{\zeta}f(\zeta)) \frac{1 - |z|^2}{z} \log(1 - z\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{\zeta(\zeta - z)} d\xi d\eta . \end{aligned} \tag{19}$$

Proof The problem is equivalent to the system

$$w_{\bar{z}} = \omega \text{ in } \mathbb{D} , w = \gamma_0 \text{ on } \partial\mathbb{D} ,$$

$$\omega_{\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D} , \partial_\nu \omega = \gamma_1 \text{ on } \partial\mathbb{D} , \omega(0) = c .$$

The solvability conditions are

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \frac{d\zeta}{1 - \bar{z}\zeta} = \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \omega(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{1 - \bar{z}\zeta}$$

and

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (\gamma_1(\zeta) - \bar{\zeta}f(\zeta)) \frac{d\zeta}{1 - \bar{z}\zeta} + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\bar{z}f(\zeta)}{(1 - \bar{z}\zeta)^2} d\xi d\eta = 0$$

and the unique solutions

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \omega(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

and

$$\omega(z) = c - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (\gamma(\zeta) - \bar{\zeta}f(\zeta)) \log(1 - z\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{zf(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)} d\xi d\eta$$

according to [3], Theorems 10 and 11.

From

$$\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{d\xi d\eta}{1 - \bar{z}\zeta} = 1, \quad \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \log(1 - \zeta\bar{\zeta}) \frac{d\xi d\eta}{1 - \bar{z}\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \log(1 - \zeta\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{(1 - \bar{z}\zeta)\zeta} = 0,$$

and

$$\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\zeta}{\tilde{\zeta} - \zeta} \frac{d\xi d\eta}{1 - \bar{z}\zeta} = \frac{|\tilde{\zeta}|^2 - 1}{\tilde{\zeta}(1 - \bar{z}\tilde{\zeta})}$$

condition (17) follows. Similarly (19) follows from

$$-\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} = \bar{z}, \quad \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \log(1 - \zeta\bar{\zeta}) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} = \frac{1 - |z|^2}{z} \log(1 - z\bar{\zeta})$$

and

$$\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\zeta}{(\tilde{\zeta} - \zeta)(\zeta - z)} \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} = \frac{|\tilde{\zeta}|^2 - |z|^2}{(\tilde{\zeta} - z)}.$$

Theorem 10 *The boundary value problem for the inhomogeneous Bitsadze equation in the unit disc*

$$w_{\bar{z}\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D}, \quad w = \gamma_0, \quad zw_{z\bar{z}} = \gamma_1 \text{ on } \partial\mathbb{D}, \quad w_{\bar{z}}(0) = c,$$

is solvable for $f \in L_1(\mathbb{D}; \mathbb{C}), \gamma_0, \gamma_1 \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{C}), c \in \mathbb{C}$ if and only if for $z \in \mathbb{D}$ condition (17) together with

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta(1 - \bar{z}\zeta)} + \frac{\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{(1 - \bar{z}\zeta)^2} = 0 \tag{20}$$

holds. The solution then is uniquely given by

$$\begin{aligned} w(z) &= c\bar{z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \frac{1 - |z|^2}{z} \log(1 - z\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{\zeta(\zeta - z)} d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{21}$$

The proof is as the last one but [3], Theorem 12 is involved rather than [3], Theorem 11.

Theorem 11 *The Neumann problem for the inhomogeneous Bitsadze equation in the unit disc*

$$w_{\bar{z}\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D}, \partial_\nu w = \gamma_0, \partial_\nu w_{\bar{z}} = \gamma_1 \text{ on } \partial\mathbb{D}, w(0) = c_0, w_{\bar{z}}(0) = c_1$$

is uniquely solvable for $f \in C^\alpha(\mathbb{D}; \mathbb{C}), 0 < \alpha < 1, \gamma_0, \gamma_1 \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{C}), c_0, c_1 \in \mathbb{C}$ if and only if for $z \in \partial\mathbb{D}$

$$c_1\bar{z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (\gamma_1(\zeta) - \bar{\zeta}f(\zeta))(1 - \bar{z}\zeta \log(1 - z\bar{\zeta}))d\bar{\zeta} + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \left(\frac{\bar{z}\zeta(\bar{\zeta}-z)}{(1-\bar{z}\zeta)^2} - \frac{1}{\zeta-z} \right) d\xi d\eta = 0 \tag{22}$$

and

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (\gamma_1(\zeta) - \bar{\zeta}f(\zeta)) \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}-z} - \frac{\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{(1-\bar{z}\zeta)^2} = 0. \tag{23}$$

The solution then is given as

$$w(z) = c_0 + c_1\bar{z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \log(1 - z\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (\gamma_1(\zeta) - \bar{\zeta}f(\zeta))(\bar{\zeta}-z) \log(1 - z\bar{\zeta}) \frac{d\bar{\zeta}}{\zeta} + \frac{z}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{\bar{\zeta}-z}{\zeta-z} d\xi d\eta. \tag{24}$$

Proof From applying [3], Theorem 11

$$w(z) = c_0 - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (\gamma_0(\zeta) - \bar{\zeta}\omega(\zeta)) \log(1 - z\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{z}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \omega(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta(\zeta-z)},$$

$$\omega(z) = c_1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (\gamma_1(\zeta) - \bar{\zeta}f(\zeta)) \log(1 - z\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{z}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta(\zeta-z)},$$

if and only if

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (\gamma_0(\zeta) - \bar{\zeta}\omega(\zeta)) \frac{d\zeta}{\zeta(1-\bar{z}\zeta)} + \frac{\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\omega(\zeta)}{(1-\bar{z}\zeta)^2} d\xi d\eta = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (\gamma_1(\zeta) - \bar{\zeta}f(\zeta)) \frac{d\zeta}{\zeta(1-\bar{z}\zeta)} + \frac{\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{(1-\bar{z}\zeta)^2} d\xi d\eta = 0.$$

Inserting ω into the first condition leads to (22) on the basis of

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \omega(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta^2(1-\bar{z}\zeta)} \\ &= c_1 \bar{z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tilde{\zeta}|=1} (\gamma_1(\tilde{\zeta}) - \bar{\tilde{\zeta}}f(\tilde{\zeta})) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\log(1-\zeta\bar{\tilde{\zeta}})}{1-\bar{z}\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta^2} \frac{d\tilde{\zeta}}{\tilde{\zeta}} \\ & \quad - \frac{1}{\pi} \int_{|\tilde{\zeta}|<1} \frac{f(\tilde{\zeta})}{\tilde{\zeta}} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{(\tilde{\zeta}-\zeta)\zeta(1-\bar{z}\zeta)} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \\ &= c_1 \bar{z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (\gamma_1(\zeta) - \bar{\zeta}f(\zeta)) \bar{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{\zeta(1-\bar{z}\zeta)} d\xi d\eta \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \frac{\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\omega(\zeta)}{(1-\bar{z}\zeta)^2} d\xi d\eta &= \frac{\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \partial_{\bar{\zeta}} \frac{(\bar{\zeta}-z)\omega(\zeta)}{(1-\bar{z}\zeta)^2} d\xi d\eta - \frac{\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\bar{\zeta}-z}{(1-\bar{z}\zeta)^2} f(\zeta) d\xi d\eta \\ &= \frac{\bar{z}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\bar{\zeta}-z}{(1-\bar{z}\zeta)^2} \omega(\zeta) d\zeta - \frac{\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\bar{\zeta}-z}{(1-\bar{z}\zeta)^2} f(\zeta) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

where for $|z|=1$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{z}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\bar{\zeta}-z}{(1-\bar{z}\zeta)^2} \omega(\zeta) d\zeta &= \frac{z}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\bar{\zeta}-z}{(\zeta-z)^2} \omega(\zeta) d\zeta \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta-z} \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tilde{\zeta}|=1} (\gamma_1(\tilde{\zeta}) - \bar{\tilde{\zeta}}f(\tilde{\zeta})) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\log(1-\zeta\bar{\tilde{\zeta}})}{\zeta(\zeta-z)} d\zeta \frac{d\tilde{\zeta}}{\tilde{\zeta}} \\ & \quad - \frac{1}{\pi} \int_{|\tilde{\zeta}|<1} \frac{f(\tilde{\zeta})}{\tilde{\zeta}} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{(\tilde{\zeta}-\zeta)(\zeta-z)} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (\gamma_1(\zeta) - \bar{\zeta}f(\zeta)) \frac{1}{z} \log(1 - z\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (\gamma_1(\zeta) - \bar{\zeta}f(\zeta)) \bar{z} \log(1 - z\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta}.
 \end{aligned}$$

From $\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \log(1 - z\bar{\zeta}) d\bar{\zeta} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \overline{\log(1 - \bar{z}\zeta)} d\zeta = 0$,

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \log(1 - \zeta\bar{\zeta}) \log(1 - z\bar{\zeta}) d\bar{\zeta} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \overline{\log(1 - \bar{\zeta}\zeta)} \log(1 - \bar{z}\zeta) d\zeta \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\bar{\zeta}^k}{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \overline{\log(1 - \bar{z}\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta^2} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\bar{\zeta}^k}{k!} \overline{\partial_{\zeta}^{k-1} \log(1 - \bar{z}\zeta)} \Big|_{\zeta=0} \\
 &= -\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\bar{\zeta}^k z^{k-1}}{(k-1)k} \\
 &= \bar{\zeta} \log(1 - z\bar{\zeta}) - \frac{1}{z} (\log(1 - z\bar{\zeta}) + z\bar{\zeta}) = -\frac{1 - z\bar{\zeta}}{z} \log(1 - z\bar{\zeta}) - \bar{\zeta},
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta \log(1 - z\bar{\zeta})}{\bar{\zeta} - \zeta} d\bar{\zeta} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\log(1 - z\bar{\zeta})}{1 - \bar{\zeta}\zeta} d\bar{\zeta} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\log 1 - \bar{z}\zeta}{1 - \bar{\zeta}\zeta} d\zeta = 0
 \end{aligned}$$

the relation

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \omega(\zeta) \log(1 - z\bar{\zeta}) d\bar{\zeta} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (\gamma_1(\zeta) - \bar{\zeta}f(\zeta)) \left(\frac{1 - z\bar{\zeta}}{z} \log(1 - z\bar{\zeta}) + \bar{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \tag{25}
 \end{aligned}$$

follows. Similarly from

$$\begin{aligned}
\frac{z}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{d\xi d\eta}{\zeta(\zeta-z)} &= \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{d\xi d\eta}{\zeta-z} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{d\xi d\eta}{\zeta} = -\bar{z}, \\
\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\log(1-\zeta\bar{\zeta})}{\zeta-z} d\xi d\eta &= (\bar{\zeta}-z) \log(1-z\bar{\zeta}) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (\bar{\zeta}-\zeta) \log(1-\zeta\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta-z} \\
&= (\bar{\zeta}-z) \log(1-z\bar{\zeta}) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (1-\zeta\bar{\zeta}) \log(1-\zeta\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-z)} \\
&= (\bar{\zeta}-z) \log(1-z\bar{\zeta}) + \frac{1-z\bar{\zeta}}{z} \log(1-z\bar{\zeta}) = \frac{1-|z|^2}{z} \log(1-z\bar{\zeta}), \\
\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \log(1-\zeta\bar{\zeta}) \frac{d\xi d\eta}{\zeta} &= \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \partial_{\bar{\zeta}} \frac{\bar{\zeta}}{\zeta} \log(1-\zeta\bar{\zeta}) d\xi d\eta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \log(1-\zeta\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta^2} = -\bar{\zeta},
\end{aligned}$$

and

$$\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{d\xi d\eta}{(\zeta-\bar{\zeta})(\zeta-z)} = \frac{1}{\pi(\bar{\zeta}-z)} \int_{|\zeta|<1} \left(\frac{1}{\zeta-\bar{\zeta}} - \frac{1}{\zeta-z} \right) d\xi d\eta = -\frac{\bar{\zeta}-z}{\bar{\zeta}-z}$$

it follows

$$\begin{aligned}
\frac{z}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \omega(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta(\zeta-z)} &= -c_1 \bar{z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (\gamma_1(\zeta) - \bar{\zeta} f(\zeta)) \left(\frac{1-|z|^2}{z} \log(1-z\bar{\zeta}) + \bar{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \\
&\quad - \frac{z}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{\bar{\zeta}-z}{\zeta-z} d\xi d\eta. \tag{26}
\end{aligned}$$

From (25) and (26) the representation (24) follows.

Theorem 12 *The boundary value problem for the inhomogeneous Bitsadze equation in the unit disc*

$$w_{\bar{z}\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D}, \quad zw_z = \gamma_0, \quad zw_{z\bar{z}} = \gamma_1 \text{ on } \partial\mathbb{D}, \quad w(0) = c_0, \quad w_{\bar{z}}(0) = c_1,$$

for $f \in L_1(\mathbb{D}; \mathbb{C}), \gamma_0, \gamma_1 \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{C}), c_0, c_1 \in \mathbb{C}$ is uniquely solvable if and only if for $|z|=1$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \frac{d\zeta}{(1-z\bar{\zeta})\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \frac{1}{z} \log(1-z\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{\bar{\zeta}-z}{(1-\bar{z}\zeta)^2} d\xi d\eta, \end{aligned} \tag{27}$$

and

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \frac{d\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)\zeta} + \frac{\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{(1-\bar{z}\zeta)^2} = 0. \tag{28}$$

The solution then is

$$\begin{aligned} w(z) &= c_0 + c_1\bar{z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \log(1-z\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \left(\frac{1-|z|^2}{z} \log(1-z\bar{\zeta}) + \bar{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &+ \frac{z}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{\bar{\zeta}-z}{\zeta-z} d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{29}$$

Proof The system

$$w_{\bar{z}} = \omega \text{ in } \mathbb{D}, \quad zw_z = \gamma_0 \text{ on } \partial\mathbb{D}, \quad w(0) = c_0,$$

$$w_{\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D}, \quad zw_z = \gamma_1 \text{ on } \partial\mathbb{D}, \quad \omega(0) = c_1,$$

is uniquely solvable if and only if

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \frac{d\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)\zeta} + \frac{\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \omega(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{(1-\bar{z}\zeta)^2} = 0$$

and

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \frac{d\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)\zeta} + \frac{\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|=1} \omega(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{(1-\bar{z}\zeta)^2} = 0.$$

The solution then is

$$w(z) = c_0 - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \log(1 - z\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{z}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \omega(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta(\zeta - z)},$$

$$\omega(z) = c_1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \log(1 - z\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{z}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta(\zeta - z)}.$$

Inserting the expression for ω into the first condition gives (27) because as in the preceding proof on $|z|=1$

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\omega(\zeta)}{(1 - \bar{z}\zeta)^2} d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \frac{1}{z} \log(1 - z\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{\bar{z}}{\pi} \int \frac{\bar{\zeta} - z}{(1 - \bar{z}\zeta)^2} f(\zeta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Also from

$$\begin{aligned} \frac{z}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \omega(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta(\zeta - z)} &= -c_1 \bar{z} \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \left(\frac{1 - |z|^2}{z} \log(1 - z\bar{\zeta}) + \bar{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &- \frac{z}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{\bar{\zeta} - z}{\zeta - z} d\xi d\eta \end{aligned}$$

formula (29) follows.

Boundary value problems as in Theorem 12 can also be solved for the Poisson equation. One case is considered in the next theorem.

Theorem 13 *The boundary value problem for the Poisson equation in the unit disc*

$$w_{z\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D}, \quad \bar{z}w_{\bar{z}} = \gamma_0, \quad zw_{zz} = \gamma_1 \text{ on } \partial\mathbb{D}, \quad w(0) = c_0, \quad w_z(0) = c_1$$

are uniquely solvable for $f \in L_1(\mathbb{D}; \mathbb{C})$, $\gamma_0, \gamma_1 \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{C})$, $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$ if and only if

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \frac{d\zeta}{(1 - z\bar{\zeta})\zeta} = \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \left(\frac{1}{1 - z\bar{\zeta}} + \frac{1}{1 - \bar{z}\zeta} - 1 \right) d\xi d\eta \quad (30)$$

and

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \frac{d\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)\zeta} + \frac{\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{(1-\bar{z}\zeta)^2} = 0. \tag{31}$$

The solution then is

$$\begin{aligned} w(z) = & c_0 + c_1 z - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \log(1-\bar{z}\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \left(\frac{1-z\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}} \log(1-z\bar{\zeta}) + z \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \left(\frac{z}{\zeta} + \log|\zeta-z|^2 - \log(1-\bar{z}\zeta) - \log|\zeta|^2 \right) d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{32}$$

Proof The problem is equivalent to the system

$$w_z = \omega \text{ in } \mathbb{D}, \quad \bar{z}w_{\bar{z}} = \gamma_0 \text{ on } \partial\mathbb{D}, \quad w(0) = c_0,$$

$$\omega_{\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D}, \quad z\omega = \gamma_1 \text{ on } \partial\mathbb{D}, \quad \omega(0) = c_1.$$

It is solvable if and only if

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \frac{d\zeta}{(1-z\bar{\zeta})\zeta} + \frac{z}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \omega(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{(1-z\bar{\zeta})^2} = 0$$

and

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \frac{d\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)\zeta} + \frac{\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{(1-\bar{z}\zeta)^2} = 0$$

and the solutions are according to [3], Theorem 12

$$w(z) = c_0 - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \log(1-\bar{z}\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \omega(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta(\bar{\zeta}-z)},$$

$$\omega(z) = c_1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \log(1-z\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{z}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta(\zeta-z)}.$$

For the first problem [3], Theorem 12 is applied to \bar{w} and the formulas then complex conjugated. For (30)

$$\begin{aligned}
\frac{z}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \omega(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{(1-z\bar{\zeta})^2} &= \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \left[\partial_{\bar{\zeta}} \left[\frac{\omega(\zeta)}{1-z\bar{\zeta}} \right] - \frac{f(\zeta)}{1-z\bar{\zeta}} \right] d\xi d\eta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\omega(\zeta)}{1-z\bar{\zeta}} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{1-z\bar{\zeta}} d\xi d\eta
\end{aligned}$$

has to be evaluated. For $|z|=1$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\omega(\zeta)}{1-z\bar{\zeta}} d\zeta &= -\frac{\bar{z}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta \omega(\zeta)}{1-\bar{z}\zeta} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tilde{\zeta}|=1} \gamma_1(\tilde{\zeta}) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \log(1-\zeta\bar{\tilde{\zeta}}) \frac{\bar{z}\zeta}{1-\bar{z}\zeta} d\zeta \frac{d\tilde{\zeta}}{\tilde{\zeta}} \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_{|\tilde{\zeta}|<1} \frac{f(\tilde{\zeta})}{\tilde{\zeta}} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta}{\tilde{\zeta}-\zeta} \frac{\bar{z}\zeta}{1-\bar{z}\zeta} d\zeta d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{\bar{z}\zeta}{1-\bar{z}\zeta} d\xi d\eta
\end{aligned}$$

so that

$$\frac{z}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \omega(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{(1-z\bar{\zeta})^2} = -\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \left(\frac{\bar{z}\zeta}{1-\bar{z}\zeta} + \frac{1}{1-z\bar{\zeta}} \right) d\xi d\eta .$$

For (32)

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \omega(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta-z} &= c_1 z \\
+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tilde{\zeta}|=1} \frac{\gamma_1(\tilde{\zeta})}{\tilde{\zeta}} \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \log(1-\zeta\bar{\tilde{\zeta}}) \frac{d\xi d\eta}{\zeta-z} d\tilde{\zeta} \\
+ \frac{1}{\pi} \int_{|\tilde{\zeta}|<1} \frac{f(\tilde{\zeta})}{\tilde{\zeta}} \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\zeta}{\tilde{\zeta}-\zeta} \frac{d\xi d\eta}{\zeta-z} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}
\end{aligned}$$

needs some modification. From

$$\begin{aligned} \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}} (\log(1 - z\bar{\zeta}) - 1) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{1 - \zeta\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}} (\log(1 - \zeta\bar{\zeta}) - 1) \frac{d\bar{\zeta}}{\zeta - z} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \log(1 - \zeta\bar{\zeta}) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{1 - \zeta\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}} (\log(1 - \zeta\bar{\zeta}) - 1) \frac{d\zeta}{\zeta(1 - \bar{z}\zeta)} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \log(1 - \zeta\bar{\zeta}) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \\ &= -\frac{1}{\bar{\zeta}} + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \log(1 - \zeta\bar{\zeta}) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \end{aligned}$$

from which also

$$\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \log(1 - \zeta\bar{\zeta}) \frac{d\xi d\eta}{\zeta} = 0$$

follows, and

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{1}{\zeta - \tilde{\zeta}} \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} &= \log |\tilde{\zeta} - z|^2 - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \log |\zeta - z|^2 \frac{d\zeta}{\zeta - \tilde{\zeta}} \\ &= \log |\tilde{\zeta} - z|^2 + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \log(1 - z\bar{\zeta}) \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}(1 - \tilde{\zeta}\bar{\zeta})} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \log(1 - \bar{z}\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - \tilde{\zeta}} \\ &= -\log |\tilde{\zeta} - z|^2 - \log(1 - \bar{z}\tilde{\zeta}) \end{aligned}$$

from what

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\zeta}{\zeta - \tilde{\zeta}} \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} &= -\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \left(1 + \frac{\tilde{\zeta}}{\zeta - \tilde{\zeta}}\right) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \\ &= z + \tilde{\zeta}(\log |\tilde{\zeta} - z|^2 - \log(1 - \bar{z}\tilde{\zeta})) \end{aligned}$$

and

$$-\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\zeta}{\zeta - \bar{\zeta}} \frac{d\xi d\eta}{\bar{\zeta}} = \bar{\zeta} \log |\bar{\zeta}|^2$$

is seen,

$$\begin{aligned} -\frac{\bar{z}}{\pi} \int_{|\bar{\zeta}|<1} \omega(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\bar{\zeta}(\bar{\zeta} - z)} &= c_1 z + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \left(\frac{1 - z\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}} \log(1 - z\bar{\zeta}) + z \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \left(\frac{z}{\zeta} + \log |\zeta - z|^2 - \log(1 - \bar{z}\zeta) - \log |\zeta|^2 \right) d\xi d\eta \end{aligned}$$

follows.

Remark Instead of this constructive way the proof can be given by verification. From (32)

$$\bar{z}w_{\bar{z}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta) \frac{\bar{z}\zeta}{1 - \bar{z}\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{\zeta}{1 - \bar{z}\zeta} \right) d\xi d\eta.$$

This obviously coincides with γ_0 on $\partial\mathbb{D}$ if and only if (31) is satisfied. Similarly from

$$\begin{aligned} w_z(z) &= c_1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \log(1 - z\bar{\zeta}) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} \right) d\xi d\eta, \\ zw_{zz}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta) \frac{z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{z}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta \end{aligned}$$

it is seen that zw_{zz} coincides with γ_1 on $\partial\mathbb{D}$ if and only if (31) holds. The other two conditions are obviously satisfied.

2 The inhomogeneous polyanalytic equation

As second order equations of special type were treated in the preceding section model equations of third, fourth, fifth etc. order can be investigated. From the material presented it is clear how to proceed and what kind of boundary conditions can be posed. However, there is a variety of boundary conditions possible. All kind of combinations of the three kinds, Schwarz, Dirichlet, Neumann conditions can be posed. And there are even others e.g. boundary conditions of mixed type which are not investigated here.

As simple examples the Schwarz problem will be studied for the inhomogeneous

polyanalytic equation. Another possibility is the Neumann problem for the inhomogeneous polyharmonic equation, see [4, 5], and the Dirichlet problem, see [2].

Lemma 3 For $|z| < 1, |\tilde{\zeta}| < 1$ and $k \in \mathbb{N}_0$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta| < 1} \left(\frac{1}{\zeta} \frac{\zeta + \tilde{\zeta}}{\zeta - \tilde{\zeta}} - \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{1 + \tilde{\zeta}\bar{\zeta}}{1 - \tilde{\zeta}\bar{\zeta}} \right) (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^k d\xi d\eta = \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} (z + \bar{z})^{k+1} \tag{33}$$

Proof The function $w(\tilde{\zeta}) = i(\tilde{\zeta} - z + \overline{\tilde{\zeta} - z})^{k+1}/(k+1)$ satisfies the Schwarz condition

$$w_{\tilde{\zeta}}(\tilde{\zeta}) = i(\tilde{\zeta} - z + \overline{\tilde{\zeta} - z})^k \text{ in } \mathbb{D}, \text{ Re } w(\tilde{\zeta}) = 0 \text{ on } \partial\mathbb{D}, \text{ Im } w(0) = \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} (z + \bar{z})^{k+1},$$

so that according to [3], (33)

$$w(\tilde{\zeta}) = i \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} (z + \bar{z})^{k+1} - \frac{i}{2\pi} \int_{|\zeta| < 1} \left(\frac{1}{\zeta} \frac{\zeta + \tilde{\zeta}}{\zeta - \tilde{\zeta}} - \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{1 + \tilde{\zeta}\bar{\zeta}}{1 - \tilde{\zeta}\bar{\zeta}} \right) (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^k d\xi d\eta.$$

This is (33).

Corollary 1 For $|z| < 1$ and $k \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta| < 1} \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\bar{\zeta}} \right) (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^k d\xi d\eta = 0 \tag{34}$$

and

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta| < 1} \left(\frac{1}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} - \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \right) (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^k d\xi d\eta = \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} (z + \bar{z})^{k+1}. \tag{35}$$

Proof (34) and (35) are particular cases of (33) for $\tilde{\zeta} = 0$ and $\tilde{\zeta} = z$, respectively.

Theorem 14 The Schwarz problem for the inhomogeneous polyanalytic equation in the unit disc

$$\partial_{\bar{z}}^n w = f \text{ in } \mathbb{D}, \text{ Re } \partial_{\bar{z}}^\nu w = \gamma_\nu \text{ on } \partial\mathbb{D}, \text{ Im } \partial_{\bar{z}}^\nu w(0) = 0, 0 \leq \nu \leq n - 1,$$

is uniquely solvable for $f \in L_1(\mathbb{D}; \mathbb{C}), \gamma_\nu \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{R}), c_\nu \in \mathbb{R}, 0 \leq \nu \leq n - 1$.

The solution is

$$w(z) = i \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{c_\nu}{\nu!} (z + \bar{z})^\nu + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(-1)^\nu}{2\pi i \nu!} \int_{|\zeta|=1} \gamma_\nu(\zeta) \frac{\zeta+z}{\zeta-z} (\zeta-z + \overline{\zeta-z})^\nu \frac{d\zeta}{\zeta} \\ + \frac{(-1)^n}{2\pi(n-1)!} \int_{|\zeta|<1} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta}} \frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} \right) (\zeta-z + \overline{\zeta-z})^{n-1} d\xi d\eta. \quad (36)$$

Proof For $n = 1$ formula (36) is just [3], (33). Assuming it holds for $n - 1$ rather than for n the Schwarz problem is rewritten as the system

$$\partial_{\bar{z}}^{n-1} w = \omega \text{ in } \mathbb{D}, \quad \operatorname{Re} \partial_{\bar{z}}^\nu w = \gamma_\nu \text{ on } \partial\mathbb{D}, \quad \operatorname{Im} \partial_{\bar{z}}^\nu w(0) = c_\nu, \quad 0 \leq \nu \leq n-2,$$

$$\omega_{\bar{z}} = f \text{ in } \mathbb{D}, \quad \operatorname{Re} \omega = \gamma_{n-1} \text{ on } \partial\mathbb{D}, \quad \operatorname{Im} \omega(0) = c_{n-1},$$

having the solution

$$w(z) = i \sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{c_\nu}{\nu!} (z + \bar{z})^\nu + \sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{(-1)^\nu}{2\pi i \nu!} \int_{|\zeta|=1} \gamma_\nu(\zeta) \frac{\zeta+z}{\zeta-z} (z-z + \overline{\zeta-z})^\nu \frac{d\zeta}{\zeta} \\ + \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi(n-2)!} \int_{|\zeta|<1} \left(\frac{\omega(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\bar{\zeta}} \frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} \right) (\zeta-z + \overline{\zeta-z})^{n-2} d\xi d\eta, \\ \omega(z) = ic_{n-2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_{n-1}(\zeta) \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \frac{d\zeta}{\zeta} \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|<1} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta}} \frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} \right) d\xi d\eta.$$

Using (35)

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2\pi(n-2)!} \int_{|\zeta|<1} \left(\frac{\omega(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\bar{\zeta}} \frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} \right) (\zeta-z + \overline{\zeta-z})^{n-2} d\xi d\eta \\ = i \frac{c_{n-1}}{(n-1)!} (z + \bar{z})^{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i (n-2)!} \int_{|\tilde{\zeta}|=1} \gamma_{n-1}(\tilde{\zeta}) \\ \times \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|<1} \left(\frac{\tilde{\zeta} + \zeta}{\tilde{\zeta} - \zeta} \frac{1}{\zeta} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{\overline{\tilde{\zeta} + \zeta}}{\overline{\tilde{\zeta} - \zeta}} \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} \right) (\zeta-z + \overline{\zeta-z})^{n-2} d\xi d\eta \frac{d\tilde{\zeta}}{\tilde{\zeta}}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(-1)^n}{2\pi(n-2)!} \int_{|\tilde{\zeta}| < 1} \frac{f(\tilde{\zeta})}{\tilde{\zeta}} \\
 & \times \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta| < 1} \left(\frac{\tilde{\zeta} + \zeta}{\tilde{\zeta} - \zeta} \frac{1}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{1 + \bar{\zeta}\tilde{\zeta}}{1 - \bar{\zeta}\tilde{\zeta}} \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \right) (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^{n-2} d\xi d\eta d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \\
 & + \frac{(-1)^n}{2\pi(n-2)!} \int_{|\tilde{\zeta}| < 1} \frac{\overline{f(\tilde{\zeta})}}{\bar{\tilde{\zeta}}} \\
 & \times \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta| < 1} \left(\frac{1 + \zeta\bar{\zeta}}{1 - \zeta\bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta} + \zeta}{\bar{\zeta} - \zeta} \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \right) (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^{n-2} d\xi d\eta d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}
 \end{aligned}$$

follows. Because

$$\begin{aligned}
 & \frac{\tilde{\zeta} + \zeta}{\tilde{\zeta} - \zeta} \frac{1}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{1 + \bar{\zeta}\tilde{\zeta}}{1 - \bar{\zeta}\tilde{\zeta}} \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \\
 & = -\left(\frac{2\tilde{\zeta}}{\zeta - \tilde{\zeta}} + 1\right) \left(\frac{2}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}\right) + \left(\frac{2}{1 - \bar{\zeta}\tilde{\zeta}} - 1\right) \left(\frac{2z}{1 - z\bar{\zeta}} + \frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \\
 & = -\frac{4\tilde{\zeta}}{\tilde{\zeta} - z} \left(\frac{1}{\zeta - \tilde{\zeta}} - \frac{1}{\zeta - z}\right) + \frac{2}{\zeta - \tilde{\zeta}} - \frac{2}{\zeta} - \frac{2}{\zeta - z} + \frac{1}{\bar{\zeta}} \\
 & + \frac{4z}{\tilde{\zeta} - z} \left(\frac{\tilde{\zeta}}{1 - \bar{\zeta}\tilde{\zeta}} - \frac{z}{1 - z\bar{\zeta}}\right) + \frac{2\tilde{\zeta}}{1 - \bar{\zeta}\tilde{\zeta}} + \frac{2}{\bar{\zeta}} - \frac{2z}{1 - z\bar{\zeta}} - \frac{1}{\bar{\zeta}} \\
 & = -2\frac{\tilde{\zeta} + z}{\tilde{\zeta} - z} \left(\frac{1}{\zeta - \tilde{\zeta}} - \frac{1}{\zeta - z}\right) + 2\frac{\tilde{\zeta} + z}{\tilde{\zeta} - z} \left(\frac{\tilde{\zeta}}{1 - \bar{\zeta}\tilde{\zeta}} - \frac{z}{1 - z\bar{\zeta}}\right) - \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\bar{\zeta}} \\
 & = -2\frac{\tilde{\zeta} + z}{\tilde{\zeta} - z} \left(\frac{1}{\zeta - \tilde{\zeta}} - \frac{\tilde{\zeta}}{1 - \bar{\zeta}\tilde{\zeta}} - \frac{1}{\zeta - z} + \frac{z}{1 - z\bar{\zeta}}\right) - \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\bar{\zeta}} \\
 & = -\frac{\tilde{\zeta} + z}{\tilde{\zeta} - z} \left(\frac{2}{\zeta - \tilde{\zeta}} - \frac{1}{\zeta} - \frac{2\tilde{\zeta}}{1 - \bar{\zeta}\tilde{\zeta}} - \frac{1}{\bar{\zeta}} - \frac{2}{\zeta - z} + \frac{1}{\zeta} + \frac{2z}{1 - z\bar{\zeta}} + \frac{1}{\bar{\zeta}}\right) - \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\bar{\zeta}} \\
 & = -\frac{\tilde{\zeta} + z}{\tilde{\zeta} - z} \left(\frac{1}{\zeta} \frac{\zeta + \tilde{\zeta}}{\zeta - \tilde{\zeta}} - \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{1 + \bar{\zeta}\tilde{\zeta}}{1 - \bar{\zeta}\tilde{\zeta}} - \frac{1}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}}\right) - \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\bar{\zeta}}
 \end{aligned}$$

and similarly

$$\begin{aligned}
& \frac{1 + \zeta\bar{\zeta}}{1 - \zeta\bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta} + \zeta}{\bar{\zeta} - \zeta} \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \\
&= \left(\frac{2}{1 - \zeta\bar{\zeta}} - 1 \right) \left(\frac{2}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} \right) - \left(\frac{2}{\bar{\zeta} - \zeta} - \frac{1}{\bar{\zeta}} \right) \left(\frac{2}{1 - z\bar{\zeta}} - 1 \right) \\
&= \frac{4}{1 - z\bar{\zeta}} \left(\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta}}{1 - \zeta\bar{\zeta}} \right) - \left(\frac{2\bar{\zeta}}{1 - \zeta\bar{\zeta}} + \frac{2}{\zeta} \right) \\
&\quad - \frac{2}{\zeta - z} + \frac{1}{\zeta} - \frac{4}{1 - z\bar{\zeta}} \left(\frac{1}{\bar{\zeta} - \zeta} + \frac{z}{1 - z\bar{\zeta}} \right) + \frac{2z}{1 - z\bar{\zeta}} + \frac{2}{\zeta} + \frac{2}{\zeta - \bar{\zeta}} - \frac{1}{\bar{\zeta}} \\
&= 2 \frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \left(\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta}}{1 - \zeta\bar{\zeta}} - \frac{1}{\bar{\zeta} - \zeta} - \frac{z}{1 - z\bar{\zeta}} \right) - \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\bar{\zeta}} \\
&= -\frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \left(\frac{2}{\zeta - \bar{\zeta}} - \frac{1}{\bar{\zeta}} - \frac{2\bar{\zeta}}{1 - \zeta\bar{\zeta}} - \frac{1}{\zeta} - \frac{2}{\zeta - z} + \frac{1}{\zeta} + \frac{2z}{1 - z\bar{\zeta}} + \frac{1}{\bar{\zeta}} \right) - \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\bar{\zeta}} \\
&= -\frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{\zeta - \bar{\zeta}} - \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{1 + \zeta\bar{\zeta}}{1 - \zeta\bar{\zeta}} - \frac{1}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \right) - \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\bar{\zeta}}
\end{aligned}$$

and applying (33), (34), and (35)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta| < 1} \left(\frac{\tilde{\zeta} + \zeta}{\tilde{\zeta} - \zeta} \frac{1}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{1 + \bar{\zeta}\tilde{\zeta}}{1 - \bar{\zeta}\tilde{\zeta}} \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \right) (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^{n-2} d\xi d\eta \\
&= -\frac{\tilde{\zeta} + z}{\tilde{\zeta} - z} \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta| < 1} \left(\frac{1}{\zeta} \frac{\zeta + \tilde{\zeta}}{\zeta - \tilde{\zeta}} - \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{1 + \tilde{\zeta}\bar{\zeta}}{1 - \tilde{\zeta}\bar{\zeta}} - \frac{1}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \right) (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^{n-2} d\xi d\eta \\
&= \frac{\tilde{\zeta} + z}{\tilde{\zeta} - z} \left[\frac{1}{n-1} (\tilde{\zeta} - z + \overline{\zeta - z})^{n-1} - \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} (z + \bar{z})^{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} (z + \bar{z})^{n-1} \right] \\
&\quad = \frac{\tilde{\zeta} + z}{\tilde{\zeta} - z} \frac{1}{n-1} (\tilde{\zeta} - z + \overline{\zeta - z})^{n-1}, \\
& \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta| < 1} \left(\frac{\tilde{\zeta} + \zeta}{\tilde{\zeta} - \zeta} \frac{1}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{1 + \bar{\zeta}\tilde{\zeta}}{1 - \bar{\zeta}\tilde{\zeta}} \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \right) (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^{n-2} d\xi d\eta \\
&= -\frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta| < 1} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{\zeta + \tilde{\zeta}}{\zeta - \tilde{\zeta}} - \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{1 - \tilde{\zeta}\bar{\zeta}}{1 - \tilde{\zeta}\bar{\zeta}} - \frac{1}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{1}{\bar{\zeta}} \frac{1 - z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \right) (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^{n-2} d\xi d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} \left[\frac{1}{n-1} (\tilde{\zeta}-z+\bar{\zeta}-z)^{n-1} - \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} (z+\bar{z})^{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} (z+\bar{z})^{n-1} \right] \\
 &= \frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} \frac{1}{n-1} (\tilde{\zeta}-z+\bar{\zeta}-z)^{n-1},
 \end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned}
 &\frac{(-1)^{n-1}}{2\pi(n-2)!} \int_{|\zeta|<1} \left(\frac{\omega(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\bar{\zeta}} \frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} \right) (\zeta-z+\bar{\zeta}-z)^{n-2} d\xi d\eta \\
 &= i \frac{c_{n-1}}{(n-1)!} (z+\bar{z})^{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i(n-1)!} \int_{|\zeta|=1} \gamma_{n-1}(\zeta) \frac{\zeta+z}{\zeta-z} (\zeta-z+\bar{\zeta}-z)^{n-1} \frac{d\zeta}{\zeta} \\
 &\quad + \frac{(-1)^n}{2\pi(n-1)!} \int_{|\zeta|<1} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta}} \frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} \right) (\zeta-z+\bar{\zeta}-z)^{n-1} d\xi d\eta.
 \end{aligned}$$

This proves formula (36).

Theorem 15 *The Dirichlet problem for the inhomogeneous polyanalytic equation in the unit disc*

$$\partial_{\bar{z}}^n w = f \text{ in } \mathbb{D}, \quad \partial_{\bar{z}}^\nu w = \gamma_\nu \text{ on } \partial\mathbb{D}, \quad 0 \leq \nu \leq n-1,$$

is uniquely solvable for $f \in L_1(\mathbb{D}; \mathbb{C}), \gamma_\nu \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{C}), 0 \leq \nu \leq n-1$, if and only if for $0 \leq \nu \leq n-1$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\lambda=\nu}^{n-1} \frac{\bar{z}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (-1)^{\lambda-\nu} \frac{\gamma_\lambda(\zeta)}{1-\bar{z}\zeta} \frac{(\bar{\zeta}-z)^{\lambda-\nu}}{(\lambda-\nu)!} d\zeta \\
 &+ \frac{(-1)^{n-\nu}\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{1-\bar{z}\zeta} \frac{(\bar{\zeta}-z)^{n-1-\nu}}{(n-1-\nu)!} d\xi d\eta = 0. \tag{37}
 \end{aligned}$$

The solution then is

$$\begin{aligned}
 w(z) &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(-1)^\nu}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\gamma_\nu(\zeta)}{\nu!} \frac{(\bar{\zeta}-z)^\nu}{\zeta-z} d\zeta \\
 &\quad + \frac{(-1)^n}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{(n-1)!} \frac{(\bar{\zeta}-z)^{n-1}}{\zeta-z} d\xi d\eta. \tag{38}
 \end{aligned}$$

Proof For $n = 1$ condition (37) coincides with [3], (34) and (38) is [3], (35). Assuming Theorem 27 is proved for $n - 1$ rather than for n the problem is decomposed into the system

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{z}}^{n-1}w &= \omega \text{ in } \mathbb{D}, \quad \partial_{\bar{z}}^{\nu}w = \gamma_{\nu} \text{ on } \partial\mathbb{D}, \quad 0 \leq \nu \leq n-2, \\ \partial_{\bar{z}}w &= f \text{ in } \mathbb{D}, \quad \partial_{\bar{z}}w = \gamma_{n-1} \text{ on } \partial\mathbb{D},\end{aligned}$$

with the solvability conditions (37) for $0 \leq \nu \leq n-2$ and ω instead of f together with

$$\frac{\bar{z}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_{n-1}(\zeta) \frac{d\zeta}{1-\bar{z}\zeta} - \frac{\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{1-\bar{z}\zeta} = 0$$

and the solutions (38) for $n - 1$ instead of n and ω instead of f where

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_{n-1}(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta-z} - \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}.$$

Then for $0 \leq \nu \leq n-2$

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\omega(\zeta)}{1-\bar{z}\zeta} \frac{(\bar{\zeta}-z)^{n-2-\nu}}{(n-2-\nu)!} d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_{n-1}(\tilde{\zeta}) \psi_{\nu}(\tilde{\zeta}, z) d\tilde{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{|\tilde{\zeta}|<1} f(\tilde{\zeta}) \psi_{\nu}(\tilde{\zeta}, z) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta},\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}\psi_{\nu}(\tilde{\zeta}, z) &= -\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{(\bar{\zeta}-z)^{n-2-\nu}}{(n-2-\nu)!(1-\bar{z}\zeta)} \frac{d\xi d\eta}{\zeta-\tilde{\zeta}} \\ &= \frac{(\bar{\tilde{\zeta}}-z)^{n-1-\nu}}{(n-1-\nu)!(1-\bar{z}\tilde{\zeta})} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{(\bar{\zeta}-z)^{n-1-\nu}}{(n-1-\nu)!(1-\bar{z}\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta-\tilde{\zeta}} \\ &= \frac{(\bar{\tilde{\zeta}}-z)^{n-1-\nu}}{(n-1-\nu)!(1-\bar{z}\tilde{\zeta})}.\end{aligned}$$

The last equality holds because

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{(\bar{\zeta}-z)^{n-1-\nu}}{(1-\bar{z}\zeta)(\zeta-\tilde{\zeta})} d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{(\bar{\zeta}-z)^{n-1-\nu} d\bar{\zeta}}{(\bar{\zeta}-z)(1-\bar{z}\tilde{\zeta})} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{(\bar{\zeta}-z)^{n-2-\nu}}{1-\bar{z}\tilde{\zeta}} d\bar{\zeta} = 0.\end{aligned}$$

Thus for $0 \leq \nu \leq n - 2$

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda=\nu}^{n-2} \frac{\bar{z}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (-1)^{\lambda-\nu} \frac{\gamma_\lambda(\zeta)}{1-\bar{z}\zeta} \frac{(\bar{\zeta}-z)^{\lambda-\nu}}{(\lambda-\nu)!} d\zeta \\ & + \frac{(-1)^{n-1-\nu}\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\omega(\zeta)}{1-\bar{z}\zeta} \frac{(\bar{\zeta}-z)^{n-2-\nu}}{(n-2-\nu)!} d\xi d\eta \\ & = \sum_{\lambda=\nu}^{n-1} \frac{\bar{z}}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} (-1)^{\lambda-\nu} \frac{\gamma_\lambda(\zeta)}{1-\bar{z}\zeta} \frac{(\bar{\zeta}-z)^{\lambda-\nu}}{(\lambda-\nu)!} d\zeta \\ & + \frac{(-1)^{n-\nu}\bar{z}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{1-\bar{z}\zeta} \frac{(\bar{\zeta}-z)^{n-1-\nu}}{(n-1-\nu)!} d\xi d\eta = 0. \end{aligned}$$

This is (37). For showing (38) similarly

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \omega(\zeta) \frac{(\bar{\zeta}-z)^{n-2}}{(n-2)!(\zeta-z)} d\xi d\eta \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tilde{\zeta}|=1} \gamma_{n-1}(\tilde{\zeta}) \psi_{n-1}(\tilde{\zeta}, z) d\tilde{\zeta} - \frac{1}{\pi} \int_{|\tilde{\zeta}|<1} f(\tilde{\zeta}) \psi_{n-1}(\tilde{\zeta}, z) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} \psi_{n-1}(\tilde{\zeta}, z) &= -\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{(\bar{\zeta}-z)^{n-2}}{(n-2)!(\zeta-z)} \frac{d\xi d\eta}{\zeta-\tilde{\zeta}} \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{(\bar{\zeta}-z)^{n-2}}{(n-2)!(\zeta-z)} \left(\frac{1}{\zeta-\tilde{\zeta}} - \frac{1}{\zeta-z} \right) d\xi d\eta = \frac{(\bar{\zeta}-z)^{n-1}}{(n-1)!(\zeta-z)} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i(n-1)!(\zeta-z)} \int_{|\zeta|=1} \left(\frac{(\bar{\zeta}-z)^{n-1}}{(\zeta-\tilde{\zeta})} - \frac{(\bar{\zeta}-z)^{n-1}}{\zeta-z} \right) d\zeta = \frac{(\bar{\zeta}-z)^{n-1}}{(n-1)!(\zeta-z)} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i(n-1)!(\zeta-z)} \int_{|\zeta|=1} (\bar{\zeta}-z)^{n-1} \left(\frac{1}{1-\tilde{\zeta}\bar{\zeta}} - \frac{1}{1-z\bar{\zeta}} \right) \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}} = \frac{(\bar{\zeta}-z)^{n-1}}{(n-1)!(\zeta-z)}. \end{aligned}$$

Hence, $w(z)$ is equal to

$$\sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{(-1)^\nu}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\gamma_\nu(\zeta)}{\nu!} \frac{(\bar{\zeta}-z)^\nu}{\zeta-z} d\zeta + \frac{(-1)^{n-1}}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\omega(\zeta)}{(n-2)!} \frac{(\bar{\zeta}-z)^{n-2}}{\zeta-z} d\xi d\eta$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(-1)^\nu}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\gamma_\nu(\zeta) (\overline{\zeta-z})^\nu}{\nu! \zeta-z} d\zeta + \frac{(-1)^n}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta) (\overline{\zeta-z})^{n-1}}{(n-1)! \zeta-z} d\xi d\eta ,$$

i.e. (38) is valid.

Acknowledgement

The author is very grateful for the hospitality of the Mathematical Department of the Simón Bolívar University. In particular his host, Prof. Dr. Carmen Judith Vanegas has made his visit very interesting and enjoyable.

References

- [1] Begehr, H.: Complex analytic methods for partial differential equations. An introductory text. World Scientific, Singapore, 1994.
- [2] Begehr, H.: Combined integral representations. Advances in Analysis. Proc. 4th Intern. ISAAC Congress, Toronto, 2003, eds. H. Begehr et al. World Sci., Singapore, 2005, 187–195.
- [3] Begehr, H.: Boundary value problem in complex analysis, I. Bol. Asoc. Mat. Venezolana, 12 (2005), 65–85.
- [4] Begehr, H., Vanegas, C. J.: Iterated Neumann problem for higher order Poisson equation. Preprint, FU Berlin, 2003, Math. Nachr., to appear.
- [5] Begehr, H., Vanegas, C. J.: Neumann problem in complex analysis. Proc. 11. Intern. Conf. Finite, Infinite Dimensional Complex Analysis, Appl., Chiang Mai, Thailand, 2003, eds. P. Niamsup, A. Kananthai, 212–225.
- [6] Bitsadze, A. V.: About the uniqueness of the Dirichlet problem for elliptic partial differential equations. Uspekhi Mat. Nauk 3 (1948), 6 (28), 211–212 (Russian).
- [7] Haack, W., Wendland, W.: Lectures on partial and Pfaffian differential equations. Pergamon Press, Oxford; Birkhäuser, Basel, 1969 (German).

HEINRICH BEGEHR
 I. MATH. INST., FU BERLIN
 ARNIMALLEE 3
 14195 BERLIN, GERMANY
 email: begehr@math.fu-berlin.de

EDUCACIÓN**The catenary (almost) everywhere**

Juan B. Gil

Introduction

A power line hanging between two poles shows us the fascinating curve called the catenary. The shape of this natural curve can be derived from a differential equation describing the physics behind a uniform flexible chain hanging by its own weight. The catenary turns out to be a hyperbolic cosine so it is an excellent enlightening example to introduce the hyperbolic trigonometric functions, but it can also be used to motivate and illustrate many different concepts across the entire mathematics curriculum. In fact, it is a wonderful pedagogical tool in calculus, differential equations, differential geometry, variational calculus, and even in numerical analysis.

Although a great deal of information is known about the catenary, some of its amazing properties are always worth revisiting, all at once, in the most elementary terms possible. For instance, how do we solve the nonlinear differential equation that characterizes the catenary without previous knowledge of $\cosh x$? Does the shape of the curve depend on the weight of the chain? Does the catenary appear naturally in other situations? What is the connection between the catenary and minimal surfaces? What does the catenary minimize?

Our goal in these notes is to offer straightforward answers to some of these questions. We discuss the “linear equation” behind the catenary and review some interesting geometric examples involving this remarkable curve. In addition, we reveal some of its minimizing properties and show that for a closely related problem, the catenary fails to be optimal.

Deriving the catenary

The catenary $y = c + \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha x)$ was originally obtained by describing the curve formed by a uniform flexible chain hanging under the influence of gravity. For convenience we assume the endpoints of the chain to be at the same height and choose our coordinate system in such a way that the origin is the lowest point of the curve.

As a curve resulting from the influence of physical forces, the catenary is the solution of a differential equation. There are three forces acting on each point (x, y) of the chain (Figure 1): a tangential tension T , a horizontal pull H at the

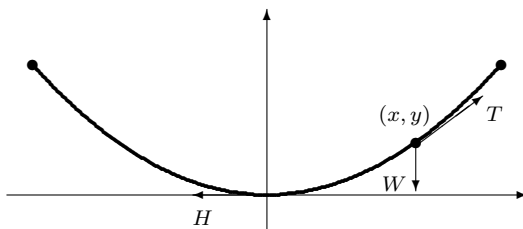


Figure 1: The catenary

origin, and the weight W whose magnitude w is proportional to the length s of the chain between the origin and the point (x, y) .

Since the sum of these forces must be zero, the slope of the tangential force is given by $w/h = (\mu s)/h$, where μ is the weight density and h is the magnitude of the horizontal force H . In other words, the slope y' of the curve at x satisfies the equation

$$y'(x) = \frac{\mu s}{h} = \frac{\mu}{h} \int_0^x \sqrt{1 + [y'(t)]^2} dt$$

which can be written as a second order differential equation

$$y'' = \alpha \sqrt{1 + (y')^2} \quad (1)$$

with initial conditions $y(0) = 0$ and $y'(0) = 0$, where $\alpha = \mu/h > 0$.

Solving the differential equation. A possible way to solve (1) is to rewrite it as a second order *linear* differential equation that can be solved without previous knowledge of the hyperbolic cosine. We square both sides of (1) and differentiate with respect to x to obtain

$$2y'' y''' = 2\alpha^2 y' y''.$$

From (1) we conclude that $y''(0) = \alpha$ and $y'' > 0$ for every x . Then, dividing both sides by $2y''$ and letting $z = y'$, we arrive at the equation

$$z'' = \alpha^2 z, \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = \alpha, \quad (2)$$

which has the unique solution $z = \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2}$. Thus the solution of (1) must be of the form $y = \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2\alpha} + c$. Finally, the condition $y(0) = 0$ leads to the solution

$$y = -\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha x).$$

It is worthwhile mentioning that, although α seems to depend on μ , the shape of the catenary is independent of the weight density. In fact, α is uniquely

determined by the endpoints and length of the curve: If b is the x -coordinate of the right endpoint, then the length of the curve is exactly $L = \frac{2}{\alpha} \sinh(\alpha b)$ which happens to be injective as a function of $\alpha > 0$.

The catenary in geometry

When we think about differential equations, we usually have in mind applied problems coming from physics, engineering, biology, and economics. However, it is important for undergraduate students to realize and understand that differential equations also arise from geometric problems, and that they play an essential role in differential geometry. This interplay between differential equations and geometry can be nicely and somewhat surprisingly motivated by means of the catenary. Below we will discuss two examples in which the catenary arises as a consequence of a purely geometric problem.

Square wheels. (cf. Robison [4], Hall and Wagon [2]) An interesting problem involving geometry and differential equations is the problem of the square wheel. The question is: What should be the shape of the road in order for a square wheel to roll smoothly?

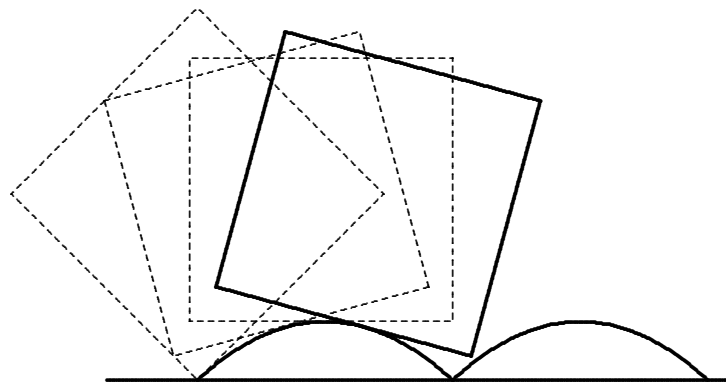


Figure 2: A square wheel rolls smoothly on inverted catenaries

It turns out that for polygonal wheels the road must consist of linked, inverted catenaries. For simplicity we only discuss the case of a square wheel, for which the computations can be done in a rather elementary way. A general study (including numerical computations) of the relationship between the shape of roads and wheels can be found in [2].

We can set up the problem as follows. We consider a square with side $2a > 0$ and diagonal $2\delta = 2\sqrt{2}a$, originally centered at $(0, \delta)$ with a corner at the origin.

At each point of the parametrized curve $(t, y(t))$ we want to attach the square to the curve in such a way that

- (i) the square is tangential to the curve at this point,
- (ii) the distance from the tangent line at $(t, y(t))$ to the point (t, δ) is a .

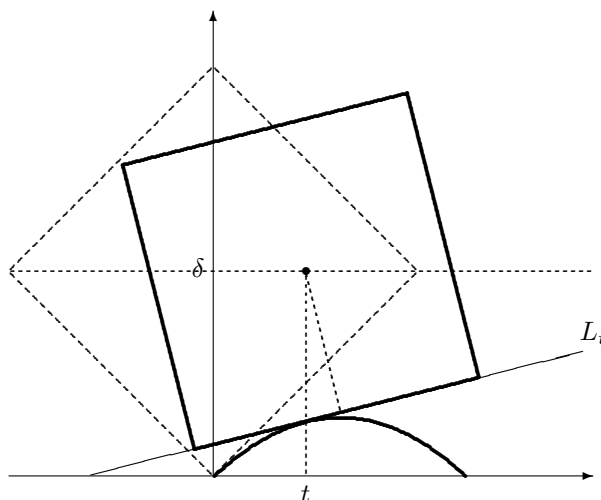


Figure 3: Geometric situation at t

Let $L_t : Y - y = y'(X - t)$ be the tangent line to the curve at the point $(t, y(t))$, and let (X_0, Y_0) be the point on the line closest to the point (t, δ) . Then, (ii) implies

$$a^2 = (X_0 - t)^2 + (Y_0 - \delta)^2.$$

A straightforward computation gives

$$X_0 - t = \frac{y'}{1 + (y')^2}(\delta - y) \quad \text{and} \quad Y_0 - \delta = \frac{-1}{1 + (y')^2}(\delta - y).$$

Thus we end up with the differential equation

$$a^2 = \frac{(y')^2}{(1 + (y')^2)^2}(\delta - y)^2 + \frac{1}{(1 + (y')^2)^2}(\delta - y)^2$$

which can be simplified to the equation

$$y = \delta - a\sqrt{1 + (y')^2},$$

or equivalently,

$$y'' = -\frac{1}{a}\sqrt{1 + (y')^2}. \quad (3)$$

Following the same linearizing procedure used to solve (1), we get that the solutions of (3) are inverted catenaries $y = c_1 - a \cosh(c_2 - \frac{t}{a})$. Finally, the conditions $y(0) = 0$ and $y'(0) = 1$ uniquely determine the solution:

$$y = a\sqrt{2} - a \cosh(\ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{t}{a}).$$

The wheel rolls one bump of the road when $t = 2a \ln(1 + \sqrt{2})$.

Minimal surfaces of revolution. (See e.g. Thorpe [6]). An important and very convenient class of surfaces in \mathbb{R}^3 are the surfaces of revolution. Let $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ be a parametrized curve of the form $\alpha(t) = (t, y(t))$ for some smooth function $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ with $y(t) > 0$ for all $t \in I$. The surface obtained by rotating α about the x -axis is given by

$$\varphi(t, \theta) = (t, y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta). \quad (4)$$

Many concepts in differential geometry can be easily illustrated on surfaces of revolution. For instance, in this case, it is quite simple to compute the Weingarten map of φ whose eigenvalues are used to introduce the different notions of curvature. In fact, the eigenvalues κ_1 and κ_2 of the Weingarten map are called the *principal curvatures* of φ , the determinant $\kappa_1 \kappa_2$ is the *Gaussian curvature*, and the average $\frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ is called the *mean curvature*. A parametrized surface with mean curvature identically zero is called a *minimal surface*.

For our surface (4) the eigenvalues of the Weingarten map are given by

$$\kappa_1(t, \theta) = -\frac{y''(t)}{(1 + (y'(t))^2)^{3/2}}, \quad \kappa_2(t, \theta) = \frac{1}{y(t)(1 + (y'(t))^2)^{1/2}}.$$

Thus, a surface of revolution is a minimal surface if and only if $y(t)$ satisfies the differential equation

$$\frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{1}{y(1 + (y')^2)^{1/2}},$$

or equivalently,

$$\frac{y'y''}{1 + (y')^2} = \frac{y'}{y}.$$

All possible solutions of this equation are of the form

$$y(t) = \frac{1}{|c_1|} \cosh(c_1 t + c_2)$$

for some constants c_1 and c_2 . This curve is a catenary, and the corresponding surface of revolution is called a *catenoid*.

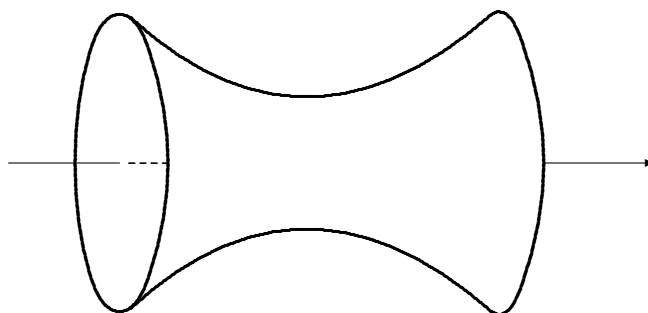


Figure 4: The catenoid

Calculus of variations

The catenoid is a surface of revolution with minimum area: Any surface of revolution generated by a different curve joining the same endpoints and having the same length, must have a larger surface area. The proof of this fact is less elementary and involves calculus of variations (see e.g. [1]). The oldest reference that I found concerning this minimizing property of the catenary goes back to 1894 as a proposed problem by W. Symmond in [5]. J. C. Nagel gave a solution in [3] that is easy to describe if we accept the reasonable fact that the catenary is the curve with the lowest center of gravity. Then, that the catenoid is the surface of revolution with minimum area, follows by the well-known theorem of Pappus.

The catenary is not everywhere. As the catenary generates a minimal surface of revolution, one could erroneously believe that it is also the curve (with fixed endpoints and length) that minimizes the area below it. Since a minimal area below the curve implies a maximal area above it, this problem is related to the so-called isoperimetric problem of finding the curve with fixed perimeter that encloses the maximal area. In this article, we do not discuss this interesting variational problem. Instead, we give a concrete example that shows that the catenary is not the one that minimizes the area below the curve.

Consider the half-circle joining the points $(-1, 2)$ and $(1, 2)$, passing through $(0, 1)$. Then its length is π and the area below it is $4 - \pi$.

As we already know, the corresponding catenary of length π joining $(-1, 2)$ and $(1, 2)$ takes the form $y = c + \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha x)$ with α and c such that $\pi = \frac{2}{\alpha} \sinh \alpha$ and $2 = c + \frac{1}{\alpha} \cosh \alpha$. In other words, using $\cosh \alpha = \sqrt{1 + \sinh^2 \alpha}$,

$$\sinh \alpha = \frac{\alpha\pi}{2} \quad \text{and} \quad c = 2 - \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^2}.$$

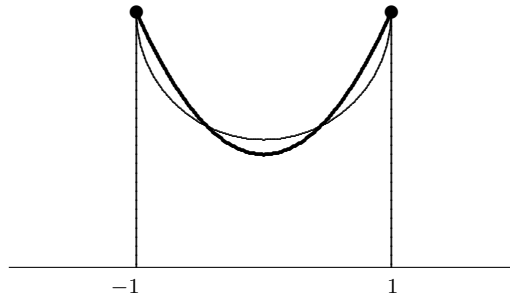


Figure 5: Catenary (bold) and half-circle of same length

The area below the catenary is then given by

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 c + \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha x) dx &= 2 \left(c + \frac{1}{\alpha^2} \sinh \alpha \right) \\ &= 2 \left(2 - \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right)^2} + \frac{\pi}{2\alpha} \right) \\ &= 4 - \frac{2}{\alpha} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right)^2} - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Thus to compare the areas below the catenary and the half-circle, we just need to compare $\frac{2}{\alpha} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right)^2} - \frac{\pi}{2} \right)$ with π . Now, the inequality

$$\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha\pi}{2} \right)^2 > 1 + \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right)^2 \quad \text{implies} \quad \pi > \frac{2}{\alpha} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right)^2} - \frac{\pi}{2} \right),$$

or equivalently,

$$4 - \pi < 4 - \frac{2}{\alpha} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right)^2} - \frac{\pi}{2} \right).$$

In conclusion, the area below the half-circle is smaller.

References

- [1] G. A. Bliss, *Lectures on the Calculus of Variations*, Univ. Chicago Press, Chicago, Ill., 1946.
- [2] L. Hall and S. Wagon, *Roads and wheels*, Math. Mag. **65** (1992), 283–301.
- [3] J. C. Nagel, Solution to Prob. 33, Amer. Math. Monthly **2** (1895), 193.

- [4] G. B. Robison, *Rockers and rollers*, Math. Mag. **33** (1960), 139–144.
- [5] W. Symmond, Problem 33, Amer. Math. Monthly **1** (1894), 437–438.
- [6] J. A. Thorpe, *Elementary topics in differential geometry*, Corrected reprint of the 1979 original, Springer, New York, 1994.

JUAN GIL,
PENN STATE ALTOONA,
3000 IVYSIDE PARK, ALTOONA, PA 16601
USA

DIVULGACIÓN MATEMÁTICA

Permutaciones y el Juego del 15

José Heber Nieto

Resumen

En este trabajo se utilizan conceptos elementales sobre permutaciones para analizar el *juego del 15* de Sam Loyd.

1. Introducción

En 1878 Sam Loyd (1841–1911), uno de los más grandes creadores de acertijos que han existido, propuso un rompecabezas que causó verdadero furor en su época y ha mantenido su popularidad hasta nuestros días. La versión original consistía en una caja cuadrada que contenía quince piezas cuadradas, numeradas del 1 al 15, dispuestas como se ve en el siguiente diagrama.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Figura 1.

Observe que la casilla inferior derecha está vacía, y si los números se leen de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo entonces están ordenados en forma creciente, excepto por el 15 y el 14 que aparecen transpuestos.

Un *movimiento válido* consiste en deslizar uno de los números horizontal o verticalmente adyacentes a la casilla vacía hasta ocuparla, dejando vacante la casilla ocupada originalmente por la pieza movida. En la posición inicial hay sólo dos movimientos válidos, que consisten en mover el 12 o el 14 hasta ocupar la casilla inferior derecha.

Pues bien, Sam Loyd ofreció pagar mil dólares a quien lograra, mediante alguna secuencia de movimientos válidos, intercambiar el 14 y el 15 dejando a

los demás números en su posición inicial. En otras palabras, si llamamos posición *normal* a la que tiene los quince números ordenados en forma creciente y con la casilla inferior derecha vacía, la propuesta de Sam Loyd fue hallar una secuencia de movimientos válidos que transforme la posición de la Figura 1 en la posición normal.

El premio ofrecido desató un verdadero frenesí por hallar la solución. En su obra póstuma [2, p. 235] el propio Sam Loyd narra, de manera humorística, cómo volvió “loco al mundo entero con una pequeña caja con piezas movibles”.

El lector que quiera intentarlo puede fácilmente construir un juego del 15 con cartulina, o bien jugar por internet, en la página del autor <http://mipagina.cantv.net/jhnieto/15-1.htm>

2. Permutaciones

Si no consiguió la solución al problema anterior no se desanime: ¡en realidad no existe, y nadie pudo cobrar el premio ofrecido por Sam Loyd!

Los matemáticos no tardaron mucho en darse cuenta de esto, como lo prueban dos artículos [3, 5] aparecidos en 1879 en el *American Journal of Mathematics*.

Para comprender lo que ocurre, recordemos que una *permutación* de los números del 1 al n es una reordenación cualquiera a_1, a_2, \dots, a_n de la secuencia $1, 2, \dots, n$. Si $i < j$ y $a_i > a_j$ entonces se dice que el par (a_i, a_j) es una *inversión*, de lo contrario se dice que es una *sucesión*. Si el número total de inversiones de una permutación es par, entonces se dice que la permutación es *par*; en caso contrario se dice que la permutación es *impar*.

El número total de permutaciones de los números del 1 al n es $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Si $n > 1$ es fácil ver que la mitad de las permutaciones son pares y la otra mitad son impares (en efecto, la transposición de los dos primeros elementos de una permutación establece una biyección entre las permutaciones pares y las impares).

Es claro que a cada posición del juego del 15 le podemos asociar una permutación de los números del 1 al 15, leyendo los números de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, sin tomar en cuenta la casilla vacía. Por ejemplo a la posición inicial del problema propuesto por Sam Loyd le corresponde la permutación 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 14. Esta permutación tiene una sola inversión, a saber el par (15, 14), por lo tanto es *impar*. La permutación que había que obtener para ganar el premio era simplemente la sucesión ordenada de los 15 primeros números naturales, la cual no tiene inversiones y por lo tanto es *par*. Ahora veamos qué ocurre cuando hacemos un movimiento válido. Es claro que los movimientos horizontales no modifican en nada la permutación y tan sólo desplazan la casilla vacía dentro de la misma fila. En cambio si movemos un número hacia abajo el efecto será que este número adelanta a los tres que

le siguen, y además la casilla vacía pasará de una fila impar a una fila par, o viceversa.

5	3	1	4
10	8	7	11
6	15		2
9	13	14	12

Figura 2.

Por ejemplo en la posición que se ilustra en la Figura 2, si bajamos el 7 entonces éste adelanta al 11, al 6 y al 15. ¿Qué ocurre con la paridad de las permutaciones antes y después del movimiento? En primer lugar observemos que al bajar un número la única alteración del orden que se produce es la de ese número con los tres que le siguen. Por lo tanto las únicas parejas que pueden cambiar su condición de inversión a sucesión, o viceversa, son $(7,11)$, $(7,6)$ y $(7,15)$. De hecho, al bajar el 7 la inversión $(7, 6)$ desaparece, pero en cambio aparecerán dos nuevas inversiones: $(11, 7)$ y $(15, 7)$. En general si el número a bajar está en inversión con k de los tres que le siguen (con k igual a 0, 1, 2 o 3), al efectuar el movimiento esas k inversiones desaparecerán, pero aparecerán $3 - k$ nuevas. El cambio en el número total de inversiones será entonces $(3 - k) - k = 3 - 2k$, que siempre es impar. Por lo tanto las permutaciones antes y después del movimiento serán de diferente paridad. De modo análogo, subir un número hace que éste retroceda tres puestos y la permutación resultante tendrá paridad diferente a la de partida.

Ahora bien, si partimos de la posición inicial propuesta por Sam Loyd y llegamos a otra con la casilla vacía en la misma posición, el número de movimientos verticales realizados debe haber sido par (ya que la casilla vacía debe haber subido tantas veces como bajó). Por lo tanto la paridad de la permutación cambió un número par de veces, lo cual equivale a decir que quedó igual que al principio (o sea *impar*). Esto demuestra que ni la permutación ordenada del 1 al 15, ni ninguna otra permutación *par* con la casilla vacía en la esquina inferior derecha puede ser obtenida a partir de la posición inicial de Sam Loyd, quien en ningún momento corrió el riesgo de tener que pagar el premio ofrecido.

3. Invariantes

Muchos problemas están relacionados con sistemas cuyo estado se puede cambiar aplicando ciertas transformaciones. Los juegos pertenecen a esta categoría, así como muchos otros problemas en los cuales se aplican en forma reiterada transformaciones geométricas o algebraicas.

Un *invariante* I es una función que a cada estado E del sistema le asocia un valor $I(E)$ de tal manera que, si de un estado E_1 se puede pasar a otro estado E_2 mediante una transformación válida, entonces $I(E_1) = I(E_2)$.

Los invariantes son muy útiles para demostrar la imposibilidad de pasar de un estado a otro. Si I es un invariante y a partir de un estado A se puede llegar a otro estado B mediante una secuencia de transformaciones válidas, entonces es claro que debe ser $I(A) = I(B)$. Por lo tanto si un invariante toma valores diferentes en dos estados, entonces es imposible pasar de uno al otro mediante una sucesión de transformaciones válidas.

Para construir un invariante para el juego del 15 comencemos por asignar un valor numérico a la paridad de una permutación σ . Más precisamente, definamos $p(\sigma) = 0$ si σ es par y $p(\sigma) = 1$ si σ es impar. Dada una posición P del juego del 15 sea σ la permutación asociada y f ($1 \leq f \leq 4$) la fila en la cual se encuentra la casilla vacía. Definamos $I(P) = p(\sigma) + f \pmod{2}$.

Si se realiza un movimiento válido entonces o bien $p(\sigma)$ y f mantienen sus valores (caso de un movimiento horizontal) o bien tanto $p(\sigma)$ como f cambian en una unidad (caso de un movimiento vertical). En cualquier caso se ve claramente que el valor de I no cambia, y por lo tanto es un invariante.

Por ejemplo para la posición normal N se tiene $I(N) = 0 + 4 \pmod{2} = 0$, mientras que para la posición S de la Figura 1 se tiene $I(S) = 1 + 4 \pmod{2} = 1$. El hecho de que $I(N) \neq I(S)$ prueba la imposibilidad de pasar de una de estas posiciones a la otra.

4. Accesibilidad

El problema de *accesibilidad* consiste en averiguar, para un par de posiciones A y B , si es posible pasar de una a otra mediante una sucesión de movimientos válidos. Es claro que una condición necesaria para que B sea accesible desde A es que $I(A) = I(B)$, pero podría no ser suficiente (en general, los invariantes permiten dar demostraciones de la imposibilidad de pasar de un estado a otro, pero no de la posibilidad de hacerlo).

Sin embargo, en el juego del 15 la condición $I(A) = I(B)$ es necesaria y suficiente. Aquí no daremos una demostración completa de este hecho (el lector interesado puede ver una en [1]), pero haremos algunas consideraciones que, para los que tengan un poco de práctica en el juego, serán suficientes.

Definamos en primer lugar una relación \sim en el conjunto de las posiciones diciendo que $A \sim B$ si existe una secuencia de movimientos válidos que nos lleve de A a B . Es fácil ver que \sim es una relación de equivalencia: es reflexiva pues de A se pasa a A mediante la secuencia vacía de movimientos; es simétrica pues si de A se pasa a B mediante la secuencia M_1, M_2, \dots, M_s , entonces se puede pasar de B a A efectuando los movimientos inversos en orden inverso, es decir $M_s^{-1}, M_{s-1}^{-1}, \dots, M_1^{-1}$; y es transitiva pues si una secuencia de movimientos nos lleva de A a B y otra nos lleva de B a C entonces efectuando los movimientos de la primera secuencia y a continuación los de la segunda, se pasa de A a C .

Ahora bien, cualquiera que haya dedicado cierto tiempo al juego del 15 sabe por experiencia que, partiendo de cualquier posición inicial A , se pueden ir ordenando sucesivamente las filas hasta llegar, o bien a la posición normal N o bien a la posición S de Sam Loyd (Figura 1). Como $I(N) = 0$ y $I(S) = 1$ resulta que si $I(A) = 0$ entonces $A \sim N$, mientras que si $I(A) = 1$ entonces $A \sim S$. Dada otra posición B con $I(A) = I(B)$ se presentan dos posibilidades:

1. $I(A) = I(B) = 0$. En este caso $A \sim N$ y $B \sim N$, de donde $A \sim B$.
2. $I(A) = I(B) = 1$. En este caso $A \sim S$ y $B \sim S$, de donde $A \sim B$.

En cualquier caso se tiene $A \sim B$, como queríamos probar.

Vemos entonces que \sim divide al conjunto de todas las posiciones en dos clases de equivalencia, tales que de una posición se puede pasar mediante movimientos válidos a cualquier otra de la misma clase, pero a ninguna de la otra clase. La clase de equivalencia de la posición normal está formada por las posiciones que tienen o bien la casilla vacía en la segunda o cuarta fila y permutación par, o bien la casilla vacía en la primera o tercera fila y permutación impar.

El número total de posiciones del juego del 15 es $16! = 20922789888000$, y en cada clase de equivalencia están la mitad, o sea 10461394944000 posiciones.

Como ejemplos finales consideremos las dos posiciones representadas en la Figura 3, ambas planteadas por Sam Loyd:

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

4	8	12	
3	7	11	15
2	6	10	14
1	5	9	13

Figura 3.

¿Es posible obtenerlas a partir de la posición S de la Figura 1? Para la posición de la izquierda no hay inversiones y la casilla vacía está en la primera fila, por lo tanto el invariante es 1 como para S y la respuesta es afirmativa. En la posición de la derecha hay 46 inversiones, con la casilla vacía en la primera fila, por lo tanto el invariante es también 1 y la respuesta es afirmativa.

Otro problema interesante es el de hallar la secuencia *más corta* de movimientos que lleva de una posición a otra de la misma clase de equivalencia. Este problema, para la generalización del juego del 15 a un tablero de $N \times N$ con números del 1 al $N^2 - 1$, se ha probado [4] que es computacionalmente intratable (en el lenguaje de la teoría de la complejidad, es *NP-hard*).

Referencias

- [1] Archer, A. F. *A Modern Treatment of the 15 Puzzle*, Amer. Math. Monthly **106**(9) (1999), 793–799.
- [2] Loyd, S. *Cyclopedia of 5000 Puzzles, Tricks and Conundrums - with Answers*, The Lamb Publishing Company, New York, 1914. Ahora en línea en <http://www.mathpuzzle.com/loyd/>
- [3] Johnson, W. W. *Notes on the '15 Puzzle. I*, Amer. J. Math. **2**(1879), 397–399.
- [4] Ratner, D., Warmuth, M. *Finding a shortest solution for the $N \times N$ -extension of the 15-puzzle is intractable*, J. Symb. Comp. **10** (1990) 111–137.
- [5] Story, W. E. *Notes on the '15 Puzzle. II*, Amer. J. Math. **2**(1879), 399–404.

JOSÉ HEBER NIETO
UNIVERSIDAD DEL ZULIA
MARACAIBO, VENEZUELA

INFORMACIÓN NACIONAL

El trabajo matemático de Pedro Berrizbeitia¹

T. G. Berry

Pedro Berrizbeitia obtuvo su licenciatura en matemáticas en la Universidad Simón Bolívar en el año 1981. En 1982 fue al MIT para estudiar para su doctorado, que obtuvo, bajo la dirección de Nesmith Ankeny, en 1986, con la tesis “An explicit reciprocity theorem for finite extensions of \mathbb{Q}_p ”. Después de un par de años posdoctorales en Ohio State University, el Dr. Berrizbeitia regresó a Venezuela para incorporarse al Departamento de Matemáticas de la Universidad Simón Bolívar, donde ha estado hasta el presente. Actualmente ocupa la posición de Coordinador de Matemáticas.

Los trabajos de Berrizbeitia abarcan una amplia gama de tópicos matemáticos, desde álgebras C^* a teoría de grafos, pero sus contribuciones más importantes son a la teoría aditiva de números y a la teoría de pruebas de primalidad, y son estos los que se describirán en el presente artículo.

Teoría aditiva de números.

En [19] se prueba:

Teorema. Sea F un cuerpo, y sea G un subgrupo de índice finito n del grupo multiplicativo F^ . Entonces existe un entero N que depende solo de n tal que, si $\text{car } F = 0$ o si $\text{car } F > N$ entonces $G - G = F$. Más aún, si $G - G = F$ y $m > 1$ entonces $mG = \{g_1 + \dots + g_m \mid g_1, \dots, g_m \in G\} = F$ si, y sólo si, $-1 \in (m-1)G$.*

Para el caso en el que F es un cuerpo finito, el teorema de Berrizbeitia es una consecuencia inmediata de resultados clásicos de la Teoría de Números sobre número de soluciones de ecuaciones del tipo $x^m + y^m = t$. Una solución elemental que Berrizbeitia encontró para este problema para el caso $m = 3$ en su estadía en Ohio State University fue lo que dió origen al desarrollo del tema, y en última instancia, al teorema de Berrizbeitia. Por otra parte, el problema está relacionado con el de decidir si un número (racional o tal vez tomado de otro sistema) puede ser escrito como diferencia de dos potencias n -ésimas, o suma de d potencias n -ésimas, donde d y n son enteros positivos dados.

Para probar su teorema, Berrizbeitia introdujo una idea completamente original, que involucraba el uso de un teorema de Van der Waerden, o más precisamente una generalización de este teorema que se debe a Gallai, que

¹Premio Lorenzo Mendoza Fleury 2005 de la Fundación Polar. Ver Boletín XII, 1.

pertenece al área conocida como “Teoría de Ramsey” y que a primera vista no tiene nada que ver con el tema. El teorema reza como sigue:

Teorema. (Van der Waerden). Sean dados enteros positivos k, r . Entonces, existe un entero N , que depende de k y de r tal que, si se colorea los enteros $\{1, 2, \dots, N\}$ con r colores, siempre existe una sucesión aritmética monocromática de longitud k .

El teorema de Gallai es la generalización a \mathbb{Z}^n . Este uso de la teoría de Ramsey, originado por Berrizbeitia, ha resultado ser una herramienta muy poderosa en problemas relacionados con el de [19]. Aunque Berrizbeitia mismo no prosiguió el tópico,² su paper ha tenido una influencia considerable, como atestiguan [BS],[RA] y [TU].

En colaboración con Peter Elliott, de la Universidad de Colorado en Boulder, Berrizbeitia hizo dos contribuciones ([9] y [12]) adicionales a la teoría aditiva de números, en las cuales se combina teoría analítica de números con ideas combinatorias de Berrizbeitia para producir resultados notables. Por ejemplo, ellos prueban que cualquier número racional que puede ser representado por un producto de números de la forma $p + 1$ o de sus inversos, p primo, puede ser representado por un producto de exactamente 19 tales números.

Pruebas de primalidad.

El problema de decidir si un entero es primo ha fascinado a los matemáticos durante varios siglos. Aquí la opinión de ese olimpiano de las matemáticas, Carl-Friedrich Gauss, en su “Disquisitiones Arithmeticae”, (1801). (Este párrafo aparece como el “Abstract” del paper [GR]³).

“The problem of distinguishing prime numbers from composite numbers, and of resolving the latter into their prime factors is known to be one of the most important and useful in arithmetic. It has engaged the industry and wisdom of ancient and modern geometers to such an extent that it would be superfluous to discuss the problem at length. Nevertheless we must confess that all methods that have been proposed thus far are either restricted to very special cases or are so laborious and difficult that even for numbers that do not exceed the limits of tables constructed by estimable men, they try the patience of even the practiced calculator. And these methods do not apply at all to larger numbers . . . It frequently happens

²Esto no es estrictamente cierto. El tiene unos resultados aún sin publicar que se espera en algún momento salgan a la luz del día.

³Este paper es un survey para matemáticos no-especializados y su lectura resulta muy accesible

that the trained calculator will be sufficiently rewarded by reducing large numbers to their factors so that it will compensate for the time spent. Further, the dignity of the science itself seems to require that every possible means be explored for the solution of a problem so elegant and so celebrated . . . It is in the nature of the problem that any method will become more complicated as the numbers get larger. Nevertheless, in the following methods the difficulties increase rather slowly . . . The techniques that were previously known would require intolerable labor even for the most indefatigable calculator.”

En términos modernos, los métodos tales que “the difficulties increase rather slowly” son algoritmos que involucran un número de operaciones sobre bits que es una función polinomial del tamaño del input. Dicho tamaño, para el input n , es el número de bits en el desarrollo binario de n , que es $\lceil \log n \rceil$. (\log significa \log_2 siempre). En la notación O , pues, se buscan algoritmos que son $O(\log^k n)$ para algún k .

Desde el siglo 17, cuando empieza, con Fermat, la época moderna de los estudios de primalidad, hasta tiempos relativamente recientes, se consideraba principalmente el problema de hallar criterios para la primalidad de números de forma especial, como los números de Fermat $2^{2^n} + 1$ y los números de Mersenne $2^p - 1$ (p primo). Con la llegada de las computadoras, y más particularmente con el invento de ciertos criptosistemas, muy usados en el Internet, cuyo funcionamiento requiere hallar unos números primos grandes (alrededor de 150 cifras decimales actualmente), el énfasis cambió hacia el de hallar criterios para decidir si un entero arbitrario es primo.

Berrizbeitia ha contribuido en ambas corrientes. Los trabajos publicados [2-8,11] tratan de pruebas de primalidad para números de forma especial. En estos trabajos, se generalizan unas ideas del siglo 19, que usan la reciprocidad cuadrática para producir criterios de primalidad para números de Fermat y más generalmente números $A2^n \pm 1$. Para entender el uso de reciprocidad, he aquí el bisabuelo de todas las pruebas, la de Pépin para los números de Fermat. Primero, hay que recordar la definición y propiedades del símbolo de Legendre. Sea p un primo y a un entero no divisible entre p . Se define el símbolo de Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$ por

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{p}\right) &= +1 \text{ si } x^2 \equiv a \pmod{p} \text{ tiene solución} \\ &= -1 \text{ si no} \end{aligned}$$

Se tiene
Propiedad 1.

$$\left(\frac{a}{b}\right) \equiv a^{p-1/2} \pmod{p}$$

y, la joya en la corona, la Ley de Reciprocidad Cuadrática:

Propiedad 2. Si p y q son primos impares, entonces

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{q}\right) &= -\left(\frac{q}{p}\right) \text{ si } p \text{ y } q \text{ son ambos } \equiv 3 \pmod{4} \\ \left(\frac{p}{q}\right) &= \left(\frac{q}{p}\right) \text{ en todo otro caso} \end{aligned}$$

La ley de reciprocidad cuadrática usualmente se completa con *ansätze* evaluando $\left(\frac{2}{p}\right)$ y $\left(\frac{-1}{p}\right)$, pero no necesitamos estos aquí.

Ahora podemos dar el criterio de Pépin.

Teorema. *Sea $F_n = 2^{2^n} + 1$ el n -ésimo número de Fermat. Entonces F_n es primo si y sólo si $3^{F_n-1/2} \equiv -1 \pmod{F_n}$.*

Dem. Suponga primero que F_n sea primo. Entonces, por la ley de reciprocidad cuadrática $\left(\frac{3}{F_n}\right) = \left(\frac{F_n}{3}\right)$. Pero, ya que, por la definición, el valor de $\left(\frac{a}{p}\right)$ depende solamente de la clase de $a \pmod{p}$, y $F_n = 2^{2^n} + 1 \equiv (-1)^{2^n} + 1 \equiv 2 \pmod{3}$, se tiene $\left(\frac{F_n}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1$ este último puesto que, por inspección, 2 no es un cuadrado mod 3. Así $\left(\frac{F_n}{3}\right) = -1$, y, usando Propiedad 1

$$3^{F_n-1/2} \equiv -1 \pmod{F_n}$$

Para la recíproca, suponga que la congruencia arriba está satisfecha, y sea q un divisor primo de F_n . Vamos a mostrar que $q \geq F_n$, seguramente implica que F_n es primo. De hecho, la congruencia mod F_n implica que también $3^{F_n-1/2} \equiv -1 \pmod{q}$ puesto que q divide a F_n . Esto dice que 3 tiene orden $F_n - 1$ en el grupo $(\mathbb{Z}/(q))^*$, que a su vez implica $F_n - 1$ divide a $q - 1$, y se concluye $q \geq F_n$.

En el siglo 19 Proth generalizó el método de Pépin para dar criterios de primalidad para números $A2^n + 1$, donde $A \leq 2^n$. Resulta que la famosa prueba de Lucas-Lehmer para primalidad de los números de Mersenne también se puede establecer usando reciprocidad cuadrática, aunque esta no es la demostración original. Berrizbeitia y colaboradores generalizaron todos estos resultados, dando criterios muy eficientes para números $Ap^s \pm 1$ para una variedad de primos p y un criterio algo menos eficiente para números $Am^s \pm 1$. Aún cuando criterios similares habían sido propuestos por Hugh Williams, (de la Universidad de Calgary) y colaboradores en la década de los 70, la metodología usada por Berrizbeitia y colaboradores resultó más clara y eficiente. Para estas generalizaciones se usa el análogo del símbolo de Legendre, el “símbolo de potencia residual”, que trata de potencias s -ésimas mod p , con $s > 2$, y que toma sus valores en las raíces s -ésimas de la unidad, y que satisface una “ley de reciprocidad superior”. Las demostraciones de estos criterios generales todas siguen el patrón de Pépin: el criterio de primalidad de N implica, si N es primo, mediante uso de las propiedades básicas del símbolo que cierta ecuación

debe cumplirse. En la otra dirección, las hipótesis implican la existencia de un elemento de orden muy grande en cierto grupo asociado con un supuesto divisor primo, lo que implica que el divisor resulta $> \sqrt{N}$. Sin embargo, el manejo del símbolo de potencia residual no es nada fácil, y presenta muchas dificultades técnicas, la principal deriva del hecho que el anillo $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/s}]$ en general no es un dominio de factorización única. En los trabajos [2,5-7,11] se ve como domina Berrizbeitia el andamio conceptual y las técnicas computacionales de la teoría de reciprocidad superior.

El trabajo [3] introduce otro método elemental pero astuto para probar primalidad. Allí se extiende la noción de Pseudocuos, introducida por Lehmer hace más de 50 años, a la de Pseudocubos. Según Bernstein, la técnica de primalidad basada en la teoría de pseudocuos deriva en el algoritmo más eficiente de primalidad para números de hasta 80 dígitos binarios. Hugh Williams había estado trabajando en la posibilidad de extender esa noción desde hace muchos años. Es la técnica introducida por Berrizbeitia la que finalmente hace que esta extensión se haya logrado en [3]. Desde el punto de vista práctico, el algoritmo presentado en [3], basado en la noción de pseudocubos supera al algoritmo basado en la noción de pseudocuos.

El trabajo [8] trata de una técnica diferente, la de pruebas probabilistas de primalidad, que permiten concluir que un entero es “probablemente primo”, con probabilidad de error no mayor que cierta cantidad pequeña. Aunque sobreseído como prueba general, la prueba de este trabajo sigue siendo útil para ciertos números de forma especial, como por ejemplo $1 + a + a^2 + \dots + a^{p-1}$, p primo, a cualquiera.

Finalmente, llegamos al trabajo [1], que es una contribución a la búsqueda de un criterio de primalidad de un entero arbitrario, sin forma especial. Es seguramente la contribución de mayor impacto internacional que ha obtenido hasta ahora Berrizbeitia. El contexto es el siguiente. El objetivo es tener un algoritmo polinomial, es decir $O(\log^k n)$ para algún k , que decide la primalidad de n . Los algoritmos conocidos hasta la década de los ochenta del siglo pasado eran, por contraste, *exponenciales*, es decir $O(k^{\log n})$ en vez de $O(\log^k n)$.

En los años 80, Adleman, Pomerance, Rumely Cohen y Lenstra desarrollaron, mediante el uso de métodos muy sofisticados de la teoría algebraica de números, un algoritmo entre polinomial y exponencial, y al que en realidad le faltaba poco para ser polinomial. (Este algoritmo, conocido en honor a sus inventores como APRCL, sigue siendo en la práctica el más rápido conocido.) Por casi veinte años no hubo progreso significativo hacia un algoritmo verdaderamente polinomial, hasta que, en agosto 2002, tres hindúes, Agrawal, Kayal y Saxena, dejaron atónito al mundo matemático cuando publicaron como preprint un tal algoritmo (llamado ahora algoritmo AKS), basado en ideas bastante elementales. Se sigue con una reseña muy breve del algoritmo AKS.

Todo empieza con el pequeño teorema de Fermat:

Teorema F1. *Si p es primo y a un entero, entonces $a^p \equiv a \pmod{p}$.*

La recíproca es incierta, así que el teorema no da un criterio de primalidad.

Pero, al nivel de polinomios, se tiene:

Teorema F2. *El entero n es primo si y solo si $(x+1)^n \equiv x+1 \pmod{n}$.*

Sin embargo, y en contraste la situación con enteros, la complejidad del cálculo de $(x+1)^n \pmod{n}$ es exponencial, así que F2 tampoco brinde un criterio polinomial para la primalidad de n . Fue el genio de los tres Hindúes el ver que F2, conocido y despreciado por todos los han trabajado en el campo, podía modificarse a dar un criterio polinomial. Ellos probaron⁴:

Lema (AKS). *Sea n un entero positivo. Entonces existe $r \leq \lceil 16 \log^5 n \rceil$ tal que el orden de $n \pmod{r}$ es $> 4 \log^2 n$.*

Teorema (AKS). *Sea n un entero positivo y r como en el lema AKS. Suponga que:*

1. *n no tiene divisores menores que $\sqrt{r} \log n$.*
2. *n no es una potencia (≥ 2) de un primo.*
3. *$(a+x)^n \equiv a+x \pmod{(n, x^r-1)}$ para todo a tal que $0 < a < \sqrt{r} \log n$.*

Entonces, n es primo.

Un cálculo demuestra que usar el teorema para determinar la primalidad de n es de complejidad $\tilde{O}(\log^{10.5} n)$.⁵ El punto clave es que el cálculo de $(a+x)^n \pmod{(n, x^r-1)}$ se vuelve polinomial debido al término (x^r-1) en el módulo.

La demostración es por contradicción. Suponga que n satisface las hipótesis del teorema AKS pero es compuesto (de manera que n tiene por lo menos dos factores primos). Sea p un factor primo de n , y sea $h(x)$ un factor del polinomio ciclotómico $\phi_r(x)$ irreducible en $\mathbb{Z}_p[x]$. Para m fijo los polinomios $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tales que $g(x)^m \equiv g(x^m) \pmod{(p, x^r-1)}$ generan un subgrupo G del grupo multiplicativo del cuerpo $\mathbb{Z}_p[x]/(h)$ y la hipótesis (iii) del teorema AKS provee miembros de G (y m escogido apropiadamente). Mediante un argumento de tipo combinatorio se prueba que estos elementos generan un subgrupo grande de G , lo que provee una cota inferior para el orden de G , y por otro lado se prueba que si n tiene por lo menos dos factores primos el orden de G es menor que la cota inferior calculada, una contradicción.

La aparición del preprint AKS desató un “feeding frenzy” entre los especialistas de la materia. En el original los autores probaron que el algoritmo era de complejidad $\tilde{O}(\log^{12} n)$. Por los esfuerzos de varios matemáticos destacados esto se mejoró a $\tilde{O}(\log^6 n)$, pero las mejoras se obtuvieron esencialmente debido a un análisis más fino del algoritmo, y no por mejoras en el algoritmo mismo.

⁴La versión dada aquí es la de la segunda versión del preprint, que ya incorpora unas mejoras.

⁵ $\tilde{O}(f(k))$ significa $O(f(k)g(\log f(k)))$ donde g es un polinomial.

En noviembre 2003 Berrizbeitia publicó un preprint, en el cual, usando ideas nuevas, y evidentemente influido por sus trabajos anteriores sobre pruebas de primalidad para números de forma especial, él produjo una modificación de AKS que para una familia grande de números es $\tilde{O}(\log^4 n)$. La versión final del teorema apareció en [1], con r una potencia de 2 y $n \equiv 1 \pmod{4}$. La generalización a todo r se debe a Bernstein y Mihalescu-Avanzi, independientemente. Teorema. *Sea n un entero positivo, y sea r un divisor de $n - 1$, y suponga que $c \log^2 n > r > \log^2 n$, donde c es una constante que no depende de n . Suponga además que si d divide a n entonces $d \equiv 1 \pmod{r}$. Sea a un entero tal que $\omega = a^{n-1/r}$ tiene orden $r \pmod{n}$, y también $\pmod{\text{cualquier divisor primo de } n}$. Suponga*

1. n no tiene divisores primos menores que r .
2. n no es una potencia (≥ 2) de un primo.
3. $(1 + x)^n \equiv 1 + x^n \pmod{(n, x^r - a)}$ Entonces, n es primo.

Claro, la gran ventaja de este sobre el AKS original yace en (3), que requiere una sólo exponenciación polinomial en vez de $\sqrt{r} \log n - 1$.

Trabajos subsecuentes de D. Bernstein y otros han logrado extender las ideas de Berrizbeitia hasta el punto en que ahora se tiene un algoritmo $\tilde{O}(\log^4 n)$ para todos los enteros. Ver [BN] para las últimas noticias. A Berrizbeitia le queda el crédito de haber suministrado la idea fundamental sin la cual no se habría logrado la mejora de $\tilde{O}(\log^6 n)$ a $\tilde{O}(\log^4 n)$, mejora que deja AKS al borde de ser el mejor algoritmo tanto en la práctica como en la teoría para probar primalidad.

Referencias

- [BN] D. J. Bernstein. *Distinguishing prime numbers from composite numbers: the state of the art in 2004*. URL: <http://cr.yp.to/papers.html#prime2004>
- [BS] V. Bergelson and D. Shapiro. *Multiplicative subgroups of finite index in a ring*. Proc. Amer. Math.Soc. 116 (1992) 885-896.
- [GR] Andrew Granville. *It is easy to determine whether a given integer is prime*. Bull. Amer. Math. Soc. 42 (2005), 3-38. (Disponible gratis on-line. URL: www.ams.org/journals).
- [RA] Rapinchuk, Andrei S.; Segev, Yoav; Seitz, Gary M. *Finite quotients of the multiplicative group of a finite dimensional division algebra are solvable*. J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), no. 4, 929-978
- [TU] Gerhardt Turnwald. *Multiplicative subgroups of finite index in a division ring*. Proc. Amer. Math.Soc. 120 (1994) 377-381.

Publicaciones de Pedro Berrizbeitia

1. P. Berrizbeitia *Sharpening "Primes is P" for a large family of numbers* Math. of Comp. Vol. 74 , num 252, pp. 2043–2059 (2005).
2. P. Berrizbeitia y T. G. Berry. *Biquadratic reciprocity and a Lucasian primality test.* Math. Comp. Vol 73, pp. 1559–1564 (2004).
3. P. Berrizbeitia, S. Mueller y H. C. Williams. *Pseudocubes and Primality Testing.* Proceedings of ANTS VI. Lecture Notes in Computer Science (LNCS). Vol. 3076. pp. 102–116 (2004).
4. P. Berrizbeitia y R. Giudici. *On Cycles in the sequence of Unitary Cayley Graphs.* Discrete Math. Vol. 282, no.1-3, pp. 239–243 (2004).
5. P. Berrizbeitia, T. G. Berry, y J. Tena-Ayuso. *A Generalization of the Proth Theorem.* Acta Arithmetica. 110.2, 107–115 (2003).
6. P. Berrizbeitia, M. Odreman y J. Tena. *Primality Test for Numbers M with a high power of 5 dividing $M^4 - 1$.* Latin American Theoretical Informatics (Punta del Este, 2000). Theor. Comp. Sci. 297, no.1-3, 25–36 (2003).
7. P. Berrizbeitia. *Pruebas Determinísticas de Primalidad.* Gaceta Real Ac. Esp. Vol. 4, no. 2, 447–456 (2001).
8. P. Berrizbeitia y B. Iskra. *Deterministic primality test for numbers of the form $A^23^n + 1, n > 3$ odd.* Proc. Am. Math. Soc. Vol 130, Num 2, 363–365. (2001).
9. P. Berrizbeitia y T.G. Berry. *Generalized Strong Pseudoprime Tests and Applications.* J. Symb. Comp. 30, No. 2, 151–160. (2000).
10. P. Berrizbeitia y P.D.T.A. Elliott. *Product Basis for the Rationals.* Canad. Math. Bull. 42, No. 4, 441–444. (1999).
11. P. Berrizbeitia y T.G. Berry. *Cubic Reciprocity and Generalised Lucas-Lehmer Tests for Primality of $A3^n \pm 1$.* Proc. Amer. Math. Soc. 127, no.7, 1923–1925. (1999).
12. J.L. Palacios, J.M. Renom, P. Berrizbeitia. *Random walks on edge-transitive graphs.* Stat. and Prob. Lett. 43, No. 1, 25–32. (1999).
13. P. Berrizbeitia y P.D.T.A. Elliott. *On Product of Shifted Primes. Paul Erdős(1913-1996)* Ramanujam J. 2, no 1–2, pp 219–223. (1998).
14. P. Berrizbeitia y R. Giudici. *Counting K -cycles in Unitary Cayley Graphs.* Disc. Math. vol. 149, 11–18. (1996).

15. P. Berrizbeitia. *A note on Fixed Points of Polynomials*. Acta Científica Venezolana. Vol 46, No.3, 159–160. (1995).
16. P. Berrizbeitia. *Additive Properties of Multiplicative Subgroups of Finite Index in Fields*. Proc. Amer. Math. Soc., volume 112, No. 2, 365–369. (1991).
17. P. Berrizbeitia, L. Mata-Lorenzo y L. Recht. *A uniqueness Theorem for the Unitary Part of a Reflexion*. Jour. of Math. Analysis and App. Vol 152, No.2, 448–454. (1990).

Monografías

1. P. Berrizbeitia. *Algoritmos Deterministas de Primalidad*. XVII Escuela Venezolana de Matemáticas, Asociación Matemática Venezolana, Centro de Estudios Avanzados, Ivic. Caracas, Venezuela. 2004. ISBN: 980-261-077-1.
2. P. Berrizbeitia. *Algunos Aspectos Introdutorios de la Teoría de Números*. IV Escuela Venezolana de Matemáticas, A.M.V., C.E.A., I.V.I.C. Caracas, Venezuela. 1991.

INFORMACIÓN NACIONAL

**Asociación Matemática Venezolana
XIX JORNADAS VENEZOLANAS DE
MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE ORIENTE
Cumaná, 03 al 06 de abril 2006**

COMITÉ ORGANIZADOR:

Said A. Kas-danouche (coordinador) (skasdano@sucre.udo.edu.ve)
Rodrigo Martínez, UDO-Sucre (yigo54@cantv.net)
Ennis Rosas, UDO-Sucre (erosas@sucre.udo.edu.ve)
Saúl Mosqueda, UDO-Sucre (sajomopa@cantv.net)
Luís Rojas, IUT-Cumaná (frojasv@cantv.net)
Julio Marín, UDO-Sucre (jmarin@sucre.udo.edu.ve)
Sael Romero, UDO-Sucre (sromero@sucre.udo.edu.ve)
Daniel Brito, UDO-Sucre (dbrito@sucre.udo.edu.ve)

COMITÉ DE PROGRAMA:

Wilfredo Urbina, UCV (coordinador) (wurbina@euler.ciens.ucv.ve)
María Rosa Brito, USB (brito@usb.ve)
José Héber Nieto, LUZ (jhneto@yahoo.com)
Said A. Kas-danouche, UDO-Sucre (skasdano@sucre.udo.edu.ve)
Neptalí Romero, UCLA (nromero@uicm.ucla.edu.ve)
Ennis Rosas, UDO (erosas@sucre.udo.edu.ve)
Carlos Uzcátegui, ULA (uzca@ula.ve)

SESIONES Y SELECCIÓN DE TRABAJOS

Como ya es tradición, la presentación de trabajos se hará por sesiones. La decisión de cuántas y cuáles sesiones habrá recae sobre el Comité de Programa. Las personas y grupos interesados en la inclusión de un área en las jornadas, deberán notificarlo a uno de los miembros del Comité de Programa o del Comité Organizador, incluyendo sugerencias para posibles coordinadores. La aceptación de trabajos para cada sesión, así como la organización de la misma, será responsabilidad del coordinador designado por el Comité de Programa.

FECHAS

- Proposiciones de sesiones: hasta el 31 de octubre del 2005.
- Anuncio de las sesiones aprobadas por el Comité de Programa (y envío del segundo aviso): 10 de diciembre del 2005.
- Recepción de resúmenes: hasta el 15 de enero del 2006.
- Respuestas para la aceptación de trabajos: 31 de enero del 2006.

INFORMACIÓN INTERNACIONAL

La Esquina Olímpica

Rafael Sánchez Lamonedá

En esta oportunidad reseñaremos la actividad olímpica de todo el año 2005. Como ya es tradición participamos en la 46^a Olimpiada Internacional de Matemáticas, IMO, celebrada en Mérida, México, del 8 al 19 de Julio, la VII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, San Salvador del 18 al 24 de Junio y la XX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, OIM, celebrada en Cartagena, Colombia, del 24 de Septiembre al 1 de Octubre. También participamos en la Olimpiada Bolivariana de Matemáticas y la Olimpiada Matemática de Mayo. En todas estas competencias ganamos premios, y ya estamos trabajando para las olimpiadas del 2006.

En esta nota quiero dar la bienvenida a dos nuevas profesoras, Silvina María de Jesús y Laura Vielma, las cuales han trabajado en los entrenamientos de este año con mucha dedicación, así como también al grupo de profesores de la Escuela de Matemáticas de la Universidad de Carabobo, coordinados por Angel Sánchez. Este grupo se une a los veteranos de Maracaibo, Barquisimeto y Caracas. Las puertas están abiertas para todos los colegas que deseen colaborar con este programa.

Delegaciones y premios obtenidos en la IMO, la OIM y la OMCC en el año 2005.

46^a IMO

Roland Hablutzel. Mención Honorífica.

Leonardo Urbina .

Adolfo Rodríguez. Tutor de delegación. UCV.

Rafael Sánchez. Jefe de delegación. UCV.

XX OIM

Leonardo Urbina. Medalla de Plata.

Roland Hablutzel. Medalla de Bronce.

Víctor Villamizar.

Rafael Guédez.

Héctor Chang. Tutor de la delegación. USB.

Henry Martínez. Jefe de la delegación. UPEL-IPC.

VII OMCC

Sofía Taylor. Medalla de Bronce.

Carmela Acevedo. Mención Honorífica.

Isabel Clemente.

Laura Vielma. Tutor de la delegación. Academia Washington.

Silvina María de Jesús. Jefe de la delegación. UPEL-IPC.

En la Olimpiada Bolivariana de Matemáticas y la Olimpiada de Mayo también obtuvimos premios, pero la lista de ganadores es muy grande y queremos dejar espacio para los problemas de algunas de las competencias del 2005, sin embargo destacamos los premios obtenidos: Una medalla de oro, una de plata, 8 de bronce y 6 menciones honoríficas en la Olimpiada de Mayo y tres medallas de plata, dos de bronce y dos menciones honoríficas en la Olimpiada Bolivariana, para un total de 28 premios en el año 2005.

Como siempre finalizamos con algunos de los problemas de las competencias a las cuales asistimos. En esta oportunidad les mostramos los exámenes de la IMO 2005. Como en todas estas competencias, cada problema vale 7 puntos y el tiempo de duración de cada prueba es de 4 horas y media.

46^a Olimpiada Internacional de Matemáticas

Primer día

Mérida, México, miércoles 13 de julio de 2005

Problema 1. Se eligen seis puntos en los lados de un triángulo equilátero ABC : A_1 y A_2 en BC , B_1 y B_2 en CA , C_1 y C_2 en AB . Estos puntos son los vértices de un hexágono convexo $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ cuyos lados son todos iguales. Demuestre que las rectas A_1B_2 , B_1C_2 y C_1A_2 son concurrentes.

Problema 2. Sea a_1, a_2, \dots una sucesión de enteros que tiene infinitos términos positivos e infinitos términos negativos. Supongamos que para cada entero positivo n , los números a_1, a_2, \dots, a_n tienen n restos distintos al ser divididos entre n . Demuestre que cada entero se encuentra exactamente una vez en la sucesión.

Problema 3. Sean x, y, z números reales positivos tales que $xyz \geq 1$. Demuestre que

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

46^a Olimpiada Internacional de Matemáticas

Segundo día

Mérida, México, jueves 14 de julio de 2005

Problema 4. Consideremos la sucesión infinita a_1, a_2, \dots definida por

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Determine todos los enteros positivos que son primos relativos (coprimos) con todos los términos de la sucesión.

Problema 5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo que tiene los lados BC y AD iguales y no paralelos. Sean E y F puntos en los lados BC y AD , respectivamente, que son distintos de los vértices y satisfacen $BE = DF$. Las rectas AC y BD se cortan en P , las rectas BD y EF se cortan en Q , las rectas EF y AC se cortan en R . Consideremos todos los triángulos PQR que se forman cuando E y F varían. Demuestre que las circunferencias circunscritas a esos triángulos tienen en común otro punto además de P .

Problema 6. En una competencia de matemáticas se propusieron 6 problemas a los estudiantes. Cada par de problemas fue resuelto por más de $\frac{2}{5}$ de los estudiantes. Nadie resolvió los 6 problemas. Demuestre que hay al menos 2 estudiantes tales que cada uno tiene exactamente 5 problemas resueltos.

ESCUELA DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA,
VENEZUELA
rsanchez@euler.ciens.ucv.ve

AGRADECIMIENTO

Agradecemos la colaboración prestada por las siguientes personas en el trabajo editorial del volumen XII del Boletín de la AMV:

Walter Bergweiler, Pedro Berrizbeitia, Tom Berry, Antonio Campillo, Javier de Frutos, Carlos Di Prisco, Pedro Embid, José García-Cuerva, Sabrina Garbin, Luis Gómez Sánchez, Boris Iskra, John R. King, Felipe Linares, Santiago López, John Neuberger, César Palencia Lara, Lázaro Recht, Nephtalí Romero, Rafael Sánchez, Tomás Sánchez Giralda, Victor Sirvent, Juan Tena, Wilfredo Urbina, Carmen Judith Vanegas, Mario Wschebor

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana está dirigido a un público matemático general que incluye investigadores, profesores y estudiantes de todos los niveles de la enseñanza, además de profesionales de la matemática en cualquier espacio del mundo laboral. Son bienvenidos artículos originales de investigación en cualquier área de la matemática; artículos de revisión sobre alguna especialidad de la matemática, su historia o filosofía, o sobre educación matemática. El idioma oficial es el español, pero también se aceptan contribuciones en inglés, francés o portugués.

Todas las contribuciones serán cuidadosamente arbitradas.

El Boletín publica información sobre los eventos matemáticos más relevantes a nivel nacional e internacional, además de artículos de revisión y crítica de libros de matemática. Se agradece el envío de esta información con suficiente antelación.

Todo el material a ser publicado es revisado cuidadosamente por los editores. Sin embargo, el contenido de toda colaboración firmada es responsabilidad exclusiva del autor.

Cualquier colaboración debe ser enviada al Editor, preferiblemente por correo electrónico (via bol-amv@ma.usb.ve) como archivo postscript, pdf, o un dialecto estándar de TeX. Las colaboraciones en forma impresa deben enviarse por triplicado con figuras y símbolos cuidadosamente dibujados a la Dirección Postal. Para la preparación del manuscrito final recomendamos y agradecemos usar los archivos de estilo LaTeX del Boletín que se encuentran en su página web.

El precio actual de un ejemplar es de Bs. 10.000 (US\$ 10).

The Boletín de la Asociación Matemática Venezolana (Bulletin of the Venezuelan Mathematical Association) is address to a broad mathematical audience that includes researchers, teachers and students at all collegiate levels, and also to any mathematics professional wherever in the labour world. We welcome papers containing original research in any area of mathematics; expository papers on any topic of mathematics, its history or philosophy, or education. The official language is Spanish, but contributions in English, French or Portuguese are also acceptable.

All contributions will be carefully refereed.

The Boletín publishes information on any relevant mathematical event, national or international, and also book reviews. We appreciate receiving this type of information with plenty of time in advance.

All material to be published is carefully revised by the editors. Nonetheless, the content of all signed contributions is of the exclusive responsibility of the author.

All contributions should be sent to the Editor, preferably by email (via bol-amv@ma.usb.ve) in postscript, pdf, or any standard self-contained TeX file. Submissions in printed form should be sent in triplicate with figures and symbols carefully drawn to our Postal Address. For the preparation of the final manuscript we recommend and appreciate the use of the appropriate LaTeX style file of the Boletín, which can be downloaded from its web page.

The current price for one issue is Bs. 10.000 (US\$ 10).

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela
Tel.: +58-212-5041412. Fax: +58-212-5041416
email: bol-amv@ma.usb.ve
URL: <http://boletinamv.ma.usb.ve/>

Impreso en Venezuela por Editorial Texto, C.A.

Telfs.: 632.97.17 – 632.74.86