Un teorema de De Rham en el contexto de la Geometría no Conmutativa *

Fernando Mejías

Resumen

Presentamos una perspectiva histórica sobre como se usan las formas diferenciales no conmutativas (las cuales fueron primero introducidas por A. Connes) para construir una versión no conmutativa del complejo de Cenkl y Porter $\Omega^{*,*}(X)$ para un conjunto simplicial de tipo finito X, donde $\Omega^{*,*}(X)$ es un álgebra diferencial graduada con una filtración $\Omega^{*,q}(X) \subset \Omega^{*,q+1}(X)$, tal que $\Omega^{*,q}(X)$ es un módulo sobre $\mathbf{Q}_q$ (el menor subanillo de los racionales que contiene a $1/p$ si $p \leq q$). Seguidamente se usan versiones no conmutativas del Lema de Poincaré y del teorema de Stokes para demostrar el teorema no conmutativo moderado de De Rham: si X es un conjunto simplicial de tipo finito, entonces para cada $q \geq 1$ y cualquier módulo M sobre $\mathbf{Q}_q$, la integración de formas induce un isomorfismo natural de módulos sobre $\mathbf{Q}_q$ $I : H^i(\Omega^{*,q}(X), M) \to H^i(X; M)$ para todo $i \geq 0$.

Abstract

We present a historial view about how noncommutative differential forms (which were first introduced by A. Connes) can be used to construct a noncommutative version of the complex of Cenkl and Porter $\Omega^{*,*}(X)$ for a simplicial set of finite type X, such that $\Omega^{*,*}(X)$ is a differential graded algebra with a filtration $\Omega^{*,q}(X) \subset \Omega^{*,q+1}(X)$, and $\Omega^{*,q}(X)$ is a module over $\mathbf{Q}_q$ (the smallest subring of the rationals which contains $1/p$ whenever $p \leq q$). Next we use noncommutative versions of the Poincaré Lemma and Stokes' theorem to prove the noncommutative tame de Rham theorem: if X is a simplicial set of finite type, then for each $q \geq 1$ and any $\mathbf{Q}_q$-module M, then integration of forms induces a natural isomorphism of $\mathbf{Q}_q$-modules $I : H^i(\Omega^{*,q}(X), M) \to H^i(X; M)$ for all $i \geq 0$.

Palabras Clave/Keywords: Complejo de Cenkl y Porter, formas diferenciales no conmutativas moderadas, conjuntos simpliciales, teorema de De Rham.

2001 Mathematics Subject Classification. Primary 55N35.

*El contenido de este trabajo es una versión ampliada del material presentado por el autor en una conferencia durante las XVII Jornadas de Matemática de la Asociación Matemática Venezolana, realizada en el Núcleo Universitario "Rafael Rangel" de la Universidad de Los Andes en Trujillo en el año 2004.

1 Introducción

Los inicios de la topología diferencial se encuentran asociados a la exploración de triangulación de una variedad incentivados por los trabajos de Poincaré. En especial, E. Cartan usó la teoría global de formas diferenciales con relación a este problema. En particular, Cartan demostró que sobre $\mathbf{R}^n$ cualquier p-forma es la diferencial de una $(p-1)$-forma; una generalización del caso clásico $p=1$ que Cartan denominó el "recíproco del lema de Poincaré". Cartan mismo hizo notar que dicho resultado no es cierto si en lugar del espacio $\mathbf{R}^n$ se considera una variedad suave arbitraria X.

Para la exploración de este tema Cartan sugirió considerar la función bilineal

$$(c,\omega) \to \langle c,\omega\rangle = \int_c \omega,$$

donde c es un p-ciclo de una triangulación de X y ω es una p-forma diferencial cerrada sobre X y planteó utilizar el teorema de Stokes para resolver los siguientes problemas:

(I) Si ω es una p-forma cerrada con $\langle c,\omega\rangle = 0$ para todos los p-ciclos c, entonces ω es exacta.

(II) Si c es un p-ciclo cerrado con $\langle c,\omega\rangle = 0$ para todas las p-formas cerradas ω, entonces c es una frontera.

El problema de Cartan fue publicado en 1928. Por esos días De Rham consideró el problema de Cartan como parte de su trabajo de tesis. En dicho trabajo De Rham demostró que cualquier p-forma sobre X se puede escribir como $\omega + d\zeta$, donde ω es una combinación lineal de p-formas elementales y ζ es una $(p-1)$-forma y a partir de esta idea dedujo las proposiciones (I) y (II).

Con el desarrollo de la teoría de homología, más específicamente las técnicas de cohomología, resultó claro que el trabajo de De Rham podía ser expresado en términos del complejo $(\Omega^*(X), d)$ de las formas diferenciales sobre X y del complejo de cocadenas singulares estándar $(C^*(X),\delta)$ derivado de la triangulación de X, así, si $H^i(\Omega^*(X),\mathbf{R})$ y $H^i(C^*(X),\mathbf{R})$ representan los i-ésimos espacios vectoriales de cohomología de los respectivos complejos tenemos

Teorema. *Sea X una variedad suave de dimensión n. Entonces para cada $i \geq 0$ existe un isomorfismo natural de espacios vectoriales sobre $\mathbf{R}$*

$$H^i(X;\mathbf{R}) \xrightarrow{\cong} H^i(\Omega_{*,q}(X);\mathbf{R}).$$

En 1976, H. Cartan publicó en [5] otra versión del teorema de De Rham considerando una filtración $A^{*,q}(X;\mathbf{Z}) \subset A^{*,q+1}(X)$ para el complejo de las formas polinómicas $A^*(X;\mathbf{Q})$ sobre un espacio simplicial X, obteniendo un isomorfismo

$$H^i(A^{*,q}(X;\mathbf{Z})) \xrightarrow{\cong} H^i(X;\mathbf{Z}),$$

para $i \leq q$.

Aunque en este caso no se pudo construir un "modelo" para A^*, en el sentido de la estructura construida por Sullivan en [38] para estudiar el complejo $\Omega^*(X;\mathbf{Q})$. Esta situación fue parcialmente mejorada hacia 1983, cuando Cenkl y Porter [10,11] construyeron un "modelo" especial después de demostrar el teorema de De Rham para formas cúbicas. Cenkl y Porter construyeron un complejo de formas diferenciales polinómicas $T^*(X,\mathbf{Z})$ con filtración $T^{*,q}(X) \subset T^{*,q+1}(X)$ dependiendo del grado de los polinomios y las formas elementales, de tal manera que $T^{*,q}(X)$ es un módulo sobre $\mathbf{Q}_q$ (el menor subanillo de los racionales que contiene a $1/p$ si $p \leq q$). Así ellos demostraron que la integración de formas induce un isomorfismo de módulos $I : H^i(T^{*,q}(X;\mathbf{Q}_q)) \xrightarrow{\cong} H^i(X;\mathbf{Q}_q)$ para todo i y para todo q, siendo X un espacio simplicial de tipo finito.

Posteriormente Boullay, Kefer, Majewski, Stelzer, Scheerer, Unsöld y Vogt [4] extendieron la teoría de Cenkl y Porter a un conjunto simplicial general.

En 1987 Karoubi intentó obtener en [21] un "modelo" más general considerando el complejo de De Rham $\Omega^*(X)$ de las formas diferenciales no conmutativas sobre un espacio simplicial X (las cuales fueron introducidas originalmente por Connes en [12]) y demostrando una versión del teorema de De Rham en este contexto. Trabajando con esta idea, por ejemplo, Battikh en [3] introdujo una generalización del *cup product* $\cup$ en cohomología.

Una versión ligeramente más general del resultado de Karoubi fue demostrada en 1998 por Cenkl (ver [7]). Tanto Karoubi como Cenkl probaron los mencionados teoremas usando técnicas similares a las que usó Cartan en su *paper* de 1976. Sin embargo, en [20] que si el anillo Λ de coeficientes se supone ser un subanillo de los racionales, entonces una versión del teorema no conmutativo de De Rham podría ser demostrada al estilo del teorema clásico. El objetivo final del presente artículo es la presentación de una solución a dicho problema, para lo cual se considera una versión no conmutativa del complejo de formas diferenciales de Cenkl y Porter $\Omega^{*,*}(X)$ para un espacio simplicial de tipo finito, obteniendo el siguiente *teorema no conmutativo moderado de De Rham*:

Teorema. *Sea X un espacio simplicial de tipo finito. Entonces para cada $q \geq 1$ y cada módulo M sobre $\mathbf{Q}_q$ existe un isomorfismo natural de módulos sobre $\mathbf{Q}_q$ tal que*

$$H^i(\Omega^{*,q}(X);M) \xrightarrow{\cong} H^i(X;M)$$

para todo $i \geq 0$. El isomorfismo es inducido por integración.

2 Conjuntos simpliciales

En esta sección presentamos una breve introducción al concepto de objeto simplicial y estudiamos algunos ejemplos. Para más detalles ver [26], [27] y [29].

Un *conjunto simplicial* X es un conjunto graduado con índices enteros no negativos junto con los operadores $d_i : X_k \to X_{k-1}$ y $s_i : X_k \to X_{k+1}$, $0 \leq i \leq k$, los cuales satisfacen las siguientes identidades:

(i) $d_i d_{j+1} = d_j d_i$ si $i \leq j$,

(ii) $s_i s_j = s_{j+1} s_i$ si $i \leq j$,

(iii) $d_i s_j = s_{j-1} d_i$ si $i < j$,

(iv) $d_j s_j = \text{identidad} = d_{j+1} s_j$,

(v) $d_i s_j = s_j d_{i-1}$ si $i > j+1$.

Los elementos de X_k se denominan *simplices de dimensión* k o simplemente k-*simplices.*

Dados dos conjuntos simpliciales X e Y, y una función $f : X \to Y$, decimos que f es una *transformación simplicial (de grado cero)* si f conmuta con los operadores di y s_i para todo i y para todo k. El *producto cartesiano* $X \times Y$ es el conjunto simplicial $(X \times Y)_k = X_k \times Y_k$ con

$$d_i(x, y) = (d_i x, d_i y), s_i(x, y) = (s_i x, s_i y), \text{ para todo } x \in X_k, y \in Y_k \text{ y } 0 \leq i \leq k.$$

Ejemplo 2.1 Sea V un conjunto parcialmente ordenado. Sea X_k el conjunto de todas las sucesiones finitas $(x_0, \ldots, x_k)$, con $x_0 \leq \ldots \leq x_k$, $x_0, \ldots, x_k \in V$. Definamos $d_i : X_k \to X_{k-1}$ y $s_i : X_k \to X_{k+1}$, $0 \leq i \leq k$ por

$$d_i(x_0, \ldots, x_k) = (x_0, \ldots, x_{i-1}, \hat{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_k) \text{ (omitir } x_i)$$

y

$$s_i(x_0, \ldots, x_k) = (x_0, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k) \text{ (repetir } x_i).$$

Entonces $X = \{X_k\}$ es un conjunto simplicial.

Ejemplo 2.2 Denotemos por Δ la categoría cuyos objetos son todas las sucesiones finitas de enteros $\Delta(n) = \{0, 1, \ldots, n\}$ y los morfismos son todas las funciones crecientes $f : \Delta(n) \to \Delta(m)$ (para todo $0 \leq i \leq j \leq n$ tenemos $f(i) \leq f(j)$).

Definimos los operadores $\delta_i : \Delta(n-1) \to \Delta(n)$ y $\sigma_i : \Delta(n+1) \to \Delta(n)$ para $0 \leq i \leq n$ por

$$\delta_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j < i, \\ j+1 & \text{si } j \geq i \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \sigma_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j \leq i, \\ j-1 & \text{si } j > i. \end{cases}$$

Entonces cada $f \in \mathrm{Hom}\,(\Delta(\mathrm{n}), \Delta(\mathrm{m}))$ puede ser escrita como un producto finito de algunas δ y σ.

Un *objeto simplicial en una categoría* $\mathcal{C}$ es un functor contravariante $F : \Delta \to \mathcal{C}$. Un conjunto simplicial X puede ser identificado con un objeto simplicial en la categoría de los conjuntos **Set**, $F : \Delta \to \mathbf{Set}$, $X = F(\Delta_n) = X$ (ver [26], p. 233 o [29], p. 4).

Si Λ es un anillo, un Λ-*módulo simplicial* es un objeto simplicial en la categoría **Mod** de los módulos sobre el anillo Λ. Si M y N son Λ-módulos simpliciales, entonces el producto tensorial $M \otimes N$ es también un Λ-módulo simplicial con d_i y s_i sobre $(M \otimes N)_k = M_k \otimes N_k$ definidos así:

$d_i(x\otimes y) = d_i x \otimes d_i y$, $s_i(x\otimes y) = s_i x \otimes s_i y$, para todo $x \in X_k$, $y \in Y_k$ y $0 \le i \le k$.

Un *álgebra graduada simplicial* $A^* = \oplus_{n\ge 0} A^n$ es una familia de ágebras graduadas $A^*_k = \oplus_{n\ge 0} A^n_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ sobre un anillo conmutativo Λ la cual es un conjunto simplicial y los operadores d_i y s_i son morfismos de álgebras graduadas.

Ejemplo 2.3 Sea $\Delta_n = \{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \,|\, 0 \le a_i \le 1, \sum a_i = 1\}$ el *n-simplex estándar* (Figure 1-1). Las funciones $\delta_i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$ y $\sigma_i : \Delta_{n+1} \to \Delta_n$

$$\delta_i(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})$$

y

$$\sigma_i(x_0, \dots, x_{n+1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+1}).$$

Sea P_n la colección de todos los polinomios $f : \Delta_n \to \mathbf{R}$ con coeficientes en $\mathbf{Z}$ y sea $P = \{P_n\}_{n\ge 0}$. Entonces P es un conjunto simplicial. En este caso tenemos $\partial_i : P_n \to P_{n-1}$ y $s_i : P_n \to P_{n+1}$ definidos para dada $f \in P_n$ por

$$\partial_i(f) = f \circ \delta_i \qquad \text{y} \quad s_i(f) = f \circ \sigma_i,$$

La multiplicación de polinomios induce una estructura de ágebra sobre P. Entonces P es un ágebra simplicial.

Ejemplo 2.4 En lugar del simplex estándar Δ_n (como en el Ejemplo 2.3) consideramos Δ_n como el subconjunto de la frontera de I^{n+1} (el $(n+1)$-cubo en $\mathbf{R}^{n+1}$) dado por

$$\{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} : 0 \le x_i \le 1 \text{ y } \Pi_i x_i = 0\},$$

es decir, Δ_n es identificado con las caras posteriores de I^{n+1} (Figure 1-2).

Definimos las funciones $\delta_i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$ y $\sigma_i : \Delta_{n+1} \to \Delta_n$ por

$$\delta_i(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1})$$

y

$$\sigma_i(x_0,\ldots,x_{n+1}) = (x_0,\ldots,x_{i-1},x_i\cdot x_{i+1},x_{i+2},\ldots,x_{n+1})$$

(ver [10] y [9]).

Si T_n es la colección de los polinomios $f:\Delta_n\to\mathbf{R}$ con coeficientes en $\mathbf{Z}$ y si $T=\{T_n\}_{n\geq 0}$, entonces T es un ágebra simplicial. En este caso tenemos $\partial_i : P_n \to P_{n-1}$ y $s_i : P_n \to P_{n+1}$ están definidos para cada $f\in P_n$ por

$$\partial_i(f) = f\circ\delta_i \qquad \text{y} \quad s_i(f) = f\circ\sigma_i,$$

Ejemplo 2.5 Sea $\mathcal{I}_n$ el ideal generado por los polinomios $\Pi_{j=0}^n x_j$. Entonces P_n se puede identificar con el cociente $T_n=\mathbf{Z}[x_0,\ldots,x_n]/\mathcal{I}_n$. Si $T=\{T_n\}_{n\geq 0}$, entonces la multiplicación sobre $\mathbf{Z}[x_0,\ldots,x_n]$ induce una estructura de $\mathbf{Z}$-álgebra sobre T_n. Luego T is un álgebra simplicial.

Sean X un conjunto simplicial y $C_n(X)$ el grupo libre sobre X_n. Denotemos por $C_*(X)$ el complejo de cadenas $(C_n(X),\partial)$ con el *operador frontera* $\partial = \sum_{i=0}^n(-1)^i\, d_i$. Los elementos de $C_n(X)$ son denominados *n-cadenas* en X. Si X es un conjunto simplicial y G es un grupo abeliano entonces la *homología de X con coeficientes en G* está definida por

$$H_*(X;G) = H(C_*(X)\otimes G).$$

Si $C^*(X)$ denota el complejo $(C^n(X),\delta)$ de *cocadenas en X con coeficientes en G*, es decir $C^n(X;G)=\mathrm{Hom}\,(\mathrm{C_n(X)},\mathrm{G})$ y el *operator cofrontera* δ es el dual de ∂. La *cohomología* de X con coeficientes en G está definida por

$$H^*(X;G) = H(C^*(X),G).$$

3 El complejo de Cenkl y Porter

En esta sección introducimos el complejo de Cenkl y Porter, es decir el complejo de las formas diferenciales compatibles sobre las caras posteriores del cubo estándar. Cenkl y Porter primero demostraron el teorema de De Rham para el complejo de formas diferenciales cúbicas usando integración (ver [10]). Posteriormente, Boullay, Kefer, Majewski, Stelzer, Scheerer, Unsöld y Vogt [4] introdujeron *el complejo de Cenkl y Porter* o *el complejo de De Rham de formas diferenciales moderadas* y demostraron el teorema de De Rham para un conjunto simplicial siguiendo las ideas de Cartan.

Denotemos por $\Delta_n\subset\mathbf{R}^{n+1}$ el simplex convencional (Ejemplo 2.4). Una forma básica de peso q sobre Δ_n en las coordenadas $x_0,x_1,\ldots,x_n$ es una forma diferencial de

$$x_{i_1}^{a_1}\cdots x_{i_j}^{a_j}x_{k_1}^{b_1}dx_{k_1}\wedge\cdots x_{k_p}^{b_p}dx_{k_p}$$

donde $\{i_1, \ldots, i_j\}$ y $\{k_1, \ldots, k_p\}$ son subconjuntos disjuntos de $\{0, 1, \ldots, n\}$, a_i y b_j son enteros no negativos y $q = \max\{a_1, \ldots, a_j, b_1 + 1, \ldots, b_p + 1\}$. Sea $\mathbf{Q}_q = \mathbf{Z}[\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{q}]$ el menor subanillo de los racionales tales que $1/p$ si $0 < p \leq q$ para $q > 1$, y $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Z}$. Denotemos por $T^{p,q}(\Delta_n)$ el módulo de las combinaciones lineales sobre de las p-formas básicas de peso $\leq q$. El producto exterior $\wedge$ induce una función

$$\wedge : T_n^{p_1,q_1}(\mathbf{Z}) \otimes T_n^{p_2,q_2}(\mathbf{Z}) \to T_n^{p_1+p_2,q_1+q_2}(\mathbf{Z})$$

y la diferencial usual d se extiende a un morfismo de $\mathbf{Z}$-módulos $d : T_n^{p,q}(\mathbf{Z}) \to T_n^{p+1,q}(\mathbf{Z})$. También tenemos la inclusión $T_n^{p,q}(\mathbf{Z}) \hookrightarrow T_n^{p,q+1}(\mathbf{Z})$. Entonces para todo $n \geq 0$, $T^{*,*} = \{T^{p,q}(\Delta_n)\}_{n \geq 0}$ es un álgebra diferencial graduada (ADG) con filtración.

Sea $X = \{X_n\}$ un conjunto simplicial y sea $T(X) = \mathrm{Mor}\,(\mathrm{T}^{*,*}, \mathrm{X})$ (morfismos de conjuntos simpliciales). El teorema de Stokes implica que para cualquier $q \geq 0$, integración de formas moderadas induce una transformación de complejos de cocadenas $I : T^{*,q}(X) \to C^*(X; \mathbf{Q}_q)$. Entonces tenemos el siguiente teorema (para la demostración ver [4] y [10]).

Teorema 3.1 (El Teorema Moderado de De Rham) *Sea X un conjunto simplical de tipo finito. Entonces para cada $q \geq 1$ y para cualquier módulo M sobre $\mathbf{Q}_q$ existe un isomorfismo natural de módulos sobre $\mathbf{Q}_q$*

$$H^i(T^{*,q}(X), M) \xrightarrow{\cong} H^i(X; M)$$

para todo $i \geq 0$. El isomorfismo es inducido por integración.

4 El cálculo diferencial universal

Una versión generalizada del Cáculo Diferencial sobre variedades fue introducida por Connes ([12] and [13]) a partir del concepto de formas diferenciales no conmutativas. Karoubi [21] usó las ideas de Connes para definir el complejo de De Rham $\Omega(X)$ no conmutativo sobre un espacio simplicial X y utilizó una técnica similar a la de Cartan para demostrar el teorema de De Rham en este contexto (ver [20].) A continuación presentamos una breve descripción del trabajo de Karoubi.

Sea A un álgebra sobre un anillo conmutativo Λ. Denotemos por $\mu : A \otimes A \to A$ la multiplicación sobre A (todos los anillos considerados en este artículo son conmutativos y con elemento neutro, similarmente suponemos que todas las álgebras contienen elemento neutro). Las *formas diferenciales de grado n* son los elementos del producto tensorial de Λ-álgebras

$$\mathcal{T}^n(A) = \underbrace{A \otimes_\Lambda A \otimes_\Lambda \cdots \otimes_\Lambda A}_{n+1 \text{ veces}}.$$

Tenemos pues que $\mathcal{T}^*(A) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{T}^n(A)$ es una Λ-álgebra con multiplicación $\cdot : \mathcal{T}^n(A) \otimes \mathcal{T}^m(A) \to \mathcal{T}^{n+m}(A)$ definida mediante la fórmula

$$(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \cdot (b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_m) = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes (a_n \cdot b_0) \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_m.$$

El *diferencial* operador $D : \mathcal{T}^n(A) \to \mathcal{T}^{n+1}(A)$ está definido por

$$\begin{aligned} D(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &= 1 \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{j-1} \otimes 1 \otimes a_j \cdots \otimes a_n \\ &\quad + (-1)^{n+1} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1. \end{aligned}$$

Teorema 4.1 *Si $\omega \in \mathcal{T}^n(A)$ y $\theta \in \mathcal{T}^m(A)$, entonces*

(1) $D^2(\omega) = 0$.

(2) $D(\omega \cdot \theta) = D(\omega) \cdot \theta + (-1)^n \omega \cdot D(\theta)$ *(la identidad de Leibniz).*

Entonces $\mathcal{T}^*(A)$ es un ADG. La cohomología del complejo $(\mathcal{T}^*(A), D)$ es trivial. Supongamos que A es una Λ-álgebra aumentada, con extensión $\lambda : A \to \Lambda$ (morfismo de anillos) tal que $\lambda(1) = 1$. Si $\imath_\lambda : \mathcal{T}^n(A) \to \mathcal{T}^{n-1}(A)$ es el morfismo de módulos definido por

$$\imath_\lambda(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \lambda(a_0)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n),$$

entonces $\imath$ es una contracción de homotopía, es decir

$$D\imath_\lambda + \imath_\lambda D = 1.$$

Definamos $\Omega^0(A) = A$ y $\Omega^1(A) = \ker \mu$, el módulo $\Omega^1(A)$ sobre Λ es un bimódulo sobre A. Las *formas diferenciales no conmutativas de grado* n son los elementos del producto tensorial de A-módulos

$$\Omega^n(A) = \underbrace{\Omega^1(A) \otimes_A \Omega^1(A) \otimes_A \cdots \otimes_A \Omega^1(A)}_{n \text{ veces}}.$$

El producto de formas diferenciales está definido por yuxtaposición de productos tensoriales. Entonces la suma directa

$$\Omega^*(A) = \bigoplus_{n\geq 0} \Omega^n(A)$$

es un álgebra graduada. La *diferencial* $d : \Omega^0(A) \to \Omega^1(A)$ está definida por la ecuación

$$d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1.$$

Así tenemos el isomorfismo de Λ-módulos $A \otimes A/\Lambda \to \Omega^1(A)$ tal que $a \otimes \bar{b} \mapsto a\,db$. Entonces $\Omega^n(A)$ puede ser identificado con el producto tensorial de Λ-módulos

$$A \otimes \underbrace{A/\Lambda \otimes A/\Lambda \otimes \cdots \otimes A/\Lambda}_{n \text{ veces}}.$$

Una forma diferencial de grado n puede escribirse como una combinación lineal de términos del tipo $a_0\, da_1 da_2 \ldots da_n$ y el morfismo d se extiende a las formas de grado n de $\Omega^n(A)$ por

$$d(a_0\, da_1 \ldots da_n) = da_0 da_1 \ldots da_n = 1\, da_0 da_1 \ldots da_n.$$

Teorema 4.2 *Si $\omega \in \Omega^n(A)$ y $\theta \in \Omega^m(A)$, entonces*

(1) $d^2(\omega) = 0$.

(2) $d(\omega \cdot \theta) = d(\omega) \cdot \theta + (-1)^n \omega \cdot d(\theta)$ *(la identidad de Leibniz).*

Nota 4.3 El álgebra $\Omega^*(A)$ es un álgebra diferencial graduada y constituye la solución a un problema universal: Para un ADG B^* y un morfismo de álgebras $f : A \to B^0$ existe un único morfismo de álgebras diferenciales graduadas $f^* : \Omega^*(A) \to B^*$ el cual coincide con f en grado 0. El complejo $(\Omega^*(A), d)$ se denomina el *cálculo diferencial universal* de A o el *complejo no conmutativo de De Rham* of A.

Existe una inclusión que envía $\Omega^*(A)$ hacia $\mathcal{T}^*(A)$. Por otra parte, para cualquier $n \geq 0$ existe un *operador proyección* $J : \mathcal{T}^n(A) \to \Omega^n(A)$ dado por $J(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_0\, da_1 \ldots da_n$.

Una forma diferencial no conmutativa ω es *cerrada* si $d\omega = 0$. Decimos que $\omega \in \Omega^n(A)$ es *exacta* si existe $\eta \in \Omega^{n-1}(A)$ tal que $\omega = d\eta$. El hecho de que que el complejo $(\Omega^*(A), d)$ tiene cohomología trivial conocido como el Lema no Conmutativo de Poincaré.

Lema 4.4 *Sea A un álgebra aumentada sobre el anillo Λ. Entonces toda forma cerrada $\omega \in \Omega^*(A)$ es exacta.*

Demostración. Sea $\lambda : A \to \Lambda$ una forma Λ-lineal con $\lambda(1) = 1$. Probaremos que existe una contracción homotópica $\jmath_\lambda : \Omega^n(A) \to \Omega^{n-1}(A)$. Para definir $\jmath_\lambda$ expresamos los elementos de $\Omega^n(A)$ como elementos de $\mathcal{T}^{n+1}(A)$ usando la inclusión, luego aplicamos $\imath_\lambda$, y posteriormente aplicamos la proyección J. Así para $\omega = a_0 da_1 \ldots da_n$ obtenemos $\jmath_\lambda(\omega) = \lambda(a_0) a_1 da_2 \cdots da_n - \lambda(a_0 a_1)\, da_2 \cdots da_n$. Primero demostraremos que $\jmath_\lambda$ está bien definida. Obviamente es suficiente probar que $\jmath_\lambda : \Omega^1(A) \to \Omega^0(A)$ está bien definida. Supongamos que $\omega = a_0 da_1 \in \Omega^1(A)$, $a \in \Lambda$ y $a_1' = a_1 + a \cdot 1 \in A$. Entonces $\jmath_\lambda(a_0 da_1') = \lambda(a_0) a_1' - \lambda(a_0 a_1') \cdot 1 = \lambda(a_0) a_1 - \lambda(a_0 a_1) \cdot 1 = \jmath_\lambda(a_0 da_1)$. Ahora para $\omega = a_0\, da_1 \cdots da_n \in \Omega^n(A)$ tenemos

$$\begin{aligned} d\jmath_\lambda(\omega)+\jmath_\lambda d(\omega) &= \lambda(a_0)da_1da_2\dots da_n-\lambda(a_0a_1)\,d1da_2\dots da_n \\ &\quad +\lambda(1)a_0\,da_1da_2\dots da_n-\lambda(1\cdot a_0)\,da_1\dots da_n \\ &= \omega. \end{aligned}$$

Pero $d\omega=0$. Por lo tanto $d\jmath_\lambda(\omega)=\omega$. ∎

Si $A=\{A_n\}_{n\geq 0}$ es un álgebra simplicial, entonces $\Omega^*(A)=\{\Omega^*(A_n)\}_{n\geq 0}$ es un ADG simplicial. En efecto, si $A=\{A_n^*\}_{n\geq 0}$, para cada n consideramos el álgebra tensorial

$$\mathcal{T}^*(A_n)=\bigoplus_{p\geq 0}A_n^{\otimes p},$$

con los operadores $\partial_i : A_n^{\otimes p}\to A_{n-1}^{\otimes p}$ y $s_i : A_n^{\otimes p}\to A_{n+1}^{\otimes p}$ definidos así

$$\partial_i(a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_p)=\partial_i a_0\otimes\partial_i a_1\otimes\cdots\otimes\partial_i a_p$$

y

$$s_i(a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_p)=s_i a_0\otimes s_i a_1\otimes\cdots\otimes s_i a_p.$$

En forma similar podemos definir los operadores ∂_i y σ_i sobre $\Omega^*(A)$ y tenemos

Proposición 4.5 *Sea $A=\{A_n^*\}_{n\geq 0}$ un álgebra simplicial. Si D es la diferencial sobre $\mathcal{T}^*(A_n)$, entonces $\mathcal{T}^*(A)$ y $\Omega^*(A)$ son álgebras diferenciales graduadas simpliciales.*

Una versión no conmutativa del Teorema de De Rham fue probado por Karoubi en [20]. Karoubi consideró el caso particular en que A_n es el cociente de la Λ-álgebra $\Lambda[x_0,x_1,\dots,x_n]/(x_0+x_1+\cdots+x_n-1)$. Sean $\Omega^*(A_n)$ el álgebra de formas no conmutativas sobre A_n y $A=\{A_n\}_{n\geq 0}$. Entonces $\Omega^*(A_n)$ es el álgebra no conmutativa generada por los símbolos x_i y dx_i, $0\leq i\leq n$ y las relaciones siguientes

$$\sum_{i=0}^{n}x_i=1,\quad \sum_{i=0}^{n}dx_i=0\quad \text{y}\quad x_ix_j=x_jx_i.$$

Luego

Teorema 4.6 (El Teorema no Conmutativo de De Rham) *Sean X un conjunto simplicial, A un álgebra simplicial sobre un anillo conmutativo Λ y $\Omega^*(X)=\mathrm{Mor}\,(\mathrm{X},\Omega^*(\mathrm{A}))$. Entonces existe un isomorfismo natural de módulos sobre Λ*

$$H^i(\Omega^*(X))\cong H^i(X;\Lambda)$$

para todo $i\geq 0$.

Una versión ligeramente más general del teorema anterior fue demostrada por Cenkl en [7] y [8].

5 Formas diferenciales no conmutativas moderadas

En [20] Karoubi propuso como problema demostrar el teorema no conmutativo de De Rham usando integración asumiendo que el anillo Λ contenga a los racionales. En este artículo presentamos una solución a un problema ligeramente más general construyendo una versión no conmutativa del complejo de Cenkl-Porter, el cual es construido definiendo una filtración sobre el álgebra de formas diferenciales no conmutativas $\Omega^*(T)$ sobre $T = \oplus_{n\geq 0} T_n$, donde T_n son los polinomios restringidos al n-simplex Δ_n (ver Ejemplo 2.4). Esta sección constituye un estudio de las propiedades principales de dicho complejo. Para empezar notemos que la Proposición 4.5 implica que $\Omega^*(T)$ es un ADG simplicial. También establecemos la siguiente notación: $\mathbf{Z}_+$ denota el conjunto de los enteros no negativos; $\mathbf{Z}_+^{n+1}$ es el conjunto de índices múltiples $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ con $\alpha_i \in \mathbf{Z}_+$, y $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$. Para $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \Delta_n$ y $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \mathbf{Z}_+^{n+1}$ sea

$$x^\alpha = x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

y

$$dx^\varepsilon = dx_0^{\varepsilon_0} dx_1^{\varepsilon_1} \ldots dx_n^{\varepsilon_n} = (dx_0)^{\varepsilon_0} (dx_1)^{\varepsilon_1} \ldots (dx_n)^{\varepsilon_n}.$$

Si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\} \subset \{0, 1, \ldots, n\}$ escribimos

$$\begin{array}{rcl} x_A^\alpha & = & x_{a_1}^{\alpha_{a_1}} x_{a_2}^{\alpha_{a_2}} \ldots x_{a_p}^{\alpha_{a_p}} \\ (1 - x_A)^\alpha & = & (1 - x_{a_1})^{\alpha_{a_1}} (1 - x_{a_2})^{\alpha_{a_2}} \ldots (1 - x_{a_p})^{\alpha_{a_p}} \\ dx_A^\varepsilon & = & dx_{a_1}^{\varepsilon_{a_1}} dx_{a_2}^{\varepsilon_{a_2}} \ldots dx_{a_p}^{\varepsilon_{a_p}}. \end{array}$$

Sea $\Omega_n(\mathbf{Z})$ el álgebra de todas las combinaciones lineales de *formas diferenciales no conmutativas* sobre $\mathbf{Z}$

$$\omega = x^{\alpha_1} dx^{\varepsilon_1} x^{\alpha_2} dx^{\varepsilon_2} \ldots x^{\alpha_r} dx^{\varepsilon_r}, \qquad \alpha_i, \varepsilon_i \in \mathbf{Z}_+^{n+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

con $0 \leq x_j \leq 1$ y $\Pi_{j=0}^n x_j = 0$. Estas son las formas diferenciales no conmutativas compatibles con las caras posteriores del cubo I^{n+1} (Ejemplo 2.4). Si $\sum_i |\varepsilon_i| = p$ decimos que ω es una p-forma (en particular, las 0-forms son polinomios).

Si $\|\omega\|_j = \sum_i (\alpha_{ij} + \varepsilon_{ij})$, definimos el *peso* de ω por $\|\omega\| = \max\{\|\omega\|_j : j = 0, 1, \ldots, n\}$.

Sea $\Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z})$ el conjunto de todas las p-formas de $\Omega_n(\mathbf{Z})$ con peso $\|\omega\| \leq q$ y sea $\Omega_n^{*,*}(\mathbf{Z}) = \{\Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z})\}_{p,q\geq 0}$. Observemos que para todos n, p y q, $\Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z})$ es un módulo sobre $\mathbf{Z}$ finitamente generado. La siguiente proposición se deduce directamente de la definición de $\Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z})$.

Proposición 5.1 *Para todo $n \geq 0$, $\Omega_n^{*,*}(\mathbf{Z}) = \{\Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z})\}_{p,q\geq 0}$ es un álgebra diferencial graduada con una filtración.*

Fijemos $p \geq 0$ y $q \geq 1$, consideremos a $\omega \in \Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z})$ como un elemento de $\Omega^p(T_n)$ y los operadores ∂_i y s_i sobre $\omega \in \Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z})$ como las restricciones de los respectivos operadores sobre $\Omega^*(T)$. Además tenemos que estas restricciones son morfismos de álgebras diferenciales graduadas. Entonces

Proposición 5.2 *$\Omega^{*,*}(\mathbf{Z}) = \{\Omega_n^{*,*}(\mathbf{Z})\}_{n\geq 0}$ es un álgebra diferencial graduada simplicial.*

Ahora consideremos $0 \leq x_j \leq 1$ para $j = 0, 1, \ldots, n$ con $\Pi_j x_j = 0$. Definimos

$$\Omega^{p,q}(\Delta_n) = \Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_q,$$

donde $\mathbf{Q}_q = \mathbf{Z}[\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{q}]$ para $q > 1$ y $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Z}$. Sean Δ_n^k, $0 \leq k \leq n$ el k-esqueleto de Δ_n y

$$\Omega^{p,q}(\Delta_n, \Delta_n^k) = \{\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_n) : \omega|_{\Delta_n^k} \equiv 0\}.$$

Sea $\Omega^{p,q}(\Delta_n^k)$ la colección de todas las combinaciones lineales sobre $\mathbf{Q}_q$ de formas diferenciales que son no nulas sobre una cara de dimensión k de Δ_n^k.

Proposición 5.3 *La sucesión*

$$\Omega^{p,q}(\Delta_n, \Delta_n^{k-1}) \xrightarrow{r} \Omega^{p,q}(\Delta_n^k, \Delta_n^{k-1}) \to 0$$

es una sucesión exacta de módulos sobre $\mathbf{Q}_q$ para todos $p \geq 0$ y $q \geq 1$ (r denota la restricción respectiva).

Demostración. Consideremos $\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_n, \Delta_n^{k-1})$ con $q \geq 1$. Entonces ω es una combinación lineal $\omega = \sum_i \omega_i$, donde cada ω_i es no nula exactamente en una cara F de Δ_n^k. Entonces

$$\omega|_G \equiv 0 \qquad \text{si } G \text{ es cualquier } k\text{-cara de } \Delta_n^k \text{ diferente a } F.$$

Si $F = F(A, B)$ (ver Ejemplo 2.4) donde A y B son dos conjuntos disjuntos $A = \{a_1, a_2 \ldots, a_{k+1}\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{n-k}\}$ con $0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{k+1} \leq n$, $0 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_{n-k} \leq n$, $A \cup B = \{0, 1, \ldots, n\}$, $0 \leq x_i \leq 1$, para todo $i \in A$, $\Pi_{i\in A} x_i = 0$ y $x_j \equiv 1$ for all $j \in B$.

Tenemos $\omega|_{\Delta_n^{k-1}} \equiv 0$. Por lo tanto ω es una combinación lineal de formas de tipo

$$f^1(x)\, dx^{\varepsilon_1} \cdots f^s(x)\, dx^{\varepsilon_s},$$

donde $f^j(x) = x_A^{\alpha_1}(1 - x_A)^{\alpha_2} x_B^{\beta_1}(1 - x_B)^{\beta_2} f_j(x)$ ($f_j(x)$ es un polinomio de variable x). Para F podemos asumir $|\beta_2| = 0$. Así $f^j(x) = x_A^{\alpha_1}(1-x_A)^{\alpha_2} x_B^{\beta_1} f_j(x)$.

Notemos que si $|\alpha_i| = 0$ para $i = 1, 2$ (y para todo j), entonces $\varepsilon_{it} \neq 0$ para algún t.

Sobre F tenemos $f^j(x) = x_A^{\alpha_1}(1 - x_A)^{\alpha_2} f_j(x_A)$.

Sea $G = G(A', B')$ otra k-cara de Δ_n^k. Si $A = A'$ entonces existe un $i \in B$ con $x_i \equiv 0$, luego $f^j(x) = 0$ y $\omega|_G \equiv 0$.

Si $A \neq A'$ entonces existe un $i \in A$ tal que $x_i \equiv 1$. Entonces resulta $\omega|_G \equiv 0$.

Sea $\phi(x) = x_B$, entonces $\phi \in \Omega^{0,1}(\Delta_n)$. Definimos $\omega_k = \phi \cdot \omega$. Observemos que existe un $i \in A$ tal que $\|\omega_k\|_j = 1 \leq \|\omega_k\|_i = q$ para todo $j \in B$. Por lo tanto $\omega_k \in \Omega^{p,q}(\Delta_n)$. Además

$$\omega_k|_{F(A,B)} = \phi|_{F(A,B)} \cdot \omega|_{F(A,B)} \equiv 1 \cdot \omega = \omega.$$

Si $F(A', B')$ es otra k-cara de Δ_n^k entonces tenemos

$$\omega_k|_{F(A',B')} = \phi|_{F(A',B')} \cdot \omega|_{F(A',B')} \equiv \phi|_{F(A',B')} \cdot 0 = 0.$$

Si $F(E, H)$ es una $(k-1)$-cara de Δ_n^k entonces existe al menos un $i \in A$ tal que $i \notin E$. Entonces x_i es o bien 0 o bien 1 sobre $F(E, H)$. to $\omega|_{F(E,H)} = 0$ y entonces $\omega_k|_{F(E,H)} \equiv 0$. Luego $\omega_k \in \Omega^{p,q}(\Delta_n, \Delta_n^{k-1})$ y $\omega_k|_{\Delta_n^k} \equiv \omega$. ∎

Proposición 5.4 *La sucesión*

$$\Omega^{p,q}(\Delta_n) \xrightarrow{r} \Omega^{p,q}(\partial\Delta_n) \to 0$$

es una sucesión exacta de módulos sobre $\mathbf{Q}_q$*, para todos* $p \geq 0$*,* $q \geq 1$ *(*r *denota la restricción respectiva).*

Demostración. Para $k = 0$ la sucesión

$$\Omega^{p,q}(\Delta_n) \to \Omega^{p,q}(\Delta_n^0) \to 0,$$

es exacta, así cualquier elemento $a \in \mathbf{Q}_q$ puede ser considerado una forma $\omega(x_0, \ldots, x_n) = a$ (un polinomio constante).

Asumimos por inducción que la sucesión

$$\Omega^{p,q}(\Delta_n) \to \Omega^{p,q}(\partial\Delta_n^{k-1}) \to 0$$

es exacta. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
0 & & 0 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\Omega^{p,q}(\Delta_n, \Delta_n^{k-1}) & \xrightarrow{r_1} & \Omega^{p,q}(\Delta_n^k, \Delta_n^{k-1}) & \to & 0 \\
{\scriptstyle i_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_2} & & \\
\Omega^{p,q}(\Delta_n) & \xrightarrow{r_2} & \Omega^{p,q}(\Delta_n^k) & \to & 0 \\
{\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_2} & & \\
\Omega^{p,q}(\Delta_n^{k-1}) & \xrightarrow{\equiv} & \Omega^{p,q}(\Delta_n^{k-1}) & \to & 0 \\
\downarrow & & & & \\
0. & & & &
\end{array}$$

La columna de la izquierda es exacta por hipótesis de inducción. La columna de la derecha es exacta por definición. La exactitud de la primera se tiene por la Proposición 5.3, luego es suficiente demostrar la exactitud de la segunda fila. Supongamos que $\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_n^k)$.
Caso 1. Si $\omega \in \ker p_2$ entonces existe $\omega' \in \Omega^{p,q}(\Delta_n^k, \Delta_n^{k-1})$ con $i_2(\omega') = \omega$. Existe un $\omega'' \in \Omega^{p,q}(\Delta_n, \Delta_n^{k-1})$ tal que $\omega'' = r_1(\omega')$. Luego $\omega = i_2(r_1(\omega')) = r_2(i_1(\omega'))$ y $\omega \in \operatorname{im} \mathrm{r}_2$.
Caso 2. Si $p_2(\omega) \neq 0$, entonces existe $\omega' \in \Omega^{p,q}(\Delta_n)$ tal que $p_1(\omega') = p_2(\omega)$. Luego

$$p_2(\omega - r_2(\omega')) = p_1(\omega)p_2(r_2(\omega')) = p_1(\omega') - p_2(r_2(\omega')) = 0.$$

Así $\omega' - r_2(\omega') \in \ker p_2$, entonces $\omega' - r_2(\omega') \in \operatorname{im} \mathrm{r}_2$ (por *Caso 1*), luego $\omega \in \operatorname{im} \mathrm{r}_2$.

Finalmente para $k = n-1$ tenemos $\Delta_n^{n-1} = \partial\Delta_n$. Así, la sucesión

$$\Omega^{p,q}(\Delta_n) \to \Omega^{p,q}(\partial\Delta_n) \to 0$$

es exacta. ■

Ahora demostramos que para todo $q \geq 0$ el complejo $\Omega^{*,q}(\Delta_n)$ tiene cohomología trivial. Sea $\lambda : T \to \mathbf{Z}$ una forma lineal cualquiera con $\lambda(1) = 1$. Para cada $p \geq 0$, sea $\jmath_\lambda : \Omega^p(T) \to \Omega^{p-1}(T)$ la función definida en $\omega = f^0\, df^1 \ldots df^p \in \Omega^p(T)$ por

$$\jmath_\lambda(\omega) = \lambda(f^0) f^1\, df^2 \ldots df^p - \lambda(f^0 f^1)\, df^2 \ldots df^p.$$

Entonces $\jmath_\lambda$ es una contracción homotópica (Lema 4.4). Consideremos $\Omega^{p,q}(\Delta_n)$ como un submódulo de $\Omega^p(T_n)$ y $\jmath_\lambda$ restringida a $\Omega^{p,q}(\Delta_n)$. Supongamos que

$$\omega = x^{\alpha_1}\, dx^{\varepsilon_1} \ldots x^{\alpha_r}\, dx^{\varepsilon_r} = \sum f^0\, df^1 \cdots df^p.$$

Observemos que $\|\jmath_\lambda(\omega)\|_j \leq \|\omega\|_j$ para todo j. Por lo tanto $\|\jmath_\lambda(\omega)\| \leq \|\omega\| \leq q$ y $\jmath_\lambda(\omega) \in \Omega^{p-1,q}(\Delta_n)$. Así $\jmath_\lambda : \Omega^{p,q}(\Delta_n) \to \Omega^{p-1,q}(\Delta_n)$ es una contracción homotópica (por el Lema 4.4).

Si $\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_n)$ y $d\omega = 0$ decimos que ω es *cerrada*. Decimos que ω es *exacta* si existe $\eta \in \Omega^{p-1,q}(\Delta_n)$ tal que $\omega = d\eta$. Entonces tenemos el siguiente

Lema 5.5 (El Lema no Conmutativo Moderado de Poincaré) *Si ω está en $\Omega^{p,q}(\Delta_n)$ y es una forma cerrada, entonces ω es exacta.*

6 Integración de formas no conmutativas moderadas

En esta sección presentamos la integración de formas diferenciales no conmutativas moderadas y usamos este concepto para definir un morfismo de módulos sobre $\mathbf{Q}_q$ $I : \Omega^{*,q}(\Delta_n) \to C^*(\Delta_n; \mathbf{Q}_q)$. También establecemos y demostramos una versión no conmutativa del teorema de Stokes la cual nos permite utilizar a I para inducir un morfismo de complejos el cual juega un papel importante en el teorema de De Rham.

Sea $\Omega^{*,*}(\Delta_n)$ el álgebra de las formas diferenciales no conmutativas moderadas con variables $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Sea $T^{*,*}(\Delta_n)$ el álgebra de las formas diferenciales de Cenkl-Porter con coeficientes en $\mathbf{Q}_q$ sobre el cubo estándar $I^{n+1} \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Definimos $F : \Omega^{p,q}(\Delta_n) \to T^{p,q}(\Delta_n)$ como sigue: si $\omega \in \Omega^{0,q}(\Delta_n)$ o $\omega = dx_j \in \Omega^{1,1}(\Delta_n)$ entonces $F(\omega) = \omega$; if $\omega = f^0\, df^1 \dots df^p \in \Omega^{p,q}(\Delta_n)$ para $p > 1$, luego $F(f^0\, df^1 \dots df^p) = f^0\, df^1 \wedge \dots \wedge df^p$. Entonces $F : \Omega^{p,q}(\Delta_n) \to T^{p,q}(\Delta_n)$ define un morfismo de módulos sobre $\mathbf{Q}_q$. Observemos que para todo $p \geq 0$ tenemos

$$F(f^0\, df^1 \dots df^p) = F(f^0)\, F(df^1) \wedge \dots \wedge F(df^p).$$

En particular si $\omega \in \Omega^{p_1,q_1}(\Delta_n)$ y $\eta \in \Omega^{p_2,q_2}(\Delta_n)$ entonces F es un morfismo de álgebras, es decir

$$F(\omega \cdot \eta) = F(\omega) \wedge F(\eta).$$

Para demostrar esta identidad es suficiente considerear $\omega = f^0 df^1, \eta = g^0 dg^1 \in \Omega^1(T_n)$.

Fórmulas explícitas para calcular $F(\omega)$ se muestran en [30]. Similarmente, las siguientes proposiciones son casi obvias.

Proposición 6.1 *El diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{p,q}(\Delta_n) & \xrightarrow{d} & \Omega^{p+1,q}(\Delta_n) \\ F_p \downarrow & & \downarrow F_{p+1} \\ T^{p,q}(\Delta_n) & \xrightarrow{d} & T^{p+1,q}(\Delta_n) \end{array}$$

conmuta para todo $p \geq 0$.

Proposición 6.2 *Sea $p \geq 0, q \geq 1$. If $\omega \in \Omega_n^{p,q}(\mathbf{Z})$. Si G es una p-cara de Δ_n, entonces*

$$\int_G F(\omega) \in \mathbf{Q}_q.$$

Además F es una función simplicial. Si $\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_n)$ y $\sigma : \Delta_p \to \Delta_n$ es un p-simplex definimos *la integral de ω sobre σ* por

$$\int_\sigma \omega = \int_\sigma F(\omega) = \int_{\Delta_p} \sigma^* F(\omega).$$

Si $\sigma = \sum_i \sigma_i \otimes a_i \in C_p(\Delta_n; \mathbf{Q}_q)$, entonces *la integral de ω sobre σ* está definida por

$$\int_\sigma \omega = \sum_i a_i \int_{\sigma_i} \omega.$$

Proposición 6.3 (El Teorema no Conmutativo de Stokes) *Sea σ una p-cadena sobre Δ_n y supongamos que $\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_n)$. Entonces*

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega.$$

Demostración. Supongamos que $\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_n)$ y sea $\sigma : \Delta_p \to \Delta_n$ un p-simplex. Por la Proposición 6.1 y por el el teorema (clásico) de Stokes tenemos

$$\int_\sigma d\omega = \int_\sigma F(d\omega) = \int_\sigma d(F(\omega)) = \int_{\partial\sigma} F(\omega) = \int_{\partial\sigma} \omega. \qquad \blacksquare$$

Denotemos por $(C^*(\Delta_n; \mathbf{Q}_q), \delta)$ el complejo estándar de cocadenas sobre Δ_n con coeficientes en $\mathbf{Q}_q$. Sea

$$I : \Omega^{*,q}(\Delta_n) \to C^*(\Delta_n; \mathbf{Q}_q)$$

el morfismo de módulos sobre $\mathbf{Q}_q$ definido así: dadas $\sigma \in C_p(\Delta_n; \mathbf{Q}_q)$ y $\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_n)$

$$I_p(\omega)(\sigma) = \int_\sigma \omega.$$

El teorema de Stokes implica que I es una morfismo de complejos de cocadenas y además tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega^{p,q}(\Delta_{n-1}) & \xleftarrow{\partial_i} & \Omega^{p,q}(\Delta_n) & \xrightarrow{s_i} & \Omega^{p,q}(\Delta_{n+1}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
C^p(\Delta_{n-1}; \mathbf{Q}_q) & \xleftarrow{\widetilde{\partial_i}} & C^p(\Delta_n; \mathbf{Q}_q) & \xrightarrow{\widetilde{s_i}} & C^p(\Delta_{n+1}; \mathbf{Q}_q),
\end{array}$$

para $0 \leq i \leq n$. Entonces I es una función simplicial.

Proposición 6.4 *El diagrama*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \Omega^{p,q}(\Delta_k, \partial\Delta_k) & \xrightarrow{i} & \Omega^{p,q}(\Delta_k) & \xrightarrow{r} & \Omega^{p,q}(\partial\Delta_k) & \to & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & C^p(\Delta_k, \partial\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \xrightarrow{i} & C^p(\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \xrightarrow{r} & C^p(\partial\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \to & 0,
\end{array}$$

conmuta para todo $p \geq 0$, $q \geq 1$. (Los operadores i y r son las inclusiones y restricciones respectivas).

Demostración. Sean $\sigma \in C_p(\Delta_k; \mathbf{Q}_q)$ y $\omega \in \Omega^{p,q}(\Delta_k, \partial\Delta_k)$, entonces $r(\omega) = r(i(\omega))$. Luego

$$I(i(\omega))(\sigma) = \int_\sigma i(\omega) = \int_{\sigma\cap\partial\Delta_k} \omega + \int_{\sigma-(\sigma\cap\partial\Delta_k)} \omega = \int_{\sigma-(\sigma\cap\partial\Delta_k)} \omega = i(I(\omega))(\sigma).$$

Por otra parte tenemos

$$I(r(\omega))(\sigma) = I(\sigma)(r(\omega)) = \int_\sigma r(\omega) = \int_\sigma \omega|_{\partial\Delta_k} = \int_{\sigma\cap\partial\Delta_k} \omega = I(r(\sigma))(\omega). \qquad \blacksquare$$

7 El teorema no conmutativo moderado de De Rham

En esta sección construimos el complejo moderado de De Rham o el complejo no conmutativo de Cenkl y Porter sobre un conjunto simplicial de tipo finito. Seguidamente usamos las versiones no conmutativas del Lema de Poincaré y del Teorema de Stokes para demostrar una versión no conmutativa del Teorema de De Rham.

Sean X un conjunto simplicial de tipo finito y X_n la colección de n-simplices no triviales en X. Una *forma diferencial no conmutativa tipo* (p,q) sobre X es una función simplicial $\omega : X_n \to \Omega^{p,q}(\Delta_n)$ (en otras palabras ω es una función tal que para cada $G \in X_n$ y cualquier cara F de G, $\omega(F)$ es la restricción de $\omega(G)$ a F). La colección de todas estas formas se denota por $\Omega^{p,q}(X)$.

Para una p-cadena $\sigma = \sum_i \sigma_i \otimes a_i \in C_p(X;\mathbf{Q}_q)$, $\sigma_i : \Delta_p \to X$ y $\omega \in \Omega^{p,q}(X)$ definimos

$$\int_\sigma \omega = \sum_i a_i \int_{\Delta_p} \omega|_{\sigma_i}$$

así podemos definir la función $I : \Omega^{p,q}(X) \to C^p(X;\mathbf{Q}_q)$ por

$$I_p(\omega)(\sigma) = \int_\sigma \omega.$$

Entonces

$$\delta I_p(\omega)(\sigma) = I_p(\omega)(\partial\sigma) = \int_{\partial\Delta_p} \omega|_{\partial\sigma}.$$

Por otra parte

$$I_{p+1}(d\omega)(\sigma) = I_p(d\omega)(\sigma) = \int_{\Delta_p} d\omega|_\sigma.$$

Así la integración induce un morfismo de complejos de cocadenas. Entonces tenemos el siguiente

Teorema 7.1 *Sea X un conjunto simplicial de tipo finito. Entonces para todo $q \geq 1$ la función*

$$I : H^i(\Omega^{*,q}(X)) \xrightarrow{\cong} H^i(X;\mathbf{Q}_q),$$

inducida por integración es un isomorfismo de módulos sobre $\mathbf{Q}_q$ para todo $i \geq 0$.

Demostración. Usamos inducción sobre los esqueletos de X. Para $k = 0$ el enunciado es cierto porque

$$H^i(\Omega^{*,q}(X)) = \begin{cases} \mathbf{Q}_q, & \text{si } i = 0, \\ 0, & \text{si } i > 0, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad H^i(X;\mathbf{Q}_q) = \begin{cases} \mathbf{Q}_q, & \text{si } i = 0, \\ 0, & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

Supongamos que el enunciado es cierto para los esqueletos de dimensión ℓ, X_ℓ de X para $\ell < k$.

Por la Proposición 6.4 se sigue que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \rightarrow & \Omega^{*,q}(X_k, X_{k-1}) & \rightarrow & \Omega^{*,q}(X_k) & \rightarrow & \Omega^{*,q}(X_{k-1}) & \rightarrow & 0 \\
 & & I \downarrow & & I \downarrow & & I \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & C^*(X_k, X_{k-1}; \mathbf{Q}_q) & \rightarrow & C^*(X_k; \mathbf{Q}_q) & \rightarrow & C^*(X_{k-1}; \mathbf{Q}_q) & \rightarrow & 0
\end{array}$$

es conmutativo. Entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \rightarrow & H^{i-1}(\Omega^{*,q}(X_{k-1})) & \xrightarrow{\delta} & H^i(\Omega^{*,q}(X_k, X_{k-1})) & \xrightarrow{\delta} & H^i(\Omega^{*,q}(X_k)) & \rightarrow & H^i(\Omega^{*,q}(X_{k-1})) & \rightarrow \cdots \\
 & \imath \downarrow & & \kappa \downarrow & & I \downarrow & & \imath \downarrow & \\
\cdots \rightarrow & H^{i-1}(X_{k-1}; \mathbf{Q}_q) & \xrightarrow{\delta} & H^i(X_k, X_{k-1}; \mathbf{Q}_q) & \xrightarrow{\delta} & H^i(X_k; \mathbf{Q}_q) & \rightarrow & H^i(X_{k-1}; \mathbf{Q}_q) & \rightarrow \cdots
\end{array}$$

Las filas son exactas e ι es un isomorfismo por hipótesis. Probaremos que κ es un isomorfismo. Sea $\{\Delta_{k,j} : j \in J\}$ el conjunto de los k-simplices de X_k. Entonces

$$\Omega^{*,q}(X_k, X_{k-1}) \cong \bigoplus_j \Omega^{*,q}(\Delta_{k,j}, \partial\Delta_{k,j})$$

y

$$C^*(X_k, X_{k-1}; \mathbf{Q}_q) \cong \bigoplus_j C^*(\Delta_{k,j}, \partial\Delta_{k,j}; \mathbf{Q}_q)$$

son isomorfismos de módulos sobre $\mathbf{Q}_q$. Entonces es suficiente probar que la integración induce un isomorfismo

$$I : H^i(\Omega^{*,q}(\Delta_k, \partial\Delta_k)) \rightarrow H^i(C^*(\Delta_k, \partial\Delta_k; \mathbf{Q}_q)).$$

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo (Proposición 6.4)

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \rightarrow & \Omega^{p,q}(\Delta_k, \partial\Delta_k) & \rightarrow & \Omega^{p,q}(\Delta_k) & \rightarrow & \Omega^{p,q}(\partial\Delta_k) & \rightarrow & 0 \\
 & & I \downarrow & & I \downarrow & & I \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & C^p(\Delta_k, \partial\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \rightarrow & C^p(\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \rightarrow & C^p(\partial\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \rightarrow & 0,
\end{array}$$

La primera fila es exacta por la Proposición 5.4.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \rightarrow & H^{i-1}(\Omega^{*,q}(\partial\Delta_k)) & \xrightarrow{\delta} & H^i(\Omega^{*,q}(\Delta_k, \partial\Delta_k)) & \xrightarrow{\delta} & H^i(\Omega^{*,q}(\Delta_k)) & \rightarrow & H^i(\Omega^{*,q}(\partial\Delta_k)) & \rightarrow \cdots \\
 & \imath \downarrow & & \kappa \downarrow & & I \downarrow & & \imath \downarrow & \\
\cdots \rightarrow & H^{i-1}(\partial\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \xrightarrow{\delta} & H^i(\Delta_k, \partial\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \xrightarrow{\delta} & H^i(\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \rightarrow & H^i(\partial\Delta_k; \mathbf{Q}_q) & \rightarrow \cdots
\end{array}$$

Por lo tanto I es un isomorfismo por el “Lema Cinco”[1]. ■

Finalmente, aplicando el teorema de Künneth concluimos con nuestra versión generalizada del teorema de De Rham. Sea M un módulo sobre $\mathbf{Q}_q$ y sean

[1] “the five lemma” es un resultado clásico en álgebra homológica y topología algebraica, y algunas veces se encuentra en el estudio de módulos. El nombre está sugerido porque se trata de dos sucesiones con cinco módulos cada una y a partir de información sobre la exactitud de las sucesiones y cuatro de los morfismos verticales se deduce que el morfismo vertical central es un isomorfismo. Ver e.g., [24, p. 169], [27, p. 14 y 365] y [36, pp. 185-186]

$\omega = \eta \otimes a \in \Omega^{p,q}(X) \otimes M$, y $\sigma = \theta \otimes b \in C_p(X; \mathbf{Q}_q) \otimes M$. Entonces la *integral de* ω *sobre* σ está definida por

$$\int_\sigma \omega = I(\eta)(\theta) \cdot a \otimes b = \int_\theta \eta \cdot a \otimes b.$$

Así la integración define un morfismo de módulos sobre $\mathbf{Q}_q$, $I : \Omega^{p,q}(X) \otimes M \to C^p(X; M)$. Entonces tenemos

Teorema 7.2 *Sea X un conjunto simplicial de tipo finito. Entonces para $q \geq 1$ y para cualquier módulo M sobre $\mathbf{Q}_q$ existe un isomorfismo natural de módulos sobre $\mathbf{Q}_q$*

$$H^i(\Omega^{*,q}(X), M) \xrightarrow{\cong} H^i(X; M)$$

para todo $i \geq 0$. El isomorfismo es inducido por integración.

Sea $f : M_1 \to M_2$ un morfismo de módulos sobre $\mathbf{Q}_q$. Entonces para cada $p \geq 0$, f induce dos morfismos de módulos sobre $\mathbf{Q}_q$ $f^* : H^i(\Omega^{p,q}(X), M_1) \to H^i(\Omega^{p,q}(X), M_2)$ y $f^* : H^i(X; M_1) \to H^i(X; M_2)$. La palabra "natural" en el teorema anterior significa que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^i(\Omega^{p,q}(X), M_1) & \xrightarrow{I} & H^i(X; M_2) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ H^i(\Omega^{p,q}(X), M_1) & \xrightarrow{I} & H^i(X; M_2) \end{array}$$

conmuta para todo $p \geq 0$, $i \geq 0$.

Como mencionamos anteriormente, se pueden utilizar la técnica de Cartan para demostrar la existencia de un isomorfismo $H^i(\Omega^*(X)) \xrightarrow{\cong} H^i(X; \Lambda)$, para un anillo conmutativo Λ con elemento neutro. Dos demostraciones ligeramente distintas de este hecho se encuentran en [7] y [8]. El teorema no conmutativo de De Rham demostrado por Cenkl es una generalización del resultado que Karoubi presentó en [20]. En ese mismo *paper* Karoubi presentó como problema la versión del teorema de De Rham como lo hemos presentado aquí.

8 Ejemplo

Concluimos este artículo con el examen de un ejemplo concreto para ilustrar el papel del teorema de De Rham y para apreciar mejor la diferencia entre las técnicas en Geometría no Conmutativa y su contraparte clásica. Otros ejemplos similares se encuentran en [30].

Ejemplo 8.1 Consideremos el complejo $\Omega^{*,3}(S^1)$ de formas no conmutativas moderadas de peso ≤ 3 sobre la circunferencia S^1. En este caso el anillo sobre el cual se consideran las álgebras es $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$. Resulta fácil (aunque un poco largo) verificar que $H^0(\Omega^{*,3}(S^1)) \cong H^0(S^1, \mathbf{Q}_3) \cong \mathbf{Q}_3$ y que $H^1(\Omega^{*,3}(S^1)) \cong H^1(S^1, \mathbf{Q}_3) \cong \mathbf{Q}_3$

Consideremos la triangulación de S^1 con 0-simplices v_0, v_1 y v_2, y 1-simplices e_0, e_1 y e_2 orientados en sentido antihorario. Podemos considerar cada 1-simplice e_i como la imagen bajo una función continua e inyectiva $\psi_i : \Delta_1 \to S^1$. Sea $\phi_i = \psi^{-1} : e_i \to \Delta_1$, $i = 0, 1, 2$ (recordemos que el 1-simplice Δ_1 es considerado como la unión de las dos caras posteriores del 2-cubo I^2 en $\mathbf{R}^2$, como en el Ejemplo 2.4.

Ahora supongamos que $\omega \in \Omega^{2,3}(S^1)$, es una función simplicial tal que $\omega(e_i) = \omega_i \in \Omega^{2,3}(\Delta_1) = \Omega_1^{2,3}(\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Q}_3$, con

$$\begin{aligned}
\omega_0(x_0, x_1) &= a_0\, dx_0^2 + a_1\, dx_1^2 + a_2 x_0\, dx_0^2 + a_3 x_1\, dx_1^2 + a_2'\, dx_0^2\, x_0 + a_3'\, dx_1^2\, x_1 \\
\omega_1(y_0, y_1) &= b_0\, dy_0^2 + b_1\, dy_1^2 + b_2 y_0\, dy_0^2 + b_3 y_1\, dy_1^2 + b_2'\, dy_0^2\, y_0 + b_3'\, dy_1^2\, y_1 \\
\omega_3(z_0, z_1) &= c_0\, dz_0^2 + c_1\, dz_1^2 + c_2 z_0\, dz_0^2 + c_3 z_1\, dz_1^2 + c_2'\, dz_0^2\, z_0 + c_3'\, dz_1^2\, z_1.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\omega_0(x_0, x_1) &= a_2\, dx_0^3 + a_3\, dx_1^3 + a_2'\, dx_0^3 + a_3'\, dx_1^3 \\
\omega_1(y_0, y_1) &= b_2\, dy_0^3 + b_3\, dy_1^3 + b_2'\, dy_0^3 + b_3'\, dy_1^3 \\
\omega_3(z_0, z_1) &= c_2\, dz_0^3 + c_3\, dz_1^3 + c_2'\, dz_0^3 + c_3'\, dz_1^3.
\end{aligned}$$

Por lo tanto si $d\omega = 0$ tenemos $a_i = -a_i'$, $b_i = -b_i'$ y $c_i = -c_i'$, para $i = 1, 2$. Luego $\dim \ker(d : \Omega^{2,3}(\Delta_1) \to \Omega^{3,3}(\Delta_1)) = 12$. Similarmente se puede verificar que $\dim \operatorname{im}(\mathrm{d} : \Omega^{1,3}(\Delta_1) \to \Omega^{2,3}(\Delta_1)) = 12$, de donde $H^2(\Omega^{*,3}(S^1)) = 0 = H^2(S^1, \mathbf{Q}_3)$.

Ahora supongamos que $\eta \in \Omega^{3,3}(S^1)$, es una función simplicial tal que $\eta(e_i) = \eta_i \in \Omega^{3,3}(\Delta_1) = \Omega_1^{3,3}(\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Q}_3$, con

$$\begin{aligned}
\eta_0(x_0, x_1) &= a_0\, dx_0^3 + a_1\, dx_1^3 \\
\eta_1(y_0, y_1) &= b_0\, dy_0^3 + b_1\, dy_1^3 \\
\eta_3(z_0, z_1) &= c_0\, dz_0^3 + c_1\, dz_1^3.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\eta = d\zeta$, donde $\zeta \in \Omega^{2,3}(\Delta_1)$ es del tipo

$$\begin{aligned}
\zeta_0(x_0, x_1) &= \tfrac{a_0}{3} x_0\, dx_0^2 + \tfrac{a_0}{3}\, dx_0\, x_0\, dx_0 + \tfrac{a_0}{3} dx_0^2\, x_0 \\
&\quad + \tfrac{a_1}{3} x_1\, dx_1^2 + \tfrac{a_1}{3}\, dx_1\, x_1\, dx_1 + \tfrac{a_1}{3} dx_1^2\, x_1 \\
\zeta_1(y_0, y_1) &= \tfrac{b_0}{3} y_0\, dy_0^2 + \tfrac{b_0}{3}\, dy_0\, y_0\, dy_0 + \tfrac{b_0}{3} dy_0^2\, y_0 \\
&\quad + \tfrac{b_1}{3} y_1\, dy_1^2 + \tfrac{b_1}{3}\, dy_1\, y_1\, dy_1 + \tfrac{b_1}{3} dy_1^2\, y_1 \\
\zeta_3(z_0, z_1) &= \tfrac{c_0}{3} z_0\, dz_0^2 + \tfrac{c_0}{3}\, dz_0\, z_0\, dz_0 + \tfrac{c_0}{3} dz_0^2\, z_0 \\
&\quad + \tfrac{c_1}{3} z_1\, dz_1^2 + \tfrac{c_1}{3}\, dz_1\, z_1\, dz_1 + \tfrac{c_1}{3} dz_1^2\, z_1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $H^3(\Omega^{*,3}(S^1)) = 0 = H^3(S^1, \mathbf{Q}_3)$ (note que 3 es invertible en $\mathbf{Q}_3$).

Finalmente, notemos que $H^i(\Omega^{*,3}(S^1)) = 0 = H^i(S^1, \mathbf{Q}_3)$ es trivial para todo $i > 3$, pues si $\theta \in \Omega^{4,3}(S^1)$, entonces $\theta = 0$.

Notas

Concluimos este artículo con algunos comentarios que pueden servir de guía al lector interesado en más detalles sobre el tema.

Primeramente, una descripción interesante de la evolución del teorema clásico de De Rham y su importancia en el desarrollo de la Topología, así como del desarrollo histórico mismo de esta disciplina matemática durante la primera mitad del siglo XX, se encuentra en el excelente libro de Dieudonné [15]. Un estudio detallado del teorema de De Rham en el contexto moderno se encuentra casi en cualquier libro básico de Geometría Diferencial o de Topología Diferencial, así que los clásicos de Spivak [37] y Warner [39] son suficientes. Por supuesto, un libro que resulta de gran valor es el original de De Rham [34] (dicho sea de paso, existe una versión en inglés por Springer-Verlag, 1984).

Para un estudio de teoría de cohomología los libros de Cartan y Eilenberg [6], Mac Lane [27] y Spanier [36] son fuertemente recomendados. Para la lectura de estos tres libros conviene tener al alcance algún libro sobre teoría de categorías, como por ejemplo el de Mac Lane [26]. allí encontrará el lector algún material sobre objetos simpliciales, pero si se necesita algo más especializado el libro de May [29] será de gran ayuda.

El teorema de De Rham demostradó por H. Cartan fue publicado en la *Nota* [5] (con mayores detalles se encuentra desarrollado en las notas de curso de Cenkl [7]). La primera versión del teorema no conmutativo de De Rham desarrollada por Karoubi apareció en [21]. Para algunas de sus aplicaciones puede consultarse los trabajos de dos de sus discípulos: la tesis de Battikh [3] y la *Nota* de Mouet [32].

El desarrollo de la Geometría no conmutativa es, principalmente, obra de Connes, quien presenta sus ideas originales en el clásico [12] y que posteriormente amplió en [13]. Algunos intentos notables se han realizado para presentar el tema (o algunas de sus partes) en forma más "simplificada," en particular se encuentran los trabajos de Gracia-Bonda, Várilly y Figueroa [17], Kassel [22] y Madore [28]. Para algunas aplicaciones resultan muy interesantes los artículos de Baez [1] y [2] y, por supuesto, el de Connes [14].

El estudio de formas originales cúbicas con aplicaciones del teorema moderado de De Rham se encuentran en los trabajos de Cenkl y Porter [10,11]. El estudio de las propiedades del denominado complejo de Cenkl y Porter fue publicado como notas de un seminario desarrollado por Scheerer, Schuch y Vogt en [35]. En ese mismo trabajo se introduce el complejo de corrientes moderadas de De Rham (duales algebraicos de las formas moderadas) y se demuestra un teorema de De Rham para homología. Siguiendo esa idea, Mejías en [30] construye una versión no conmutativa del complejo de corrientes moderadas de De Rham y demuestra el correspondiente teorema para homología después de haber aplicado técnicas similares a las de Cenkl y Porter para la exploración del complejo de De Rham de formas diferenciales no conmutativas moderadas, tal como se presentan en este artículo.

Referencias

[1] N. Baez, R-commutative Geometry and Quantization of Poisson Algebras, *Adv. Math.* **95** (1992), 61-91.

[2] N. Baez, Differential Calculi on Quantum Vector Spaces with Hecke-Type Relations, *Lett. Math. Phys.* **23** (1991), 133-141.

[3] N. Battikh, *Cup i-Product sur les Formes Differérentielles non Commutatives et Excision en K-Théorie,* (Disertación Doctoral) Universidad de Paris VII, Paris, 1997.

[4] P. Boullay, F. Kiefer, M. Majewski, M. Stelzer, H. Scheerer, M. Unsöld y E. Vogt, *Tame Homotopy Theory via Differential Forms,* Freie Universität Berlin, Preprint No. 223. Berlin, 1986.

[5] H. Cartan, Théories Cohomologiques, *Invent. Math.* **35** (1976) 261-271.

[6] H. Cartan y S. Eilenberg, *Homological Algebra,* Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1999.

[7] B. Cenkl, *Noncommutative Geometry,* Course Notes, Northeastern University, Boston, 1998.

[8] B. Cenkl, Noncommutative Differential Forms and Cohomology Operations, *(preprint).*

[9] B. Cenkl, G. Hector y M. Saralegi, Cohomologie d'Intersection Moderee. Un Theoreme de de Rham, *Pacific J. Math.* **169** (1976), 235-289.

[10] B. Cenkl y R. Porter, De Rham Theorem with Cubical Forms, *Pacific J. Math.* **112** (1984), 35-48.

[11] B. Cenkl y R. Porter, Differential Forms and Torsion in the Fundamental Group, *Adv. Math.* **48** (1983), 189-204.

[12] A. Connes, Noncommutative Differential Geometry, *Publ. Math. IHES* **62** (1985), 257-360.

[13] A. Connes, *Noncommutative Geometry,* Academic Press, San Diego, CA, 1994.

[14] A. Connes, Noncommutative Geometry and Reality, *J. Math. Phys.* **36** (1995), 6194-6231.

[15] J. A. Dieudonné, *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960,* Birkhäuser, Boston, 1989.

[16] P. Goerss, Simplicial Chains over a Field and p-local Homotopy Theory, *(preprint).*

[17] J. M. Gracia-Bonda, J. C. Várilly y H. Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry,* Birkhäuser, Boston, 2001.

[18] P. Griffths y J. Morgan, *Rational Homotopy Theory and Differential Forms,* Birkhäuser, Boston, 1981.

[19] M. Karoubi, Algebres Tressees et q-Cohomologie, *(preprint).*

[20] M. Karoubi, Formes Différentielles non Commutatives et Cohomologie a Coefficients Arbitraires, *Trans. Amer. Math. Soc.* **374** (1995), 4277-4299.

[21] M. Karoubi, Homologie Cyclique et K-Théorie, *Astérisque* **149** (1987), 1-147.

[22] C. Kasel, *Quantum Groups,* Springer-Verlag, Nueva York, 1995.

[23] I. Kris, p-adic Homotopy Theory, *Topology and its Applications* **52** (1993), 279-308.

[24] S. Lang, *Algebra,* (tercera edición), Addison-Wesley, Reading, MA, 1993.

[25] D. Lehmann, Théorie Homotopique des Formes Différentielles, *Astérisque* **45** (1987).

[26] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician* (segunda edición), Springer-Verlag, Nueva York, 1998.

[27] S. Mac Lane, *Homology,* Springer-Verlag, Nueva York, 1976.

[28] J. Madore, *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications,* (segunda edición), London Mathematical Society Lecture Note Series 206, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[29] J. P. May, *Simplicial Objects in Algebraic Topology,* Chicago Lectures in Mathematics, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1967.

[30] F. Mejías, The Noncommutative Tame De Rham Theorem, *International J. Math. Sci.* **30** (2002), 667-696.

[31] R. Miller, De Rham Cohomology with Arbitrary Coefficients, *Topology* **174** (1978), 193-203.

[32] C. Mouet, q-Cohomologie non Commutative, *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I* (1996), 849-851.

[33] B. Ndombol y M. El haouari, Algèbres Quasi-commutatives at Carrés de Steenrod, *Pub. Irma* **39** (1996), 1-26.

[34] G. de Rham. *Variétés Différentiables: Forms, Courants, Formes Harmoniques,* Herman, Paris, 1960.

[35] H. Scheerer, K. Schuch y E. Vogt, *Tame Homotopy Theory via de Rham Currents,* Freie Universität Berlin, Preprint No. A91-20, Berlin, 1991.

[36] M. Spanier, *Algebraic Topology,* Springer-Verlag, Nueva York, 1966.

[37] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* (volúmenes I-V, tercera edición), Publish or Perish, Houston, 1999.

[38] D. Sullivan, Infinitesimal Computations in Topology, *Publ. Math. IHES* **47** (1977), 269-331.

[39] F. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups,* Springer-Verlag, Nueva York, 1983.

[40] H. Whitney, *Geometric Integration Theory,* Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1957.

Fernando Mejías,
Universidad de Los Andes,
Núcleo Universitario "Rafael Rangel", Trujillo.
fmejias@ula.ve